Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Стохастические системы

© 2021 г. **К.А. ВЫТОВТОВ, д-р техн. наук (vytovtov_konstan@mail.ru),**
Е.А. БАРАБАНОВА, д-р техн. наук (elizavetaalexb@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕОДНОРОДНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ПЕРЕХОДА

В статье рассматривается неоднородный марковский процесс с конечным числом дискретных состояний, непрерывным временем и кусочно-постоянными интенсивностями перехода. Впервые приведены аналитические выражения, описывающие и переходной, и стационарный режимы случайного процесса. Для решения этой задачи фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений Колмогорова найдена в аналитическом виде в элементарных функциях. Кроме того, рассматривается неоднородный процесс с периодически изменяющимися интенсивностями переходов. Для этого случая представлены условия существования стационарного режима. Приведены численные расчеты для процесса без скачков, со скачками и с периодическими скачками интенсивностей переходов.

Ключевые слова: неоднородный марковский процесс, кусочно-постоянные интенсивности переходов, уравнения Колмогорова.

DOI: 10.31857/S0005231021120060

1. Введение

Марковские случайные процессы используются для решения целого ряда задач в системах управления, теории надежности, системах массового обслуживания, поддержки принятия решений и т.д. [1–5]. Как правило, в литературе рассматриваются стационарные марковские процессы, однако во многих случаях реальные системы необходимо описывать с использованием нестационарных марковских процессов, в которых интенсивности переходов из состояния в состояние зависят от времени, а в ряде случаев их изменения носят скачкообразный характер [4]. Причинами таких изменений интенсивностей перехода, например в системах связи и управления, являются помехи, в том числе периодические.

Изучение марковских процессов с зависимыми от времени интенсивностями переходов началось с работ Кларка [6, 7] и продолжилось Лемуаном [8] и Харисоном [9]. В дальнейшем данная тема получила развитие в работах Когана Я.А., Литвина В.Г., Дудина А.Н., Миллера Б.М., Бондровой О.В. и Головко Н.И. [4, 10–14,] и др. Так, в [10] рассмотрено функционирование узлов информационных сетей Интернет, описываемых системами массового обслуживания с параметрами, изменяющимися в случайные моменты времени. В [12] рассматриваются системы массового обслуживания с основным и резервным приборами и скачкообразной интенсивностью входного потока и для данного случая получена система интегро-дифференциальных уравнений типа Колмогорова–Чепмена. В [13] также изучались марковские процессы со скачкообразным изменением интенсивностей входного потока. Предложен так называемый функционально-аналитический метод. В этой работе также приводится доказательство существования и единственности нестационарного и стационарного режимов. В [14] выведены интегро-дифференциальные уравнения относительно нестационарных и стационарных характеристик числа заявок на основе метода Колмогорова–Чепмена.

При рассмотрении систем массового обслуживания часто исследуется вопрос о возможности установления в системе стационарного режима [4, 5]. Однако стационарный режим во многих случаях не раскрывает реальной картины поведения многих систем, поскольку он не учитывает переходные процессы как в момент запуска системы, так и в момент внешних воздействий. В большинстве практических приложений как интенсивности переходов, так и вероятности состояний претерпевают изменения, которые можно проанализировать только в переходном режиме. Кроме этого, если, например, в начальный момент времени в системе массового обслуживания отсутствуют заявки, то время пребывания запросов в системе, их число и другие параметры будут отличаться от значений в установившемся режиме, и, следовательно, использование результатов расчета параметров системы в стационарном состоянии для анализа переходного режима не является корректным.

Одно из первых исследований переходного режима было представлено в работе Харрисона [9] в 1981 г. Но затем эта проблема долгое время не рассматривалась. Увеличение сетевого трафика и возникновение так называемых катастроф [15] привело к актуальности изучения переходного режима [16, 17]. В [16] представлены выражения для вероятностей состояний в переходном режиме для гетерогенной многосерверной марковской системы массового обслуживания, подверженной катастрофам. В [17] рассматривается система массового обслуживания M/M/2 с катастрофами, для которой получены зависящие от времени вероятности нахождения различного числа заявок в системе.

Таким образом, целый ряд случайных процессов описывается системой уравнений Колмогорова с зависящими от времени коэффициентами. Однако на данный момент отсутствует аналитическое решение для вероятностей состояний случайного марковского процесса с дискретным числом состояний и интенсивностями переходов, изменяющимися скачками в произвольные неслучайные моменты времени, выражающееся через интенсивности переходов в явном виде.

В данной работе впервые представлен аналитический подход для исследования как переходного, так и стационарного режимов случайного марковского процесса с дискретным числом состояний и изменяющимися скачками интенсивностями переходов. В разделе 3.1 представлена фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова для случая постоянных интенсивностей переходов. Здесь следует отметить, что определитель матрицы коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений равен нулю, а фундаментальная матрица не является унимодулярной, как в большинстве случаев [18–20]. Фундаментальная матрица для скачкообразных интенсивностей переходов получена в разделе 3.2. Несмотря на то что на сегодняшний день данный случай широко исследуется, аналитического выражения фундаментальной матрицы, выраженной в интенсивностях переходов в явном виде, в литературе представлено не было. Важным является также тот факт, что функция, описывающая интенсивности переходов, является произвольной детерминированной кусочно-постоянной, т.е. имеет произвольное число скачков. Случай периодически изменяющихся интенсивностей переходов исследован в разделе 3.3. Исследование условий существования переходного и стационарного режимов здесь основывается на аппарате теории устойчивости Ляпунова [18]. Численные расчеты для процесса с тремя состояниями представлены в разделе 4.

