© 2021 г. **С.В. ИВАНОВ, д-р физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru),**
С.Д. МЕРЗЛИКИНА (sv.merzlikina@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

ПОИСК РАВНОВЕСИЙ ПО НЭШУ В БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ И КВАНТИЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫШЕЙ[1]

Рассматривается биматричная игра со случайными выигрышами игроков и смешанными стратегиями. Определяются функции вероятности и квантили потерь игроков (выигрышей с противоположным знаком). Для данных функций потерь рассматриваются задачи поиска равновесия по Нэшу. Показано, что игра с вероятностным критерием сводится к биматричной игре с функциями выигрышей в форме математического ожидания. Получены необходимые и достаточные условия существования равновесия в игре с квантильным критерием. Доказана теорема о связи равновесий в играх с квантильными и вероятностными критериями. Предложен алгоритм поиска равновесий в игре с квантильным критерием. Алгоритм основан на последовательном решении задач поиска точек, принадлежащих множествам, описываемым квадратичными невыпуклыми ограничениями. Предлагаются подходы к нахождению данных точек. Приведены результаты вычислений равновесных пар стратегий.

Ключевые слова: теория игр, биматричная игра, функция вероятности, функция квантили, равновесие по Нэшу, игра с вероятностными ограничениями.

DOI: 10.31857/S0005231021120072

1. Введение

Важной задачей исследования операций является описание поведения нескольких конкурирующих лиц, одновременно принимающих решения. Для математического моделирования их поведения используется аппарат теории игр (см., например, [1, 2]). Равновесием по Нэшу называется такая ситуация в игре, при которой ни одному из игроков невыгодно отклоняться от выбранных стратегий в одностороннем порядке. В случае конечного множества стратегий игроков (так называемых чистых стратегий) выигрыши игроков могут быть записаны с помощью двух матриц, поэтому такая игра называется биматричной.

Известно, что в биматричной игре не всегда существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. В связи с этим рассматривается смешанное расширение биматричной игры, состоящее в том, что игроки задают вероятности выбора чистых стратегий (смешанные стратегии). При этом функциями

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-37-70022).

выигрышей игроков являются математические ожидания случайного выигрыша. В такой биматричной игре всегда существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях. Поиск равновесия в биматричной игре сводится к решению конечного числа систем линейных уравнений [1]. Другой подход основан на теореме, доказанной в [3], согласно которой все равновесия по Нэшу в биматричной игре являются глобальными оптимумами некоторой квадратичной невыпуклой задачи оптимизации. Метод решения данной задачи с помощью теории d.c.-оптимизации предложен в [4]. Способ сведения поиска равновесия по Нэшу в полиматричной игре к невыпуклой задаче оптимизации предложен в [5].

Не всегда использование математического ожидания в качестве критериальной функции оправданно. Надежность функционирования моделируемой системы целесообразно описывать с помощью функций вероятности и квантили [6]. В биматричной игре можно сформулировать функции потерь игроков в форме вероятности и квантили. Функция вероятности определяется как вероятность непревышения потерями игрока заданного уровня. Значение функции квантили показывает минимальные потери игрока, непревышение которых гарантируется с заданной вероятностью. Данный подход был применен в [7], где формулировалась игра с медианной функцией выигрыша, представляющей собой квантиль уровня 1/2. Методы поиска минимаксной стратегии в игре с квантильным критерием предложены в [8], а для игр со случайными функциями выигрышей — в [9]. Задачи поиска равновесий по Нэшу в этих работах не рассматривались.

Алгоритм поиска равновесия по Нэшу в матричной игре с квантильным критерием предложен в [10], где предполагалось, что первый игрок максимизирует свой гарантированный доход, а второй игрок стремится его минимизировать. В [10] доказано существование равновесия по Нэшу в этой игре. Следует отметить возникающую асимметрию в принятии решений согласно этой модели. С точки зрения второго игрока более выгодна не минимизация гарантированного дохода первого игрока, а максимизация собственного гарантированного выигрыша. В отличие от [10] в данной работе рассматривается биматричная игра, в которой каждый из игроков стремится максимизировать свой гарантированный выигрыш (или минимизировать свои потери). Решаются задачи поиска равновесия по Нэшу в играх с квантильными и вероятностными функциями потерь.

Близкая к рассматриваемой в работе постановка изучалась в [11], где функции выигрышей игроков определяются как квантили усредненных по смешанным стратегиям случайных доходов игроков. Данная игра в [11] называется игрой с вероятностными ограничениями. Для некоторых распределений случайных параметров доказано существование равновесия по Нэшу. В [12] для биматричной игры с вероятностными ограничениями для некоторых распределений случайных параметров предложен метод поиска равновесия по Нэшу, основанный на сведении к задаче квадратичного программирования. Обобщение данных игр на случай непрерывных стратегий приводится в [13]. В отличие от [11, 12] в данной работе используется другой подход к определению функции потерь: рассматривается не квантиль усредненных по смешанным стратегиям случайных доходов игроков, а квантиль случайных доходов игроков без усреднения по стратегиям.

Игры с квантильными критериями нашли свое применение при моделировании взаимодействия экономических агентов [14] и моделировании энергетических рынков [15].

2. Постановка задачи

Пусть поведение первого игрока описывается случайным вектором ξ с реализациями $e_1, \ldots, e_m$, где e_k — m-мерный вектор, k-я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Аналогично поведение второго игрока описывается случайным вектором η с реализациями $e'_1, \ldots, e'_n$, где e'_l — n-мерный вектор, l-я компонента которого равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Случайные векторы ξ и η определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и являются независимыми. Распределения случайных векторов ξ и η описываются векторами $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, компоненты которых определяются по правилу

$$x_k \triangleq \mathbf{P}\{\xi = e_k\}, \quad k \in \{1, \ldots, m\},$$
$$y_l \triangleq \mathbf{P}\{\eta = e'_l\}, \quad l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Векторы x, y называются смешанными стратегиями первого и второго игрока соответственно. Они должны удовлетворять ограничениям:

$$x \in X \triangleq \left\{ \sum_{k=1}^{m} x_k = 1, \ x \geqslant 0 \right\},$$
$$y \in Y \triangleq \left\{ \sum_{l=1}^{n} y_l = 1, \ y \geqslant 0 \right\}.$$

Стратегии, в которых только одна компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю, называются чистыми.

Случайные проигрыши (или выигрыши с противоположным знаком) первого и второго игрока при использовании чистых стратегий задаются матрицами $\mathbf{A} \triangleq (\mathbf{a}_{kl})$ и $\mathbf{B} \triangleq (\mathbf{b}_{kl})$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, составленными из случайных величин $\mathbf{a}_{kl} \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{b}_{kl} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Таким образом, в результате игры игроки получают случайные выигрыши $-\xi^\top \mathbf{A} \eta$ и $-\xi^\top \mathbf{B} \eta$ соответственно.

