

© 2021 г. Ю.В. СИДЕЛЬНИКОВ, д-р техн. наук (sidelnikovy@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

РАСШИРЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СРЕДНИХ И ТЕОРИИ ОШИБОК

Предлагается расширить возможности метрического подхода для решения специальных задач, например в теории расписаний ослаблением требований к аксиомам метрики или введением вероятностных мер близости. Рассматриваются результаты автора на стыке теории средних и такой области исследования, как показатели экспертных ошибок, которые аксиоматически заданы. Усилен результат, полученный акад. А.Н. Колмогоровым при рассмотрении им системы аксиом для вывода аналитической формулы ассоциативной средней.

Ключевые слова: требования к аксиомам метрики, показатели экспертных оценок, теорема Колмогорова и ее усиление.

DOI: 10.31857/S0005231021110076

1. Введение

Метрики достаточно широко используются в фундаментальных и прикладных исследованиях. Например, в теории расписаний, которая является фундаментальной областью дискретной оптимизации [1].

Обзоры, в рамках которых рассматриваются всевозможные меры близости, публиковались достаточно давно. Например, обзор мер близости в пространстве множеств был опубликован Г.В. Раушенбахом в 1982 г. [2]. В настоящее время появляются исследования, где рассматриваются принципиально новые меры близости (сходства), например вероятностные меры близости, которые рассмотрены Д.З. Уздиным в монографии [3]. Полагаем, что метрический подход для решения разнообразных задач может получить новый импульс при использовании не только мер близости, но и функций, которые играют роль метрики, однако метриками в классическом понимании не являются, так как их аксиомы “ослаблены”, а также не дискретных, а вероятностных мер близости. Такие публикации имеются, но их существенно меньше.

В статье автор рассматривает меру близости как однозначную, неотрицательную действительную функцию $\rho(x, y)$, определенную для любых x и y на X и удовлетворяющую трем стандартным условиям (аксиомам) [4, с. 48].

Цель статьи — рассмотреть варианты перспективных направлений в фундаментальных и прикладных исследованиях, связанные с использованием ве-

роятностного подхода для мер близости и ослаблением требований к аксиоматике метрик, и получить в их рамках новые результаты.

2. Возможные варианты перспективных направлений

Среди первых трех, по числу аксиом меры близости, вариантов перспективных направлений рассмотрим лишь те, которые связаны с ослаблением требований к аксиоматике метрики. Причем если первое и второе лишь обозначим, то в третьем направлении попытаемся не только его предложить, но и получить в его рамках новые результаты.

В качестве первого направления предложим использовать для анализа информации не только метрики, но и псевдометрики¹. В этом случае ослабляется первая аксиома метрики (рефлексивность) таким образом, что не требуется выполнение условия: чтобы из $E(x, y) = 0$ следовало бы $x = y$ [7, с. 740–741].

Исходим из определения псевдометрического пространства как множества X , наделенного псевдометрикой $E(x, y)$. При этом любым двум элементам $x, y \in X$ ставится в соответствие действительное число E такое, что:

первая аксиома: если $x = y$, то $E(x, y) = 0$,

вторая аксиома: неравенство треугольника. Когда для любой тройки $x, y, z \in X$

$$E(x, y) \leq E(x, z) + E(z, y).$$

Легко показать, что псевдометрика симметрична и положительно полуопределена, т.е. $E(x, y) \geq 0$ (см., например, [5, с. 31]).

В качестве второго направления предложим рассмотреть вариант ослабления аксиомы неравенства треугольника, как, например, в диссертации Г.В. Иофиной [6]. Эта диссертация направлена на поиск способов измерения расстояний на объектах, задаваемых наборами порядковых признаков. Г.В. Иофина полагает, что “иногда полезно рассматривать функции на значениях признаков, которые играют роль метрики, однако метриками в классическом понимании не являются”. Цель этой диссертации — поиск и использование оптимальных функций расстояний, удовлетворяющих всем аксиомам метрик или полуметрик кроме неравенства треугольника. Г.В. Иофина рассматривает задачу классификации с двумя классами K_1 и K_2 . При этом дано множество объектов $\{S^1, \dots, S^{m_1}\}$ из класса K_1 и $S^{m_1+1}, \dots, S^{m_1+m_2}$ из класса K_2 . Каждый объект принадлежит признаковому пространству размерности n . Значения признаков принадлежат конечному множеству $E^N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, на котором задано отношение порядка: $0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq N - 1$. На каждом признаке задана своя функция расстояния, которая удовлетворяет всем аксиомам метрики кроме неравенства тре-

¹ В более ранних публикациях на русском языке данное понятие именовалось как “квазирасстояние” [5, с. 31]. Встречаются публикации, где данное понятие называется полуметрикой [6].