2. Постановка задачи

В данной работе рассматривается неоднородный марковский процесс с M дискретными состояниями и непрерывным временем (рис. 1). Пространство состояний процесса есть множество неотрицательных целых чисел. Время пребывания процесса в состоянии j имеет показательное распределение. Здесь предполагается, что все интенсивности переходов описываются кусочно-постоянными функциями (например, рис. 2). Система уравнений Колмогорова для этого случая, составленная с помощью Δt-метода [4–6, 8], имеет вид

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = -P_j(t) \sum_{i=1, i\neq j}^{M} \lambda_{ji}(t) + \sum_{i=1, i\neq j}^{M} \lambda_{ij}(t) P_i(t), \tag{1}$$

где $\lambda_{ij}(t)$ – кусочно-постоянные функции, $P_j(t)$ – вероятности состояний процесса, M – число состояний процесса. Основной целью статьи является разработка аналитического метода исследования неоднородного марковского процесса со скачкообразным изменением интенсивностей переходов, описываемого системой (1) с кусочно-постоянными коэффициентами.

Для решения (1) традиционно используется преобразование Лапласа [4, 5]. Однако такой подход не позволяет записать общее выражение для случая

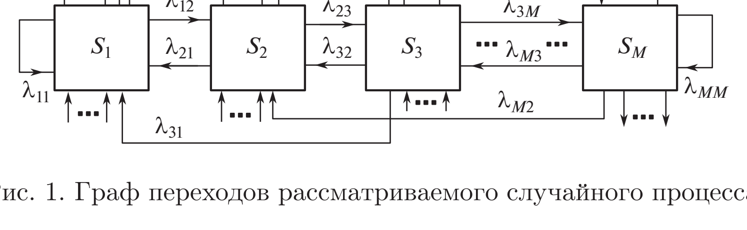

Рис. 1. Граф переходов рассматриваемого случайного процесса.

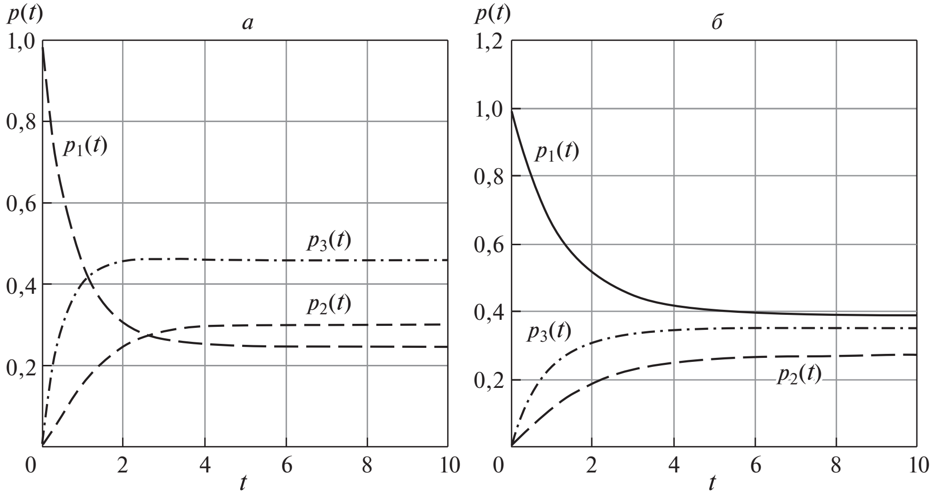

Рис. 2. Зависимость вероятностей состояний от времени для случая постоянных интенсивностей переходов.

произвольного числа состояний и произвольных интенсивностей переходов. Поэтому здесь предлагается принципиально иной подход, основанный на методе фундаментальной матрицы системы линейных однородных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.

3. Фундаментальная матрица

В данном разделе представлен аналитический метод решения системы уравнений Колмогорова, описывающей марковский случайный процесс с конечным числом M состояний в произвольный момент времени как с постоянными, так и с кусочно-постоянными интенсивностями переходов. Для этого использована концепция фундаментальной матрицы системы линейных однородных дифференциальных уравнений.

Известно, что фундаментальной матрицей $\mathbf{L}(t)$ является матрица [18–20], столбцы которой образуют фундаментальную систему решений. С практической точки зрения она связывает вероятности состояний процесса в некоторый момент времени t с теми же вероятностями в начальный момент времени t_0. Таким образом, для случая M состояний процесса можно написать

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_{M\times M}(t)\mathbf{U}(t_0). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{L}_{M\times M}(t)$ – искомая фундаментальная матрица размерностью $M \times M$, $\mathbf{U}(t) = (P_j)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояний случайного процесса, где $j = \overline{1, M}$, T – оператор транспонирования.

3.1. Фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающей процесс с постоянными интенсивностями переходов

В этом подразделе фундаментальная матрица $\mathbf{L}(t)$, описывающая переходный режим случайного однородного марковского процесса с M дискретными состояниями и постоянными интенсивностями переходов, получена в аналитической форме, удобной для дальнейшего исследования кусочно-постоянных интенсивностей переходов. В рассматриваемом случае $\mathbf{L}(t)$ — это матрица (M × M), имеющая вид

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{A}_j \exp(\gamma_j t). \tag{3}$$

Элементы (M × M) — матрицы $\mathbf{A}_j$ записываются как

$$(A_j)_{kl} = \frac{(-1)^{k+l}\Delta_{ij}}{\Delta}\xi_{kj}, \tag{4}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1M} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{M1} & \xi_{M2} & \dots & \xi_{MM} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

Δ_{lj} – определитель алгебраического дополнения к элементу ξ_{lj} матрицы Δ, Δ – собственный базис матрицы коэффициентов системы (1) в M-мерном пространстве [18], γ_j – j-й корень характеристического уравнения системы (1). Отметим, что выражение (3) справедливо, если все корни характеристического уравнения простые. Причем в рассматриваемой задаче один из корней всегда равен нулю, поскольку определитель матрицы коэффициентов равен нулю при любых положительных $\lambda_{ij}(t)$.