В данной статье предполагается, что случайные величины $\mathbf{a}_{kl}$, $\mathbf{b}_{kl}$ являются дискретными с конечным множеством реализаций, а также что случайные векторы ξ, η и случайный вектор, составленный из всех случайных величин $\mathbf{a}_{kl}$, $\mathbf{b}_{kl}$, независимые. Из независимости этих случайных векторов следует, что вероятность события, состоящего в том, что проигрыш первого игрока составит не более заданной величины $\varphi \in \mathbb{R}$, равняется

$$P \left\{ \xi^\top \mathbf{A} \eta \leqslant \varphi \right\} = x^\top A(\varphi) y, \tag{1}$$

где элементы матрицы $A(\varphi) = (a_{kl}(\varphi))$ определяются по правилу:

$$a_{kl}(\varphi) \triangleq \mathbf{P}\{\mathbf{a}_{kl} \leqslant \varphi\}.$$

Аналогично можно определить вероятность того, что проигрыш второго игрока составит не более заданной величины $\psi \in \mathbb{R}$:

$$P\left\{\xi^\top \mathbf{B}\eta \leqslant \psi\right\} = x^\top B(\psi) y,$$

где $B(\psi) = (b_{kl}(\psi))$, $b_{kl}(\psi) \triangleq \mathbf{P}\{\mathbf{b}_{kl} \leqslant \psi\}$.

Таким образом, следуя принятой в [6] терминологии, можно ввести функции вероятности

$$P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) \triangleq \mathbf{P}\left\{\xi^\top \mathbf{A}\eta \leqslant \varphi\right\} = x^\top A(\varphi) y,$$
$$P_\psi(\mathbf{B}, x, y) \triangleq \mathbf{P}\left\{\xi^\top \mathbf{B}\eta \leqslant \psi\right\} = x^\top B(\psi) y,$$

где φ, ψ — заданные числа. Функции вероятности при заданных значениях x и y как функции параметров φ и ψ являются функциями распределения случайных величин $\xi^\top \mathbf{A}\eta$, $\xi^\top \mathbf{B}\eta$ соответственно. Значения $P_\varphi(\mathbf{A}, x, y)$, $P_\psi(\mathbf{B}, x, y)$ показывают вероятность благоприятного исхода игры, когда проигрыш оказывается меньше предельно допустимого уровня, для первого и второго игрока соответственно. Таким образом, игроки заинтересованы в максимизации данных вероятностей. Поэтому можно определить игру с вероятностным критерием, которая будет обозначаться как $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \varphi, \psi)$. Для данной игры ставится задача поиска равновесия по Нэшу.

Определение 1. Пара смешанных стратегий $(x, y) \in X \times Y$ называется равновесной по Нэшу в игре $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \varphi, \psi)$ с вероятностным критерием, если для всех $x' \in X$, $y' \in Y$ выполнено

$$P_\varphi(\mathbf{A}, x', y) \leqslant P_\varphi(\mathbf{A}, x, y),$$
$$P_\psi(\mathbf{B}, x, y') \leqslant P_\psi(\mathbf{B}, x, y).$$

Введем функции квантили

$$\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) \geqslant \alpha\}, \tag{2}$$
$$\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y) = \min\{\psi \in \mathbb{R} \mid P_\psi(\mathbf{B}, x, y) \geqslant \beta\}, \tag{3}$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$ — заданные значения функций вероятности. В (2) минимум корректно определен [6] по той причине, что функция $\varphi \mapsto P_\varphi(\mathbf{A}, x, y)$ является функцией распределения случайной величины $\xi^\top \mathbf{A}\eta$, а функция распределения всегда является непрерывной справа. Аналогичное верно и для (3). Таким образом, значение $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$ показывает минимальный проигрыш первого игрока, непревышение которого гарантируется с вероятностью α, а $\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y)$ — минимальный проигрыш второго игрока, непревышение которого гарантируется с вероятностью β. Иными словами, значения

$-\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$ и $-\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y)$ равны максимальным гарантированным с заданными вероятностями выигрышам первого и второго игрока соответственно.

Сформулируем понятие равновесия по Нэшу в игре с квантильным критерием, которая будет обозначаться как $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$.

Определение 2. Пара смешанных стратегий $(x, y) \in X \times Y$ называется равновесной по Нэшу в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$ с квантильным критерием, если для всех $x' \in X$, $y' \in Y$ выполнено

$$\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x', y) \geqslant \varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y),$$
$$\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y') \geqslant \varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y).$$

В статье рассматриваются задачи поиска равновесия по Нэшу в играх $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \varphi, \psi)$ и $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$.

Замечание 1. Отметим отличия игры $Q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$ от других известных постановок игр с квантильными критериями. Сравнение произведем, используя обозначения данной статьи и заменив функции дохода на функции потерь. В [10] функцией потерь первого игрока является $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$, а функция потерь второго игрока равна $-\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$. Это значит, что второй игрок не минимизирует собственные потери, а максимизирует потери соперника. В общем случае $-\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) \neq \varphi_\alpha(-\mathbf{A}, x, y)$. Поэтому специальные методы, предложенные в [10], не могут быть применены для решения рассматриваемой задачи, даже когда $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$.

В [11, 12] функция потерь определяется следующим образом: $\varphi'_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid \mathbf{P}\{x\mathbf{A}y \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}$. Заметим, что $\mathbf{P}\{x\mathbf{A}y \leqslant \varphi\} \neq P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = \mathbf{P}\{\xi\mathbf{A}\eta \leqslant \varphi\}$, поскольку $x = \mathbf{M}\xi$, $y = \mathbf{M}\eta$. Это значит, что постановка [11, 12] предполагает усреднение функции потерь по смешанным стратегиям игроков. Отметим, что если матрица $\mathbf{A}$ является детерминированной, то данная постановка сводится к детерминированной игре. Изучаемая в данной работе задача даже в случае детерминированной матрицы $\mathbf{A}$ требует разработки новых методов.

3. Условия равновесия по Нэшу в играх с вероятностным и квантильным критериями

Рассмотрим произвольные случайные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, задающие игру с вероятностным или квантильным критерием. Расположим уникальные значения реализаций элементов матрицы $\mathbf{A}$ в порядке возрастания и обозначим их через $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$. Определим случайные величины $\bar{\mathbf{a}}_{kl}$ по правилу: $\bar{\mathbf{a}}_{kl} = i$, если $\mathbf{a}_{kl} = \varphi_i$. Составим случайную матрицу $\bar{\mathbf{A}} \triangleq (\bar{\mathbf{a}}_{kl})$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$. Аналогично по матрице $\mathbf{B}$ построим матрицу $\bar{\mathbf{B}} = \big(\bar{\mathbf{b}}_{kl}\big)$, а реализации ее элементов, расположенные в порядке возрастания, обозначим через $\psi_1, \ldots, \psi_N$. Для удобства будем считать, что $\varphi_{M+1} = \psi_{N+1} = +\infty$. Игру с вероятностным или квантильным критерием, задаваемую полученными случайными матрицами $\bar{\mathbf{A}}$ и $\bar{\mathbf{B}}$, назовем игрой в стандартной форме. В полученной игре элементы матриц $\bar{\mathbf{A}}$ и $\bar{\mathbf{B}}$ принимают значения во множествах $\{1, \ldots, M\}$, $\{1, \ldots, N\}$ соответственно.