угольника, т.е. функция $p(x, y) : E^N \times E^N \rightarrow E^M$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $p(x, y) = p(y, x)$.
3. Если $x \geq y$, то $p(x, z) \geq p(y, z)$ и $p(x, z) \geq p(x, y)$, для любых $z \in E^N$, $z \leq y$.

Таким образом, Г.В. Иофина использует условие, замещающее неравенство треугольника на более слабое — расстояние между дальними значениями не меньше, чем между ближними (условие порядка).

При этом требуется, чтобы выбранная мера близости была оптимальна для различных задач, главным образом для задач распознавания. Кроме того, Г.В. Иофина обоснованно полагает, что результат работы алгоритмов классификации и кластеризации сильно зависит от метрик, заданных на объектах. И, значит, особо важно выбрать правильную функцию близости в задачах кластеризации [8, 9].

Третье перспективное направление. В данном случае рассматривается вариант, когда допускается асимметричность метрики и при этом ослабляются тем или иным способом первая и (или) третья аксиомы метрики. В таком случае можно использовать асимметричные меры, например для числового случая показатель ошибки $E1(x, y) = |x - y|/|y|$. Обычно все такие меры называют показателями ошибки. Использование таких асимметричных мер возможно, когда на множестве можно задать тернарное отношение “между”, и полезно, когда нужно рассматривать качественно другие ситуации. Например, вы пришли за одну минуту до отхода поезда или опоздали на ту же минуту. Надо ли учитывать асимметричность меры в таких ситуациях? Несомненно, и далее это будет показано.

Четвертое перспективное направление — введение и использование вероятностных и вероятностно-метрических мер близости и их эффективный подбор.

3. Обзор существующих современных публикаций по данной тематике

Рассмотрим сначала публикации, в рамках которых используются асимметричные меры близости. Таких работ по сравнению с исследованиями с использованием обычных метрик гораздо меньше.

Приведем ряд примеров с использованием асимметричных мер. Необходимость учета асимметричности меры возникает, например, при формализации понятия степени приближения к истине отдельных фрагментов научного знания — теорий, гипотез, научных утверждений и т.п. в рамках решения проблемы правдоподобности научного знания (логической теории правдоподобности). Пример, иллюстрирующий сложности этой задачи, рассмотрен в монографии основателя этой теории Карла Поппера, которая базируется на основе аппарата формальной логики. В качестве пояснения К. Поппер рассмотрел ситуацию с опозданием на поезд, а для учета степени приближения

(меру правдоподобности) к истине использовал показатель ошибки $E(x, y) = |x - y|$, задавая затем риторический вопрос: “Отклонения от истинного времени в обоих случаях равны, но равная ли мера правдоподобности должна быть приписана этим утверждениям? На основе только одной интуиции решить этот вопрос нельзя, и, во всяком случае, во многих практических ситуациях (например, отправление поезда) ошибка одного существенно менее значима, чем ошибка другого” [10].

Следующий пример употребления асимметричных мер можно обнаружить в исследованиях по кластерному анализу, который используется в различных научных и прикладных областях и также является актуальной темой исследований. Так, в публикации А.Р. Айдиняна и О.Л. Цветковой предложены алгоритмы, предназначенные для кластеризации объектов, которые описываются векторами признаков в пространстве с несоблюдением аксиомы симметрии [11]. “Суть первого из предложенных алгоритмов кластеризации заключается в последовательном формировании кластеров с одновременным перенесением кластеризованных объектов из ранее созданных кластеров в текущий кластер в случае, если это уменьшит критерий качества. По сравнению с существующими алгоритмами неиерархической кластеризации такой подход к формированию кластеров позволяет уменьшить вычислительные затраты” [11].