Одной из важнейших задач при рассмотрении переходного режима является нахождение постоянной времени процесса в переходном режиме и времени установления стационарного режима [9]. В данном случае процесс в переходном режиме представляет собой линейную комбинацию экспоненциальных процессов с постоянными времени $\tau_j = 1/\mid \gamma_j \mid$. Постоянная времени общего процесса определяется как величина, обратная модулю наименьшего ненулевого γ_j, т.е. $\tau = 1/\mid \gamma_{\min} \mid$, где $\forall \gamma_j \in \Gamma\,(\gamma_j \geqslant \gamma_{\min} \Rightarrow \gamma_j = \gamma_{\min})$ [9]. Тогда время переходного режима можно определить как $\tau_{\text{tr}} = (3 \div 5)\tau = (3 \div 5)/\mid \gamma_{j\min} \mid$.

3.2. Фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающей процесс с кусочно-постоянными интенсивностями переходов

Фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова с кусочно-постоянными интенсивностями переходов, описывающей процесс на N-м интервале, может быть найдена как произведение матриц с постоянными интенсивностями переходов [18–21]

$$\mathbf{L}_\Sigma(t) = \mathbf{L}_N(t - t_{N-1}) \left[\prod_{i=N-1}^{1} \mathbf{L}_i(\Delta t_i) \right], \tag{6}$$

где $\mathbf{L}_i(\Delta t_i)$ – фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающая процесс на i-м интервале с постоянными интенсивностями переходов, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ – длительность i-го интервала, N – число интервалов, $\mathbf{L}_N(t)$ – фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающая процесс на N-м интервале, $\mathbf{L}_\Sigma(t)$ – результирующая фундаментальная матрица. Действительно, пусть на первом интервале с постоянными интенсивностями переходов процесс описывается системой уравнений Колмогорова, фундаментальная матрица которой равна $\mathbf{L}_1(t - t_0)$. Тогда на этом интервале состояния системы в произвольный момент времени находятся как

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_1(t - t_0)\mathbf{U}(t_0), \tag{7}$$

а при $t = t_1$ имеем

$$\mathbf{U}(t_1) = \mathbf{L}_1(\Delta t_1)\mathbf{U}(t_0). \tag{8}$$

Аналогично для второго интервала запишем

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_2(t - t_1)\mathbf{U}(t_1), \tag{9}$$

где $\mathbf{L}_2(t - t_1)$ – фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова, описывающей процесс на втором интервале с постоянными интенсивностями переходов. Учитывая условие непрерывности вероятностей состояний на границе между интервалами [18–20], можно подставить (8) в (9)

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_2(t - t_1)\mathbf{L}_1(\Delta t_1)\mathbf{U}(t_0). \tag{10}$$

Из (10) следует, что фундаментальная матрица, описывающая поведение процесса на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, имеет вид

$$\mathbf{L}_\Sigma(t) = \mathbf{L}_2(t - t_1)\mathbf{L}_1(\Delta t_1). \tag{11}$$

Проделав эту процедуру для произвольного конечного числа интервалов N, получим выражение (6).

В результате доказано, что матрица (6) описывает поведение случайного процесса и предполагает отсутствие скачков вероятностей состояний на границах интервалов. Однако скачки первой производной не исключаются. Действительно, в соответствии с методом [18–20] фундаментальная матрица системы (1) составляется при условии непрерывности функций, но не их производных. С точки зрения практических приложений это означает, что каждый из скачков интенсивностей перехода приводит к новому переходному режиму с начальными значениями, равными вероятностям состояний непосредственно перед скачком.

Подставляя (3) в (6), проводя алгебраические преобразования, применяя операцию логарифмирования, а затем потенцирования, найдем выражение фундаментальной матрицы для N интервалов с постоянными интенсивностями переходов и M состояниями системы:

$$\mathbf{L} = \sum_{\substack{j_i=1\\ 1\leqslant j\leqslant N}}^{M} \exp\left[\sum_{i=N-1}^{1}\big(\mathrm{Ln}(\mathbf{A}_{ij_i}) + \gamma_{ij_i}\Delta t_i\big) + \mathrm{Ln}(\mathbf{A}_{Nj_N}) + \gamma_{Nj_N}(t - t_{N-1})\right], \tag{12}$$

где i – номер интервала с постоянными интенсивностями переходов, j_i – номер состояния процесса на интервале i, $\mathbf{A}_{ij_i}$ – матрицы с элементами (3) на i-м интервале, γ_{ij_i} – j_i-й корень характеристического уравнения системы (1) на интервале i.

Таким образом, найдена фундаментальная матрица системы уравнений Колмогорова для неоднородного марковского процесса с произвольным конечным числом состояний и произвольными кусочно-постоянными интенсивностями переходов. Отметим, что преобразование произведения фундаментальных матриц в конечную сумму экспонент без нарушения граничных условий в моменты скачков интенсивностей переходов является важным моментом для данного результата. Действительно, каждая из экспонент в (12) описывает некоторый непрерывный экспоненциальный процесс. Такой подход позволяет анализировать влияние каждого интервала с постоянными параметрами на результирующее состояние процесса. Кроме того, очевидно, что результирующее состояние процесса определяется параметрами каждого из интервалов с постоянными интенсивностями переходов. Поэтому нельзя считать, что общее решение является результатом простого совмещения решений на интервалах с постоянными параметрами. Более того, отметим, что предложенный подход не требует использования численных методов, которые обычно применялись для решения дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами.