Введем матрицы $A(\varphi) \triangleq \{a_{kl}(\varphi)\}$ и $B(\psi) \triangleq \{b_{kl}(\psi)\}$, элементы которых определяются по правилу

$$a_{kl}(\varphi) = \mathbf{P}\{\mathbf{a}_{kl} \leqslant \varphi\}, \quad b_{kl}(\psi) = \mathbf{P}\{\mathbf{b}_{kl} \leqslant \psi\},$$
$$k \in \{1, \ldots, m\}, \quad l \in \{1, \ldots, n\}.$$

Аналогично определяются матрицы $\bar{A}(\varphi) \triangleq \{\bar{a}_{kl}(\varphi)\}$ и $\bar{B}(\psi) \triangleq \{\bar{b}_{kl}(\psi)\}$:

$$\bar{a}_{kl}(\varphi) = \mathbf{P}\{\bar{\mathbf{a}}_{kl} \leqslant \varphi\}, \quad \bar{b}_{kl}(\psi) = \mathbf{P}\{\bar{\mathbf{b}}_{kl} \leqslant \psi\}. \tag{4}$$

Введем обозначения

$$A_i \triangleq \bar{A}(i), \quad B_j \triangleq \bar{B}(j), \quad i \in \{0, 1, \ldots, M\}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, N\}. \tag{5}$$

Заметим, что матрицы A_0 и B_0 являются нулевыми, а все элементы матриц A_M и B_N равны единице.

Лемма 1. Если $\varphi_i \leqslant \varphi < \varphi_{i+1}$, то

$$P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = x^\top A(\varphi) y = P_i(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = x^\top A_i y.$$

Доказательства леммы 1 и последующих теорем, лемм и следствий вынесены в Приложение.

Теорема 1. Пусть $\varphi_i \leqslant \varphi < \varphi_{i+1}$, $\psi_j \leqslant \psi < \psi_{j+1}$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

1) *пара стратегий $(x, y) \in X \times Y$ является равновесной в игре $\mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \varphi, \psi)$;*
2) *пара стратегий $(x, y) \in X \times Y$ является равновесной в игре $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, i, j)$;*
3) *для всех $x' \in X$ и $y' \in Y$*

$$x'^\top A_i y \leqslant x^\top A_i y,$$
$$x^\top B_j y' \leqslant x^\top B_j y.$$

Таким образом, полученный критерий позволяет любую игру с вероятностным критерием свести к игре в стандартной форме. Отметим, что множество игр в стандартной форме при фиксированных m, n является конечным.

Из теоремы 1 следует, что равновесие в игре с вероятностным критерием эквивалентно равновесию в биматричной игре с матрицами выигрышей игроков A_i и B_j, определенными в (5). Поэтому для поиска равновесия в игре с вероятностным критерием можно применять методы, разработанные для биматричных игр с критерием в форме математического ожидания [1, 4]. Как известно, такое равновесие всегда существует [1].

Перейдем к изучению игр с квантильным критерием.

Лемма 2. Для любых стратегий $(x, y) \in X \times Y$ выполнено

1) $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_M\}$;
2) $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \varphi_i$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i$, $i \in \{1, \ldots, M\}$.

Сформулируем теорему о необходимых и достаточных условиях равновесия по Нэшу в игре с квантильным критерием.

Теорема 2. Пусть $\alpha, \beta \in (0,1)$. Тогда следующие три утверждения эквиваленты:

1) *пара стратегий $(x, y) \in X \times Y$ является равновесной в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$;*
2) *пара стратегий $(x, y) \in X \times Y$ является равновесной в игре $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \alpha, \beta)$;*
3) *для некоторых $i \in \{1, \ldots, M\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$ выполнены неравенства*

$$x^\top A_i y \geqslant \alpha, \tag{6}$$

$$x^\top B_j y \geqslant \beta, \tag{7}$$

$$\|A_{i-1} y\|_\infty < \alpha, \tag{8}$$

$$\|B_{j-1}^\top x\|_\infty < \beta, \tag{9}$$

где $\|x\|_\infty = \max\limits_{k \in \{1,\ldots,m\}} |x_k|$.

При этом выполнены равенства

$$\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \varphi_i, \quad \varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y) = \psi_j, \quad \varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i, \quad \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j.$$

Таким образом, любая игра с квантильным критерием может быть сведена к игре в стандартной форме. Кроме того, теорема 2 описывает простые условия для проверки равновесности заданной пары стратегий игроков, не требующие вычисления функций квантили. Для проверки этих условий необходимо только вычислить матрицы A_i, B_j, A_{i-1}, B_{j-1} по формуле (5).

Сформулируем следствия из теоремы 2.

Докажем, что если в биматричной игре с матрицами выигрышей игроков $-\mathbf{A}$ и $-\mathbf{B}$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, то те же стратегии являются равновесными в игре с квантильным критерием.

Следствие 1. Пусть для пары стратегий (e_k, e'_l) с вероятностью единица выполнены условия

$$e_{k'}^\top \mathbf{A} e'_l \geqslant e_k^\top \mathbf{A} e'_l,$$
$$e_k^\top \mathbf{B} e'_{l'} \geqslant e_k^\top \mathbf{B} e'_l$$

для всех $k' \in \{1, \ldots, m\}$, $l' \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда (e_k, e'_l) — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$ для всех $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$.

Нижеприведенные следствия определяют необходимые условия, которым должны удовлетворять i, j, чтобы существовало решение системы неравенств (6)–(9).

Следствие 2. Если $(x, y) \in X \times Y$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \alpha, \beta)$, $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i$, $\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j$, то матрица A_{i-1} не содержит строк, все элементы которых не меньше α, а матрица B_{j-1} не содержит столбцов, все элементы которых не меньше β.

Отметим, что если матрица A_{i-1} содержит строку, все элементы которой не меньше α, то матрицы $A_i, \ldots, A_M$ обладают тем же свойством.

Следствие 3. Если $(x, y) \in X \times Y$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \alpha, \beta)$, $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i$, $\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j$, то хотя бы один элемент матрицы $A_i + B_j$ не меньше $\alpha + \beta$.

