Автоматика и телемеханика, № 12, 2021

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2021 г. А.З. МЕЛИКОВ, чл.-корр. НАН Азербайджана, д-р техн. наук (agassi.melikov@gmail.com),
М.О. ШАХМАЛЫЕВ (mamed.shahmaliyev@gmail.com)
(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку),
С.С. НАИР (saji72nair@gmail.com)
(Государственный инженерный колледж, Триссур, Индия)

МАТРИЧНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОРТЯЩИМИСЯ ЗАПАСАМИ

Изучаются марковские модели систем обслуживания с портящимися запасами и бесконечным буфером при использовании двух политик пополнения запасов: в одной из них объем заказов является постоянной величиной, а другая зависит от текущего уровня запасов. Заявки могут присоединяться к очереди даже тогда, когда уровень запасов равен нулю. После завершения обслуживания заявки либо получают запасы, либо уходят из системы, не получив их, при этом длительность их обслуживания зависит от того, получила ли заявка запасы или нет. Получены условия эргодичности построенных двумерных цепей Маркова, и для вычисления их стационарных распределений используется матрично-геометрический метод. Найдены формулы для нахождения характеристик системы при использовании указанных политик пополнения запасов и даны результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: система обслуживания-запасания, портящиеся запасы, политика пополнения запасов, матрично-геометрический метод.

DOI: 10.31857/S0005231021120102

1. Введение

В последние три десятилетия системы обслуживания-запасания (Queuing-Inventory Systems, QIS) широко исследуются различными авторами. Современное состояние теории QIS и ее приложения подробно описаны в недавней обзорной работе [1]. Важным подклассом QIS являются системы с портящимися запасами (Perishable QIS, PQIS), в которых время жизни (годности) запасов является конечной случайной величиной (с.в.). Обзорная работа [2] и монография [3] посвящены исключительно изучению PQIS.

Среди работ, опубликованных после [2, 3], следует отметить [4–17]. Вкратце рассмотрим обзор их результатов. Для краткости изложения здесь используются модифицированные обозначения Кендалла, которые были предложены для обозначения моделей систем массового обслуживания (СМО). Более конкретно, в известные символические обозначения добавляются новые компоненты, которые указывают используемую политику пополнения запасов (ППЗ)[1], тип функции распределения (ф.р.) времени жизни запасов (символ ∞ в соответствующей позиции означает, что запасы являются долговечными) и тип ф.р. времени поставки запасов (0 в соответствующей позиции означает, что время поставки запасов равно нулю).

В [4–6] изучены Марковские модели управления запасами с мгновенным обслуживанием. В [7] изучена модель типа M/M/1/N/(s, Q)/M/M с нетерпеливыми заявками. Для решения задачи минимизация суммарных штрафов (Total Cost, TC) в системе используется метод, основанный на марковских процессах принятия решений, при этом управляемым параметром является скорость обслуживания сервера. Оптимальная скорость сервера выбирается из заданного конечного (дискретного) множества. Отметим, что такой подход минимизации TC ранее был использован в [18] для модели QIS с терпеливыми заявками, где управляемым параметром является объем поставок. В [8] изучена модель MAP/M/1/N/(s, Q)+(s, S)/M/PH с обратной связью и отдыхами сервера, здесь символ "+" указывает, что в зависимости от состояния системы используется либо (s, Q), либо (s, S)-политика. Для изучения данной системы используется матрично-геометрический метод (Matrix-Geometric Method, MGM) [19], получены формулы для вычисления характеристики системы и решена задача минимизации TC. В [9] изучена модель M/M/1/N/(s, Q)/M/M с ненадежным сервером, где поступающие заявки в зависимости от статуса сервера и уровня запасов могут либо просоединяться в очередь, либо покидать систему. Стационарное распределение находится с использованием MGM и решается задача минимизации TC. В [10–12] предложены модели PQIS, которые могут быть использованы для моделирования процессов бронирования, отмены и продажи авиа/ж.д./автобусных билетов. В [13] изучена модель M/M/1/0/(s, Q)/M/M с повторными заявками и рабочими отдыхами сервера. Аналогичная модель с ненадежным сервером изучена в [14]. В обеих работах для расчета характеристик изучаемых систем используется MGM. В [15] исследуется модель M/M/1/0/(s, Q)/M/M с повторными заявками. Найдено условие эргодичности системы, для расчета ее стационарного распределения используется MGM. Похожая модель M/M/1/0/(s, S)/M/M изучена в [16]. Марковская модель M/M/1/N/(s, S)/M/M с многократными отдыхами сервера изучена в [17]. Заявки, которые поступают во время отсутствия запасов, согласно схеме Бернулли либо присоединяются к очереди, либо покидают систему. Обслуживание заявок прекращается, если уровень запасов опускается ниже критического уровня. Для изучения системы используется MGM и приводятся результаты объемных вычислительных экспериментов.