По мнению исследователей из ИПУ РАН, “недостатком большинства мер, основанных на онтологических структурах, является симметричность (экспертные оценки показывают, что мера близости не всегда симметрична). Кроме того, эти меры независимы от контекста и чувствительны к структуре иерархии” [12].

Среди англоязычных публикаций можно отметить следующие.

В [13] “предлагается асимметричная мера семантической близости. В зависимости от направления прохождения ребрам придается разный вес, так как потомок более подобен родителю, чем родитель — потомку”.

В [14] представлена концепция асимметричной модели сходства и взвешенного вектора частот слов или термов (HFV) и сконструированы две новые асимметричные меры: HFМ и НИРМ. В статье [14] показано, что симметричные меры сходства не всегда могут эффективно работать в рамках общей проблемы измерения сходства текстов. Будь то информационный поиск, интеллектуальный анализ текстов, извлечение веб-контента, классификация и кластеризация текстов в коллекции и обнаружении копии документов в смысле плагиата и т.д. Такого рода направления исследования требуют методов, способных обрабатывать неструктурированную информацию, поэтому самым популярным подходом является схема, основанная на частоте повторений того или иного элемента, в случае текстов, слов или сочетаний символов. Для документов эта схема использует вектор частот слов из словаря, построенного на всех изучаемых документах, тем самым обеспечивается единая размерность. А стандартными векторными мерами сходства являются функция косинуса, скалярное произведение и функция пропорций. Но все они симметричны.

Представляют интерес и другие англоязычные исследования, см. например, [15–17].

Обзор исследований с использованием асимметричной меры близости показал, что хотя такие работы и существуют, но и в них не учитывается ряд трудностей их использования. Рассмотрим их в разделе 4.

4. Трудности использования асимметричных мер близости

Первая трудность. Автор статьи не может использовать вышеуказанное определение псевдометрического пространства, так как из него вытекает именно симметричность меры. Таким образом, необходимо либо:

I. Ослаблять первую аксиому и (или) аксиому “неравенство треугольника”;

II. Использовать нижеследующие аксиоматики для показателей ошибки.

Пусть X^N — множество упорядоченных наборов вещественных чисел. Введем отношение частичного порядка \geq на X^N :

$$x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i,$$

где

$$x, y \in X^N, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_N), \quad i = 1, \dots, N.$$

“Определение 3.1 [18, с. 170]. Показателем ошибки E называется действительная функция $E = E(x, y)$, определенная на декартовом квадрате $X^N \times X^N$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $E(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $E(x, y) \geq 0$;

3. Для каждого фиксированного $x \in X^N$ функция $E_x(y) = E(x, y)$ строго монотонно убывает на луче $\{y \in X^N : y < x\}$ и монотонно возрастает на луче $\{y \in X^N : y > x\}$;

4. Для каждого фиксированного $y \in X^N$ функция $E_y(x) = E(x, y)$ строго монотонно убывает на луче $\{x \in X^N : x < y\}$ и строго монотонно возрастает на луче $\{x \in X^N : x > y\}$ ” [18, с. 170].

Либо “пусть Y — линейно упорядоченное отношением \leq множество, наделенное порядковой топологией, а X — связное подмножество Y .”

Определение 3.4 [18, с. 173]. Показателем ошибки E называется любая действительная функция $E(x, y)$, определенная на декартовом произведении $X \times Y$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $E(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2. $E(x, y) \geq 0$;

3. Для любого фиксированного $x \in X$ функция $E_x(y)$ строго монотонно убывает на луче $\{y \in Y : y < x\}$ и монотонно возрастает на луче $\{y \in Y : y > x\}$;

4. Для каждого фиксированного $y \in Y$ функция $E_y(x)$ строго монотонно убывает на луче $\{x \in X : x < y\}$ и строго монотонно возрастает на луче $\{x \in X : x > y\}$;

5. Функция $E(x, y)$ непрерывна по y .” [18, с. 173].

Заметим, что второе определение показателя ошибки отличается от первого не только областью определения, но и наличием пятого условия, которое позволяет рассмотреть новый необходимый и достаточный критерий.

