

© 2021 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com),  
Н.М. НОВОЖИЛКИН (nikitanovozhilkin261@outlook.com),  
Е.Ю. ПОРЦЕВА (katyhka2007@yandex.ru)  
(Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет))

## О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГАРАНТИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ<sup>1</sup>

Рассматривается решение задачи быстродействия для линейных нестационарных дискретных систем с выпуклыми ограничениями на управление. Предложен метод сведения общего случая задачи быстродействия к случаю линейных ограничений на управление при помощи алгоритмов полиэдральной аппроксимации. Сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности гарантирующего решения. Приведены примеры. На основе полученных методов решена задача наискорейшего демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности.

*Ключевые слова:* дискретная система управления, задача быстродействия, оптимальное позиционное управление, задача линейного программирования, множество управляемости, выпуклый многогранник, полиэдральная аппроксимация.

DOI: 10.31857/S0005231021120047

### 1. Введение

Задача быстродействия известна достаточно давно как задача оптимального управления с естественным функционалом качества — времени, затрачиваемого системой на достижение некоторого заданного терминального состояния [1–3]. При рассмотрении систем с непрерывным временем данная задача не обладает какими-либо существенными особенностями, выделяющими ее из общей проблематики теории оптимального управления. Решение, полученное на основе принципа максимума Понтрягина [1], гарантирует релейный характер управления для линейных систем.

В то же время системы с дискретным временем имеют ряд фундаментальных отличий от непрерывных систем при построении оптимального управления [4–6]. Тогда как в непрерывном случае оптимизационная задача является

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00128-а).

задачей вариационного исчисления, в дискретном времени она представляет собой задачу выпуклого программирования. Данный факт определяет принципиально иной набор средств для построения оптимальных процессов в дискретном случае. Но несмотря на то что посредством дискретного принципа максимума [6, 7] и метода динамического программирования [8] удается решить большую часть задач теории оптимального управления дискретными системами, для решения задачи быстродействия эти принцип и метод оказываются неприменимыми в силу нерегулярности экстремума почти для всех начальных состояний, неединственности оптимальной траектории и дискретного характера критерия качества управления – числа шагов, необходимого для достижения фиксированного терминального состояния из заданного начального [9, 10].

В связи с этим оказывается актуальным поиск альтернативных подходов для решения поставленной задачи. На данный момент продемонстрировал свою эффективность метод, базирующийся на использовании множеств 0-управляемости [11] – множеств тех начальных состояний, из которых за конечное число шагов можно перевести систему в начало координат посредством выбора допустимого управления. При этом доказано, что метод решения во многом зависит от ограничений, накладываемых на управление. В случае строго выпуклых ограничений для построения оптимального по быстродействию управления удастся модифицировать известный принцип максимума [9, 10]. Если множество допустимых значений управлений представляет собой многогранник, на основе метода динамического программирования решение исходной задачи может быть сведено к решению ряда задач линейного программирования [12, 13]. Однако в случае произвольных выпуклых ограничений на управление аналогичные подходы оказываются неприменимыми.

Одним из методов сведения общего случая исходной задачи к случаю линейных ограничений на управление является проведение предварительной полиэдральной аппроксимации множества допустимых значений управлений системы. Данный подход аппроксимации одного множества другим, более удобным в описании, широко используется не только в теории оптимального управления [14, 15], но также, например, в задачах стохастической оптимизации [16, 17] и дискретной оптимизации [18]. На данный момент известно большое количество алгоритмов полиэдральной аппроксимации [19–22], различающихся по сложности, эффективности и свойствам сходимости.

В публикациях [23, 24] рассмотрены методы построения субоптимального решения в задаче быстродействия для линейной дискретной системы и алгоритм оценки его точности на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации. Однако существенным недостатком этих работ является то, что в них не проводится исследование сходимости критерия качества управления, отсутствуют условия, при которых субоптимальное решение может оказаться оптимальным.

Данная статья посвящена исследованию точности субоптимального решения, полученного на основе методов полиэдральной аппроксимации, в задаче быстродействия для линейной дискретной системы. Доказано, что если

алгоритмы внешней и внутренней аппроксимации гарантируют сходимость к исходному выпуклому компактному в смысле расстояния Хаусдорфа [25], то почти для всех начальных состояний за конечное число итерационного алгоритма удается добиться оптимальности гарантирующего решения. Данный факт позволяет в полной мере свести задачу быстродействия для дискретной линейной системы общего вида к случаю линейных ограничений.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приведены постановка задачи быстродействия и описание семейства множеств 0-управляемости, описан метод решения задачи быстродействия в случае линейных ограничений, произведена постановка задачи об аппроксимации. В разделе 3 рассмотрены некоторые свойства пространства компактных множеств, наделенного метрикой Хаусдорфа. В разделе 4 сформулирован и доказан критерий оптимальности гарантирующего решения в задаче быстродействия для произвольных выпуклых ограничений. В разделе 5 опробована эффективность полученных результатов на примере различных систем управления. В разделе 6 приведено решение задачи наискорейшего демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается нестационарная линейная система управления с дискретным временем и ограниченными множествами допустимых значений управлений  $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ :

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы,  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(k)\}_{k=0}^{\infty}$  – последовательность множеств допустимых значений управлений системы,  $u(k) \in \mathcal{U}(k)$  – управление,  $A = \{A(k)\}_{k=0}^{\infty}$  – последовательность матриц системы. Предполагается, что для каждого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  множество допустимых значений управлений  $\mathcal{U}(k) \subset \mathbb{R}^n$  является выпуклым и компактным, 0 является относительно внутренней точкой  $\mathcal{U}(k)$ ,  $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det A(k) \neq 0$ . Для системы  $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$  решается задача быстродействия, т.е. требуется вычислить минимальное число шагов  $N_{\min}$ , за которое можно перевести систему из заданного начального состояния  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  в начало координат, а также построить процесс  $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ , удовлетворяющий условию  $x^*(N_{\min}) = 0$ , который будем называть оптимальным. Предполагается, что  $N_{\min} < \infty$ .

Множество состояний, из которых систему  $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$  можно перевести в 0 за  $N$  шагов посредством выбора допустимого управления начиная с шага  $k$ , называется множеством 0-управляемости за  $N$  шагов:

$$(2) \quad \mathcal{X}(N, k) = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &x(k) \in \mathbb{R}^n: \exists u(k+i) \in \mathcal{U}(k+i), \quad i = \overline{0, N-1}: \\ &x(N+k) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, \quad N = 0. \end{cases}$$

Тогда  $N_{\min}$  можно вычислить с помощью класса множеств 0-управляемости:

$$(3) \quad N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N, 0)\}.$$

Для двух произвольных  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \subset \mathbb{R}^n$  через  $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$  обозначим сумму множеств по Минковскому. Для произвольной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и множества  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  через  $A\mathcal{X}$  обозначим образ  $\mathcal{X}$  в результате действия линейного оператора, порожденного матрицей  $A$ :

$$A\mathcal{X} = \{Ax : x \in \mathcal{X}\}.$$

Построим аналитическое описание класса множеств 0-управляемости (2).

*Лемма 1.* Пусть класс множеств  $\{\mathcal{X}(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$  определяется соотношениями (2). Тогда для всех  $N \in \mathbb{N}$  и  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  справедливо представление

$$\mathcal{X}(N, k) = \sum_{i=0}^{N-1} (-A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(i+k)) \mathcal{U}(k+i).$$

Доказательства леммы 1 и всех последующих утверждений приведены в Приложении.

*Следствие 1.* Пусть для всех  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(4) \quad A(k) = A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathcal{U}(k) = \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n,$$

т.е. система (1) является стационарной, семейство множеств  $\{\mathcal{X}(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$  определяется соотношениями (2).