---

[1] Различные авторы используют разные обозначения для одних и тех же ППЗ. Во избежание недоразумений здесь для ППЗ, в которой объем заказа равен $Q = S - s$, используется обозначение (s, Q), а обозначение (s, S) используется для ППЗ, в которой объем заказа равен $S - m$, где m указывает на текущий уровень запасов в момент выполнения заказа.

Почти во всех работах по QIS предполагается, что после завершения обслуживания все заявки получают запасы. Однако это предположение не всегда удовлетворяется в реальных системах. Кажется, первой работой, где учитывается этот факт, является [20]. В указанной работе изучаются модели $M/M/1/\infty/(s, S)/\infty/M$ и $M/M/1/\infty/(s, Q)/\infty/M$, где принимается принципиальное допущение о том, что заявки не принимаются в систему, если в моменты их поступления уровень запасов равень нулю. Доказано, что стационарное распределение системы определяется как произведение маргинального распределения числа заявок в СМО типа $M/M/1/\infty$ и числа товаров на складе. Интересным результатом этой работы является то, что условие эргодичности системы совпадает с соответствующим условием для СМО типа $M/M/1/\infty$, т.е. оно не зависит ни от типа ППЗ, ни от параметра времени выполнения заказов. Аналогичные результаты получены недавно в [21] для модели с отдыхами сервера и случайными объемами поставок.

Обобщение модели [20] для систем с портящимися запасами было предложено в [22]. Другими и при этом принципиальными отличиями модели, изученной в [22], от указанной в статье [20], являются следующие: (i) заявки могут приниматься в систему даже тогда, когда уровень запасов равен нулю; (ii) заявки в очереди являются нетерпеливыми; (iii) длительности обслуживания заявок зависят от того, получают они запасы или нет. В [22] был предложен приближенный метод расчета характеристик системы. Наряду с низкой вычислительной сложностью и высокой точностью указанного метода следует отметить, что его корректное применение требует выполнения определенных соотношений между исходными параметрами системы. Однако если необходимые соотношения не выполняются, то точность разработанных алгоритмов ухудшается. Поэтому возникает необходимость разработки универсального метода, применение которого не требует выполнения определенных соотношений между исходными параметрами системы. В связи с этим в данной работе предлагается матрично-геометрический метод.

Еще одно отличие изучаемой модели состоит в том, что здесь, как и в [7, 15, 16], допускаются порчи запасов даже в период их отпуска по заявкам.

2. Описание моделей

Рассмотрим модели $M/M/1/\infty/(s, S)/M/M$ и $M/M/1/\infty/(s, Q)/M/M$. В обеих моделях интенсивность поступающего пуассоновского потока равна λ. Для простоты полагаем, что заявки требуют запаса единичного размера; уровень запасов уменьшается также в результате их порчи, при этом время жизни запасов имеет экспоненциальную ф.р. с параметром γ, $\gamma > 0$.

Если в момент поступления заявки сервер является свободным и уровень запасов положительный, то она принимается на обслуживание; иначе заявки становятся в очередь бесконечной длины. Заявки присоединяются к очереди согласно схеме Бернулли даже тогда, когда уровень запасов равен нулю, т.е. если в момент поступления очередной заявки в системе отсутствуют запасы, то она либо с вероятностью φ_1 становится в очередь, либо с вероятностью φ_2

покидает систему, при этом $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$. Считается, что если уровень запасов равен нулю, то лишь заявка в начале очереди является нетерпеливой, т.е. в таких случаях заявка во главе очереди ожидает некоторое случайное время, которое имеет экспоненциальную ф.р. со средним τ^{-1}.

После завершения обслуживания заявка согласно схеме Бернулли либо с вероятностью σ_1 отказывается получить товар, либо с вероятностью σ_2 получает товар, $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$. При этом если заявка отказывается получить товар, то время ее обслуживания имеет экспоненциальную ф.р. со средним μ_1^{-1}; иначе время ее обслуживания также имеет экспоненциальную ф.р, но со средним μ_2^{-1}. Изучаются две ППЗ: (s, S) и (s, Q), при этом в обеих ППЗ время выполнения заказа имеет экспоненциальную ф.р. со средним ν^{-1}.