Вторая трудность. Необходимо учитывать, что вывод при сопоставительном анализе, полученный на основе используемой асимметричной меры (показатель ошибки), может зависеть от вида, точнее от класса эквивалентности использованной меры. Возможно, первый, кто обратил на это внимание, был Г. Галилей. В его письме к Ноццолино, приведенном в монографии К. Джини, рассмотрен следующий условный пример [19]: “Пусть перед покупкой лошака один знаток оценил скотину в 10 скудо (денежная единица того времени в Италии), второй — в 1 тыс. скудо, а хозяин продал лошака за 100 скудо. Спрашивается, какая из оценок точнее? Ноццолино утверждал, что второй знаток допустил большую ошибку, потому что его оценка отличается от фактической на 900 скудо, тогда как оценка первого — лишь на 90. На что Галилей возразил, что превышение в оценке второго эксперта равняется приуменьшению в оценке первого, и, значит, ошибки одинаковы.”

Таким образом, перед отбором меры необходимо обосновать, какую меру выбрать, а точнее, какой класс эквивалентности таких мер исследователю подходит. Приведем поясняющий пример. Пусть необходимо выяснить, подойдет ли для верификации прогноза прироста ВВП РФ на 2021 г. следующая мера (показатель ошибки) $E(x, y) = |\ln \frac{x}{y}|$, где $x, y \in R$, x — экспертная оценка, y — истинное значение. Первый эксперт дал прогнозную оценку $X1 = 1\%$ ожидаемого прироста, второй эксперт дал оценку $X2 = 25\%$ ожидаемого прироста ВВП по сравнению с 2020 г. Подводя итог 2021 г., экономисты получили оценку прироста ВВП по сравнению с 2020 г. пять процентов ($Y = 5\%$). Если воспользуемся логарифмическим показателем ошибки, то получим, что ошибки двух прогнозов одинаковы. ($|\ln 1/5| = |\ln 25/5|$). По мнению автора, такой показатель для верификации прогноза прироста ВВП РФ на 2021 г. не подходит. И в следующий раз не нужно приглашать для оценивания второго эксперта. Значит, для каждой ситуации надо находить подходящий показатель ошибки. Такой пример является подсказкой для нахождения процедуры подбора вида показателя ошибки, точнее класса эквивалентности показателей ошибки.

Именно с этим и связана третья трудность: построение тех или иных вариантов процедуры подбора вида показателя ошибки. В монографии автора предложен один из вариантов процедуры подбора класса эквивалентности видов показателей ошибки на основе экспертных заключений [18, с. 189]. Поясним последнее утверждение. Классы эквивалентности показателей ошибки вполне естественно вводятся в рамках:

- любых двух различных аксиоматических заданий показателей ошибки: определение 3.1. [18, с. 170] и определение 3.4. [18, с. 173];

• отношения знаковой эквивалентности (\sim). См. определение 3.3. [18, с. 171];

• утверждения 3.1. “Отношение знаковой эквивалентности (\sim) есть отношение эквивалентности” [18, с. 171].

В рамках рассмотренной и вновь создаваемых аналогичных экспертных процедур возникает необходимость усреднения экспертных оценок. Возникают следующие задачи:

1. Вид используемой средней величины необходимо обосновывать;

2. Кроме того, необходимо уметь рассчитывать найденный вид средних. Но для этого необходимо, чтобы средние были заданы не аксиоматически, а в аналитическом виде.

Поясним последнюю задачу. Если основой для отбора вида средней является следующая аксиома: “можно заменить некоторую группу значений их собственным средним, не меняя общего среднего”, то нужно обратить внимание на результат акад. А.Н. Колмогорова [20, 21], который показал, что каждый тип среднего M^* , если он удовлетворяет четырем условиям:

I. $M^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – непрерывна и монотонна по каждому переменному (для определенности будем считать, что M^* – возрастает по каждому переменному);

II. $M^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрическая функция;

III. Среднее от одинаковых чисел равно их общему значению:

$$M^*(x, x, \dots, x) = x;$$

IV. Можно заменить некоторую группу значений их собственным средним, не меняя общего среднего:

$$M^*(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = M_{n+m}^*(x, x, \dots, x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

где $x = M^*(x_1, x_2, \dots, x_m)$ необходимо имеет вид:

$$M^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = F^{-1}(F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_n))/n),$$

где F – непрерывная строго монотонная функция, $(x_i \in [a, b] \subset R)$.

