Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Управление в социально-экономических системах

© 2021 г. **В.А. ДАВЫДОВ, канд. тех. наук, канд. экон. наук (novdav2017@yandex.ru)**
(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва),
С.А. КРУГЛИК, канд. физ.-мат. наук (stanislav.kruglik@skoltech.ru)
(Сколковский институт науки и технологий, Москва, Научно-технологический университет Сириус, Сочи),
Ю.А. ЯНОВИЧ, канд. физ.-мат. наук (y.yanovich@skoltech.ru)
(Сколковский институт науки и технологий, Москва, Научно-технологический университет Сириус, Сочи, Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва)

СРАВНЕНИЕ РИСКОВ БАНКОВСКОГО И РАВНОПРАВНОГО КРЕДИТОВАНИЯ[1]

Рассмотрена задача минимизации риска, который берут на себя инвесторы в двухуровневой (банковской) системе кредитования и системе равноправного кредитования при условии неизменности входящих рисков. Показано, что при введении специального (несистематического) риска модель равноправного кредитования оказывается оптимальной.

Ключевые слова: управление в социально-экономических системах, банковский риск, равноправное кредитование, теория оптимального портфеля Марковца.

DOI: 10.31857/S0005231021120096

1. Введение

Одним из важнейших условий развития экономики является наличие кредитного рынка [1], который входит как наиболее крупный сегмент в состав финансового рынка. Рассмотрим его на примере Российской Федерации. Участников кредитного рынка можно разделить на четыре категории:

- Инвесторы — владельцы свободных финансовых ресурсов (домохозяйства и фирмы). Цель инвесторов — максимально эффективно (т.е. под более высокие ставки) разместить свободные средства таким образом, чтобы иметь возможность их досрочного возврата без потери доходности.
- Банки — кредитно-финансовые организации, которые аккумулируют свободные средства и предоставляют их во временное пользование заемщикам на возмездной основе. Цель банков — привлечь максимальный объем

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках научных проектов № 19-37-51036 и 20-07-00652, а также РФФИ и Японского общества продвижения науки (ЯОПН) в рамках научного проекта № 20-51-50007.

средств от инвесторов и разместить их заемщикам с минимальным риском и максимальной маржой.

- Заемщики — юридические и физические лица, привлекающие средства от банков. Цель заемщиков — привлечь необходимый объем средств для личных целей или целей бизнеса на требуемый срок и под минимальный процент.
- Государство — регулятор кредитного рынка, осуществляющий контроль (через Центральный банк РФ) за финансовыми посредниками и управляющий денежной массой и процентными ставками, а также Агентство по страхованию вкладов (АСВ), реализующее специальную государственную программу "О страховании вкладов в банках Российской Федерации" [2].

В число задач Центрального банка [3] входят развитие и укрепление банковской системы страны, а также развитие и обеспечение стабильности финансового рынка. К основным рискам банковской системы относятся

- риск ликвидности,
- кредитный риск,
- риск достаточности банковского капитала.

ЦБ РФ применяются различные критерии для оценки перечисленных рисков и контроля надежности банковской системы в целом и каждого банка в отдельности. К их числу относятся система обязательных нормативов коммерческих банков [4], рейтинговые оценки банков, динамика просроченных кредитов и т.п.

Источником кредитного риска в банковской системе, т.е. риска невозврата заемщиком взятого кредита банку, является финансовое состояние заемщика, которое, согласно требованиям Базель III [5, 6], оценивается такими параметрами как PD — вероятность дефолта заемщика и LGD — доля потери банка при дефолте заемщика. Заметим, что данный риск также оказывает влияние и на ликвидность банков, и на достаточность их капитала. Таким образом, входящий риск заемщиков, кредитующихся в банковской системе, является исходной величиной, определяющей риск системы, которая перераспределяется между кредитующими банками и далее между инвесторами, разместившими в банках свои средства.

Часть такого риска (по вкладам физических лиц, не превышающим определенной суммы) берет на себя государство в лице АСВ. Однако, как показала практика последних лет [7], капитала АСВ оказывается недостаточно для процедуры выплаты вкладчикам ряда крупных банков, попавшим в процедуру санации. В результате государство вынуждено осуществлять прямые инвестиции и фактически выкупать проблемные банки в государственную собственность.

Кроме традиционной двухуровневой модели кредитования, т.е. модели с финансовыми посредниками — банками, в последние несколько лет получила развитие так называемая модель равноправного (peer-to-peer, P2P) кредитования [8, 9], т.е. одноуровневая модель прямого кредитования инвесторами конечных заемщиков. Данная модель имеет целый ряд недостатков по сравнению с традиционной моделью, которые сдерживают ее более активное внедрение на рынке. Основным из таких недостатков является относительно высокий риск инвестора при принятии им решения о вложении средств в определенного заемщика. Для минимизации данного риска используются различные способы и модели кредитования [10, 11]. В частности, в [12] предложен метод диверсификации вложений инвестора на рынке P2P, который сочетается с банковскими моделями оценки риска заемщика, а также с использованием банков в качестве организатора рынка P2P кредитования.

В основе расчета риска кредитных моделей лежит входящий риск заемщиков. Зафиксируем риск заемщиков равным для одно- и двухуровневой моделей. Такое равенство на практике может означать, что кредиты уже были выданы заемщикам профессиональными участниками рынка — банками — и далее банки, как это описано в [12], токенизировали уже сформированные кредитные портфели и разместили полученные пакеты токенов инвесторам.