3. Расчет вероятностей состояний системы при использовании (s, S) политики

Работа системы описывается двумерной цепью Маркова (Two Dimensional Markov Chain, 2-D MC) с состояниями вида (n, m), где n указывает число заявок в системе, $n = 0, 1, \ldots$, а m обозначает уровень запасов на складе системы, $m = 0, 1, \ldots, S$. Пространство состояний этой цепи определяется так:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} L(n),$$

где множество $L(n) = \{(n, 0), (n, 1), \ldots, (n, S)\}$ называется n-й уровень.

Перенумеруем все состояния системы лексикографичским способом, т.е. состояния нумеруются согласно порядку $(0, 0), (0, 1), \ldots, (0, S), (1, 0)$, $(1, 1), \ldots, (1, S), \ldots$ Тогда исходя из описания системы заключаем, что полученная 2-D MC представляет собой не зависящий от уровня квази-процесс размножения и гибели (Level Independent Quasi-Birth-Death Process, LIQBD) со следующим генератором:

$$G = \begin{pmatrix} B & A_0 & . & . & . \\ A_2 & A_1 & A_0 & . & . \\ . & A_2 & A_1 & A_0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Блочные матрицы B, A_k, $k = 0, 1, 2$, являются квадратными с размерностью $S + 1$, и их элементы $B = \|b_{ij}\|$, $i, j = 0, 1, \ldots, S$, $A_k = \left\|a_{ij}^{(k)}\right\|$, $k = 0, 1, 2$, $i, j = 0, 1, \ldots, S$, определяются как

$$b_{ij} = \begin{cases} \nu, & \text{если} \quad i \le s, \ j = S, \\ i\gamma, & \text{если} \quad i > 0, \ j = i - 1, \\ -(\nu + \lambda\varphi_1), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -(\nu + i\gamma + \lambda), & \text{если} \quad 0 < i \le s, \ i = j, \\ -(i\gamma + \lambda), & \text{если} \quad s < i \le S, \ i = j, \\ 0, & \text{в других случаях;} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$(3.3)\qquad a_{ij}^{(0)}=\begin{cases}\lambda\varphi_1, & \text{если}\quad i=j=0,\\ \lambda, & \text{если}\quad i\neq 0,\ i=j,\\ 0, & \text{в других случаях;}\end{cases}$$

$$(3.4)\qquad a_{ij}^{(1)}=\begin{cases}\nu, & \text{если}\quad 0\le i\le s,\ j=S,\\ i\gamma, & \text{если}\quad i>0,\ j=i-1,\\ -(\tau+\nu+\lambda\varphi_1), & \text{если}\quad i=j=0,\\ -(\nu+i\gamma+\lambda+\mu_1\sigma_1+\mu_2\sigma_2), & \text{если}\quad i>0,\ i=j,\\ 0, & \text{в других случаях;}\end{cases}$$

$$(3.5)\qquad a_{ij}^{(2)}=\begin{cases}\tau, & \text{если}\quad i=j=0,\\ \mu_1\sigma_1, & \text{если}\quad i\neq 0,\ i=j,\\ \mu_2\sigma_2, & \text{если}\quad i>0,\ j=i-1,\\ 0, & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Т е о р е м а 1. *При использовании (s,S)-политики система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:*

$$(3.6)\qquad \lambda\left(1-(1-\varphi_1)\,\pi(0)\right)<\tau\pi(0)+(\mu_1\sigma_1+\mu_2\sigma_2)\left(1-\pi(0)\right)\ ,$$

где

$$\pi(0)=\left(1+\sum_{m=1}^{s+1}a_m+\sum_{m=s+2}^{S}b_m\right)^{-1};$$

$$a_m=\prod_{i=1}^{m}\frac{\Lambda_{i-1}+\nu}{\Lambda_i};\quad b_m=\frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_m}\prod_{i=1}^{s+1}\frac{\Lambda_{i-1}+\nu}{\Lambda_i};\quad \Lambda_i=\mu_2\sigma_2+i\gamma,\quad i=1,\dots,S.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стационарное распределение, которое соответствует генератору $A=A_0+A_1+A_2$, обозначим через $\boldsymbol{\pi}=(\pi(0),\pi(1),\dots,\pi(S))$, т.е. эти величины удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(3.7)\qquad \boldsymbol{\pi}A=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\pi}\mathbf{e}=1,$$

где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор-строка размерности $S+1$ и $\mathbf{e}$ – вектор-столбец размерности $S+1$, все компоненты которых равны единице. Иными словами, величины $\pi(m)$, $m=0,1,\dots,S$, представляют собой вероятности того, что уровень запасов равен m, $m=0,1,\dots,S$.