Тогда для всех  $N \in \mathbb{N}$  и  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  справедливы следующие соотношения:

$$1) \quad \mathcal{X}(N, k) = - \sum_{i=1}^N A^{-i} \mathcal{U}_0,$$

$$2) \quad \mathcal{X}(N+1, k) = A^{-1} \mathcal{X}(N, k) + (-A^{-1} \mathcal{U}_0).$$

В публикациях [12, 13] подробно рассмотрен подход к решению задачи быстрогодействия для системы (1) в случае, когда на управление на каждом шаге наложены только линейные ограничения

$$(5) \quad \mathcal{U}(k) = \bigcap_{i=1}^{I(k)} \{u \in \mathbb{R}^n : (u, n^i(k)) \leq a_i(k)\}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

т.е. множество допустимых значений управлений на  $k$ -м шаге  $\mathcal{U}(k) \subset \mathbb{R}^n$  представляет собой полиэдр, ограниченный  $I(k) \in \mathbb{N}$  числом гиперплоскостей с векторами нормалей  $n^i(k) \in \mathbb{R}^n$ , ориентированными вовне множества  $\mathcal{U}(k)$ . Известно, что в случае (5) задача быстрогодействия может быть сведена к задаче линейного программирования.

Обозначим через  $\mu(x, \mathcal{X})$  функционал Минковского [25]:

$$\mu(x, \mathcal{X}) = \inf \{r \in \mathbb{R} : r > 0, x \in r\mathcal{X}\},$$

где  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклое тело,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Для произвольных  $N \in \mathbb{N}$  и  $k = \overline{0, N-1}$  определим отображение  $S_{N,k}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  следующим образом:

$$S_{N,k}(x) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}(k)} \mu(A(k)x + u, \mathcal{X}(N-k-1, k+1)).$$

Как продемонстрировано в [13], если известно представление

$$\mathcal{X}(N-k-1, k+1) = \text{conv} \{x^1(N-k-1, k+1), \dots, x^M(N-k-1, k+1)\},$$

то вычисление отображения  $S_{N,k}$  в случае (5) в каждой точке  $x \in \mathbb{R}^n$  сводится к решению задачи линейного программирования:

$$(6) \quad \begin{aligned} & \min_{r, \lambda_1, \dots, \lambda_M, u} r, \\ & A(k)x + u = \sum_{i=1}^M x^i(N-k-1, k+1)\lambda_i, \\ & \sum_{i=1}^M \lambda_i \leq r, \\ & 0 \leq \lambda_i \leq r, \quad i = \overline{1, M}, \\ & (u, n^j(k)) \leq a_j(k), \quad j = \overline{1, I(k)}. \end{aligned}$$

Также в [13] сформулирована и доказана теорема, определяющая вид оптимального позиционного управления в задаче быстрогодействия для системы (1) в случае (5).

*Теорема 1* [13, теорема 5.1]. Пусть система (1) удовлетворяет условию (5), процесс  $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=0}^{N_{\min}}$  определяется соотношениями

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= A(k)x^*(k) + S_{N_{\min},k}(x^*(k)), \quad k = \overline{0, N_{\min}-1}, \\ x^*(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$1) \quad x^*(N_{\min}) = 0;$$

2) оптимальное по быстродействию позиционное управление на  $k$ -м шаге имеет вид

$$u^*(k, x^*(k)) = S_{N_{\min},k}(x^*(k)).$$

На основе теоремы 1 удается полностью решить задачу быстрогодействия для системы (1) в случае (5), используя только средства линейного программирования. Тем не менее аналогичный подход в общем случае, когда последовательность множеств допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$  состоит из произвольных выпуклых компактов, оказывается неприменимым, так как приводит к необходимости решения задачи выпуклого программирования общего вида. В результате оказывается актуальной следующая аппроксимационная задача.

Обозначим для каждого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  через  $\{\underline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\overline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}$  последовательности нижних и верхних оценок соответственно множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}(k)$  системы (1) на  $k$ -м шаге, т.е. для каждого  $m \in \mathbb{N}$  верно включение

$$\underline{\mathcal{U}}_m(k) \subset \mathcal{U}(k) \subset \overline{\mathcal{U}}_m(k).$$

Везде далее будем предполагать, что для всех  $m \in \mathbb{N}$  и  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  каждое из множеств  $\underline{\mathcal{U}}_m(k), \overline{\mathcal{U}}_m(k) \subset \mathbb{R}^n$  является выпуклым компактом, содержащим 0. Тогда в общем случае справедливы оценки

$$(7) \quad \underline{N}_{\min}(m) \geq N_{\min} \geq \overline{N}_{\min}(m),$$

где  $\underline{N}_{\min}(m), \overline{N}_{\min}(m)$  – оптимальные значения критерия качества управления в задаче быстродействия для систем  $(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{k=0}^{\infty})$  и  $(\mathcal{A}, \{\overline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{k=0}^{\infty})$  соответственно.

Предполагая, что последовательности  $\{\underline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\overline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}$  построены на основе методов полиэдральной аппроксимации, требуется сформулировать достаточные условия, при которых для произвольной системы (1) найдется  $m_0 \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющее равенству

$$(8) \quad \underline{N}_{\min}(m_0) = N_{\min} = \overline{N}_{\min}(m_0).$$

Таким образом, оптимальное управление для системы  $(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}}_{m_0}(k)\}_{k=0}^{\infty})$ , вычисленное на основе теоремы 1, окажется не только гарантирующим, т.е. удовлетворяющим оценкам (7), но и оптимальным для исходной системы  $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ .

Для рассмотрения вопросов сходимости исследуемые множества будем предполагать элементами метрического пространства компактов  $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ , наделенного метрикой Хаусдорфа:

$$\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{X} \text{ – компакт}\},$$

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\}.$$

Известно, что  $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$  является полным метрическим пространством [25].

### 3. Дополнительные построения

Для решения поставленной задачи сформулируем и докажем некоторые свойства пространства  $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ .

*Лемма 2* [23, лемма 4.3]. Пусть отображение  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывно. Тогда  $A: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$  непрерывно, где для произвольного  $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$  в качестве  $A(\mathcal{X})$  рассматривается образ множества  $\mathcal{X}$ .

*Лемма 3.* Пусть  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathbb{K}_n$  такие, что

$$\rho_H(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) < \varepsilon_1, \quad \rho_H(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2) < \varepsilon_2.$$

Тогда

$$\rho_H(\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1, \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Лемма 4. Пусть для каждого  $i = \overline{1, N}$  последовательность  $\{\mathcal{X}_m^i\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$  сходится к  $\mathcal{X}^i \in \mathbb{K}_n$ :

$$\rho_H(\mathcal{X}_m^i, \mathcal{X}^i) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда

$$\rho_H\left(\sum_{i=1}^N \mathcal{X}_m^i, \sum_{i=1}^N \mathcal{X}^i\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

На основе лемм 2 и 4 можно сформулировать асимптотические свойства класса множеств 0-управляемости (2) системы (1). Обозначим через  $\{\mathcal{X}_m(N, k)\}_{N, k=0}^\infty$  класс множеств 0-управляемости вспомогательной системы  $(\mathcal{A}, \{\mathcal{U}_m(k)\}_{k=0}^\infty)$ . Тогда справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть для каждого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  последовательность  $\{\mathcal{U}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$  сходится к множеству допустимых значений управлений  $\mathcal{U}(k)$  системы (1):

$$\rho_H(\mathcal{U}_m(k), \mathcal{U}(k)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда для любых  $N, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  справедливо соотношение

$$\rho_H(\mathcal{X}_m(N, k), \mathcal{X}(N, k)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Обозначим через  $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$  замкнутый шар радиуса  $R > 0$  с центром в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Лемма 5. Пусть  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_n$  – выпуклые компакты,  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ ,  $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$ ,  $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}$ .

Тогда  $x_0 \in \mathcal{Y}$ .