3.3. Процесс с периодическими кусочно-постоянными интенсивностями переходов

Приведенные выше результаты очень важны для самых разнообразных приложений. Например, изучение процессов с периодическими интенсивностями переходов является очень интересной, но не изученной практической задачей. Допустим, что интенсивности переходов являются периодическими функциями времени $\lambda_{ij}(kT+t)=\lambda_{ij}(t)$, $k\in\mathbb{Z}$, T – период изменения интенсивностей переходов. Причем $\lambda_{ij}(t)$ на периоде является кусочно-постоянной функцией. Очевидно, что фундаментальная матрица для K периодов T изменения интенсивностей переходов может быть найдена как K-я степень матрицы (12) [18]:

$$\mathbf{L}_K=\left\{\sum_{\substack{j_i=1\\1\leqslant i\leqslant N}}^{M}\exp\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\mathrm{Ln}\left(\mathbf{A}_{ij_i}\right)+\gamma_{ij_i}\Delta t_i\right)\right]\right\}^K. \tag{13}$$

Вычисление выражения (13) является достаточно сложной задачей, особенно если число состояний M очень велико. Однако для описания рассматриваемого периодического процесса достаточно исследовать фундаментальную матрицу процесса за период T в виде (13). Действительно, собственные числа и собственные векторы матрицы (13) полностью характеризуют рассматриваемый случайный процесс [18]. Отметим также, что при периодической зависимости коэффициентов (1) от времени нет необходимости рассматривать динамику процесса внутри каждого периода, но необходимо исследовать изменение вероятностей состояний за один период. Этот вопрос является одной из важнейших задач теории устойчивости дифференциальных уравнений [18, 21, 22]. При этом наиболее часто используется понятие устойчивости решений по Ляпунову, поскольку оно является наиболее строгим. Согласно теории устойчивости, процесс будет устойчивым по Ляпунову и достигнет стационарного состояния с течением времени только в том случае, если все мультипликаторы q_m системы (1) (собственные числа q_m фундаментальной матрицы (12)) по модулю меньше единицы ($q_m \leqslant\mid 1 \mid$, $m = \overline{1, M}$) или, другими словами, характеристические показатели Ляпунова $\alpha_m = (1/T)\,\mathrm{Ln} q_m \leqslant 0$ должны быть отрицательными либо равными нулю.

Более того, процесс является экспоненциальным, если все мультипликаторы q_m системы (1) с периодическими коэффициентами действительны. Процесс является незатухающим гармоническим, если мультипликаторы q_m мнимые. Процесс должен быть затухающим волнообразным, если хотя бы один мультипликатор q_m является комплексным и его действительная часть по модулю меньше единицы.

Отметим также, что мультипликаторы системы (1) могут быть мнимыми или комплексными, даже если ее собственные числа на интервалах с постоянными коэффициентами действительны и отрицательны [18, 21, 22]. При этом данный факт не означает, что комплексными или мнимыми являются вероятности состояний, а означает лишь волнообразный характер процесса. Действительная часть мультипликатора определяет скорость затухания переходного режима, а мнимая часть определяет частоту переколебаний вероятностей состояний в этом режиме. Таким образом, если все мультипликаторы по модулю меньше единицы, то время переходного режима процесса определяется как $\tau_{\mathrm{tr}} = 1/ \mid \mathrm{Re}\,(q_{\min}) \mid$, где $q_{\min}$ – минимальный мультипликатор системы.

4. Численный расчет

В этом разделе приводится тестовый расчет на примере частного случая марковского случайного процесса с тремя дискретными состояниями, непрерывным временем и зависящими от времени кусочно-постоянными интенсивностями переходов. В данном случае система уравнений Колмогорова приводится к следующему виду:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{dP_1(t)}{dt} &= -\left(\lambda_{12}(t) + \lambda_{13}(t)\right) P_1(t) + \lambda_{21}(t)P_2(t) + \lambda_{31}(t)P_3(t),\\
\frac{dP_2(t)}{dt} &= \lambda_{12}(t)P_1(t) - \left(\lambda_{21}(t) + \lambda_{23}(t)\right) P_2(t) + \lambda_{32}(t)P_3(t),\\
\frac{dP_3(t)}{dt} &= \lambda_{13}(t)P_1(t) + \lambda_{23}(t)P_2(t) - \left(\lambda_{31}(t) + \lambda_{32}(t)\right) P_3(t),
\end{aligned}
\right.
\tag{14}
$$

для постоянных коэффициентов ($\lambda_{ij} = \text{const}$) ее характеристические числа являются решением линейного алгебраического уравнения третьего порядка, один из которых всегда равен нулю.

Из вида матрицы коэффициентов уравнения (1) следует, что корни $\gamma_{2,3}$ всегда будут отрицательными [18]. Общие решения для вероятностей $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $P_3(t)$ при $\lambda_{ij} = \text{const}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \xi_{11}A + \xi_{12}B\exp(\gamma_2 t) + \xi_{13}C\exp(\gamma_3 t), \\ P_2(t) &= \xi_{21}A + \xi_{22}B\exp(\gamma_2 t) + \xi_{23}C\exp(\gamma_3 t), \\ P_3(t) &= \xi_{31}A + \xi_{32}B\exp(\gamma_2 t) + \xi_{33}C\exp(\gamma_3 t). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь A, B, C – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями, γ_j – корни характеристического уравнения системы (14), ξ_{kj} – коэффициенты, соотносящие $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, образующие собственный базис матрицы коэффициентов системы (14).