Отметим, что если все элементы матрицы $A_i + B_j$ меньше $\alpha+\beta$, то таким же свойством обладают матрицы $A_{i'} + B_{j'}$ при $i' \leqslant i$, $j' \leqslant j$.

4. О связи игр с квантильным и вероятностным критериями

Докажем теорему о том, что равновесная пара стратегий в игре с вероятностным критерием при некоторых значениях уровней надежности является равновесной и в игре с квантильным критерием.

Теорема 3. Пусть (x, y) — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, i-1, j-1)$, $i \in \{1, \ldots, M\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$. Тогда (x, y) — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \alpha, \beta)$ для

$$\alpha \in (x^\top A_{i-1} y, x^\top A_i y], \quad \beta \in (x^\top B_{j-1} y, x^\top B_j y]. \tag{10}$$

К сожалению, доказать или опровергнуть существование равновесия в произвольной игре с квантильным критерием затруднительно. Это связано с тем, что график многозначного отображения $x \mapsto \operatorname{Arg} \min\limits_{y \in Y} \varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y)$ не является замкнутым, что не позволяет применить теорему Какутани, используемую для доказательства существования равновесия в игре с критерием в форме математического ожидания [1]. Однако теорема 3 показывает, что при некоторых значениях α и β в игре с квантильным критерием равновесие существует. При проведении многочисленных вычислительных экспериментов авторам не удалось найти примеров, в которых не существует равновесных стратегий.

5. Алгоритм поиска равновесия в игре с квантильным критерием

Полученные следствия из теоремы 2 позволяют предложить алгоритм поиска равновесных пар стратегий в игре с квантильным критерием. Введем обозначения:

$$\overline{M} \triangleq \max \left\{ i \in \{1, \ldots, M\} \mid \max_{k \in \{1,\ldots,m\}} \min_{l \in \{1,\ldots,n\}} \bar{a}_{kl}(i-1) < \alpha \right\},$$

$$\overline{N} \triangleq \max \left\{ j \in \{1, \ldots, N\} \mid \max_{l \in \{1,\ldots,n\}} \min_{k \in \{1,\ldots,m\}} \bar{b}_{kl}(j-1) < \beta \right\},$$

$$\underline{N}(i) \triangleq \min \left\{ j \in \{1, \ldots, N\} \mid \max_{\substack{k \in \{1,\ldots,m\},\\ l \in \{1,\ldots,n\}}} \{\bar{a}_{kl}(i) + \bar{b}_{kl}(j)\} \geqslant \alpha + \beta \right\},$$

где $\bar{a}_{kl}(i)$, $\bar{b}_{kl}(j)$ определены в (4). Пусть

$$\underline{M} \triangleq \min\{i \in \{1, \ldots, M\} \mid \underline{N}(i) \leqslant \overline{N}\}.$$

Для поиска равновесий по Нэшу в игре с квантильным критерием можно предложить следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

1. Установить $i := \underline{M}$.

2. Если $i \leqslant \overline{M}$, установить $j := \underline{N}(i)$. В противном случае завершить выполнение алгоритма.

3. Если $j \leqslant \overline{N}$, то перейти к следующему шагу. Иначе перейти к шагу 6.

4. Найти пару стратегий $(x, y) \in X \times Y$, удовлетворяющую ограничениям (6)–(9). Если такая пара (x, y) найдена, то она является равновесной.

5. $j := j + 1$. Перейти к шагу 3.

6. $i := i + 1$. Перейти к шагу 2.

Отметим, что при выполнении алгоритма перебираются только те значения i, j, для которых выполнены необходимые условия существования решения системы (6)–(9), обеспечиваемые следствиями 2, 3.

При практической реализации алгоритма могут возникать трудности с проверкой на непустоту в общем случае незамкнутого множества, описываемого ограничениями (6)–(9). Данная проблема может быть решена двумя способами. Первый способ состоит в замене ограничений (8), (9) на ограничения

$$\|A_{i-1}y\|_\infty \leqslant \alpha - \varepsilon, \tag{11}$$

$$\|B_{j-1}^\top x\|_\infty \leqslant \beta - \varepsilon, \tag{12}$$

где ε — малая положительная константа. Ограничения (11), (12) эквивалентны линейным ограничениям

$$A_{i-1}y \leqslant (\alpha - \varepsilon)\mathbf{e}_m, \tag{13}$$

$$B_{j-1}^\top x \leqslant (\beta - \varepsilon)\mathbf{e}_n, \tag{14}$$

где $\mathbf{e}_m$ — вектор, составленный из m единиц. При использовании данного подхода задача сводится к проверке на непустоту множества, описываемого линейными и квадратичными (в общем случае невыпуклыми) ограничениями (6), (7), (13), (14). Данная задача может быть решена с помощью программ, предназначенных для решения линейных и квадратичных задач математического программирования с линейными и квадратичными ограничениями. Следует заметить, что при использовании данного подхода возможна потеря некоторых решений исходной задачи.

Второй подход состоит в решении задачи

$$\theta^* \triangleq \tag{15}$$

$$\triangleq \min_{\theta \in \mathbb{R},\, x \in X,\, y \in Y} \left\{ \theta \mid A_{i-1}y \leqslant \alpha\mathbf{e}_m\theta,\ B_{j-1}^\top x \leqslant \beta\mathbf{e}_n\theta,\ x^\top A_i y \geqslant \alpha,\ x^\top B_j y \geqslant \beta \right\}.$$

В задаче (15) минимум достигается, потому что множество допустимых значений (x, y) является компактом, а ограничение $\theta \in \mathbb{R}$ может быть заменено на $\theta \in \left[0, \max\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right\}\right]$. Сформулированная задача также может быть решена с помощью специальных программ. Нетрудно заметить, что $\theta^* < 1$ в том и только том случае, когда множество, описываемое ограничениями (6)–(9), непусто. Если $\theta^* < 1$, то пара оптимальных значений переменных (x, y) в задаче (15) будет являться равновесной по Нэшу в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$.

Следует заметить, что ограничения (6), (7) являются невыпуклыми. Поэтому проверка на совместность системы неравенств (6), (7), (13), (14) или решение задачи (15) является трудоемким. В связи с этим представляют интерес быстрые методы поиска пар стратегий (x, y), удовлетворяющих ограничениям (6)–(9). Предлагается следующий алгоритм, с помощью которого могут быть найдены решения системы неравенств (6)–(9).

Алгоритм 2.

1. Задать начальное значение стратегии второго игрока $y^{(0)} \in Y$, $\nu := 0$.