Таким образом, имеем возможность рассчитывать значения такой средней на основе аналитической формулы. Но в рассматриваемом случае, а автор включает и асимметричные меры, вторая аксиома это запрещает. Таким образом, необходимо получить более общую формулу для любой ассоциативной средней, но без второй аксиомы.

В исследовании де Финетти показано, что любая ассоциативная средняя является монотонной [22], таким образом, ему удалось усилить результат акад. А.Н. Колмогорова.

Задача автора настоящей статьи состояла в ослаблении требования симметричности.

В случае если находим среднюю величину для множества, без учета его формирования, условие симметричности является вполне естественным, но

уже для множества, которое формируется из последовательности, — по-видимому, нет. Для подтверждения этого заключения рассмотрим такой широко распространенный способ формирования экспертных групп, как метод снежного кома [18, с. 159]. В этом случае вполне уместно полагать, что эксперт, называя другого эксперта, вряд ли назовет того, у которого уровень знаний по задаваемому вопросу будет ниже, чем у него самого. Таким образом, вполне уместно назначать большую весомость числовой оценки последующего эксперта.

Общая постановка задачи: предложить аналитическое выражение для любой ассоциативной средней, но без условия симметричности, частным случаем которой была бы формула Колмогорова.

Теорема². Для любой строго монотонной и непрерывной действительной функции $F : R^0 \rightarrow R$ следующее выражение является формулой для непрерывной ассоциативной средней:

$$M^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = F^{-1} \left\{ \sum_1^n q_i F(x_i) \right\},$$

где $x_i \in R^0$ — произвольному ограниченному интервалу действительных чисел, $\sum_1^n q_i = 1$, $q_i \geq 0$, $q_i \in R$.

5. Направления будущих исследований в сфере расширения возможностей метрического подхода

Предлагается рассмотреть следующий вариант расширения метрического подхода. Необходимо обратить внимание, что во всех вышеуказанных случаях областью значения мер близости или функций, которые играют роль метрики, является положительно определенное подмножество действительных чисел.

По нашему мнению, желательно расширять трактовку и этого элемента в аксиоматике меры близости. Для этого рассмотрим объекты, на множестве которых полезно ввести аналоги мер близости и соответствующее понятие “близость”. Среди них, например, такие объекты, как меры близости.

Поясним полезность введения мер близости на мерах близости.

Именно для них могут быть полезны различные варианты изменения области значения мер близости или функций, которые играют роль метрики.

Предварительно необходимо отметить, что в рамках различных исследований их авторы иногда ставят вопрос относительно наиболее подходящих мер близости на множествах различной природы. Например, Г.В. Иофина в диссертации требует, чтобы выбранная мера близости была оптимальна для различных задач, главным образом для задач распознавания [6].

В монографиях Н.Г. Загоруйко и В.Д. Мазурова говорится о выборе правильной функции близости в задачах кластеризации [8, 9].

² Данная теорема была впервые доказана в диссертации Ю.В. Сидельникова и анонсирована в его автореферате [23].

Поиск наиболее подходящих мер близости обусловлен различиями реальных и виртуальных объектов, в математических моделях которых используются эти меры близости. Но можно и нужно пойти дальше.

Итак, в дальнейшем исследовании будем исходить из следующего Постулата № 1. В рамках одного и того же реального или виртуального объекта можно, а в ряде случаев необходимо, использовать различные меры близости или их расширения как инструмент их анализа.

При этом будем исходить из того, что эти объекты могут иметь неоднородную структуру и требовать для своего изучения различные меры в различных частях этих же объектов.

Приведем поясняющий пример. Для этого рассмотрим множества, которые обладают одинаковыми свойствами во всех направлениях — изотропные и анизотропные, т.е. обладающие различными свойствами в разных направлениях.