Целью настоящей работы является сравнение усредненного риска, который берут на себя инвесторы в двухуровневой (банковской) системе кредитования и системе P2P кредитования при условии неизменности входящих рисков заемщиков. Для такого сравнения будем использовать ставшую классической теорию оптимального портфеля Марковица [13]. Она получила множество развитий за почти 70 лет существования и применения [14, 15]. Так, поскольку истинные параметры доступных ценных бумаг ненаблюдаемы, проблема выбора робастного портфеля представляет интерес [16, 17]. А чтобы облегчить изменение портфелей, предложены многопериодные и разреженные модификации [18, 19].

Задача оценивания риска рынка кредитования является важной для банков и регуляторов [20, 21]. Теория оптимального портфеля дает математический язык для описания моделей кредитования [22–24]. Однако она неприменима для всего рынка напрямую, так как решает задачу вложения одного малого (в сравнении с совокупным объемом) участника. В данной работе анализируется, в архитектуре какой системы заложены (или порождаются) большие риски для системы кредитования в целом.

2. Модели кредитования

Будем считать, что на рынке имеется Z заемщиков с номерами $z\colon 1 \leqslant z \leqslant Z$. Доходности вложений в заемщиков являются случайными величинами. Математические ожидания доходностей описываются вектором $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_Z)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{Z\times 1}$. В общем случае заемщики являются зависимыми с матрицей ковариации

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ e_{Z1} & \ldots & e_{ZZ} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{Z\times Z},$$

состоящей из Z строк и Z столбцов. Элементы на главной диагонали $e_{zz} \in \mathcal{E}$ равны дисперсии заемщика с номером $1 \leqslant z \leqslant Z$, которая описывает риск единичного вложения в данного заемщика.

Рассмотрим одного инвестора, который вкладывает в каждый из активов определенную долю имеющихся средств — формирует портфель. Доли запишем в виде вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_Z)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{Z\times 1}$.

Согласно оригинальной работе Марковица [13] применительно к кредитному рынку ищется портфель ценных бумаг, который минимизирует риск портфеля (дисперсию $\vec{g}^{\mathrm{T}}\vec{x}$) при условии фиксированной ожидаемой доходности μ. То есть, решается задача условной оптимизации

$$\vec{x}^{\mathrm{T}}\mathcal{Q}\vec{x} \to \min_{\substack{\vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{g}=\mu \\ \sum_{z=1}^{Z} x_z=1 \\ \forall z=1,\ldots,Z:\ x_z\geqslant 0}}, \tag{1}$$

относящаяся к классу квадратичного программирования с линейными ограничениями и допускающая эффективное решение.

Построение оптимального портфеля подразумевает, что инвестор может вложить любой объем средств в любой актив. Таким образом предполагается, что сумма вложений инвестора в портфель меньше, чем объем рынка для любого из активов, которые составляют портфель.

В данной работе рассматривается задача распределения средств инвесторов, объем которых превышает объем любого из доступных активов. Такая постановка накладывает дополнительные ограничения при построении портфелей по Марковицу.

Будем считать, что на рынке имеется I инвесторов с номерами $i\colon 1 \leqslant i \leqslant I$, желающих вложить $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_I)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{I\times 1}$. Заемщики хотят получить $\vec{l} = (l_1, \ldots, l_Z)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{Z\times 1}$. Вложения и займы положительны, т.е. $\vec{v} > 0$ и $\vec{l} > 0$, где сравнение понимается поэлементно.

2.1. Банковская модель

В двухуровневой системе кредитования банки привлекают средства у инвесторов и размещают их заемщикам. В терминах портфельной теории банки формируют портфели первого уровня, кредитуя заемщиков, а затем инвесторы собирают на втором уровне свои, вкладывая средства в банки.

Пусть на рынке B банков с номерами $b\colon 1 \leqslant b \leqslant B$. Объем средств, которые банк b выдал в кредит заемщику z, обозначим через k_{bz}. Матрицу

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & \ldots & k_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ k_{B1} & \ldots & k_{BZ} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{B\times Z}$$

будем называть матрицей кредитов или кредитной матрицей.

Очевидно, что если сумма привлеченных средств каждым банком равна сумме размещенных средств этим же банком, то верно равенство

$$\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{1}}_B = \vec{l},$$

где $\vec{\mathbf{1}}_a$ – вектор из a единиц.

Операцией $\hat{*}$ будем обозначать нормировку на единичную l_1-норму для векторов и единичную l_1-норму для строк в случае матриц. То есть,

$$\hat{\vec{l}} = \left(\frac{l_1}{\sum_{z=1}^{Z} l_z}, \dots, \frac{l_Z}{\sum_{z=1}^{Z} l_z} \right)^{\mathrm{T}}$$

и

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \dfrac{k_{11}}{\sum_{z=1}^{Z} k_{1z}} & \dots & \dfrac{k_{1Z}}{\sum_{z=1}^{Z} k_{1z}} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \dfrac{k_{B1}}{\sum_{z=1}^{Z} k_{Bz}} & \dots & \dfrac{k_{BZ}}{\sum_{z=1}^{Z} k_{Bz}} \end{pmatrix}.$$

В матричной форме справедливо представление

$$\hat{\mathcal{K}} = \mathtt{diag}(\mathcal{K}\vec{\mathbf{1}}_Z)^{-1}\mathcal{K},$$

где оператор `diag` отображает вектор в диагональную матрицу, помещая элементы вектора на главную диагональ, а матрицу отображает в вектор, в который собираются ее диагональные элементы.