Следствие 3. Пусть  $\{\mathcal{X}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$  – последовательность выпуклых компактов,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклый компакт такой, что для каждого  $m \in \mathbb{N}$  верно включение  $\mathcal{X}_m \subset \mathcal{X}$ ,

$$\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда для всех  $x_0 \in \text{int } \mathcal{X}$  найдется  $N \in \mathbb{N}$  такое, что  $x_0 \in \mathcal{X}_N$ .

Лемма 6. Пусть  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{K}_n$  – выпуклые компакты,  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ ,  $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  такой, что  $B_\varepsilon(x_0) \cap \mathcal{X} = \emptyset$ .

Тогда  $x_0 \notin \mathcal{Y}$ .

Следствие 4. Пусть  $\{\mathcal{X}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$  – последовательность выпуклых компактов,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  – выпуклый компакт такой, что для каждого  $m \in \mathbb{N}$  верно включение  $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_m$ ,

$$\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда для всех  $x_0 \notin \mathcal{X}$  существует  $N \in \mathbb{N}$  такое, что  $x_0 \notin \mathcal{X}_N$ .

#### 4. Достаточные условия оптимальности гарантирующего решения

Утверждения, доказанные в разделе 3, позволяют сформулировать достаточные условия, которым должен удовлетворять метод полиэдральной аппроксимации, чтобы на некоторой итерации  $m_0 \in \mathbb{N}$  аппроксимационного алгоритма выполнилось равенство (8).

Согласно (3) величина  $N_{\min}$  однозначно определяется посредством элементов семейства множеств 0-управляемости (2). В силу следствия 2 последовательность множеств 0-управляемости за  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  шагов вспомогательных систем  $(\mathcal{A}, \{\mathcal{U}_m(k)\}_{k=0}^{\infty})$  сходится к  $\mathcal{X}(N, k)$ , если для каждого  $k \in \mathbb{N}$  последовательность  $\{\mathcal{U}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}}$  сходится к исходному множеству  $\mathcal{U}(k)$ . С другой стороны, следствия 3 и 4 гарантируют, что за конечное число итераций как внешней, так и внутренней аппроксимации удастся выполнить для каждого  $x_0 \in \text{int } \mathcal{X}(N_{\min}, 0) \setminus \mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0)$  включение

$$x_0 \in \underline{\mathcal{X}}_m(N_{\min}, 0) \setminus \overline{\mathcal{X}}_m(N_{\min} - 1, 0),$$

откуда для заданного начального состояния следует равенство (8).

Сформулируем данный факт в виде следующих теорем.

*Теорема 2. Пусть для каждого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  верно, что  $\{\mathcal{U}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$  – последовательность выпуклых компактов такая, что для каждого  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\underline{\mathcal{U}}_m(k) \subset \mathcal{U}(k)$ ,  $\rho_H(\underline{\mathcal{U}}_m(k), \mathcal{U}(k)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ .*

*Тогда почти для всех  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , для которых  $N_{\min} < \infty$ , существует  $m_1 \in \mathbb{N}$  такое, что*

$$N_{\min} = \underline{N}_{\min}(m_1),$$

где  $\underline{N}_{\min}(m_1)$  – оптимальное значение критерия в задаче быстрогодействия для системы  $(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}}_{m_1}(k)\}_{k=0}^{\infty})$ .

*Теорема 3. Пусть для каждого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  верно, что  $\{\overline{\mathcal{U}}_m(k)\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$  – последовательность выпуклых компактов такая, что для каждого  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{U}(k) \subset \overline{\mathcal{U}}_m(k)$ ,  $\rho_H(\overline{\mathcal{U}}_m(k), \mathcal{U}(k)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ .*

*Тогда почти для всех  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , для которых  $N_{\min} < \infty$ , существует  $m_2 \in \mathbb{N}$  такое, что*

$$N_{\min} = \overline{N}_{\min}(m_2),$$

где  $\overline{N}_{\min}(m_2)$  – оптимальное значение критерия в задаче быстрогодействия для системы  $(\mathcal{A}, \{\overline{\mathcal{U}}_{m_2}(k)\}_{k=0}^{\infty})$ .

*Следствие 5. Пусть выполняются условия теорем 2 и 3 одновременно. Тогда существует  $m_0 \in \mathbb{N}$  такое, что*

$$\overline{N}_{\min}(m_0) = N_{\min} = \underline{N}_{\min}(m_0).$$



Основным результатом раздела 4 являются сформулированные и доказанные в виде теорем 2 и 3 достаточные условия того, что применение методов полиэдральной аппроксимации позволит свести общий случай задачи быстродействия для исходной системы (1) к случаю (5), для которого оптимальный процесс может быть вычислен исключительно средствами линейного программирования на основе теоремы 1. Если метод полиэдральной аппроксимации гарантирует сходимость в смысле расстояния Хаусдорфа к аппроксимируемому множеству, то почти для всех начальных состояний гарантирующее решение окажется также и оптимальным по быстродействию за конечное число итераций аппроксимационного алгоритма.

## 5. Численные расчеты величины $N_{\min}$

Проведем ряд численных экспериментов для демонстрации прикладного значения результатов раздела 4. Для наглядности все рассматриваемые системы вида (1) будут предполагаться стационарными, т.е. удовлетворяющими условиям (4). В качестве алгоритма полиэдральной аппроксимации для построения последовательностей  $\{\underline{\mathcal{U}}_m\}_{m=1}^{\infty}$  и  $\{\overline{\mathcal{U}}_m\}_{m=1}^{\infty}$  используется алгоритм сближающихся многогранников. Такой выбор обусловлен тем, что, как продемонстрировано в [20], он обеспечивает сходимость в смысле расстояния Хаусдорфа (в пространстве  $\mathbb{K}_n$ ) к исходному множеству допустимых значений управлений  $\mathcal{U}_0$ . С другой стороны, данный алгоритм позволяет строить последовательности внутренних и внешних аппроксимаций одновременно. Более подробно описание алгоритма сближающихся многогранников и исследование его свойств приведено в [20], сопоставление сложности с другими методами полиэдральной аппроксимации подробно исследуется в [19].

*Пример 1.* Продемонстрируем поэтапное вычисление величины  $N_{\min}$  для линейной дискретной системы, удовлетворяющей условию (4), на основе теорем 2, 3 и следствия 5. Пусть размерность фазового пространства  $n = 2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_0 = \left\{ (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + \frac{u_2^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

В качестве начального состояния рассмотрим вектор

$$x_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Многогранники  $\underline{\mathcal{U}}_3$  и  $\overline{\mathcal{U}}_3$ , представляющие собой внутреннюю и внешнюю оценки множества  $\mathcal{U}_0$  соответственно, имеют следующий вид:

$$\underline{\mathcal{U}}_3 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,8407 \\ 1,0830 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,8893 \\ 0,9146 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0486 \\ -1,9976 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}}_3 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -0,0972 \\ 3,9953 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,6814 \\ -2,1660 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,7786 \\ -1,8292 \end{pmatrix} \right\}.$$

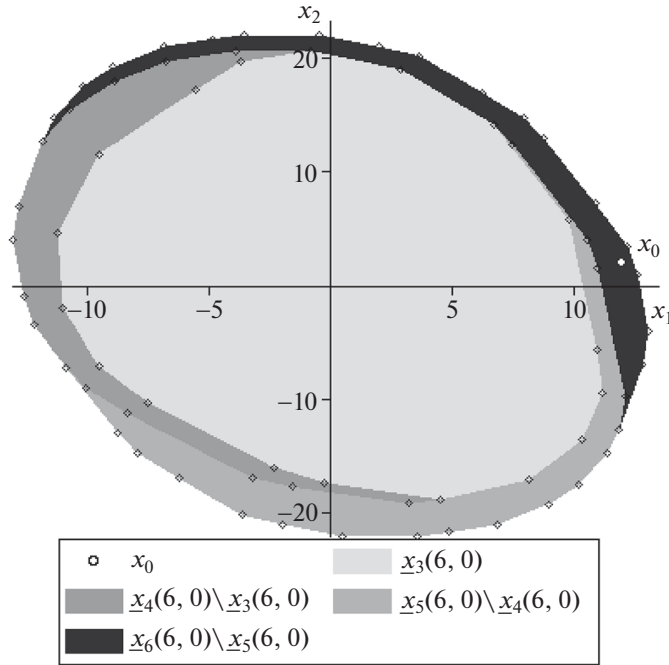


Рис. 1. Множества  $\{\underline{x}_m(6, 0)\}_{m=3}^6$  и начальное состояние  $x_0$ .