Из соотношений (3.3)–(3.5) заключаем, что элементы генератора $A=\|a_{ij}\|$, $i,j=0,1,\dots,S$, определяются как

$$(3.8)\qquad a_{ij}=\begin{cases}-\nu & \text{если}\quad i=j=0,\\ \nu & \text{если}\quad 0\le i\le s,\ j=S,\\ \mu_2\sigma_2+i\gamma & \text{если}\quad i>0,\ j=i-1,\\ -(\mu_2\sigma_2+i\gamma+\nu) & \text{если}\quad 0<i\le s,\ j=i,\\ -(\mu_2\sigma_2+i\gamma) & \text{если}\quad i>s,\ j=i,\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Из соотношений (3.8) заключаем, что система уравнений (3.7) имеет следующий явный вид:

$$
\begin{gathered}
(\nu + (m\gamma + \mu_2\sigma_2)(1-\delta_{m,0}))\,\pi(m) = \\
= ((m+1)\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi(m+1), \quad 0 \le m \le s;
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

$$
\begin{gathered}
(m\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi(m) = ((m+1)\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi(m+1)(1-\delta_{m,S}) + \\
+\nu \sum_{k=0}^{s} \pi(k)\delta_{m,S}, \quad s+1 \le m \le S\,.
\end{gathered} \tag{3.10}
$$

Здесь и далее $\delta_{x,y}$ обозначают символы Кронекера. Из уравнений (3.9) и (3.10) величины $\pi(m)$, $m = 1, \ldots, S$, выражаются через $\pi(0)$ следующим образом:

$$
\pi(m) = \begin{cases} a_m\pi(0), & \text{если} \quad 1 \le m \le s+1, \\ b_m\pi(0), & \text{если} \quad s+1 < m \le S. \end{cases} \tag{3.11}
$$

Величина $\pi(0)$ определяется из условия нормировки, т.е. $\pi(0)+\pi(1)+\ldots+$ $+\pi(S)=1$.

Согласно [19] (гл. 3, стр. 81–83) изучаемый LIQBD является эргодичным тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение:

$$
\boldsymbol{\pi} A_0 \mathbf{e} < \boldsymbol{\pi} A_2 \mathbf{e}. \tag{3.12}
$$

С учетом соотношений (3.3), (3.5) и (3.11) после выполнения определенных преобразований из (3.12) получим соотношение (3.6).

Замечание 1. Условие эргодичности (3.6) имеет вероятностный смысл. Действительно, левая часть неравенства (3.6) представляет собой взвешенную общую интенсивность поступления заявок в систему при условии отсутствия запасов и при их наличии, а правая часть (3.6) определяет взвешенную общую интенсивность ухода заявок из системы в результате нетерпеливости заявок из-за отсутствия запасов системы (см. первое слагаемое в правой части (3.6)) и после их обслуживания с получением запасов и без их получения (см. второе слагаемое в правой части (3.6)). Следовательно, условие (3.6) физически означает следующее: взвешенная общая интенсивность поступления заявок в систему должна быть меньше, чем взвешенная общая интенсивность ухода заявок из системы. Условие (3.6) может быть заменено грубым, но в то же время легко проверяемым условием $\lambda < \min(\tau, \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2)$.

Замечание 2. В частном случае, когда $\varphi_1 = 0$ и $\tau = 0$, из (3.6) при $\sigma_2 = 0$ находим классическое условие эргодичности одноканальной марковской системы обслуживания. Кроме того, если положить $\sigma_2 = 1$, то находим, что при $\varphi_1 = 0$ и $\tau = 0$ условие эргодичности системы не зависит от размера склада системы (S), а также не зависит ни от интенсивностей порчи запасов (γ) и ни от интенсивности их пополнения (ν). Эти результаты полностью соответствуют результатам работ [20, 21].

Стационарное распределение, соответствующее генератору G, обозначим через $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots)$, где $\boldsymbol{p}_n = (p\,(n,0)\,, p\,(n,1)\,, \ldots, p\,(n,S))$, $n = 0, 1, \ldots$. При выполнении условия эргодичности (3.6) искомое стационарное распределение определяется как

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_0 R^n, \quad n \geq 1, \tag{3.13}$$

где R является неотрицательным и минимальным решением следующего квадратичного матричного уравнения:

$$R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = 0. \tag{3.14}$$

Вероятности $\boldsymbol{p}_0$ граничных состояний вычисляются из следующей системы уравнений:

$$\boldsymbol{p}_0\,(B + RA_2) = \mathbf{0}, \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{p}_0\,(I - R)^{-1}\,\mathbf{e} = 1, \tag{3.16}$$

где I обозначает единичную матрицу размерности $S + 1$.