Далее также обычно учитывается известное соотношение

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1. \tag{16}$$

С учетом (16) находится постоянная интегрирования A как функция от λ_{ij}, а константы B и C определяются начальными условиями процесса.

Отметим, что из (15) очевидно следует, что при $t \to \infty$, $\gamma_{1,2} \leqslant 0$ и любых начальных условиях процесс стремится к стационарному режиму с вероятностями состояний

$$\begin{pmatrix} P_1^{(i)} \\ P_2^{(i)} \\ P_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11}^{(i)} & \xi_{12}^{(i)} & \xi_{13}^{(i)} \\ \xi_{21}^{(i)} & \xi_{22}^{(i)} & \xi_{23}^{(i)} \\ \xi_{31}^{(i)} & \xi_{32}^{(i)} & \xi_{33}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{17}$$

и результаты совпадают с ранее полученными [4, 5].

Однако в данной работе рассматривается классический подход [18–20] к решению системы линейных однородных дифференциальных уравнений (14), не использующий напрямую тождество (16). Ниже будет показано, что при использовании фундаментальной матрицы условие (16) выполняется автоматически и, следовательно, нет необходимости дополнительно вычислять константу A. Для рассматриваемого случая матрица (3) для i-го интервала с постоянными интенсивностями переходов принимает вид

$$\mathbf{L}_i = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{A}_j^{(i)} \exp(\gamma_j^{(i)} \Delta t_i), \tag{18}$$

где

$$
\mathbf{A}_j^{(i)} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \xi_{1j}^{(i)} \Delta_{j1}^{(i)} & \xi_{1j}^{(i)} \Delta_{j2}^{(i)} & \xi_{1j}^{(i)} \Delta_{j3}^{(i)} \\ \xi_{2j}^{(i)} \Delta_{j1}^{(i)} & \xi_{2j}^{(i)} \Delta_{j2}^{(i)} & \xi_{2j}^{(i)} \Delta_{j3}^{(i)} \\ \xi_{3j}^{(i)} \Delta_{j1}^{(i)} & \xi_{3j}^{(i)} \Delta_{j2}^{(i)} & \xi_{3j}^{(i)} \Delta_{j3}^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{19}
$$

и

$$
\Delta^{(i)} = \xi_{21}^{(i)} \left(\xi_{32}^{(i)} - \xi_{33}^{(i)} \right) + \xi_{22}^{(i)} \left(\xi_{33}^{(i)} - \xi_{31}^{(i)} \right) + \xi_{23}^{(i)} \left(\xi_{31}^{(i)} - \xi_{32}^{(i)} \right);
$$

$$
\Delta_{11}^{(i)} = \xi_{22}^{(i)} \xi_{33}^{(i)} - \xi_{23}^{(i)} \xi_{32}^{(i)}; \quad \Delta_{21}^{(i)} = \xi_{23}^{(i)} \xi_{31}^{(i)} - \xi_{21}^{(i)} \xi_{33}^{(i)}; \quad \Delta_{31}^{(i)} = \xi_{21}^{(i)} \xi_{32}^{(i)} - \xi_{22}^{(i)} \xi_{31}^{(i)};
$$

$$
\Delta_{12}^{(i)} = \xi_{32}^{(i)} - \xi_{33}^{(i)}; \quad \Delta_{22}^{(i)} = \xi_{33}^{(i)} - \xi_{31}^{(i)}; \quad \Delta_{32}^{(i)} = \xi_{31}^{(i)} - \xi_{32}^{(i)}; \quad \Delta_{13}^{(i)} = \xi_{23}^{(i)} - \xi_{22}^{(i)};
$$

$$
\Delta_{33}^{(i)} = \xi_{22}^{(i)} - \xi_{21}^{(i)}; \quad \xi_{1j}^{(i)} = 1.
$$

Далее для скачкообразного изменения интенсивностей переходов необходимо использовать матрицу (12).

Теперь рассмотрим случайный процесс с постоянными интенсивностями переходов. На рис. 2,*а* представлены зависимости вероятностей состояний от времени для интенсивностей переходов $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}9$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}8$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}6$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$ при начальных условиях $(P_1(0), P_2(0), P_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Расчеты показывают, что сумма вероятностей состояний в любой момент времени равна единице. Таким образом, условие (16) выполняется автоматически и никаких дополнительных расчетов при использовании представленного подхода не требуется. Также видно (рис. 2,*а*), что для этих параметров переходный режим имеет экспоненциальный характер, а стационарный режим устанавливается приблизительно при $t = 4{,}3$. Действительно, время переходного режима определяется характеристическими числами системы уравнений (1), которые в данном случае равны $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -1{,}168$, $\gamma_3 = -1{,}832$. Таким образом, переходной режим представляет собой суперпозицию двух переходных режимов с постоянными времени $\tau_2 = 1/\mid \gamma_2 \mid$ и $\tau_3 = 1/\mid \gamma_3 \mid$. Тогда время каждого переходного режима $t_{\mathrm{tr}2} = (3 \div 5)\tau_2 = 2{,}57 \div 4{,}28$, $t_{\mathrm{tr}3} = (3 \div 5)\tau_3 = 1{,}64 \div 2{,}73$, большее из которых 4,28 соответствует началу стационарного режима (рис. 2,*а*).