Рассмотрим анизотропные множества, которые содержат N не пустых изотропных подмножеств. При этом эти множества могут быть отображением как реальных, так и виртуальных объектов.

Постулат № 2. Полагаем, что для исследования не только изотропных, но и анизотропных непустых множеств необходимо на этих множествах ввести понятия направления.

Это возможно, например, введя линейный или частичный порядок на множестве элементов этих множеств, а для дальнейших исследований ввести и меру близости или ее различные расширения на элементах этих множеств.

Но, рассматривая различные меры близости на одном и том же объекте, необходимо исследовать, как преобразуются эти меры при переходе из одного изотропного множества в другое в рамках одного и того же объекта. Таким образом, желательно ввести аналог меры близости на мерах близости — “супермеру близости”.

Введем понятие супермеры близости (P) на множестве мер близости $E(x, y)$, и исследуем возможности метрической конструкции — $P\{E1(x, y), E2(x, y)\}$, $x, y \in X$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Полагаем, что на множестве мер близости $E(x, y)$ можно ввести как линейный, так и частичный порядок.

Кроме того, для этого отображения необходимо рассмотреть области определения и значения однозначного отображения $P(E(x, y))$, а также ее закон соответствия. А также нужно ввести понятия “различия” и “совпадения” значения супермеры на множестве мер близости.

Полагаем, что область определения отображения $P(E(x, y))$ есть все возможные меры близости или их расширения, например псевдометрика.

На области определения (множество мер близости) можно ввести отношение линейного или частичного порядка, а также ввести тернарное отношение “между”.

Это возможно, например, на основе следующего утверждения 3.16: “Пусть Y — линейно упорядоченное отношением \leq множество, наделенное порядко-

вой топологией³, а X — связное подмножество Y , Φ — непрерывная строго монотонно возрастающая действительная функция. Тогда функция

$$E(x, y) = \begin{cases} K1[\Phi(x) - \Phi(y)], & \text{если } x > y, \\ K2[\Phi(y) - \Phi(x)], & \text{если } y \geq x, \end{cases}$$

является показателем ошибки, где $x \in X$; $y \in Y$; $K1, K2 \in R+$; $K1 \neq K2$ ” [18, с. 188].

Так как $K1$ и $K2$ являются различными действительными числами, то при фиксированной функции Φ они определяют различные меры близости. А отношение линейного порядка на действительной прямой индуцирует линейный порядок на множестве мер близости, заданных в утверждении 3.16.

Полагаем, что понятие “совпадения” между мерами близости на множестве мер близости можно ввести, например, через отношение “тождества” между функциями $E(x, y)$.

Необходимо обратить внимание, что область значений супермеры является множеством преобразований одной меры в другую. В случае дискретного и конечного множества преобразований характеристику этого множества можно задать минимальным количеством преобразований, необходимых для перехода одной меры в другую, и таким образом получить положительное число.

Пояснить понятие “преобразование” одной из мер в другую можно следующим образом. Пусть, например, имеем два показателя ошибок

$$E(x, y) = |x - y| \quad \text{и} \quad E^*(x, y) = |\ln_n x - \ln_n y|.$$

Рассмотрим, как преобразуется одна из мер близости, выраженной функцией $E(x, y)$, в другую функцию $E^*(x, y)$.

Полагаем, что “переход” одной функции в другую в этом конкретном случае возможен через преобразование $\ln_n x$ в x . График функции $z = \ln_n x$, при $x \geq 1$ приближается к графику функции $z = x$ при стремлении основания логарифма к бесконечности.

Мера различия между мерами близости на множестве мер близости может выражаться и в порядковой шкале, например в баллах. Приведем поясняющий пример такого различия. Рассмотрим двух разных токарей, но их различие будет только в их разрядах. Один из них будет токарем третьего разряда, а второй токарь — второго разряда.

Покажем полезность и необходимость такой конструкции. При этом будем исходить из Постулат № 3.

Само множество, где определены меры близости $E(x, y)$, может быть не только изотропным, т.е. обладать одинаковыми свойствами во всех направлениях, но и анизотропным, т.е. обладать различными свойствами в разных направлениях.

³ Порядковой топологией называется наименьшая система подмножеств множества Y , замкнутая относительно объединения и конечного пересечения и содержащая все открытые лучи [24].