2. Решить задачу линейного программирования:

$$\theta_1^{(\nu)} \triangleq \max_{\theta\in\mathbb{R},\, x\in X} \left\{\theta \mid x^\top A_i y^{(\nu)} \geqslant \alpha\theta,\ x^\top B_j y^{(\nu)} \geqslant \beta\theta,\ B_{j-1}^\top x \leqslant (\beta - \varepsilon)\mathbf{e}_n\right\}. \tag{16}$$

Оптимальное значение переменной x в задаче (16) обозначим через $x^{(\nu)}$. Если у этой задачи нет решений, то система неравенств (6), (7), (13), (14) несовместна. Если $\nu > 0$ и $\theta_1^\nu \geqslant 1$, то $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$. Если $\nu > 1$ и $\theta_1^{(\nu)} \leqslant \theta_1^{(\nu-1)}$, завершить выполнение алгоритма.

3. Решить задачу линейного программирования:

$$\theta_2^{(\nu)} \triangleq \max_{\theta\in\mathbb{R},\, y\in Y} \left\{\theta \mid x^{(\nu)\top} A_i y \geqslant \alpha\theta,\ x^{(\nu)\top} B_j y \geqslant \beta\theta,\ A_{i-1} y \leqslant (\alpha - \varepsilon)\mathbf{e}_m\right\}. \tag{17}$$

Оптимальное значение переменной y в задаче (17) обозначим через $y^{(\nu+1)}$. Если у этой задачи нет решений, то система неравенств (6), (7), (13), (14) несовместна. Если $\theta_2^\nu \geqslant 1$, то $(x^{(\nu)}, y^{(\nu+1)})$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$.

4. Присвоить $\nu := \nu + 1$ и перейти к шагу 2.

При $\nu = 0$ в результате применения алгоритма находится пара стратегий $(x^{(0)}, y^{(1)})$, удовлетворяющая неравенствам (13), (14). Затем получается возрастающая последовательность $\theta_1^{(1)} \leqslant \theta_2^{(1)} \leqslant \theta_1^{(2)} \leqslant \theta_2^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \theta_q^{(\nu)}$, где $q = 1$ или $q = 2$. Если $\theta_1^{(\nu)} \geqslant 1$ и $\nu > 0$, то $(x^{(\nu)}, y^{(\nu)})$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$. Если $\theta_2^{(\nu)} \geqslant 1$, то $(x^{(\nu)}, y^{(\nu+1)})$ — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$. Если $\theta_1^{(\nu)} < 1$ или $\theta_2^{(\nu)} < 1$, то для поиска равновесной пары стратегий можно снова воспользоваться алгоритмом 2, задав другую начальную стратегию $y^{(0)}$. В силу невыпуклой структуры рассматриваемой задачи нельзя гарантировать, что в результате применения алгоритма будет найдено решение системы неравенств (6), (7), (13), (14), если оно существует. Однако в случае успешного применения алгоритма 2 нет необходимости решать задачу невыпуклой оптимизации.

Предложим алгоритм поиска начальной стратегии $y^{(0)} \in Y$ для применения алгоритма 2.

Алгоритм 3.

1. Найти максимальные элементы матриц $A_i - A_{i-1}$ и $B_j - B_{j-1}$. Обозначим индексы этих элементов через (k_1, l_1), (k_2, l_2) соответственно.

2. Если $k_1 = k_2$, $l_1 = l_2$, то при выполнении условий $a_{k_1 l_1} \leqslant a_{k l_1}$ для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$, $b_{k_2 l_2} \leqslant b_{k_2 l}$ для всех $l \in \{1, \ldots, n\}$ определить $y^{(0)} = e'_{l_1}$. Если $k_1 = k_2$, $l_1 = l_2$, но указанные условия не выполнены, то найти

$$l^* = \arg \max_{l \in \{1, \ldots, j\}} \{a_{k_1 l} \mid a_{k_1 l} + a_{k_1 l_2} \leqslant 1\}.$$

Если для всех l выполнено $a_{k_1 l} + a_{k_1 l_2} > 1$, определить l^* произвольно. Задать $y_{l_2}^{(0)} = \alpha - \varepsilon$, $y_{l^*}^{(0)} = 1 - \alpha + \varepsilon$, где ε — малая положительная константа.

3. Если $k_1 \neq k_2$, $l_1 = l_2$, то найти такой индекс $l^* \neq l_1$, для которого при всех k выполнено $a_{kl^*} + a_{kl_1} \leqslant 1$. Если такого индекса нет, то определить l^* произвольно.

4. Если $l_1 \neq l_2$, то $y_{l_1}^{(0)} = y_{l_2}^{(0)} = 1/2$.

Идея предлагаемого алгоритма 3 состоит в том, чтобы увеличить левые части неравенств (6), (7), но при этом по возможности не нарушить неравенства (8), (9).

6. Примеры

6.1. Игра 2×2

При $m = n = 2$ наибольший интерес представляют игры, в которых не существует равновесия в чистых стратегиях. Таковой является игра в стандартной форме с детерминированными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant \beta < 1$. Тогда для $i = j = 3$ система неравенств (6)–(9) примет вид

$$\begin{gathered} x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 = 1 - x_1 y_2 \geqslant \alpha, \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 = 1 - x_1 y_1 \geqslant \beta, \\ y_1 < \alpha,\ y_2 < \alpha, \\ x_1 < \beta,\ x_2 < \beta. \end{gathered}$$

Как нетрудно проверить, данной системе неравенств удовлетворяет пара стратегий (x, y), если

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in (1 - \beta, \min\{\beta, 2(1 - \beta)\}).$$

Если $\alpha < \beta < 1$, $\beta > \frac{1}{2}$, то первый игрок может уменьшить свои потери до $i = 2$, при этом $j = 3$. Соответствующая система неравенств (6)–(9) принимает вид

$$\begin{gathered} x_1 y_1 + x_2 y_2 \geqslant \alpha, \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 \geqslant \beta, \\ y_1 < \alpha, \\ x_1 < \beta,\ x_2 < \beta. \end{gathered}$$

Данной системе неравенств удовлетворяют пары стратегий (x, y), если

$$x = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in (\max\{\alpha, 1 - \beta\}, \beta).$$

6.2. Игры 3×3

Разработанный алгоритм поиска равновесия в игре с квантильным критерием был программно реализован на языке matlab с использованием решателя задач квадратичного программирования gurobi. Исходные данные этих задач и найденные точки равновесия в игре с квантильным критерием приведены в табл. 1.

В первой строке таблицы приведено решение задачи для игры с нулевой суммой. При равных значениях α и β было найдено две пары равновесных стратегий, соответствующих различным потерям второго игрока: $j = 6$ и $j = 7$. Потери первого игрока для каждой из полученных стратегий одинаковы и равны $i = 5$. Если $\alpha < \beta$, то в игре имеется три равновесных стратегии с различными потерями игроков. Отметим, что в данном случае первый игрок имеет возможность уменьшить свои потери до $i = 3$. Это связано с уменьшением уровня его доверительной вероятности. Оставшиеся две равновесные точки обеспечивают те же потери, что и в случае $\alpha = \beta$.