В терминах теории Марковица каждый банк с номером $b\colon 1 \leqslant b \leqslant B$ имеет свой портфель вложений в Z заемщиков, который описывается строкой матрицы $\hat{\mathcal{K}}$. Сумма элементов каждой строки матрицы $\hat{\mathcal{K}}$ равна единице. Взаимные риски r_{ab} вложений банков с номерами $a, b\colon 1 \leqslant a \leqslant B$, $1 \leqslant b \leqslant B$ вычисляются по формуле

$$r_{ab} = (\hat{k}_{a1}, \dots, \hat{k}_{aZ})\mathcal{E}(\hat{k}_{b1}, \dots, \hat{k}_{bZ})^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, получаем матрицу банковских рисков

$$\mathcal{R} = \hat{\mathcal{K}}\mathcal{E}\hat{\mathcal{K}}^{\mathrm{T}},$$

которая состоит из B строк и B столбцов. Элемент $r_{bb} \in \mathcal{R}$ равен риску, который банк b взял на себя в результате выдачи кредитов заемщикам с учетом взаимной связи заемщиков и пересечения кредитных портфелей различных банков.

В описываемой модели I инвесторов с номерами $i\colon 1 \leqslant i \leqslant I$ размещают свои средства в банки. А именно, обозначим через d_{ib} объем средств, которые инвестор i вложил в банк b. Матрицей депозитов назовем

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1B} \\ \dots & \ddots & \dots \\ d_{I1} & \dots & d_{IB} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{I \times B}.$$

Очевидно, что если каждый банк привлек ровно столько средств, сколько выдал заемщикам, то верно равенство

$$\mathcal{D}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{1}}_I = \mathcal{K}\vec{\mathbf{1}}_Z = \vec{x}.$$

Ему соответствует нормированная матрица депозитов

$$\hat{\mathcal{D}} = \mathtt{diag}(\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B)^{-1}\mathcal{D}.$$

Обозначим: S_{IB} – сумма вложений (депозитов) всех инвесторов в банки, S_{BZ} – сумма всех вложений (кредитов), выданных банками заемщикам. Рассмотрим случай, при котором общая сумма средств, вложенных инвесторами в банки, равна общей сумме средств, привлеченных заемщиками у банков. Таким образом, выполняется равенство

$$S_{IB} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{b=1}^{B} d_{ib} = \sum_{b=1}^{B}\sum_{z=1}^{Z} k_{bz}.$$

В терминах теории Марковица каждый инвестор с номером $i\colon 1 \leqslant i \leqslant I$ имеет свой портфель вложений в B банков, который описывается строкой матрицы $\hat{\mathcal{D}}$. Сумма элементов каждой строки матрицы $\hat{\mathcal{D}}$ равна единице. Риск h_{ii} вложений инвестора с номерам $i\colon 1 \leqslant i \leqslant I$ на рынке банков вычисляется по формуле

$$h_{ii} = (\hat{d}_{i1}, \ldots, \hat{d}_{iB})\mathcal{R}(\hat{d}_{i1}, \ldots, \hat{d}_{iB})^{\mathrm{T}}.$$

При этом элементы h_{ii} расположены на главной диагонали матрицы, состоящей из Z строк и Z столбцов, вычисляемой по формуле

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}\hat{\mathcal{K}}\mathcal{E}\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}.$$

Будем называть описанную модель кредитного рынка двухуровневой риск-моделью или банковской моделью и обозначать как $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$. Два уровня в модели отражают факт того, что инвесторы вкладывают свои средства в заемщиков не напрямую, а через банки. Обозначим через $\vec{h} = \mathtt{diag}(\mathcal{H})$ вектор-столбец, состоящий из диагональных элементов матрицы $\mathcal{H}$.

Определим вектор инвестиций $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_I)^{\mathrm{T}}$, компоненты которого v_i равны доле вложений инвестора с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ от общего объема вложенных средств всех инвесторов и вычисляются по формуле

$$v_i = \left(\sum_{b=1}^{B} d_{ib}\right)\left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{b=1}^{B} d_{ib}\right)^{-1} = \left(\sum_{b=1}^{B} d_{ib}\right) S_{BZ}^{-1},$$

что, в свою очередь, может быть записано как $\vec{v} = \left(\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B / (\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}}\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B)\right)$.

Средним (специальным) риском [14] инвесторов в банковской модели $\mathscr{B}(\mathcal{D},\mathcal{K},\mathcal{E})$ будем называть величину $R(\mathscr{B})$, равную взвешенной сумме диагональных элементов матрицы $\mathcal{H}$ с весами, равными долям $\vec{v}$ участников: $R(\mathscr{B}) = \vec{v}^{\mathrm{T}}\mathtt{diag}(\mathcal{H})$. Что, в свою очередь, может быть записано как

$$R(\mathscr{B}) = \frac{1}{\left(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}}\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B\right)}(\mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B)^{\mathrm{T}}\,\hat{\mathcal{D}}\hat{\mathcal{K}}\mathcal{E}\hat{\mathcal{K}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathcal{D}}.$$

Отметим, что средний риск инвариантен при разделении долей инвесторов без изменения состава их портфелей.