На рис. 2,*б* представлен результат расчетов для случая, когда есть вероятность того, что процесс не выйдет из какого-либо состояния. Здесь $\lambda_{11} = 0{,}5$, $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}4$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{22} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}6$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}5$, $\lambda_{33} = 0{,}1$, начальные условия $(P_1(0), P_2(0), P_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Из расчетов видно, что сумма вероятностей состояний в каждый момент времени в данном случае также равна единице, а стационарный режим устанавливается при $t = 8{,}5$.

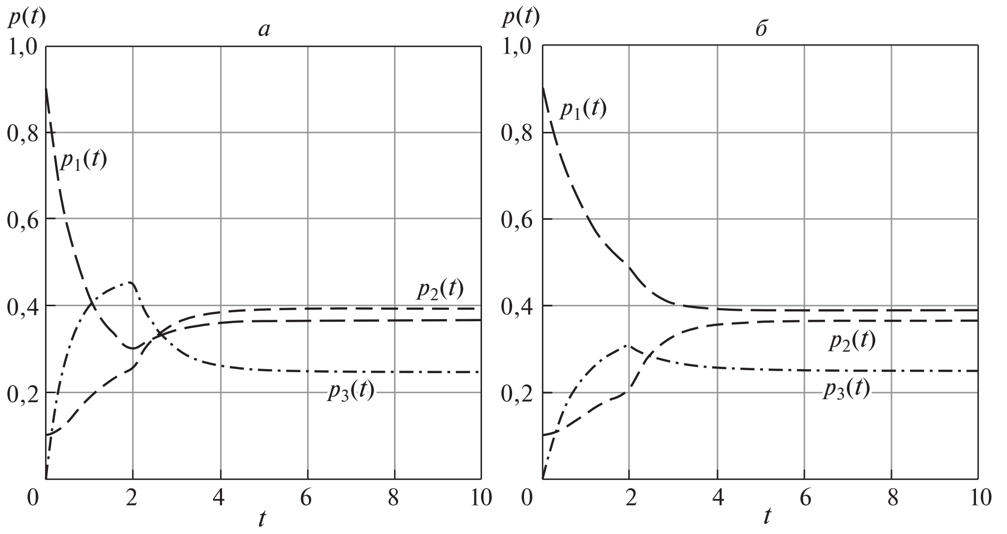

Рис. 3. Зависимость вероятностей состояний от времени при одном скачке.

Результаты численных расчетов для одного скачка интенсивностей переходов представлены на рис. 3,*а*. Скачок происходит в момент времени $t = 2$. Здесь на первом интервале с постоянными интенсивностями $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}9$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}8$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}6$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$; на втором интервале $\lambda_{12} = 0{,}7$, $\lambda_{13} = 0{,}3$, $\lambda_{21} = 0{,}65$, $\lambda_{23} = 0{,}35$, $\lambda_{31} = 0{,}45$, $\lambda_{32} = 0{,}55$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$, начальные условия $(P_1(0), P_2(0), P_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

Из рис. 3,*а* видно, что вероятности состояний не испытывают скачков при скачках интенсивностей переходов ($t = 2$), тем не менее для их первых производных наблюдаются скачки. Время переходного режима после скачка определяется параметрами процесса на втором интервале и составляет $t = 6$.

Результаты численных расчетов вероятностей состояний для одного скачка при наличии вероятностей того, что процесс не покинет определенные фиксированные состояния, показаны на рис. 3,*б*. Скачок происходит в момент времени $t = 2$. Здесь на первом интервале с постоянными интенсивностями $\lambda_{11} = 0{,}5$, $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}4$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{22} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}6$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}5$, $\lambda_{33} = 0{,}1$; на втором интервале $\lambda_{11} = 0{,}1$, $\lambda_{12} = 0{,}7$, $\lambda_{13} = 0{,}2$, $\lambda_{21} = 0{,}65$, $\lambda_{22} = 0{,}05$, $\lambda_{23} = 0{,}3$, $\lambda_{31} = 0{,}45$, $\lambda_{32} = 0{,}3$, $\lambda_{33} = 0{,}25$, начальные условия $(P_1(0), P_2(0) P_3(0))^{\mathrm{T}} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. В этом случае сумма вероятностей $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ в любой момент времени также равна единице. Стационарный режим устанавливается при $t = 7$, т.е. время переходного режима увеличилось в сравнении с этим временем для предыдущего случая. Это обусловлено уменьшением значений характеристических показателей системы Колмогорова в рассматриваемом случае.

Также рассчитан процесс с тремя состояниями и двумя скачками интенсивностей переходов, результаты представлены на рис. 4,*а,б*. На рис. 4,*а* показаны зависимости вероятностей состояний от времени для случая, когда

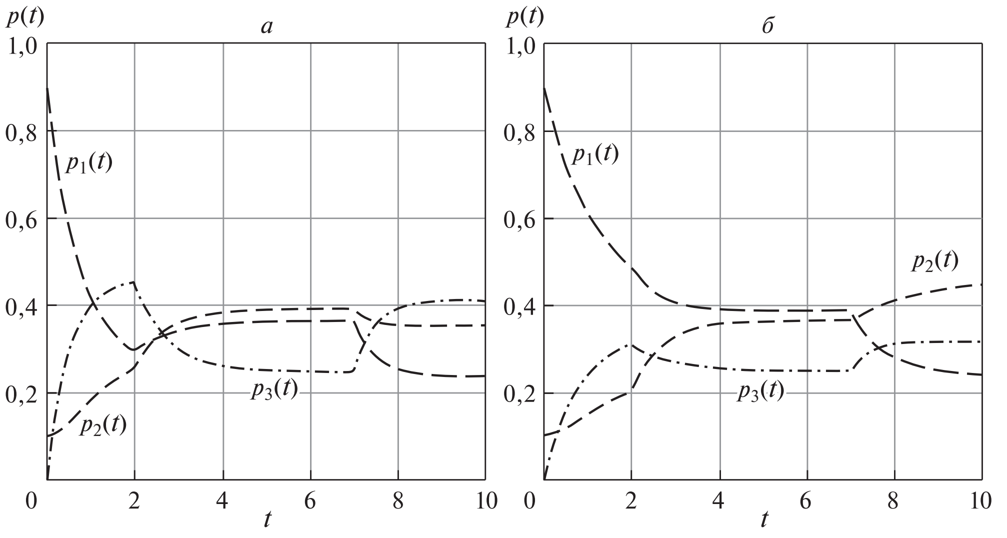

Рис. 4. Зависимость вероятностей состояний от времени.