Во второй строке табл. 1 приведено решение для игры с ненулевой суммой. Для уровней вероятности $\alpha = \beta = 0{,}9$ и $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 0{,}9$ были найдены три равновесные стратегии. Отметим, что при уменьшении доверительной вероятности первого игрока его потери могут быть снижены до минимально возможных.

В третьей строке табл. 1 приведены результаты вычислений для случайных матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Случайная величина τ принимает 4 равновероятных значения: 0, 1, 2, 3.

Приведенные решения были найдены менее чем за одну секунду.

Таблица 1. Равновесные стратегии в игре 3×3

A	**B**	α	β	i	j	x	y
$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	0,9	0,9	5	6	$\begin{pmatrix} 0,0999 \\ 0,1001 \\ 0,8000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8999 \\ 0,1001 \\ 0 \end{pmatrix}$
				5	7	$\begin{pmatrix} 0,1461 \\ 0,8476 \\ 0,0063 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,5005 \\ 0,4752 \\ 0,0243 \end{pmatrix}$
		0,8	0,9	3	7	$\begin{pmatrix} 0,1078 \\ 0,8844 \\ 0,0078 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0399 \\ 0,8998 \\ 0,0603 \end{pmatrix}$
				5	6	$\begin{pmatrix} 0,0998 \\ 0,1001 \\ 0,8001 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,7999 \\ 0 \\ 0,2001 \end{pmatrix}$
				5	7	$\begin{pmatrix} 0,1462 \\ 0,7538 \\ 0,1000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,2001 \\ 0,7999 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	0,9	0,9	4	4	$\begin{pmatrix} 0,0077 \\ 0,8935 \\ 0,0988 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8968 \\ 0,1032 \\ 0 \end{pmatrix}$
				4	5	$\begin{pmatrix} 0,1001 \\ 0,8999 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8902 \\ 0,0110 \\ 0,0988 \end{pmatrix}$
				5	5	$\begin{pmatrix} 0,8973 \\ 0,0923 \\ 0,0104 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8092 \\ 0,0906 \\ 0,1002 \end{pmatrix}$
		0,8	0,9	1	5	$\begin{pmatrix} 0,8999 \\ 0,1001 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8891 \\ 0,0987 \\ 0,0122 \end{pmatrix}$
				4	5	$\begin{pmatrix} 0,6284 \\ 0,3716 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,7877 \\ 0,0334 \\ 0,1789 \end{pmatrix}$
				5	5	$\begin{pmatrix} 0,7938 \\ 0,0769 \\ 0,1293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,7866 \\ 0,0133 \\ 0,2001 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	0,9	0,9	4	3	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,9001 \\ 0,0999 \\ 0 \end{pmatrix}$
				4	4	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,8668 \\ 0,1332 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
				6	6	$\begin{pmatrix} 0,1707 \\ 0 \\ 0,8293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,1707 \\ 0,8293 \end{pmatrix}$
				6	7	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,1998 \\ 0,8002 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5000 \\ 0,5000 \end{pmatrix}$
				7	5	$\begin{pmatrix} 0,3592 \\ 0,5947 \\ 0,0461 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8756 \\ 0 \\ 0,1244 \end{pmatrix}$
				7	6	$\begin{pmatrix} 0,1214 \\ 0,0456 \\ 0,8330 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3340 \\ 0 \\ 0,6660 \end{pmatrix}$
				7	7	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0,2000 \\ 0,8000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4000 \\ 0 \\ 0,6000 \end{pmatrix}$

Все эти решения, кроме одного, были найдены как с помощью точного решения систем неравенств (6), (7), (13), (14), так и с помощью быстрых алгоритмов 2 и 3. Во втором примере не удалось найти стратегию, соответствующую $i = 4$, $j = 5$, при $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 0{,}9$.

6.3. Игра 6×8

Рассматривается игра $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, 0{,}9, 0{,}9)$, задаваемая детерминированными матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 30 & 11 & 8 & 30 & 25 & 26 & 26 & 28 \\ 13 & 20 & 18 & 11 & 28 & 9 & 12 & 29 \\ 5 & 1 & 29 & 24 & 27 & 10 & 35 & 7 \\ 32 & 35 & 19 & 21 & 15 & 3 & 2 & 18 \\ 23 & 6 & 16 & 31 & 24 & 4 & 22 & 17 \\ 4 & 35 & 33 & 34 & 7 & 30 & 14 & 24 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 28 & 20 & 30 & 23 & 34 & 3 & 21 & 12 \\ 10 & 5 & 9 & 18 & 11 & 2 & 17 & 20 \\ 19 & 6 & 25 & 13 & 32 & 16 & 1 & 7 \\ 26 & 10 & 13 & 30 & 15 & 29 & 13 & 22 \\ 33 & 31 & 8 & 22 & 14 & 34 & 6 & 10 \\ 35 & 4 & 36 & 20 & 21 & 27 & 29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Для поиска равновесных стратегий применялся разработанный алгоритм. Во избежание возможных ошибок округления вместо системы неравенств (6)–(9) решалась система неравенств

$$\begin{gathered} x^\top A_i y \geqslant \alpha + \varepsilon, \\ x^\top B_j y \geqslant \beta + \varepsilon, \\ \|A_{i-1} y\|_\infty \leqslant \alpha - \varepsilon, \\ \|B_{j-1}^\top x\|_\infty \leqslant \beta - \varepsilon, \end{gathered}$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$.

В данной игре удалось найти 86 пар равновесных стратегий, соответствующих различным значениям целевых функций игроков. Соответствующие значения отражены в табл. 2. По строкам расположены значения функции квантили первого игрока, а по столбцам — второго игрока. Знаками * и + отмечены те пары значений (i, j), для которых удалось найти равновесные стратегии, при этом знаком + отмечены те значения (i, j), для которых удалось найти решение с помощью быстрого алгоритма 2 с начальным решением, получаемым с помощью алгоритма 3. Алгоритм 2 позволил найти 49 решений задачи.

Приведем решение, оптимальное по Парето (соответствующее значениям $(i, j) = (5, 6)$):

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0630 \\ 0{,}8999 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}0371 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0{,}0963 \\ 0{,}8999 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}0038 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 2. Найденные равновесия в игре 6×8

$i \backslash j$	6	9	10	12	13	16	17	20	21	22	23	24
5	+											
6	*											
7	*											
10	*		*			*	*					
11	*	*				*						
12		+					+					
13		+					+					
15		*					*					
16	*	+		+	+	*	*					
17	*	*		+	*		+					
18		+	+	*	+	+	+	+				
19			*	*	+	*	+	*	+			
20	+		+	*	+	+	+	+	*			
21			*		*			*				
22			+	+	+	*	+	*	*			
23					+		*		+			
24					*	+	+	+	+	+	+	+
27						*				*		+
28						*		+	+	+	+	*
29						+	*	+	+	+	+	+

Вычисления проводились на ЭВМ с процессором Intel(R) Core(TM) i5-6300U, 2,4 ГГц, 8 ГБ ОЗУ. Вычислительное время при применении алгоритма 1 составило 6363 с, а при применении быстрого алгоритма 2 — всего лишь 7,5 с.