Кроме того, заметим, что в данном описании риска банковской модели с использованием подхода Марковца отсутствует понятие доходности портфеля, которое присутствует в классической модели Марковца. Это связано с тем, что банки, являясь финансовыми посредниками, фактически устанавливают для инвесторов определенные “рыночные” ставки по размещению депозитов, которые могут не иметь жесткой привязки к ставкам кредитов. В результате банки зарабатывают прибыль на марже между ставкой привлечения средств у инвесторов и ставкой их размещения заемщикам. Говорить при таком подходе о максимизации дохода инвестора, размещающих средства в банках исходя из ставок кредитуемых банком заемщиков, некорректно. Тем не менее интегральная оценка риска, которую получает инвестор на банковском рынке исходя из рисков кредитного портфеля банка, может быть адекватно вычислена предложенным методом [25].

2.2. P2P модель

Объем средств S_{BZ}, привлеченных всеми заемщиками, является неизменным, так как эти суммы зафиксированы в заключенных кредитных договорах между заемщиками и кредитующими их банками. Общий объем средств S_{IB}, вложенных инвесторами, также остается неизменным, поскольку определяется наличием у них свободных собственных средств. При этом будем считать, что выполняется неравенство $S_{BZ} \geqslant S_{IB}$. Отметим, что строгое неравенство соответствует случаю, когда часть средств, вкладываемых в заемщиков, является собственными средствами банков, которые в таком случае сами выступают инвесторами.

Будем считать, что инвесторы передали все свои средства S_{IB} некоторому координирующему центру с предоставлением права распределить данные средства между заемщиками определенным способом. Задача координирующего центра заключается в распределении средств инвесторов таким образом, чтобы минимизировать средний риск инвесторов. Отметим, что в данной конструкции координирующий центр не привлекает средства инвесторов, как это делают банки, и не размещает их от своего имени в кредиты заемщиков. Координирующий центр только перераспределяет вложения инвесторов между заемщиками. В результате на самом координирующем центре не возникает рисков, как на банках в модели банковского рынка. Все риски заемщиков напрямую переходят на инвесторов, вложивших в заемщиков свои средства в соответствии с распределением средств инвесторов, которое выбрал координирующий центр.

Координирующий центр для заданного вектора заимствований $\vec{l} \in \mathbf{R}^{Z\times 1}$, суммы вложений инвесторов $S_{IB} = \vec{v}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{1}}_I$, вектора-столбца доходностей $\vec{g}$ и заданной доходности портфеля μ выбирает такой портфель инвесторов $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_Z)^{\mathrm{T}} : \hat{\vec{y}} = \vec{y}$, для которого выполняются условия

(2)
$$\vec{y}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}\vec{y} \to \min_{\substack{S_{IB}\vec{y}^{\mathrm{T}}\vec{g}=\mu \\ \sum_{z=1}^{Z} y_z = 1 \\ \forall z=1,\ldots,Z:\ \frac{l_z}{S_{IB}} \geqslant y_z \geqslant 0}} .$$

Определим матрицу

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_{11} & \cdots & \hat{p}_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \hat{p}_{I1} & \cdots & \hat{p}_{IZ} \end{pmatrix},$$

которая состоит из I строк и Z столбцов. Матрицу $\hat{\mathcal{P}}$ будем называть матрицей долей прямых вложений. Элемент $\hat{p}_{iz} \in \hat{\mathcal{P}}$ равен доле вложений инвестора с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ в заемщика с номером $1 \leqslant z \leqslant Z$ от общих средств, вложенных данным инвестором, и определяется по формуле $\hat{p}_{iz} = \hat{y}_z$. Таким образом, все строки матрицы $\hat{\mathcal{P}}$ одинаковы и совпадают с $\vec{y}^{\mathrm{T}}$, что, в свою очередь, может быть записано как

$$\hat{\mathcal{P}} = \mathtt{diag}(\mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z)^{-1}\mathcal{P}.$$

Определим диагональную матрицу $\mathcal{Y} = \mathtt{diag}(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}}\mathcal{P})$, у которой на главной диагонали расположены элементы вектора $\vec{y}$. Матрица

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ p_{I1} & \cdots & p_{IZ} \end{pmatrix} = \mathcal{Y}\hat{\mathcal{P}},$$

состоит из I строк и Z столбцов. Будем называть $\mathcal{P}$ матрицей прямых вложений. Элемент $p_{iz} \in \mathcal{P}$ равен объему средств инвестора i, которые координирующий центр вложил в заемщика z. Для суммы вложений инвесторов S_{IB} выполняется тождество для всех элементов матрицы $\mathcal{P}$

$$S_{IB} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{z=1}^{Z} p_{iz}.$$

Сумма, направляемая заемщику с номером z координирующим центром, вычисляется по формуле $m_z = \sum_{i=1}^{I} p_{iz}$.

В случае выполнения строгого неравенства $S_{BZ} > S_{IB}$ часть кредитов заемщиков финансируется банками. Для данного случая введем матрицу остаточных кредитов

$$\mathcal{K}^* = \begin{pmatrix} k^*_{11} & \dots & k^*_{1Z} \\ \dots & \ddots & \dots \\ k^*_{B1} & \dots & k^*_{BZ} \end{pmatrix},$$

состоящую из B строк и Z столбцов. При этом ее элемент $k^*_{bz} \in \mathcal{K}^*$ равен объему средств, которые банк b выдал в виде кредита заемщику z из собственных средств. Он может быть вычислен по формуле

$$k^*_{bz} = \frac{k_{bz}(l_z - m_z)}{l_z},$$

из чего следует сохранение долей финансирования банками данного заемщика в случае, если он не полностью финансируется инвесторами.