$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$. Остальные параметры процесса следующие: на первом интервале с постоянными интенсивностями $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}9$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}8$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}6$; на втором интервале $\lambda_{12} = 0{,}7$, $\lambda_{13} = 0{,}3$, $\lambda_{21} = 0{,}65$, $\lambda_{23} = 0{,}35$, $\lambda_{31} = 0{,}45$, $\lambda_{32} = 0{,}55$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0$; на третьем интервале $\lambda_{12} = 0{,}3$, $\lambda_{13} = 0{,}7$, $\lambda_{21} = 0{,}1$, $\lambda_{23} = 0{,}9$, $\lambda_{31} = 0{,}6$, $\lambda_{32} = 0{,}4$. Скачки происходят в моменты времени $t = 2$ и $t = 7$. Также для рассматриваемого случая сумма вероятностей состояний равна единице для любого момента времени, а стационарный режим устанавливается при $t = 9{,}5$.

Также анализируется случай марковского процесса с тремя состояниями и двумя скачками интенсивностей переходов для ненулевых λ_{11}, λ_{22}, λ_{33} (рис. 4,*б*). Параметры процесса следующие: на первом интервале с постоянными интенсивностями $\lambda_{11} = 0{,}5$, $\lambda_{12} = 0{,}1$, $\lambda_{13} = 0{,}4$, $\lambda_{21} = 0{,}2$, $\lambda_{22} = 0{,}2$, $\lambda_{23} = 0{,}6$, $\lambda_{31} = 0{,}4$, $\lambda_{32} = 0{,}5$, $\lambda_{33} = 0{,}1$; на втором интервале $\lambda_{11} = 0{,}1$, $\lambda_{12} = 0{,}7$, $\lambda_{13} = 0{,}2$, $\lambda_{21} = 0{,}65$, $\lambda_{22} = 0{,}05$, $\lambda_{23} = 0{,}3$, $\lambda_{31} = 0{,}45$, $\lambda_{32} = 0{,}3$, $\lambda_{33} = 0{,}25$; на третьем интервале $\lambda_{11} = 0{,}2$, $\lambda_{12} = 0{,}3$, $\lambda_{13} = 0{,}6$, $\lambda_{21} = 0{,}1$ $\lambda_{22} = 0{,}4$, $\lambda_{23} = 0{,}5$, $\lambda_{31} = 0{,}6$, $\lambda_{32} = 0{,}3$, $\lambda_{33} = 0{,}1$. Скачки также происходят при $t = 2$ и $t = 7$. Как и для случая с двумя скачками и ненулевыми $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$, время переходного режима увеличилось в сравнении со случаем нулевых $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$.

Теперь рассмотрим неоднородный процесс с периодическими кусочно-постоянными интенсивностями переходов. Здесь предполагается, что период содержит три интервала с постоянными параметрами. Интенсивности переходов соответствуют значениям случая, представленного на рис. 4,*a*, длительности первого и второго интервалов $\Delta t_1 = 1$ и $\Delta t_2 = 2$ соответственно. На рис. 5 представлена зависимость мультипликаторов матрицы (19) от длительности третьего интервала Δt_3. Из результатов расчета видно, что два мультипликатора по модулю меньше единицы, а третий равен единице, т.е. в соответ-

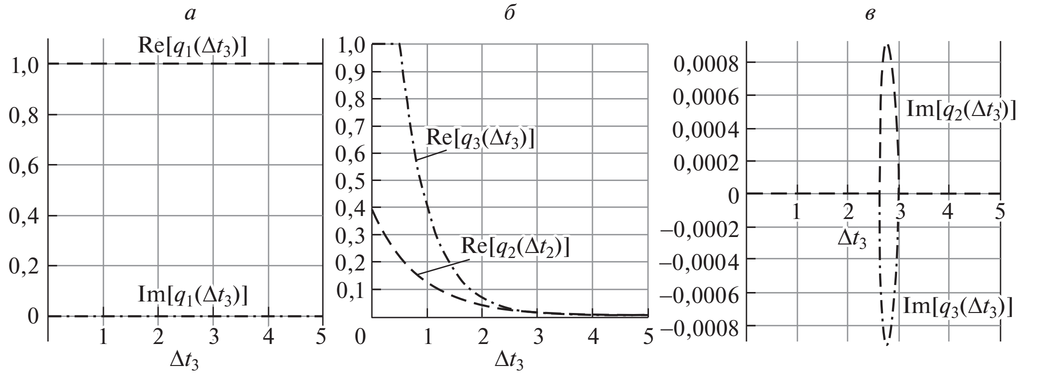

Рис. 5. Зависимость мультипликаторов системы (1) от длительности третьего интервала периода: *а*) действительная и мнимая части первого мультипликатора, *б*) действительные части второго и третьего мультипликаторов, *в*) мнимые части второго и третьего мультипликаторов.