Приведенный пример показывает, что в игре небольшой размерности может существовать большое количество пар равновесных стратегий, соответствующих различным потерям игроков. При этом их поиск может требовать значительного объема вычислений, однако большая часть решений может быть найдена достаточно быстро с помощью алгоритмов 2 и 3.

7. Заключение

В работе были рассмотрены задачи поиска равновесия в играх с вероятностными и квантильными критериями. Задача с вероятностным критерием была сведена к биматричной игре с функциями выигрышей в форме математических ожиданий. Для решения задачи с квантильным критерием предложен алгоритм, основанный на последовательном решении задач поиска точек множеств, описываемых квадратичными невыпуклыми ограничениями. Однако вопрос о существовании равновесия в произвольной игре с квантильным критерием остается открытым. Авторы провели большое количество вычислений на случайно моделируемых данных, в результате которых не удалось обнаружить примеров, когда не существует равновесных стратегий. К сожалению, поиск равновесных стратегий в игре с квантильным критерием размерности 6×8 продолжался более часа. По этой причине был предложен быстрый метод поиска равновесий, с помощью которого удалось найти 49 из 86 решений задачи. Отметим, что многие из рассмотренных в работе подходов могут быть перенесены в дальнейшем на случай игры нескольких лиц. Также представляют интерес игры с квантильным критерием и непрерывным распределением случайных параметров, для анализа которых требуется разработка новых методов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Первое равенство следует из независимости ξ и η и установлено в (1). Из определения величин φ_i и неравенства $\varphi_i \leqslant \varphi < \varphi_{i+1}$ следует, что $a_{kl}(\varphi) = \bar{a}_{kl}(i)$. Поэтому

$$x^\top A(\varphi) y = x^\top A_i y = P_i(\bar{\mathbf{A}}, x, y).$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Теорема следует из определения 1 равновесия по Нэшу в игре с вероятностным критерием и из леммы 1, согласно которой

$$P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = P_i(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = x^\top A_i y,$$
$$P_\psi(\mathbf{B}, x, y) = P_j(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = x^\top B_j y.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Докажем утверждение 1) леммы. Предположим противное. Тогда возможны две ситуации: $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) < \varphi_1$ или $\varphi_i < \varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) < \varphi_{i+1}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, M\}$. В первом случае $P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = 0$, что противоречит неравенству $P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) \geqslant \alpha$ в определении квантили, так как $\alpha > 0$. Во втором случае $\alpha \leqslant P_\varphi(\mathbf{A}, x, y) = P_{\varphi_i}(\mathbf{A}, x, y)$, откуда следует, что $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) \leqslant \varphi_i$. Полученное противоречие доказывает утверждение 1) леммы.

Утверждение 2) леммы следует из леммы 1, согласно которой $P_{\varphi_i}(\mathbf{A}, x, y) = P_i(\bar{\mathbf{A}}, x, y)$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 2 и упорядоченности величин φ_i и ψ_j следует эквивалентность утверждений 1) и 2).

Отметим, что

$$\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = \min\left\{ i \in \{1, \ldots, M\} \mid x^\top A_i y \geqslant \alpha \right\},$$
$$\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = \min\left\{ j \in \{1, \ldots, N\} \mid x^\top B_j y \geqslant \beta \right\}.$$

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 3). Пусть для заданной пары $(x, y) \in X \times Y$ выполнено $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i$, $\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j$. Это значит, что

$$x^\top A_i y \geqslant \alpha, \quad x^\top B_j y \geqslant \beta.$$

Неравенства (6), (7) доказаны. Из определения равновесия по Нэшу следует, что для всех $x' \in X$, $y' \in Y$ выполнено

$$\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x', y) \geqslant \varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i, \tag{П.1}$$

$$\varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y') \geqslant \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j. \tag{П.2}$$

Докажем, что для всех $x' \in X$, $y' \in Y$

$$x'^\top A_{i-1} y < \alpha, \tag{П.3}$$

$$x^\top B_{j-1} y' < \beta. \tag{П.4}$$

Предположим противное. Пусть для определенности нарушается неравенство (П.3) при некотором $x' \in X$. Это значит, что $P_{i-1}(\bar{\mathbf{A}}, x', y) \geqslant \alpha$, но тогда в силу определения функции квантили $\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x', y) \leqslant i-1$, что противоречит неравенству (П.1). Аналогично устанавливается, что при $x^\top B_{j-1} y' \geqslant \beta$ нарушается неравенство (П.2). Таким образом, неравенства (П.3) и (П.4) доказаны.

В силу того, что множества X и Y компактны, выполнение неравенств (П.3) и (П.4) для всех $x' \in X$, $y' \in Y$ эквивалентно неравенствам

$$\max_{x' \in X} x'^\top A_{i-1} y < \alpha, \quad \max_{y' \in Y} x^\top B_{j-1} y' < \beta. \tag{П.5}$$

Заметим, что $\|x\|_1 \triangleq \sum_{k=1}^{m} |x_k| = 1$, $\|y\|_1 = 1$. Поэтому

$$\max_{x' \in X} x'^\top A_{i-1} y \leqslant \|A_{i-1} y\|_\infty \|x\|_1 = \|A_{i-1} y\|_\infty,$$
$$\max_{y' \in Y} x^\top B_{j-1} y' \leqslant \|B_{j-1}^\top x\|_\infty \|y\|_1 = \|B_{j-1}^\top x\|_\infty.$$

Верхние оценки данных максимумов достигаются, если $x' = e_{k^*}$, $y' = e_{l^*}$, где k^* и l^* номера максимальных компонент векторов $A_{i-1}y$ и $B_{j-1}^\top x$ соответственно. Поэтому

$$\max_{x' \in X} x'^\top A_{i-1} y = \|A_{i-1} y\|_\infty, \tag{П.6}$$

$$\max_{y' \in Y} x^\top B_{j-1} y' = \|B_{j-1}^\top x\|_\infty. \tag{П.7}$$

Доказываемые неравенства (8), (9) следуют из полученных равенств (П.6), (П.7) и неравенств (П.5).