Тогда на основе следствия 1 можно построить классы множеств 0-управляемости  $\{\underline{\mathcal{X}}_3(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$ ,  $\{\overline{\mathcal{X}}_3(N, k)\}_{N, k=0}^{\infty}$  для вспомогательных систем  $(\mathcal{A}, \{\underline{\mathcal{U}}_3\}_{k=0}^{\infty})$ ,  $(\mathcal{A}, \{\overline{\mathcal{U}}_3\}_{k=0}^{\infty})$ . Величины  $N_{\min}(3) = 7$ ,  $\overline{N}_{\min}(3) = 5$  вычислены на основе соотношения (3). Множества  $\underline{\mathcal{X}}_3(7, 0)$  и  $\overline{\mathcal{X}}_3(5, 0)$  представляют собой многогранники с 21-й и 15-ю вершинами соответственно, иллюстрации которых представлены на рис. 1.

Поскольку при  $m = 3$  равенство (8) не достигнуто, уточним внутреннюю и внешнюю аппроксимации  $\mathcal{U}_0$  при помощи алгоритма сближающихся многогранников:

$$\underline{\mathcal{U}}_4 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,8407 \\ 1,0830 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,8893 \\ 0,9146 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0486 \\ -1,9976 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,0486 \\ 1,9976 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}}_4 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,5281 \\ 2,0538 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,6253 \\ 1,9415 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,6814 \\ -2,1660 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,7786 \\ -1,8292 \end{pmatrix} \right\}.$$

Аналогичным образом вычислим оптимальные значения критерия качества управления для вспомогательных систем:  $N_{\min}(4) = 7$ ,  $\overline{N}_{\min}(4) = 5$ . Множества  $\underline{\mathcal{X}}_4(7, 0)$  и  $\overline{\mathcal{X}}_4(5, 0)$  представляют собой многогранники с 28-ю и 20-ю вершинами соответственно.

Продолжим процесс уточнения множества  $\mathcal{U}_0$  при помощи алгоритма сближающихся многогранников до тех пор, пока неравенство (7) не перейдет в

равенство (8). Приводим далее результаты расчетов.

$$\underline{\mathcal{U}}_5 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,8407 \\ 1,0830 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,8893 \\ 0,9146 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0486 \\ -1,9976 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,0486 \\ 1,9976 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,8407 \\ -1,0830 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}}_5 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,5281 \\ 2,0538 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,6253 \\ 1,9415 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,1533 \\ -0,1123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5281 \\ -2,0537 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,7786 \\ -1,8292 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\underline{N}_{\min}(5) = 7, \quad \overline{N}_{\min}(5) = 5.$$

Множества  $\underline{\mathcal{X}}_5(7, 0)$  и  $\overline{\mathcal{X}}_5(5, 0)$  представляют собой многогранники с 28-ю и 20-ю вершинами соответственно.

$$\underline{\mathcal{U}}_6 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,8407 \\ 1,0830 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,8893 \\ 0,9146 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,0486 \\ -1,9976 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -0,0486 \\ 1,9976 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,8407 \\ -1,0830 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,8893 \\ -0,9146 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{\mathcal{U}}_6 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,5281 \\ 2,0538 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,6253 \\ 1,9415 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,1533 \\ -0,1123 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -0,5281 \\ -2,0537 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,6253 \\ -1,9415 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,1533 \\ 0,1123 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\underline{N}_{\min}(6) = 6, \quad \overline{N}_{\min}(6) = 6.$$

Множества  $\underline{\mathcal{X}}_6(6, 0)$  и  $\overline{\mathcal{X}}_6(6, 0)$  представляют собой многогранники с 36-ю вершинами каждый.

Таким образом, удается вычислить для выбранного  $x_0$  величину  $N_{\min} = 6$  для исходной системы  $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$  в соответствии со следствием 5. При этом также справедливо равенство

$$m_1 = m_2 = m_0 = 5.$$

Процесс сходимости величин  $\underline{N}_{\min}(m)$  и  $\overline{N}_{\min}(m)$  к  $N_{\min}$  продемонстрирован на рис. 1 и 2 соответственно. На рис. 1 различными цветами изображен набор возрастающих по включению множеств  $\{\underline{\mathcal{X}}_m(6, 0)\}_{m=3}^6$ . Множество  $\underline{\mathcal{X}}_6(6, 0)$  при этом является первым множеством, содержащим начальное состояние  $x_0$ . Данное включение гарантирует выполнение неравенства  $N_{\min} \geq 6$ . На рис. 2 различными цветами изображен набор убывающих по включению множеств  $\{\overline{\mathcal{X}}_m(5, 0)\}_{m=3}^6$ . Множество  $\overline{\mathcal{X}}_6(5, 0)$  при этом является первым множеством, не содержащим начального состояния  $x_0$ , что гарантирует выполнение неравенства  $N_{\min} > 5$ .

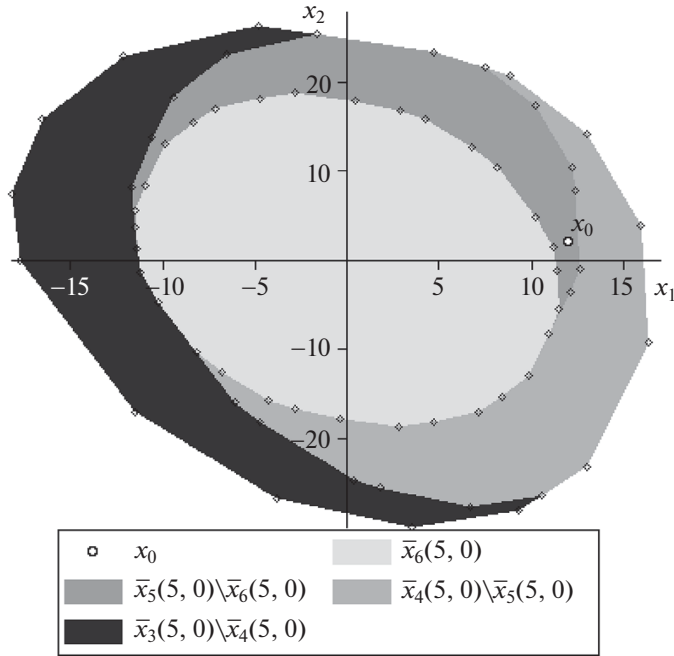


Рис. 2. Множества  $\{\overline{\mathcal{X}}_m(5, 0)\}_{m=3}^6$  и начальное состояние  $x_0$ .