ствии с теоремой Ляпунова [18] процесс имеет стационарное состояние. Кроме того, два из трех мультипликаторов являются комплексно-сопряженными, если $2{,}63 \leqslant \Delta t_3 \leqslant 3{,}0$ (рис. 5,*б*,*в*). Следовательно, при большом числе периодов процесс имеет стационарное состояние, а переходной режим имеет затухающий гармонический характер.

5. Заключение

В этой статье рассматривается неоднородный марковский процесс с конечным числом дискретных состояний M, непрерывным временем и кусочно-постоянными интенсивностями переходов $\lambda_{ij}(t)$. Выражения, описывающие одновременно как переходные, так и стационарные режимы случайного процесса, представлены впервые. В работе предложено аналитическое решение системы уравнений Колмогорова (1) с кусочно-постоянными коэффициентами. Для решения этой задачи фундаментальная матрица (6) или (12) системы (1) находится в аналитическом виде в элементарных функциях. Предлагаемый метод позволяет исследовать рассматриваемый марковский процесс без использования численных методов. Изучение фундаментальной матрицы дает возможность описать характер процесса даже без начальных условий. Действительно, собственные значения и собственные векторы этой матрицы дают полную картину поведения решений системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Более того, решение представлено в виде конечной суммы членов, описывающих некоторые случайные процессы. Дополнительно рассматривается неоднородный процесс с периодически изменяющимися интенсивностями переходов. Представлены условия существования стационарного режима при периодически изменяющихся интенсивностях переходов. Также приведены численные расчеты, доказывающие правильность разработанного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abubakar U.Y., Hakimi D., Mohammed A., Lawal A.A.* A Non-stationary Transition Probabilities for a Reservoir Elevation of Hydro Electric Power Dam // IOSR J. Math. 2014. V. 10. No. 3. C. 39–44.
2. *Shirdel G.H., Abdolhosseinzadeh M.* The shortest path problem in the stochastic networks with unstable topology // SpringerPlus. 2016. No. 5:1529.

   https://doi.org/10.1186/s40064-016-3180-7
3. *Jaime González-Domínguez, Gonzalo Sánchez-Barroso and Justo García-Sanz-Calcedo.* Scheduling of Preventive Maintenance in Healthcare Buildings Using Markov Chain // Appl. Sci. 2020. V.10. No. 15. 5263.

   https://doi.org/10.3390/app10155263
4. *Миллер А.Б., Миллер Б.М., Степанян К.В.* Одновременное импульсное и непрерывное управление марковской цепью в непрерывном времени // АиТ. 2020. № 3. С. 114–131.

   Miller A.B., Miller B.M., Stepanyan K.V. Simultaneous Impulse and Continuous Control of a Markov Chain in Continuous Time // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 3. P. 469–482.
5. *Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименюк, В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018.
6. *Clarke A.B.* The time-dependent waiting line problem. Umv Michigan Rept M720-1RS9. 1953.
7. *Clarke A.B.* On time-dependent waiting line processes // Ann. Math. Statist. 1953. V. 24. P. 491–492.
8. *Lemoine A.J.* On queues with periodic Poisson input // J. Appl. Prob. 1981. V. 18. P. 889–900.
9. *Harrison P.G.* Transient Behaviour of Queueing Networks // J. Appl. Prob. 1981. V. 18. No. 2. P. 482–490.
10. *Коган Я.А., Литвин В.Г.* К вычислению характеристик систем массового обслуживания с конечным буфером, работающей в случайной среде // АиТ. 1976. № 12. С. 49–57.
11. *Дудин А.Н.* Об обслуживающей системе с переменным режимом работы // Автоматика и вычислительная техника. 1985. № 2. С. 27–29.
12. *Бондрова О.В., Крылова Д.С., Головко Н.И., Жук Т.А.* Вывод уравнений для систем массового обслуживания с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // Вестник ВГУ: Серия: физика. математика. 2015. № 4. С. 89–100.
13. *Головко Н.И., Каретник В.О., Пелешок О.В.* СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // Автоматика и вычислительная техника. 2009. № 10. С. 75–96.
14. *Бондрова О.В., Головко Н.И., Жук Т.А.* Вывод уравнений типа Колмогорова–Чепмена с интегральным оператором // Дальневосточный мат. журн. 2017. Т. 17. № 2. С. 135–146.
15. *Dudin A.N., Karolik A.V.* BMAP/SM/1 Queue with Markovian Input of Disasters and Non-instantaneous Recovery // Performance Evaluat. 2001. V. 45. No. 1. P. 19–32.

16. *Dharmaraja S., Rakesh Kumar.* Transient solution of a Markovian queuing model with heterogeneous servers and catastrophes // OPSEARCH. 2015. 52(4). P. 810–826.

17. *Kumar B. Krishna, Madheshwari S. Pavai, Venkatakrishanan K.S.* Transient solution of an M/M/2 queue with heterogeneous servers subject to catastrophes // Int. J. Inform. Management Sci. 2017. V. 18. No. 1. P. 63–80.

18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

19. *Vytovtov K., Barabanova E., Vishnevskiy V.* Accurate mathematical model of two-dimensional parametric systems based on 2×2 Matrix // Commun. Comput. Inform. Sci. 2019. V. 1141. P. 199–211.

20. *Vytovtov K., Barabanova E.* Mathematical model of four-dimensional parametric systems based on block diagonal matrix with 2×2 blocks // Commun. Comput. Inform. Sci. 2019. P. 139–155.

21. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

22. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 29.01.2021

После доработки 03.05.2021

Принята к публикации 30.06.2021