Пусть теперь выполнено утверждение 3). Из неравенств (6)–(9) следует, что $x^\top A_i y \geqslant \alpha$ и $x^\top A_{i-1} y < \alpha$, $x^\top B_j y \geqslant \beta$ и $x^\top B_{j-1} y < \beta$. Значит,

$$\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x, y) = i, \quad \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y) = j. \tag{П.8}$$

Из неравенств (8), (9) следует, что при любых $x' \in X$, $y' \in Y$ выполнено $x'^{\top} A_{i-1} y < \alpha$, $x^{\top} B_{j-1} y' < \beta$. Поэтому

$$\varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, x', y) \geqslant i, \quad \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, x, y') \geqslant j. \tag{П.9}$$

Из равенств (П.8) и неравенств (П.9) следует, что пара стратегий (x, y) является равновесной. Эквивалентность утверждений 2) и 3) доказана.

Равенства $\varphi_\alpha(\mathbf{A}, x, y) = \varphi_i$, $\varphi_\beta(\mathbf{B}, x, y) = \psi_j$ следуют из (П.8) и леммы 2. Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 1. Из условий следствия и леммы 1 вытекает, что при всех $i \in \{0, 1, 2, \ldots, M\}$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1})$, $\psi \in [\psi_j, \psi_{j+1})$ выполнены неравенства

$$e_{k'}^{\top} A_i e_l' = \mathbf{P}\left\{e_{k'}^{\top} \mathbf{A} e_l' \leqslant \varphi\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{e_k^{\top} \mathbf{A} e_l' \leqslant \varphi\right\} = e_k^{\top} A_i e_l', \tag{П.10}$$

$$e_k^{\top} B_j e_{l'}' = \mathbf{P}\left\{e_k^{\top} \mathbf{B} e_{l'}' \leqslant \psi\right\} \leqslant \mathbf{P}\left\{e_k^{\top} \mathbf{B} e_l' \leqslant \psi\right\} = e_k^{\top} B_j e_l'. \tag{П.11}$$

Пусть $i^* = \varphi_\alpha(\bar{\mathbf{A}}, e_k, e_l')$, $j^* = \varphi_\beta(\bar{\mathbf{B}}, e_k, e_l')$. Тогда по определению (2) квантили $e_k^{\top} A_{i^*} e_l' \geqslant \alpha$, $e_k^{\top} B_{j^*} e_l' \geqslant \beta$, $e_k^{\top} A_{i^*-1} e_l' < \alpha$, $e_k^{\top} B_{j^*-1} e_l' < \beta$. Из этих неравенств и неравенств (П.10) и (П.11) следует, что

$$\|A_{i^*-1} e_l'\|_\infty = \max_{k' \in \{0,1,\ldots,m\}} e_{k'}^{\top} A_{i^*-1} e_l' < \alpha,$$
$$\|B_{j^*-1} e_l'\|_\infty = \max_{l' \in \{0,1,\ldots,n\}} e_k^{\top} B_{j^*-1} e_{l'}' < \beta.$$

Таким образом, из теоремы 2 следует, что (e_k, e_l') — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{Q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \alpha, \beta)$ для всех $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$. Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. Если A_{i-1} содержит строку, все элементы которой не меньше α, то $\|A_{i-1} y\|_\infty \geqslant \sum\limits_{l=1}^{n} \alpha y_l = \alpha$, что противоречит неравенству (8). Аналогично, если B_{j-1} имеет столбец, все элементы которого не меньше β, то $\|B_{j-1}^{\top} x\|_\infty \geqslant \beta$, что противоречит (9). Следствие 2 доказано.

Доказательство следствия 3. Предположим противное: все элементы матрицы $A_i + B_j$ меньше $\alpha + \beta$. Тогда

$$x^{\top}(A_i + B_j) y < (\alpha + \beta) \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} x_k y_l = \alpha + \beta. \tag{П.12}$$

С другой стороны, складывая неравенства (6) и (7), получаем

$$x^{\top}(A_i + B_j) y \geqslant \alpha + \beta,$$

что противоречит неравенству (П.12). Следствие 3 доказано.

Доказательство теоремы 3. Пусть (x, y) — пара равновесных стратегий в игре $\mathcal{P}(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, i-1, j-1)$. Тогда

$$\|A_{i-1}y\|_\infty = x^\top A_{i-1}y,$$
$$\|B_{j-1}^\top x\|_\infty = x^\top B_{j-1}y.$$

Таким образом, при α и β, удовлетворяющих условию (10), выполнены неравенства (6)–(9), сформулированные в критерии равновесия в квантильной игре. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
2. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
3. *Mills H.* Equilibrium points in finite games // J. Soc. Industr. Appl. Math. 1960. V. 8. No. 2. P. 397–402.
4. *Орлов А.В., Стрекаловский А.С.* О численном поиске ситуаций равновесия в биматричных играх // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. Т. 45. № 6. С. 983–997.

   Orlov A.V., Strekalovskii A.S. Numerical search for equilibria in bimatrix games // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2005. V. 45. No. 6. P. 947–960.
5. *Стрекаловский А.С., Энхбат Р.* Полиматричные игры и задачи оптимизации // АиТ. 2014. № 4. С. 51–66.

   Strekalovskii A.S., Enkhbat R. Polymatrix Games and Optimization Problems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. P. 632–645.
6. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
7. *Walsh J.E.* Median Two-Person Game Theory for Median Competitive Games // J. Oper. Res. Soc. Jpn. 1969. V. 12. No. 1. P. 11–20.
8. *De Vries H.* Quantile Criteria for the Selection of Strategies in Game Theory // Int. J. Game Theory. 1974. V. 3. No. 2. P. 105–114.
9. *Cassidy R.G., Field C.A., Kirby M.J.L.* Solution of a Satisficing Model for Random Payoff Games // Manage. Sci. 1972. V. 19. No. 3. P. 266–271.
10. *Popov L.D.* Methods for Matrix Games with Mixed Strategies and Quantile Payoff Function / Bykadorov I., Strusevich V., Tchemisova T. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019. Communications in Computer and Information Science, v. 1090. Cham: Springer, 2019. P. 304–318.
11. *Singh V.V., Jouini O., Lisser A.* Existence of Nash Equilibrium for Chance-Constrained Games // Oper. Res. Lett. 2016. V. 44. P. 640–644.
12. *Singh V.V., Lisser A.* A Characterization of Nash Equilibrium for the Games with Random Payoffs // J. Optimiz. Theory App. 2018. V. 178. P. 998–1013.
13. *Singh V.V., Lisser A.* Variational inequality formulation for the games with random payoffs // J. Global Optim. 2018. V. 72. P. 743–760.

14. *Konyukhovskiy P.V., Malova A.S.* Game-Theoretic Models of Collaboration among Economic Agents // Contributions to Game Theory and Management. 2013. V. 6. P. 211–221.

15. *Mazadi M., Rosehart W.D., Zareipour H., Malik O.P., Oloomi M.* Impact of wind integration on electricity markets: A chance-constrained Nash Cournot model // Int. Trans. Electr. Energy Syst. 2013. V. 23. No. 1. P. 83–96.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 10.08.2020

После доработки 15.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021