*Пример 2.* Рассмотрим линейную дискретную систему (1), удовлетворяющую условию стационарности (4). Пусть размерность фазового пространства  $n = 2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_0 = \left\{ (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + \frac{u_2^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

В качестве начальных состояний рассмотрим следующие три вектора:

$$x_{0,1} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 9,5 \end{pmatrix}, \quad x_{0,2} = \begin{pmatrix} 9,9 \\ 9,9 \end{pmatrix}, \quad x_{0,3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Выбор данных начальных состояний обусловлен их расположением относительно границы множества 0-управляемости  $\mathcal{X}(1, 0)$ . Согласно лемме 1 и свойствам эллиптических множеств [26] верно следующее представление:

$$\mathcal{X}(1, 0) = -A^{-1}\mathcal{U}_0 = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u^T H u \leq 1 \right\}, \quad H = \begin{pmatrix} 0,0125 & -0,0075 \\ -0,0075 & 0,0125 \end{pmatrix}.$$

Тогда верны включения  $x_{0,1}, x_{0,2} \in \text{int } \mathcal{X}(1, 0)$ ,  $x_{0,3} \in \partial \mathcal{X}(1, 0)$ . В силу (3)  $N_{\min} = 1$  для всех трех предложенных начальных состояний. Тем не менее каждое из них находится на различном расстоянии от границы множества  $\mathcal{X}(1, 0)$ , что влияет на сложность вычисления величины  $N_{\min}$  при помощи

Таблица 1

$x_0$	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	$x_{0,3}$
$m_1$	10	18	—
$m_2$	4	4	4

следствия 5 и равенства (8). В качестве начального приближения в алгоритме сближающихся многогранников выбраны

$$\underline{U}_4 = \text{conv} \left\{ \left( \begin{array}{c} -0,985726 \\ -0,336713 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0,168356 \\ -1,971452 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0,985726 \\ 0,336713 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -0,168356 \\ 1,971452 \end{array} \right) \right\},$$

$$\overline{U}_4 = \text{conv} \left\{ \left( \begin{array}{c} -0,817370 \\ -2,308164 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 1,154083 \\ -1,634740 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} 0,817370 \\ 2,308164 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -1,154083 \\ 1,634740 \end{array} \right) \right\}.$$

Результаты расчетов величин  $m_1$ ,  $m_2$  из теорем 2, 3 приведены в табл. 1.

При этом величину  $m_1$  для начального состояния  $x_{0,3}$  вычислить не удастся вплоть до аппроксимации  $\underline{U}_{203}$ , т.е.  $\underline{N}_{\min}(203) = 2$ . Данный факт связан с тем, что теоремы 2 и 3 не гарантируют достижимость равенства (8) для начальных состояний, расположенных на границах множеств 0-управляемости  $\{\mathcal{X}(N, 0)\}_{N=0}^{\infty}$ , в том числе и для  $x_{0,3}$ . Однако при этом можно построить субоптимальное решение задачи быстродействия при помощи теоремы 1, используя  $\underline{U}_m$  вместо множества  $\underline{U}_0$ , оценка точности критерия качества управления может быть вычислена в соответствии с неравенством (7) как величина  $\underline{N}_{\min}(m) - \overline{N}_{\min}(m)$ . В частности, для  $x_{0,3}$  при  $m = 203$  точность составляет  $\underline{N}_{\min}(203) - \overline{N}_{\min}(203) = 1$ .

## 6. Задача демпфирования высотного сооружения

Продемонстрируем эффективность разработанных методов на примере решения задачи оптимального по быстродействию демпфирования высотного сооружения.

Сейсмические возмущения вызывают колебания сооружения, которые влияют на устойчивость и в конечном счете приводят к его разрушению. В этой связи возникает задача гашения колебаний сооружения посредством дополнительно прикладываемых сил, рассчитанных на основе приобретенных изменений, т.е. задача управления системой по принципу обратной связи. На сегодняшний день наиболее активно применяются два принципиально различных способа организации такого управления: динамическое гашение колебаний с использованием дополнительных материальных тел и виброзащита, предполагающая изоляцию сооружения от подвижного основания. Один из возможных вариантов технической реализации динамического гашения колебаний заключается в создании дополнительных технических этажей с размещением некоторой достаточно малой массы (по сравнению с общей массой сооружения), которая будет перемещаться в соответствии с заданным законом управления в форме обратной связи по текущим показаниям датчиков, которая позволит оказывать управляющее воздействие на смежные этажи.

В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, предполагается одномерная последовательность упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием. Предполагается, что масса основания намного превышает массы остальных материальных точек, поэтому влиянием движения секций сооружения на движение основания можно пренебречь. В дальнейшем будем считать, что массы всех материальных точек одинаковы, а упругие и демпфирующие связи моделируются линейными элементами с одинаковыми коэффициентами упругости и демпфирования.

Уравнения движения рассматриваемой системы согласно модели, предложенной в [27], имеют вид

$$(9) \quad \begin{cases} m\ddot{\xi}_1(t) = -2b\dot{\xi}_1(t) - 2c\xi_1(t) + b\dot{\xi}_2(t) + c\xi_2(t) + U_1(t), \\ \vdots \\ m\ddot{\xi}_i(t) = -2b\dot{\xi}_i(t) - 2c\xi_i(t) + b\dot{\xi}_{i-1}(t) + \\ \quad + c\xi_{i-1}(t) + b\dot{\xi}_{i+1}(t) + c\xi_{i+1}(t) + U_i(t), \\ \vdots \\ m\ddot{\xi}_n(t) = -2b\dot{\xi}_n(t) - 2c\xi_n(t) + b\dot{\xi}_{n-1}(t) + c\xi_{n-1}(t) + U_n(t), \end{cases}$$

где  $\xi_i$  – координата  $i$ -й материальной точки относительно основания,  $U_i$  – управляющая сила, приложенная к  $i$ -й материальной точке,  $m$  – масса материальной точки,  $b$  и  $c$  – коэффициенты демпфирования и упругости межсекционных связей соответственно.

Введем обозначения:

$$y(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{pmatrix}, \quad v(t) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Тогда уравнения (9) можно привести к каноническому виду

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}y(t) + v(t),$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 K & -\beta K \end{pmatrix}.$$

Пусть высота здания составляет 6 этажей, т.е.  $n = 6$ . Также пусть  $\beta = 1$ ,  $\omega^2 = 100$ . Значение параметров выбраны на основе модели, описанной в [27]. Полагая, что управление  $v(t)$  является кусочно-постоянной функцией, меняющей свои значения через промежутки времени  $\Delta t$ , можно перейти к дискретному аналогу системы (9), обозначив

$$x(k) = y(k\Delta t), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пусть  $\Phi(t)$  – матрица фундаментальной системы решений (9). Тогда, полагая  $v(k\Delta t) = v_k$ , справедливо представление

$$x(k+1) = \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)x(k) + \left(\Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)\tilde{A}^{-1} - \tilde{A}^{-1}\right)v_k.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0), \\ B &= \Phi(\Delta t)\Phi^{-1}(0)\tilde{A}^{-1} - \tilde{A}^{-1}, \\ u(k) &= Bv_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Окончательно получим систему управления, эквивалентную виду (1):

$$(10) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= y_0, \quad u(k) \in BU_0, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  – матрица дискретизированной системы,  $BU_0 \subset \mathbb{R}^{12}$  – множество допустимых значений управлений,  $x(k) \in \mathbb{R}^{12}$  – состояние системы на  $k$ -м шаге. Данная система является стационарной, что можно рассматривать как частный случай нестационарной системы (1).