В свою очередь, матрица $\mathcal{K}^*$ однозначно определяет матрицу

$$\hat{\mathcal{K}}^* = \begin{pmatrix} \hat{k}^*_{11} & \dots & \hat{k}^*_{1Z} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \hat{k}^*_{B1} & \dots & \hat{k}^*_{BZ} \end{pmatrix},$$

которая также состоит из B строк и Z столбцов. Матрицу $\hat{\mathcal{K}}^*$ будем называть нормированной матрицей остаточных кредитов. Элемент $\hat{k}^*_{bz} \in \hat{\mathcal{K}}^*$ вычисляется по формуле

$$\hat{k}^*_{bz} = k_{bz} \left(\sum_{z=1}^{Z} k_{bz} \right)^{-1}.$$

В матричной форме справедливо представление

$$\hat{\mathcal{K}}^* = \mathtt{diag}(\mathcal{K}^* \vec{\mathbf{1}}_Z)^{-1} \mathcal{K}^*.$$

Будем называть модель кредитного рынка с описанным правилом распределения средств инвесторов и банков одноуровневой риск-моделью или P2P моделью и обозначать через $\mathscr{P}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$. Один уровень в названии модели означает, что инвесторы кредитуют заемщиков не через банки, а напрямую в соответствии с распределением средств всех инвесторов, которое задает координирующий центр. Банки также кредитуют заемщиков напрямую исключительно за счет собственных средств.

В терминах теории Марковица каждый инвестор с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ имеет свой портфель вложений в Z заемщиков, который описывается строкой матрицы $\hat{\mathcal{P}}$. Сумма элементов каждой строки матрицы $\hat{P}$ равна единице. Риск f_{ii}

вложений инвестора с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ на рынке P2P вычисляется по формуле

$$f_{ii} = (\hat{p}_{i1}, \ldots, \hat{p}_{iZ}) \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ e_{Z1} & \ldots & e_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{p}_{iZ} \end{pmatrix}.$$

Элементы f_{ii} расположены на главной диагонали матрицы $\mathcal{F}$, состоящей из Z строк и Z столбцов, вычисляемой по формуле

$$\mathcal{F} = \hat{\mathcal{P}}\mathcal{E}\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{T}}.$$

Обозначим через $\vec{f}$ вектор-столбец, состоящий из диагональных элементов матрицы $\mathcal{F}$:

$$\vec{f} = \mathtt{diag}(\mathcal{F}) = (f_{11}, \ldots, f_{II})^{\mathrm{T}}.$$

Определим вектор инвестиций $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_I)$, компоненты которого u_i равны доле вложений инвестора с номером $1 \leqslant i \leqslant I$ от общего объема вложенных средств всех инвесторов на рынке P2P и вычисляются по формуле

$$u_i = \left(\sum_{z=1}^{Z} p_{iz}\right) \left(\sum_{i=1}^{I}\sum_{z=1}^{Z} p_{iz}\right)^{-1} = \left(\sum_{z=1}^{Z} p_{iz}\right) S_{IB}^{-1},$$

что в матричной форме принимает вид

$$\mathcal{U} = \mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z / \left(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}} \mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z\right).$$

Для дальнейшего сравнения модели рынка P2P кредитования с моделью банковского рынка будем считать, что ограничение на доходность портфеля отсутствует. Другими словами, будем искать для модели P2P рынка средний риск для портфелей с минимальным риском, или портфелей с точкой минимальной дисперсии (ТМД) [14], и сравнивать полученный риск со средним риском инвесторов для модели банковского рынка.

Средним (специальным) риском инвесторов в P2P модели $\mathscr{P}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ будем называть величину $R(\mathscr{P})$, вычисляемую по формуле $R(\mathscr{P}) = \mathcal{U}^{\mathrm{T}}\mathtt{diag}\,\mathcal{F}$, что может быть записано как

$$R(\mathscr{P}) = \frac{1}{\left(\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}} \mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z\right)} (\mathcal{P}\vec{\mathbf{1}}_Z)^{\mathrm{T}} \hat{\mathcal{P}}\mathcal{E}\hat{\mathcal{P}}^{\mathrm{T}}.$$

В терминах теории Марковица каждый банк с номером $1 \leqslant b \leqslant B$ имеет свой портфель вложений в Z заемщиков, который описывается строкой матрицы $\hat{\mathcal{K}}^*$. Сумма элементов каждой строки матрицы $\hat{\mathcal{K}}^*$ равна единице. Риск t_{bb}

банка с номером $1 \leqslant b \leqslant B$ на остатке вложений в заемщиков с учетом вложений рынка P2P вычисляется по формуле

$$t_{bb} = (\hat{k}^*_{b1}, \ldots, \hat{k}^*_{bZ}) \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1Z} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ e_{Z1} & \ldots & e_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{k}^*_{b1} \\ \vdots \\ \hat{k}^*_{bZ} \end{pmatrix}.$$

Элементы t_{bb} расположены на главной диагонали матрицы $\mathcal{T}$, состоящей из B строк и B столбцов, вычисляемой по формуле

$$\mathcal{T} = \hat{\mathcal{K}}^* \mathcal{E} \hat{\mathcal{K}}^{*\mathrm{T}}.$$

Обозначим через $\vec{t} = \mathtt{diag}(\mathcal{T})$ вектор-столбец, состоящий из диагональных элементов матрицы $\mathcal{T}$.