Так, например, в реальном космическом пространстве вблизи массивных тел для расчетов используется метрика Минковского, а вдали от массивных тел можно использовать метрику Эвклида.

По нашему мнению, необходимо исследовать свойства такой метрической конструкции, где введена супермера близости P на множестве мер близости $E(x, y)$.

6. Заключение

В статье рассмотрены три варианта расширения метрического подхода для решения специальных задач, например в теории расписаний, связанные с ослаблением требований к аксиоматике метрики. Кроме того, предложено поддержать вариант расширения метрического подхода на основе вероятностных мер близости и вероятностно-метрических мер близости, рассмотренных Д.З. Уздиным в монографии [3].

Указано на перспективность выбора функций близости для разнообразных типов задач. Так, Г.В. Иофина в исследовании требует, чтобы выбранная мера близости была оптимальна для различных задач, главным образом для задач распознавания [6]. Н.Г. Загоруйко и В.Д. Мазуров пишут о выборе правильной функции близости в задачах кластеризации [8, 9]. Но как выбирать оптимальную или правильную меру близости? Этот вопрос пока не решен в полной мере. Хотя для асимметричных числовых мер близости удалось построить такую процедуру подбора вида показателя ошибки [18, с. 189].

Кратко описаны результаты Ю.В. Сидельникова, связывающие наиболее известные аналитические средние с характеристиками классов эквивалентности числовых показателей ошибки в рамках двух различных аксиоматических заданий показателей ошибки.

Усилен результат, полученный А.Н. Колмогоровым, при рассмотрении им системы аксиом для вывода аналитической формулы ассоциативной средней. В статье получена формула для ассоциативной средней, но уже без условия ее симметричности.

Предложено новое направление будущих исследований в сфере расширения возможностей метрического подхода, связанное с расширением метрического подхода. Введено понятие супермеры близости и рассмотрен случай, когда областью определения супермеры близости являются меры близости или функции, которые играют роль метрики. Показана полезность данной конструкции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы.

Во-первых, докажем, что $M^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является средним по Коши, т.е. $\min x_i \leq M^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max x_i$.

Действительно, пусть F — строго монотонно возрастающая функция, тогда

$$\sum_{i=1}^n q_i F(\min x_i) \leq \sum_{i=1}^n q_i F(x_i) \leq \sum_{i=1}^n q_i F(\max x_i),$$

$$F(\min x_i) \leq \sum_{i=1}^n q_i F(x_i) \leq F(\max x_i).$$

Аналогично можно показать и для F — строго монотонно убывающей функции.

Теперь докажем, что средняя, выраженная в виде $M^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = F^{-1} \left\{ \sum_1^n q_i F(x_i) \right\}$, является ассоциативной, т.е.

$$M^*(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = M_n^*(x, x, \dots, x, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

где $x = M_m^*(x_1, x_2, \dots, x_m)$ для любого $m < n$.

Формула для среднего при $m < n$, образуется следующим образом:

$$x = M_m^*(x_1, x_2, \dots, x_m) = F^{-1} \left\{ \sum_1^m \left(\frac{q_i}{\sum_1^m q_j} \right) F(x_i) \right\},$$

т.е. сохраняя прежние коэффициенты, заново нормируем их, чтобы сохранить условие

$$\sum_1^m q_i^* = \sum_1^m \left(\frac{q_i}{\sum_1^m q_j} \right) = 1$$

$$M_m^*(x, x, x_{m+1}, \dots, x_n) = F^{-1} \left\{ \sum_1^m q_i F(x) + \sum_{m+1}^n q_i F(x_i) \right\} =$$

$$= F^{-1} \left\{ \sum_1^m q_i F \left[F^{-1} \left(\sum_1^m \left(\frac{q_i}{\sum_1^m q_j} \right) F(x_i) \right) \right] + \sum_{m+1}^n q_i F(x_i) \right\} =$$

$$= F^{-1} \left\{ \sum_1^m q_i \left[\sum_1^m \left(\frac{q_i}{\sum_1^m q_j} \right) F(x_i) \right] + \sum_{m+1}^n q_i F(x_i) \right\} =$$