Предполагается, что демпфирующие устройства расположены на 2-м, 4-м и 5-м этажах. В качестве множества допустимых значений управлений рассматривается трехмерный эллипсоид в  $\mathbb{R}^{12}$ :

$$U_0 = \left\{ u \in \mathbb{R}^{12} : u_8^2 + \frac{16}{9}u_{10}^2 + \frac{9}{4}u_{11}^2 \leq 1, \quad u_i = 0, \quad i \notin \{8, 10, 11\} \right\}.$$

Для аппроксимации  $U_0$  используется алгоритм сближающихся многогранников [20], который позволяет построить последовательности  $\{\underline{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$ ,  $\{\overline{U}_m\}_{m=1}^{\infty}$  верхних и нижних оценок  $BU_0$ , сходящиеся к исходному множеству  $BU_0$  в смысле расстояния Хаусдорфа. Тогда в силу теорем 2, 3 и следствия 5 почти для всех начальных состояний также должны быть верны сходимости

$$\begin{aligned} \overline{N}_{\min}(m) &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} N_{\min}, \\ \underline{N}_{\min}(m) &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} N_{\min}. \end{aligned}$$

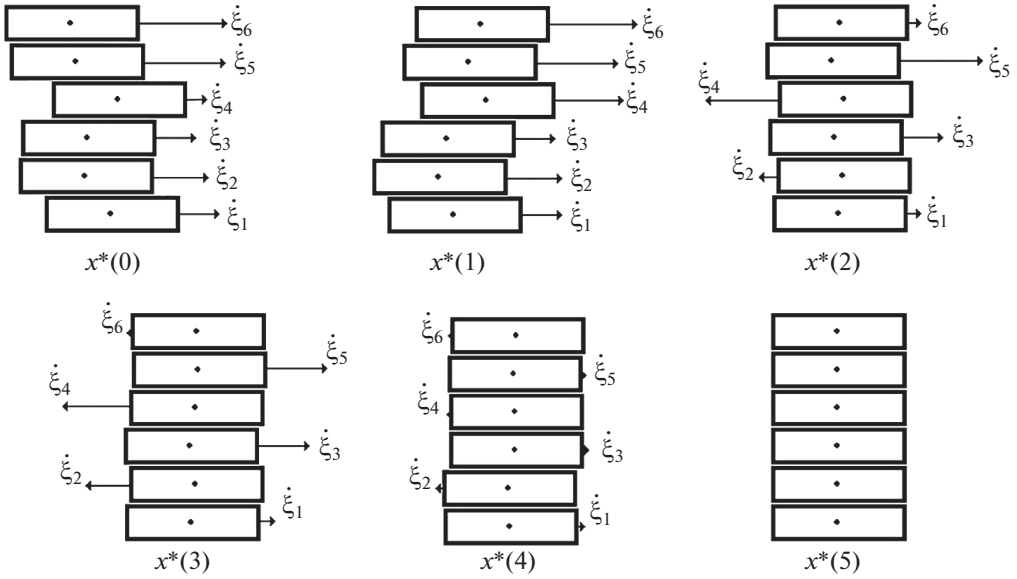


Рис. 3. Оптимальная траектория системы (10).

Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Здесь через  $m \in \mathbb{N}$  обозначены число вершин многогранника  $\underline{U}_m$  и число гиперграней многогранника  $\overline{U}_m$ . На шаге  $m_0 = 8$  аппроксимационного алгоритма неравенство (7) переходит в равенство (8), откуда следует оптимальность управления, вычисленного на основе теоремы 1 для вспомогательной системы  $(\mathcal{A}, \{\underline{BU}_{m_0}\}_{k=0}^\infty)$ , в задаче быстрогодействия для исходной системы управления (10),

$$N_{\min} = 5.$$

Также на основе теоремы 1 построен оптимальный процесс системы  $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ . Результаты расчетов представлены в табл. 3 и 4. На рис. 3 схематично изображена оптимальная траектория системы (10).

Переход от непрерывной системы (9) к дискретной системе (10) выполнен без погрешностей и основан на возможности аналитически построить решение системы линейных дифференциальных уравнений (9) в предположении, что управление является кусочно-постоянным. В связи с этим фактом траектория, представленная на рис. 3, также визуализирует траекторию исходной непрерывной системы (9).

Таблица 2

$m$	5	6	7	8
$\overline{N}_{\min}(m)$	5	5	5	5
$\underline{N}_{\min}(m)$	8	8	6	5



**Таблица 3.** Оптимальная траектория системы

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_1^*(k)$	0,0001	-0,0031	-0,0135	-0,0111	-0,0012e-03	0
$x_2^*(k)$	-0,0038	-0,0162	-0,0109	0,0038	0,024e-03	0
$x_3^*(k)$	-0,0156	-0,0013	0,0035	-0,0151	0,021e-03	0
$x_4^*(k)$	-0,0037	-0,0169	-0,0198	-0,0168	0,015e-03	0
$x_5^*(k)$	-0,0011	-0,0147	-0,0352	-0,0315	0,0345e-03	0
$x_6^*(k)$	-0,0158	-0,0212	-0,0215	-0,0335	0,032e-03	0
$x_7^*(k)$	0,0026	0,0747	0,0915	-0,1694	-0,015e-03	0
$x_8^*(k)$	0,1099	0,0866	-0,1702	-0,0279	-0,052e-03	0
$x_9^*(k)$	-0,2835	-0,4534	-0,1461	-0,1240	-0,065e-03	0
$x_{10}^*(k)$	0,1024	0,1161	-0,0423	0,0302	0,01e-03	0
$x_{11}^*(k)$	0,0568	0,2169	0,1296	-0,1887	-0,014e-03	0
$x_{12}^*(k)$	0,1112	0,2312	0,0975	0,0426	0,026e-03	0

**Таблица 4.** Оптимальное управление

$k$	0	1	2	3	4
$u_1^*(k)$	0,0003	0,0032	0,0104	-0,0024	-0,0245
$u_2^*(k)$	0,0032	0,0123	-0,0053	-0,0148	0,0127
$u_3^*(k)$	0,0222	-0,0144	-0,0047	0,0186	-0,0006
$u_4^*(k)$	0,0037	0,0131	0,0030	-0,0031	0,0079
$u_5^*(k)$	0,0037	0,0137	0,0205	-0,0037	-0,0187
$u_6^*(k)$	0,0132	0,0054	0,0003	0,0120	0,0129
$u_7^*(k)$	0,0117	-0,0721	-0,0168	0,2609	0,0484
$u_8^*(k)$	0,0943	0,0232	0,2568	-0,1423	-0,2448
$u_9^*(k)$	-0,1508	0,1698	-0,3072	-0,0221	0,2824
$u_{10}^*(k)$	0,1069	-0,0136	0,1583	-0,0724	-0,0385
$u_{11}^*(k)$	0,0898	-0,1601	0,0873	0,3183	-0,1186
$u_{12}^*(k)$	0,1261	-0,1201	0,1337	0,0549	-0,2133

## 7. Заключение

В статье рассмотрена задача быстродействия для линейной дискретной нестационарной системы. Множества допустимых значений управлений на каждом шаге предполагаются выпуклыми компактами. Предложен метод сведения общего случая задачи быстродействия к случаю линейных ограничений на управление посредством полиэдральной аппроксимации множеств допустимых значений управлений. Сформулировано и доказано, что полученное таким образом гарантирующее решение сходится к оптимальному, если последовательность аппроксимирующих многогранников на каждом шаге сходится в смысле расстояния Хаусдорфа к истинному множеству допустимых значений управлений.

Отдельно рассмотрена задача наискорейшего демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности. Произведена дискретизация непрерывной системы. Для заданного множества допусти-

мых значений управлений в виде эллипсоида проведена аппроксимация по предложенным алгоритмам и приведены иллюстрации. Найдены оптимальное управление и траектория системы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 1.* Включение  $x \in \mathcal{X}(N, k)$  в силу определения класса множеств 0-управляемости эквивалентно существованию векторов

$$u(k) \in \mathcal{U}(k), \dots, u(N+k-1) \in \mathcal{U}(N+k-1)$$

таких, что

$$\begin{aligned} 0 &= x(N+k) = A(N+k-1)x(N+k-1) + u(N+k-1) = \\ &= A(N+k-1)A(N+k-2)x(N+k-2) + \\ &\quad + A(N+k-1)u(N+k-2) + u(N+k-1) = \dots = \\ &= A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k)x + A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k+1)u(k) + \\ &\quad + A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k+2)u(k+1) + \dots + u(N+k-1). \end{aligned}$$

Тогда в силу невырожденности матриц из последовательности  $\mathcal{A}$

$$x = -A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(N+k-1)u(N+k-1) - \dots - A^{-1}(k)u(k),$$

что равносильно утверждению леммы 1.

*Доказательство следствия 1.* Доказательство следует непосредственно из леммы 1.