Определим вектор банковских инвестиций на остатке кредитов, которые не были профинансированы на рынке P2P как $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_B)^{\mathrm{T}}$. Компоненты вектора w_b, $1 \leqslant b \leqslant B$ от общего объема вложенных средств всеми банками на остатке рынка P2P вычисляются по формуле

$$w_b = \left(\sum_{z=1}^{Z} k^*_{bz} \right) \left(\sum_{b=1}^{B} \sum_{z=1}^{Z} k^*_{bz} \right)^{-1}.$$

Средним риском банков на остатке кредитов в P2P модели $\mathscr{P}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ будем называть величину R_B, вычисляемую по формуле $R_B = \vec{w}^{\,\mathrm{T}} \vec{t}$.

3. Сравнение рисков двух моделей рынка

В данном разделе докажем основное утверждение статьи о минимуме специального риска инвесторов в P2P модели $\mathscr{P}(\hat{\mathcal{P}}, \mathcal{E})$ по сравнению с банковской моделью $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$. Для этого будем интерпретировать двухуровневую модель $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$ как вложение инвесторов в портфели банков пропорционально размеру их вклада от общего вклада в данный банк.

Условие того, что объем инвестиций на рынке совпадает с объемом выданных займов, можно записать в виде равенства

$$\vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}} \mathcal{D} \vec{\mathbf{1}}_B = \vec{\mathbf{1}}_I^{\mathrm{T}} \vec{y} = \vec{l}^{\,\mathrm{T}} \vec{\mathbf{1}}_Z = \vec{\mathbf{1}}_B^{\mathrm{T}} \mathcal{K} \vec{\mathbf{1}}_Z.$$

Тогда суммарные инвестиции в каждый банк можно записать в виде

$$\vec{x} = \mathcal{D}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{1}}_I.$$

Из чего следует, что предлагаемый банками инвесторам состав пакета на единицу вложений по строкам может быть записан как

$$\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1} \mathcal{K} = \mathtt{diag}(\mathcal{K} \vec{\mathbf{1}}_Z)^{-1} \mathcal{K} = \mathtt{diag}(\mathcal{D}^{\mathrm{T}} \vec{\mathbf{1}}_I)^{-1} \mathcal{K}.$$

В свою очередь, состав вложений инвесторов по строкам равен $\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}$, а вектор вложений инвесторов равен $\vec{y} = \mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\vec{\mathbf{1}}_Z = \mathcal{D}\vec{\mathbf{1}}_B$.

Благодаря этому, можно записать ковариацию вложений инвесторов в виде $\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\mathcal{E}(\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K})^{\mathrm{T}}$, что приводит к следующему выражению для риска инвестора в банковской модели

$$\mathtt{diag}(\vec{y})^{-1}\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\mathcal{E}\left(\mathtt{diag}(\vec{y})^{-1}\mathcal{D}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Вводя матрицу рисков банков как $\mathcal{E}_B = \mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}\mathcal{K}\mathcal{E}\mathcal{K}^{\mathrm{T}}\mathtt{diag}(\vec{x})^{-1}$, перепишем риск банковской модели как

$$\hat{\mathcal{D}}\mathcal{E}_B\hat{\mathcal{D}}^{\mathrm{T}}.$$

Сформулируем основную теорему данной работы.

Теорема. Для любого набора матриц депозитов $\mathcal{D}$, кредитов $\mathcal{K}$, рисков $\mathcal{E}$ средний специальный риск банковской модели $\mathscr{B}(\mathcal{D},\mathcal{K},\mathcal{E})$ не меньше среднего специального риска P2P модели $\mathscr{P}(\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{D},\mathcal{K}),\mathcal{E})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $\hat{\mathcal{D}}$. Построим новую матрицу $\hat{\mathcal{D}}^* = (\hat{d}_1^*, \ldots, \hat{d}_I^*)^{\mathrm{T}}$, строки которой равны между собой и являются усредненными строками матрицы $\hat{\mathcal{D}}$. Иными словами $\hat{d}_1^* = \cdots = \hat{d}_I^* = \sum_{i=1}^{I} \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}\hat{d}_i$.

Матрица $\hat{D}^*$ задает возможные вложения инвесторов в банки. Сравним средний специальный риск $\hat{\mathcal{D}}^*$ и $\hat{\mathcal{D}}$. Для этого запишем их разность

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}\hat{d}_i^{\mathrm{T}}\mathcal{E}_B\hat{d}_i - \sum_{i=1}^{I} \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}\hat{d}_i^{*T}\mathcal{E}_B\hat{d}_i^* =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{I} \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}||\hat{d}_i||^2_{\mathcal{E}_B,2}\right) - \left\|\frac{\sum_{i=1}^{I} y_i\hat{d}_i}{\sum_{j=1}^{I} y_j}\right\|^2_{\mathcal{E}_B,2}.$$

В соответствии с неравенством Йенсена [26] для нестрого выпуклой функции $||*||^2_{\mathcal{E}_B,2}$, соответствующей квадратичному функционалу, получаем, что вышеописанная разность неотрицательна. Таким образом, усреднение портфелей инвесторов не увеличивает средний специальный риск. Или, иными словами, P2P сценарий доставляет минимум специального риска.