4. Расчет вероятностей состояний системы при использовании (s, Q)-политики

Пространство состояний данной модели также задается с помощью множества E, но здесь элементы генератора $\tilde{G}$ полученной LIQBD вычисляются так:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & A_0 & . & . & . \\ A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & . & . \\ . & A_2 & \tilde{A}_1 & A_0 & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Элементы матриц $\tilde{B}$ и $\tilde{A}_1$ вычисляются как

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} \nu, & \text{если} \quad j = i + S - s, \\ i\gamma, & \text{если} \quad i > 0,\ j = i - 1, \\ -\left(\nu + \lambda\varphi_1\right), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -\left(\nu + i\gamma + \lambda\right), & \text{если} \quad 0 < i \leq s,\ i = j, \\ -\left(i\gamma + \lambda\right), & \text{если} \quad s < i \leq S,\ i = j, \\ 0, & \text{в других случаях;} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\tilde{a}_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \nu, & \text{если} \quad 0 \leq i \leq s,\ j = i + S - s, \\ i\gamma, & \text{если} \quad i > 0,\ j = i - 1, \\ -\left(\tau + \nu + \lambda\varphi_1\right), & \text{если} \quad i = j = 0, \\ -\left(\nu + i\gamma + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2\right), & \text{если} \quad i > 0,\ i = j, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Теорема 2. При использовании (s,Q)-политики система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется соотношение (3.6), *где*

$$\pi(0) = c_0 \left(\sum_{m=0}^{s} c_m + \sum_{m=s+1}^{S-s} d_m + \sum_{m=S-s+1}^{S} f_m \right)^{-1};$$

$$c_m = \prod_{i=m+1}^{s+1} \frac{\Lambda_i}{\nu + \Lambda_{i-1}}; \quad d_m = \frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_m}; \quad f_m = \frac{\nu}{\Lambda_m} \sum_{i=m-S+s}^{s} c_i.$$

Доказательство. Элементы генератора $\tilde{A} = A_0 + \tilde{A}_1 + A_2$ определяются так:

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} -\nu & \text{если} \quad i = j = 0, \\ \nu & \text{если} \quad 0 \le i \le s, \ j = i + S - s, \\ \mu_2\sigma_2 + i\gamma & \text{если} \quad i > 0, \ j = i - 1, \\ -(\mu_2\sigma_2 + i\gamma + \nu) & \text{если} \quad 0 < i \le s, \ j = i, \\ -(\mu_2\sigma_2 + i\gamma) & \text{если} \quad i > s, \ j = i, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Из соотношений (4.4) заключаем, что система уравнений (3.7), соответствующая генератору $\tilde{A}$, имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} &(\nu + (m\gamma + \mu_2\sigma_2)(1 - \delta_{m,0}))\,\pi(m) = \\ &= ((m+1)\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi(m+1), \quad 0 \le m \le s; \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} (m\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi(m) = ((m+1)\gamma + \mu_2\sigma_2)\,\pi(m+1)(1 - \delta_{m,S}) + \\ + \nu\pi(m - S + s)\,\delta_{m,S}, \quad s + 1 \le m \le S. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) вероятности $\pi(m)$, $m = 1, \ldots, S$, выражаются через величины $\pi(s+1)$ следующим образом:

$$\pi(m) = \begin{cases} c_m\pi(s+1), & \text{если} \quad 0 \le m \le s, \\ d_m\pi(s+1), & \text{если} \quad s+1 \le m \le S-s, \\ f_m\pi(s+1), & \text{если} \quad S-s+1 \le m \le S, \end{cases} \tag{4.7}$$

где

$$c_m = \prod_{i=m+1}^{s+1} \frac{\Lambda_i}{\nu + \Lambda_{i-1}}; \quad d_m = \frac{\Lambda_{s+1}}{\Lambda_m}; \quad f_m = \frac{\nu}{\Lambda_m} \sum_{i=m-S+s}^{s} c_i.$$

Значение $\pi(s+1)$ вычисляется через условие нормировки:

$$\pi(s+1) = \left(\sum_{m=0}^{s} c_m + \sum_{m=s+1}^{S-s} d_m + \sum_{m=S-s+1}^{S} f_m \right)^{-1}.$$

Далее с учетом соотношений (3.3), (3.5) и (4.7) после выполнения определенных преобразований из (3.12) получаем, что теорема 2 верна.

Стационарное распределение исходной модели опять определяется с помощью системы уравнений (3.15), (3.16).