*Доказательство леммы 3.* В силу определения алгебраической суммы множеств верна следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} &\rho_H(\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1, \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2) = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1} \inf_{y \in \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{X}_2 + \mathcal{Y}_2} \inf_{x \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1} \|x - y\| \right\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1 \\ y_1 \in \mathcal{Y}_1}} \inf_{\substack{x_2 \in \mathcal{X}_2 \\ y_2 \in \mathcal{Y}_2}} \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\|; \right. \\ &\quad \left. \sup_{\substack{x_2 \in \mathcal{X}_2 \\ y_2 \in \mathcal{Y}_2}} \inf_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1 \\ y_1 \in \mathcal{Y}_1}} \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\| \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \|x_1 - x_2\| + \sup_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} \inf_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} \|y_1 - y_2\|; \right. \\ &\quad \left. \sup_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \inf_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \|x_1 - x_2\| + \sup_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} \inf_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} \|y_1 - y_2\| \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max \left\{ \sup_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \|x_1 - x_2\|; \sup_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \inf_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \|x_1 - x_2\| \right\} + \\
&+ \max \left\{ \sup_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} \inf_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} \|y_1 - y_2\|; \sup_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} \inf_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} \|y_1 - y_2\| \right\} = \\
&= \rho_H(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \rho_H(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

*Доказательство леммы 4.* По определению сходимости для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $m \in \mathbb{N}$  такое, что для всех  $i = \overline{1, N}$  справедливо неравенство  $\rho_H(\mathcal{X}_m^i, \mathcal{X}^i) < \frac{\varepsilon}{N}$ .

Тогда в силу леммы 3

$$\rho_H \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{X}_m^i, \sum_{i=1}^N \mathcal{X}^i \right) < \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon,$$

откуда согласно определению предела следует утверждение леммы 4.

*Доказательство следствия 2.* В силу леммы 2 для каждого  $i = \overline{0, N-1}$  верно, что

$$\begin{aligned}
\rho_H \left( (-A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(i+k))\mathcal{U}_m(k+i), \right. \\
\left. (-A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(i+k))\mathcal{U}(k+i) \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Тогда в силу лемм 1 и 4 верны соотношения

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_m(N, k) &= \sum_{i=0}^{N-1} (-A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(i+k))\mathcal{U}_m(k+i) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \\
&\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} (-A^{-1}(k) \cdot \dots \cdot A^{-1}(i+k))\mathcal{U}(k+i) = \mathcal{X}(N, k).
\end{aligned}$$

*Доказательство леммы 5.* Предположим, что  $x_0 \notin \mathcal{Y}$ . Пусть

$$y_1 = \arg \min_{y \in \mathcal{Y}} \|x_0 - y\|.$$

Определим  $x^* \in \mathcal{X}$  из условий

$$(П.1) \quad \begin{cases} x^* = x_0 + \beta(x_0 - y_1), \\ x^* \in \partial \mathcal{X}, \end{cases}$$

т.е.  $x^*$  – точка пересечения границы множества  $\mathcal{X}$  и луча, выходящего из точки  $y_1$  и проходящего через  $x_0$ . Поскольку  $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}$ , то  $\|x_0 - x^*\| \geq \varepsilon$ . Так как  $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$ , существует  $y_2 \in B_\varepsilon(x^*) \cap \mathcal{Y}$ , т.е.  $\|x^* - y_2\| \leq \varepsilon$ .

Рассмотрим следующую величину:

$$\begin{aligned}(y_2 - x_0, x^* - x_0) &= (y_2 - x^* + x^* - x_0, x^* - x_0) = \\ &= (x^* - x_0, x^* - x_0) + (y_2 - x^*, x^* - x_0).\end{aligned}$$

В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\begin{aligned}-\sqrt{(x^* - x_0, x^* - x_0)(y_2 - x^*, y_2 - x^*)} &\leq (y_2 - x^*, x^* - x_0), \\ (x^* - x_0, x^* - x_0) - \sqrt{(x^* - x_0, x^* - x_0)(y_2 - x^*, y_2 - x^*)} &\leq (y_2 - x_0, x^* - x_0), \\ \sqrt{(x^* - x_0, x^* - x_0)} \left( \sqrt{(x^* - x_0, x^* - x_0)} - \sqrt{(y_2 - x^*, y_2 - x^*)} \right) &> 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$(II.2) \quad (y_2 - x_0, x^* - x_0) > 0.$$

Представим  $y_1$  как линейную комбинацию:  $y_1 = x_0 + \alpha(x_0 - x^*)$ . В силу (II.1)  $\alpha > 0$ . Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned}(y_1 - x_0, y_2 - x_0) &= (x_0 + \alpha(x_0 - x^*) - x_0, y_2 - x_0) = \\ &= (\alpha(x_0 - x^*), y_2 - x_0) = -\alpha(x^* - x_0, y_2 - x_0).\end{aligned}$$

С учетом (II.2)

$$(y_1 - x_0, y_2 - x_0) < 0.$$

Обозначим через  $y^*$  проекцию  $x_0$  на аффинную оболочку  $y_1$  и  $y_2$ :

$$y^* = \frac{(x_0 - y_1, y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}(y_2 - y_1) + y_1.$$

Обозначим

$$\lambda = 1 - \frac{(x_0 - y_1, y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}.$$

Тогда верно представление

$$y^* = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2.$$

Докажем, что  $\lambda \in [0; 1]$ .

$$\begin{aligned}0 &> (y_1 - x_0, y_2 - x_0) = (y_1 - x_0, y_2 - y_1 + y_1 - x_0) = \\ &\quad + (y_1 - x_0, y_2 - y_1) + (y_1 - x_0, y_1 - x_0), \\ 0 &\leq (y_1 - x_0, y_1 - x_0) < (x_0 - y_1, y_2 - y_1) \leq \\ &\leq \sqrt{(x_0 - y_1, x_0 - y_1)(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(x_0 - y_1, y_2 - y_1) &> 0, \\ (x_0 - y_1, x_0 - y_1) &< (y_2 - y_1, y_2 - y_1),\end{aligned}$$

что эквивалентно  $\lambda \in [0; 1]$ . Поскольку  $\mathcal{Y}$  выпуклое,  $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ , то  $y^* \in \mathcal{Y}$ . При этом  $\|x_0 - y^*\| < \|x_0 - y_1\|$ . С учетом определения  $y_1$  получаем противоречие. Следовательно,  $x_0 \in \mathcal{Y}$ . Лемма 5 доказана.

*Доказательство следствия 3.* Поскольку  $x_0 \in \text{int } \mathcal{X}$ , то существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $B_\varepsilon(x_0) \subset \mathcal{X}$ . В силу условия  $\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющее неравенству

$$\rho_H(\mathcal{X}_N, \mathcal{X}) < \varepsilon.$$

Тогда в силу леммы 5 верно включение  $x_0 \in \mathcal{X}_N$ .

*Доказательство леммы 6.* Предположим, что  $x_0 \in \mathcal{Y}$ . Пусть

$$y_1 = \arg \min_{y \in \mathcal{X}} \|y - x_0\|.$$

Определим  $x^* \in \mathcal{Y}$  из условий

$$(П.3) \quad \begin{cases} x^* = x_0 + \beta(x_0 - y_1), \\ x^* \in \partial \mathcal{Y}, \end{cases}$$

т.е.  $x^*$  – точка пересечения границы множества  $\mathcal{Y}$  и луча, выходящего из точки  $y_1$  и проходящего через  $x_0$ . Так как  $\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) < \varepsilon$ , то существует  $y_2 \in \mathcal{X}$  такой, что  $\|x^* - y_2\| \leq \varepsilon$ . В силу того что  $B_\varepsilon(x_0) \cap \mathcal{X} = \emptyset$ , справедливы неравенства  $\|x_0 - y_1\| \geq \varepsilon$ ,  $\|x_0 - y_2\| \geq \varepsilon$ .