4. Пример

Параметры кредитных портфелей составляют банковскую тайну, поэтому реальные данные о них недоступны. Воспользуемся искусственными данными для иллюстрации к использованным в работе определениям и предложенной теореме. Пусть на рынке работает $B = 4$ банка, $I = 12$ инвесторов и $Z = 8$

заемщиков. Нормированная по строкам матрица долей кредитов $\hat{\mathcal{K}}$ при этом имеет вид

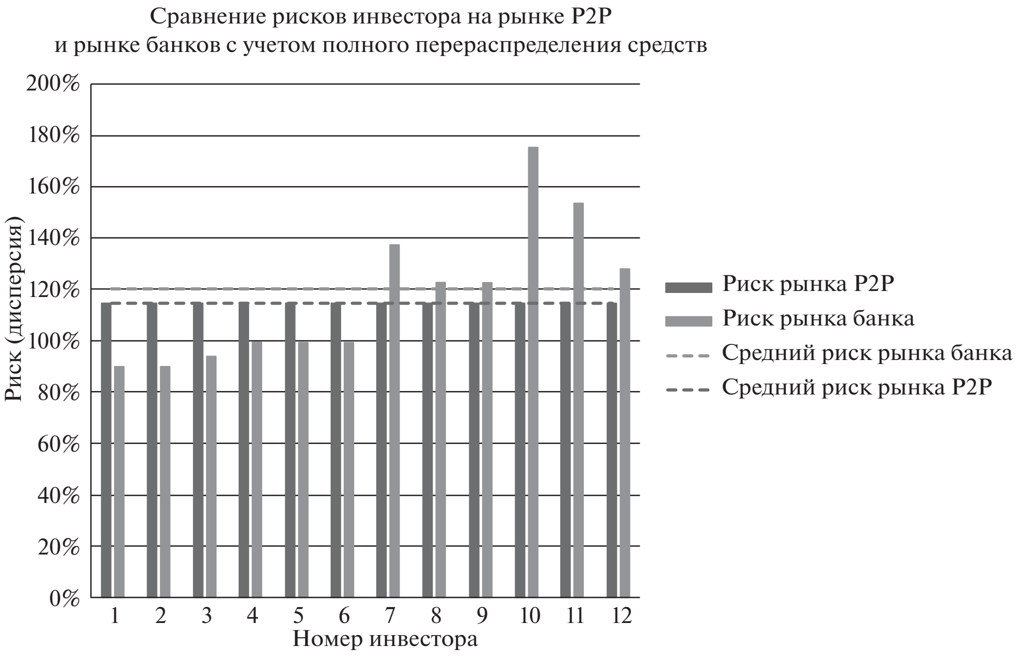
$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 0{,}6667 & 0{,}3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1250 & 0{,}1250 & 0{,}3750 & 0{,}3750 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6667 & 0{,}0667 & 0{,}2000 & 0{,}0667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5714 & 0{,}1429 & 0{,}2381 & 0{,}0476 \end{pmatrix}.$$

Источником средств, за счет которых банки выдают кредиты заемщикам, являются депозиты, размещаемые инвесторами в банках. Нормированная по строкам матрица депозитов $\hat{\mathcal{D}}$, элемент d_{ib} которой равен доле средств, которые инвестор $1 \leqslant i \leqslant 12$ вложил в банк $1 \leqslant b \leqslant 4$, представлена ниже:

$$\hat{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0{,}7500 & 0 & 0 & 0{,}2500 \\ 0{,}7500 & 0 & 0 & 0{,}2500 \\ 0{,}3750 & 0 & 0 & 0{,}6250 \\ 0 & 0{,}1111 & 0 & 0{,}8889 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}6667 & 0{,}3333 & 0 \\ 0 & 0{,}6667 & 0{,}3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8571 & 0{,}1429 \\ 0 & 0 & 0{,}6667 & 0{,}3333 \\ 0 & 0 & 0{,}4000 & 0{,}6000 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что заемщики не являются независимыми и что их взаимосвязь описывается матрицей корреляции заемщиков $\mathcal{E}$. При этом элементы на ее главной диагонали описывают дисперсии заемщиков, соответствующие риску вложения в них, а сама матрица имеет вид

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3459 & 0{,}3653 & 0{,}8105 & 0{,}7606 & 0{,}7623 & 0{,}7033 & 0{,}6860 \\ 0{,}3459 & 1 & 0{,}9280 & 0{,}1816 & 0{,}8719 & 0{,}8706 & 0{,}9059 & 0{,}9132 \\ 0{,}3653 & 0{,}9280 & 1 & -0{,}0068 & 0{,}8239 & 0{,}8223 & 0{,}8807 & 0{,}8965 \\ 0{,}8105 & 0{,}1816 & -0{,}0068 & 1 & 0{,}5610 & 0{,}5634 & 0{,}4638 & 0{,}4328 \\ 0{,}7606 & 0{,}8719 & 0{,}8239 & 0{,}5610 & 1 & 1 & 0{,}9918 & 0{,}9874 \\ 0{,}7623 & 0{,}8706 & 0{,}8223 & 0{,}5634 & 1 & 1 & 0{,}9915 & 0{,}9870 \\ 0{,}7033 & 0{,}9059 & 0{,}8807 & 0{,}4638 & 0{,}9918 & 0{,}9915 & 1 & 0{,}9921 \\ 0{,}6860 & 0{,}9132 & 0{,}8965 & 0{,}4328 & 0{,}9874 & 0{,}9870 & 0{,}9921 & 1 \end{pmatrix}.$$



Сравнение риска инвестора на рынке P2P и рынке банков.