$$= F^{-1} \left\{ \sum_1^m q_i F(x_i) + \sum_{m+1}^n q_i F(x_i) \right\} = M^*(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lazarev A.A., Lemtyuzhnikova D.V., Werner F.* A Metric Approach for Scheduling Problems with Minimizing the Maximum Penalty // *Appl. Math. Modell.* Oxford, Great Britain, Elsevier. 2021. No. 89. P. 1163–1176.
2. *Раушенбах Г.В.* Меры близости в пространстве множеств / Алгоритмы анализа данных социально-экономических исследований ЭИ и ОПП СО АН СССР. Новосибирск: 1982. С. 29–44.
3. *Уздин Д.З.* Новые меры близости, функции состояний и решающие правила в теории распознавания состояний (статистической классификации). 2-е изд., доп. и испр. М.: МАКС Пресс, 2016.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
5. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика / Пер. с немецкого И.Г. Нидеккера, под ред. А.Д. Горбунова. М.: Изд-во Мир, 1964.
6. *Иофина Г.В.* Выбор оптимальных метрик в задачах распознавания с порядковыми признаками. Дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук: М.: 2010.
7. Математическая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия. Т. 4. Ок–Сло. 1984.
8. *Загоруйко Н.Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО РАН, 1999.
9. *Мазуров В.Д.* Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990.
10. *Popper K.R.* Conjectures and Refutations. The Growth of Scientific Knowledge. Ch. 10, section 3. London: Routledge and Kegan Paul; N.Y.: Basic Books Inc., 1963.
11. *Айдинян А.Р., Цветкова О.Л.* Алгоритмы кластерного анализа задач с асимметричной мерой близости // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2018. № 2. С. 127–138.
12. *Крюков К.В., Панкова Л.А., Пронина В.А., Шипилина Л.Б.* Меры семантической близости в онтологиях // *Проблемы управления.* 2010. № 5. С. 2–14.
13. *Bulskov H., Knappe R., Andreasen T.* On Measuring Similarity for Conceptual Querying / T. Andreasen, A. Motro, H. Christiansen, H.L. Larsen (Eds.). *Flexible Query Answering Systems. Lecture Notes in Artificial Intelligence.* Berlin: Springer, 2002. V. 2522. P. 100–111.
14. *Jun-Peng Bao, Jun-Yi Shen, Xiao-Dong Liu, Hai-Yan Liu.* Quick Asymmetric Text Similarity Measures // *Proc. Second Int. Conf. on Machine Learning and Cybernetics.* Wan, 2–5 November 2003. V. 1. P. 374–379.
15. *Hubert L.J.* Min and Max Hierarchical Clustering Using Asymmetric Similarity Measures // *Psychometrika.* 1973. No. 38. P. 63–72.
16. *Faith D.P.* Asymmetric Binary Similarity Measures // *Oecologia.* 1983. V. 57. No. 3. P. 287–290.
17. *Chen H.H., Giles C.L.* ASCOS++ An Asymmetric Similarity Measure for Weighted Networks to Address the Problem of SimRank // *ACM Trans. Knowledge Discovery from Data (TKDD).* 2015. V. 10. No. 2. P. 1–26.
18. *Сидельников Ю.В.* Системный анализ технологии экспертного прогнозирования. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2007.
19. *Джусини К.* Средние величины. М.: Статистика, 1970.
20. *Kolmogorov A.N.* Sur la Notion de Moyenne. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (6) 12 (1930). P. 388–391.

21. *Колмогоров А.Н.* Об определении среднего / Математика и механика. Избранн. тр. Отв. ред. С.М. Никольский, сост. В.М. Тихомиров. М.: Наука, 1985. Т. 1. С. 136–138.
22. *Finetti B. de.* Sul Concetto di Media // Giornale dell Istituto Ital. degli Attuari, 1931. Anno 11. No. 3. P. 365–396.
23. *Сидельников Ю.В.* Автореферат на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук “Технология экспертного прогнозирования”. 2002, ОКРОИ ИМЭМО РАН.
24. *Пфанцгелъ И.* Теория измерений. М.: Мир, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 10.02.2021

После доработки 23.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021