Замечание 3. Из теорем 1 и 2 заключаем, что в отличие от [20, 21] в исследуемых моделях условия эргодичности зависят от размера склада системы, интенсивности порчи запасов и времени пополнения заказов.

5. Расчет характеристик системы

При использовании обеих ППЗ усредненные характеристики исследуемой PQIS находятся через вероятности состояний системы. В качестве основных выбираются следующие характеристики:

• средний уровень запасов на складе (S_{av})

$$S_{av} = \sum_{m=1}^{S} m \sum_{n=0}^{\infty} p\,(n, m)\,; \tag{5.1}$$

• средний объем одного заказа при использовании (s, S)-политики (V_{av})

$$V_{av} = \sum_{m=S-s}^{S} m \sum_{n=0}^{\infty} p\,(n, S-m)\,; \tag{5.2}$$

Замечание 4. Средний объем одного заказа при использовании (s, Q)-политики пополнения запасов является постоянной величиной и равен $Q = S - s$.

• средняя длина очереди заявок (L_{av})

$$L_{av} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=0}^{S} p\,(n, m)\,; \tag{5.3}$$

• средняя интенсивность заказов (RR)

$$RR = \gamma\,(s+1)\,p\,(0, s+1) + (\mu_2\sigma_2 + s\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} p\,(n, s+1)\,; \tag{5.4}$$

• средняя интенсивность порчи запасов (Γ_{av})

$$\Gamma_{av} = \gamma S_{av}; \tag{5.5}$$

• вероятность потери заявок из-за отсутствия запасов (PL)

$$PL = \varphi_2 \sum_{n=0}^{\infty} p\,(n, 0)\,. \tag{5.6}$$

6. Численные результаты

Цель выполнения вычислительных экспериментов заключается в изучении поведения характеристик рассматриваемых моделей (5.1)–(5.6), а также суммарных штрафов (Total Cost, TC) относительно изменения значений исходных параметров при использовании различных ППЗ.

Отметим, что при использовании обеих ППЗ TC определяются как

$$TC\,(s) = (K + c_r V_{av})\,RR + c_h S_{av} + c_{ps}\Gamma_{av} + c_l \lambda PL + c_w L_{av}, \tag{6.1}$$

где K – фиксированная цена одного заказа, c_r – цена единицы объема заказа; c_h – цена хранения единицы объема запасов за единицу времени; c_{ps} – цена порчи единицы запаса; c_l – штрафы за потери одной заявки; c_w– цена за единицу времени ожидания в очереди одной заявки.

Некоторые результаты этих экспериментов для модели с максимальным размером склада $S = 20$ показаны в табл. 1–9, где в каждом столбце верх-

Таблица 1. Зависимость характеристик моделей от параметра λ

λ	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
1	6,9467	0,3333	0,5691	0,0872		2042,15
	7,8353	0,3333	0,5240	0,0803	8,0499	2045,36
1,2	6,9245	0,4286	0,6410	0,0902		2131,46
	7,8195	0,4286	0,5898	0,0830	8,0763	2115,15
1,4	6,9024	0,5385	0,7123	0,0931		2220,67
	7,8047	0,5326	0,6519	0,0855	8,1013	2181,53
1,6	6,8805	0,6667	0,7830	0,0960		2309,91
	7,7883	0,6667	0,7199	0,0883	8,1287	2255,10
1,8	6,8587	0,8182	0,8534	0,0989		2399,31
	7,7728	0,8182	0,7841	0,0909	8,1547	2325,53
2	6,8371	1	0,9232	0,1018		2489,12
	7,7574	1	0,8478	0,0935	8,1805	2396,52

Таблица 2. Зависимость характеристик моделей от параметра μ_1

μ_1	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
3	6,9379	0,3682	0,5973	0,0844		2076,47
	7,8291	0,3683	0,5500	0,0814	8,0606	2072,63
3,2	6,9398	0,3606	0,5913	0,0811		2069,19
	7,8304	0,3608	0,5445	0,0811	8,0581	2066,63
3,4	6,9416	0,3534	0,5855	0,0879		2062,13
	7,8317	0,3535	0,5392	0,0809	8,0559	2061,08
3,6	6,9433	0,3468	0,5802	0,0877		2055,62
	7,8329	0,3465	0,5340	0,0807	8,0539	2055,68
3,8	6,9450	0,3398	0,5744	0,0874		2048,61
	7,8341	0,3398	0,5289	0,0805	8,0518	2050,45
4	6,9467	0,3333	0,5691	0,0870		2042,14
	7,8353	0,3333	0,5240	0,0803	8,0499	2045,36