При этом матрица долей прямых вложений на рынке P2P, элемент $\hat{p}_{iz}$ которой равен доле вложений инвестора $1 \leqslant i \leqslant 12$ в заемщика $1 \leqslant z \leqslant 8$, имеет вид

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \\ 0{,}1321 & 0{,}0755 & 0{,}2453 & 0{,}0755 & 0{,}2830 & 0{,}0755 & 0{,}0943 & 0{,}0189 \end{pmatrix}.$$

В результате расчета получаем, что средний риск в банковской модели равен 1,2019, а средний риск в модели P2P равен 1,1460. График сравнения рисков в данном случае представлен на рисунке.

5. Заключение

Из утверждения теоремы следует, что структура финансовых посредников — банков, которая описывается двухуровневой моделью $\mathscr{B}(\mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{E})$, соответствует большему специальному несистематическому риску, нежели одноуровневая модель $\mathscr{P}(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ при одинаковых рисках заемщиков, описываемых матрицей $\mathcal{E}$. Другими словами, сама идеология финансового посредничества в большинстве случаев порождает дополнительный риск для инвесторов.

Необходимо подчеркнуть, что такое сравнение возможно только при специальных несистематических рисках заемщиков, которые одинаковы для обоих рассматриваемых моделей. Такое равенство может быть достигнуто при условии выдачи кредитов банками и их последующей токенизации и распределения пакетов токенов между инвесторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. World Bank, International Finance Corporation. Doing Business 2014: Understanding Regulations for Small and Medium-Size Enterprises: The World Bank. 2013.
2. Российская Федерация. Федеральный закон от 23.12.2003 г. № 177-ФЗ О страховании вкладов физических лиц в банках Российской Федерации. 2003.
3. Российская Федерация. Федеральный закон от 10 июля 2002 г. № 86-ФЗ О Центральном банке Российской Федерации (Банке России). 2002.
4. Центральный Банк Российской Федерации. Инструкция от 29 ноября 2019 г. № 199-И об обязательных нормативах и надбавках к нормативам достаточности капитала банков с универсальной лицензией. 2019.
5. Basel Committee on Banking Supervision. Regulatory Consistency Assessment Programme (RCAP): Assessment of Basel III risk-based capital regulations – United States of America: Bank for International Settlements. 2014.
6. Basel Committee on Banking Supervision. Regulatory Consistency Assessment Programme (RCAP): Assessment of Basel III risk-based capital regulations – Russia: Bank for International Settlements. 2016.
7. РБК. АСВ подстраховало ЦБ. https://www.rbc.ru/newspaper/2017/10/13/59df617a9a7947c6698e1c0e. 2017.
8. *Bachmann A., Becker A., Buerckner D., Hilker M., Kock F., Lehmann M., Tiburtius P., Funk B.* Online peer-to-peer lending – A literature review // J. Internet Banking Commerc. 2011. No. 2. V. 16. P. 1–18.
9. LendingClub Corporation LendingClub Reports Fourth Quarter and Full Year 2019 Results. LendingClub. 2020. P. 1–15.
10. *Davydov V., Gazaryan A., Madhwal Y., Yanovich Y.* Token Standard for Heterogeneous Assets Digitization into Commodity // Proceedings of the 2019 2nd International Conference on Blockchain Technology and Applications. ACM. 2019. P. 43–47.
11. *Davydov V., Yanovich Y.* Optimal Portfolio Sold-Out via Blockchain Tokenization // Proceedings of the 2020 2nd International Electronics Communication Conference. ACM. 2020. P. 129–136.

12. *Davydov V., Yanovich Y.* Financial Instruments Generation via Tokenization into Commodity // 2nd Conference on Blockchain Research & Applications for Innovative Networks and Services (BRAINS). IEEE. 2020. P. 25–29.
13. *Markowitz H.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. V. 7. No. 1. P. 77–91.
14. *Lyuu Y.-D.* Financial Engineering and Computation. Cambridge Books. 2002.
15. *Kolm P.N., Tutuncu R., Fabozzi F.J.* 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends // Eur. J. Oper. Res. 2014. V. 234. No. 2. P. 356–371.
16. *Fabozzi F.J., Kolm P.N., Pachamanova D., Focardi S.M.* Robust Portfolio Optimization and Management. John Wiley. 2007.
17. *Ben-Tal A., Ghaoui L.E., Nemirovski A.* Robust optimization. Princeton Series in Applied Mathematics. 2009.
18. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge University Press. 2004.
19. *Skaf J., Boyd S.* Multi-Period Portfolio Optimization with Constraints and Transaction Costs. Stanford working papers. 2009. P. 1–23.
20. *Gambacorta L., Marques-Ibanez D.* The bank lending channel: lessons from the crisis // Econ. Policy. 2011. V. 26. No. 66. P. 135–182.
21. *Shim J.* Loan portfolio diversification, market structure and bank stability // J. Bank. Finance. 2019. V. 104. P. 103–115.
22. *Stiroh K.J.* A Portfolio View of Banking with Interest and Noninterest Activities // J. Money Credit Bank. 2006. V. 38. No. 5. P. 1351–1361.
23. *Musto D.K., Souleles N.S.* A portfolio view of consumer credit // J. Monet. Econ. 2006. V. 53. No. 1. P. 59–84.
24. *Bottero M., Lenzu S., Mezzanotti F.* Sovereign debt exposure and the bank lending channel: impact on credit supply and the real economy // J. Int. Econ. 2020. P. 103328.
25. *Bessis J.* Risk Management in Banking. Wiley Finance. 2015.
26. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. М.: МЦНМО. 2018.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 18.01.2021

После доработки 26.05.2021

Принята к публикации 30.06.2021