Рассмотрим следующую величину:

$$\begin{aligned}(y_2 - x_0, x^* - x_0) &= (y_2 - x_0, x^* - x_0 + y_2 - y_2) = \\ &= (y_2 - x_0, y_2 - x_0) + (y_2 - x_0, x^* - y_2).\end{aligned}$$

В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\begin{aligned}-\sqrt{(y_2 - x_0, y_2 - x_0)(x^* - y_2, x^* - y_2)} &\leq (y_2 - x_0, x^* - y_2), \\ 0 \leq \sqrt{(y_2 - x_0, y_2 - x_0)}(\sqrt{(y_2 - x_0, y_2 - x_0)} - \sqrt{(x^* - y_2, x^* - y_2)}) &= \\ = (y_2 - x_0, y_2 - x_0) - \sqrt{(y_2 - x_0, y_2 - x_0)(x^* - y_2, x^* - y_2)} &\leq (y_2 - x_0, x^* - x_0).\end{aligned}$$

Отсюда

$$(П.4) \quad (y_2 - x_0, x^* - x_0) \geq 0.$$

Представим  $y_1$  как линейную комбинацию:  $y_1 = x_0 + \alpha(x_0 - x^*)$ . В силу (П.3)  $\alpha > 0$ . Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned}(y_1 - x_0, y_2 - x_0) &= (x_0 + \alpha(x_0 - x^*) - x_0, y_2 - x_0) = \\ &= (\alpha(x_0 - x^*), y_2 - x_0) = -\alpha(x^* - x_0, y_2 - x_0) < 0.\end{aligned}$$

С учетом (П.4)

$$(y_1 - x_0, y_2 - x_0) < 0.$$

Обозначим через  $y^*$  проекцию  $x_0$  на аффинную оболочку  $y_2$  и  $y_1$ :

$$y^* = \frac{(x_0 - y_1, y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}(y_2 - y_1) + y_1.$$

Обозначим

$$\lambda = 1 - \frac{(x_0 - y_1, y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}.$$

Тогда

$$y^* = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2.$$

Докажем, что  $\lambda \in [0; 1]$ .

$$\begin{aligned} 0 &> (y_1 - x_0, y_2 - x_0) = (y_1 - x_0, y_2 - y_1 + y_1 - x_0) = \\ &= (y_1 - x_0, y_2 - y_1) + (y_1 - x_0, y_1 - x_0), \\ 0 &\leq (y_1 - x_0, y_1 - x_0) < (x_0 - y_1, y_2 - y_1) \leq \\ &\leq \sqrt{(x_0 - y_1, x_0 - y_1)(y_2 - y_1, y_2 - y_1)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (x_0 - y_1, y_2 - y_1) &> 0, \\ (x_0 - y_1, x_0 - y_1) &< (y_2 - y_1, y_2 - y_1), \end{aligned}$$

что эквивалентно условию  $\lambda \in [0; 1]$ . Поскольку  $\mathcal{X}$  выпуклое,  $y_1, y_2 \in \mathcal{X}$ , то  $y^* \in \mathcal{X}$ . При этом  $\|x_0 - y^*\| < \|x_0 - y_1\|$ . Получаем противоречие. Следовательно,  $x_0 \notin \mathcal{Y}$ . Лемма 6 доказана.

*Доказательство следствия 4.* Поскольку  $x_0 \notin \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ , то согласно аксиоме отделимости существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $B_\varepsilon(x_0) \cap \mathcal{X} = \emptyset$ . В силу условия  $\rho_H(\mathcal{X}_m, \mathcal{X}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$  найдется  $N \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющее неравенству

$$\rho_H(\mathcal{X}_N, \mathcal{X}) < \varepsilon.$$

Тогда в силу леммы 6 верно, что  $x_0 \notin \mathcal{X}_N$ .

*Доказательство теоремы 2.* Условие  $N_{\min} = \underline{N}_{\min}(m_1)$  в силу (3) и (7) эквивалентно включению  $x_0 \in \mathcal{X}(N_{\min}, 0) \cap \underline{\mathcal{X}}_m(N_{\min}, 0)$ .

В силу следствия 2

$$\rho_H(\underline{\mathcal{X}}_m(N_{\min}, 0), \mathcal{X}(N_{\min}, 0)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда согласно следствию 3 для любого  $x_0 \in \text{int } \mathcal{X}(N_{\min}, 0)$  существует  $m_1 \in \mathbb{N}$  такое, что  $x_0 \in \overline{\mathcal{X}_{m_1}}(N_{\min}, k)$ . Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Рассмотрим точку

$$x_0 \in \mathcal{X}(N_{\min}, 0) \setminus \mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0).$$

Тогда  $\mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0) \subset \overline{\mathcal{X}_m}(N_{\min} - 1, 0)$  и согласно следствию 2

$$\rho_H(\mathcal{X}(N_{\min} - 1, 0), \overline{\mathcal{X}_m}(N_{\min} - 1, 0)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда в силу следствия 4 существует  $m_2 \in \mathbb{N}$  такое, что  $x_0 \notin \overline{\mathcal{X}_{m_2}}(N_{\min} - 1, 0)$ , откуда с учетом (3) и (7) следует утверждение теоремы 3.

*Доказательство следствия 5.* В силу теорем 2 и 3 для выполнения следствия 5 достаточно выбрать  $m_0 = \max\{m_1; m_2\}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
3. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
4. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
5. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
6. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
7. Holtzman J.M., Halkin H. Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // J. SIAM Control. 1966. V. 4. No. 2. P. 263–275.
8. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
9. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 10. С. 3–32.  
*Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.*
10. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25.  
*Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.*
11. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // АиТ. 2003. № 12. С. 17–32.  
*Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.*

12. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ.* 2015. № 9. С. 3–30.  
*Ibragimov D.N., Sirodin A.N.* On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540.
13. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // *Электрон. журн. Тр. МАИ.* 2015. № 83. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
14. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // *Вычислительные технологии.* 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72.
15. *Kurzhan'skiy A.F., Varaiya P.* Theory and computational techniques for analysis of discrete-time control systems with disturbances // *Optim. Method Software.* 2011. V. 26. No. 4–5. P. 719–746.
16. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статистических стохастических систем // *АиТ.* 2020. № 4. С. 21–36.  
*Kibzun A.I., Ivanov S.V., Stepanova A.S.* Construction of Confidence Absorbing Set for Analysis of Static Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 5. P. 589–601.
17. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Аппроксимация вероятностных ограничений в задачах стохастического программирования с использованием ядра вероятностной меры // *АиТ.* 2019. № 11. С. 93–107.  
*Vasil'eva S.N., Kan Yu.S.* Approximation of Probabilistic Constraints in Stochastic Programming Problems with a Probability Measure Kernel // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 11. P. 2005–2016.
18. *Гайнанов Д.Н., Кибзун А.И., Рассказова В.А.* Задача о декомпозиции множества путей ориентированного графа и ее приложение // *АиТ.* 2018. № 12. С. 142–166.  
*Gainanov D.N., Kibzun A.I., Rasskazova V.A.* The Decomposition Problem for the Set of Paths in a Directed Graph and Its Application // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 12. P. 2217–2236.
19. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2010.
20. *Каменев Г. К.* Алгоритм сближающихся многогранников // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1996. Т. 36. № 4. С. 134–147.
21. *Sonnevend G.* Asymptotically Optimal, Sequential Methods for the Approximation of Convex, Compact Sets in  $R^n$  in the Hausdorff Metrics // *Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai.* 1980. V. 35. No. 2. P. 1075–1089.
22. *Ludwig M.* Asymptotic Approximation of Smooth Convex Bodies by General Polytopes // *Mathematika.* 1999. V. 46. P. 103–125.
23. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // *Электрон. журн. Тр. МАИ.* 2016. № 87. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>



24. *Ибрагимов Д.Н., Порцева Е.Ю.* Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2019. № 2. С. 83–98.
25. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
26. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
27. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.*

Поступила в редакцию 21.06.2020

После доработки 03.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021