Таблица 3. Зависимость характеристик моделей от параметра μ_2

μ_2	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
3	6,9575 7,8429	0,4283 0,4288	0,5962 0,5498	0,0858 0,0790	 8,0371	2080,52 2075,91
3,2	6,9550 7,8412	0,4051 0,4055	0,5884 0,5424	0,0861 0,0793	 8,0400	2069,68 2067,32
3,4	6,9527 7,8395	0,3843 0,3846	0,5829 0,5362	0,0864 0,0796	 8,0428	2060,61 2060,12
3,6	6,9505 7,8380	0,3656 0,3658	0,5766 0,5312	0,0867 0,0798	 8,0453	2053,11 2054,15
3,8	6,9485 7,8366	0,3487 0,3488	0,5720 0,5271	0,0870 0,0801	 8,0477	2046,99 2049,26
4	6,9467 7,8353	0,3333 0,3333	0,5691 0,5240	0,0872 0,0803	 8,0499	2042,14 2045,36

Таблица 4. Зависимость характеристик моделей от параметра τ

τ	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
1	6,9448 7,8338	0,3483 0,3471	0,5764 0,5289	0,0874 0,0804	 8,0522	2051,30 2050,61
1,2	6,9452 7,8342	0,3448 0,3439	0,5748 0,5278	0,0873 0,0804	 8,0517	2049,18 2049,40
1,4	6,9456 7,8345	0,3416 0,3411	0,5732 0,5268	0,0873 0,0803	 8,0512	2047,23 2048,33
1,6	6,9460 7,8348	0,3386 0,3382	0,5718 0,5258	0,0873 0,0803	 8,0507	2045,41 2047,23
1,8	6,9464 7,8350	0,3359 0,3358	0,5704 0,5249	0,0872 0,0803	 8,0503	2043,72 2046.31
2	6,9467 8,8353	0,3333 0,3333	0,5691 0,5240	0,0872 0,0803	 8,0499	2042,14 2045,36

Таблица 5. Зависимость характеристик моделей от параметра ν

ν	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
2	5,5928 6,5507	0,3333 0,3333	0,4598 0,4241	0,1778 0,1640	 10,1186	1656,16 1735,25
2,2	5,9107 6,8595	0,3333 0,3333	0,4856 0,4474	0,1531 0,1411	 9,6272	1746,62 1810,19
2,4	6,2024 7,1388	0,3333 0,3333	0,5091 0,4688	0,1324 0,1219	 9,1797	1829,72 1877,75
2,6	6,4707 7,3925	0,3333 0,3333	0,5308 0,4886	0,1148 0,1057	 8,7706	1906,22 1938,95
2,8	6,7181 7,6237	0,3333 0,3333	0,5507 0,5070	0,0999 0,0920	 8,3953	1976,83 1994,58
3	6,9467 7,8553	0,3333 0,3333	0,5691 0,5240	0,0872 0,0803	 8,0499	2042,14 2045,36

Таблица 6. Зависимость характеристик моделей от параметра γ

γ	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
2	8,1789	0,3333	0,5214	0,0380		1804,37
	8,9524	0,3333	0,4818	0,0352	6,1934	1731,77
2,2	7,9023	0,3333	0,5326	0,0469		1859,29
	8,7061	0,3333	0,4915	0,0433	6,6077	1801,47
2,4	7,6420	0,3333	0,5429	0,0564		1910,14
	8,4720	0,3333	0,5005	0,0520	6,9988	1867,40
2,6	7,3967	0,3333	0,5524	0,0663		1957,33
	8,2493	0,3333	0,5089	0,0611	7,3685	1929,86
2,8	7,1653	0,3333	0,5611	0,0766		2001,23
	8,0373	0,3333	0,5167	0,0705	7,7184	1989,10
3	6,9467	0,3333	0,5691	0,0872		2042,14
	7,8353	0,3333	0,5340	0,0803	8,0499	2045,36

Таблица 7. Зависимость характеристик моделей от параметра φ_1

φ_1	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
0	6,9497	0,3106	0,5575	0,0870		2027,59
	7,8367	0,3125	0,5164	0,0801	8,0461	2037,24
0,2	6,9485	0,3193	0,5620	0,0870		2033,25
	7,8367	0,3204	0,5193	0,0802	8,0476	2040,35
0,4	6,9473	0,3285	0,5667	0,0871		2039,13
	7,8358	0,3289	0,5224	0,0802	8,0491	2043,64
0,6	6,9461	0,3378	0,5713	0,0872		2044,91
	7,8348	0,3375	0,5255	0,0803	8,0506	2046,95
0,8	6,9447	0,3489	0,5766	0,0874		2051,50
	7,8338	0,3476	0,5291	0,0804	8,0523	2050,78
1	6,9434	0,3601	0,5818	0,0875		2057,98
	7,8328	0,3579	0,5326	0,0805	8,0539	2054,61

Таблица 8. Зависимость характеристик моделей от параметра σ_1

σ_1	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
0	6,8993	0,3333	0,6488	0,0935		2132,41
	7,8017	0,3333	0,5967	0,0860	8,1063	2115,75
0,2	6,9308	0,3333	0,5998	0,0893		2072,39
	7,8240	0,3333	0,5484	0,0822	8,0688	2068,87
0,4	6,9627	0,3333	0,5423	0,0851		2011,74
	7,8466	0,3333	0,4995	0,0784	8,0309	2021,73
0,6	6,9948	0,3333	0,4884	0,0808		1950,43
	7,8693	0,3333	0,4500	0,0745	7,9927	1974,14
0,8	7,0273	0,3333	0,4335	0,0764		1888,47
	7,8922	0,3333	0,3999	0,0705	7,9542	1926,08
1	7,0602	0,3333	0,3782	0,0720		1825,83
	7,9153	0,3333	0,3333	0,0665	7,9153	1877,54

Таблица 9. Зависимость характеристик моделей от параметра s

s	S_{av}	L_{av}	RR	PL	V_{av}	TC
3	6,2553	0,3333	0,5209	0,1108		1907,38
	6,6468	0,3333	0,5053	0,1074	6,8351	1780,71
4	6,5519	0,3333	0,5290	0,0996		1955,25
	7,0966	0,3333	0,5056	0,0952	7,3077	1874,02
5	6,7778	0,3333	0,5457	0,0922		2000,48
	7,4889	0,3333	0,5127	0,0866	7,7020	1962,11
6	6,9467	0,3333	0,5691	0,0872		2042,15
	7,8353	0,3333	0,5240	0,0803	8,0499	2045,36
7	7,0667	0,3333	0,5986	0,0839		2080,25
	8,1440	0,3333	0,5383	0,0754	8,3598	2124,23
8	7,1211	0,3333	0,6322	0,0823		2113,55
	8,4206	0,3333	0,5548	0,0717	8,6372	2199,15
9	7,1775	0,3333	0,6764	0,0810		2147,49
	8,6688	0,3333	0,5732	0,0686	8,8861	2270,43

няя строка соответствует (s,Q)-политике, а нижняя — (s,S)-политике пополнения запасов (поскольку характеристики (5.5) и (5.1) отличаются друг от друга лишь постоянным множителем, то в таблицах значения характеристики (5.5) не приводятся). В табл. 1–8 принимается, что $s=6$; в качестве базовых принимаются следующие значения исходных данных (т.е. в каждой таблице при изменении значений конкретного параметра значения других параметров остаются неизменными): $\lambda=1$; $\mu_1=\mu_2=4$; $\nu=\gamma=3$; $\tau=2$; $\varphi_1=0{,}5$; $\sigma_1=0{,}3$. Коэффициенты в выражении функционала (6.1) выбирались так:

$$K=750,\quad c_r=35,\quad c_h=50,\quad c_l=75,\quad c_w=30,\quad c_{ps}=50.$$

Из-за ограниченности объема работы здесь не приводится подробный анализ результатов численных экспериментов; лишь отметим, что все результаты полностью соответствуют теоретическим ожиданиям, при этом сравнительный анализ значений суммарных штрафов при различных ППЗ показывает, что они существенным образом зависят от значений многочисленных исходных параметров, и потому невозможно предсказать эффективность той или иной ППЗ без выполнения соответствующих вычислительных экспериментов (хотя наблюдается монотонность характеристик относительно изменения конкретных параметров).

7. Заключение

В работе изучаются марковские модели систем обслуживания-запасания с бесконечным размером буфера, нетерпеливыми заявками и портящимися запасами при использовании двух политик пополнения запасов — с фиксированным и переменным объемом заказов. Отличительной особенностью изучаемых моделей является то, что заявки могут приниматься в систему даже тогда, когда уровень запасов равен нулю. Считается, что после завершения обслуживания часть заявок согласно схеме Бернулли либо покидает систему без получения товаров, либо получают товары. Математическими моделями изучаемых систем при обеих ППЗ являются двумерные цепи Маркова, которые имеют трехдиагональные генераторы. Найдены условия эргодичности этих цепей и показано, что в частном случае из них получаются ранее известные результаты для подобных моделей.

Здесь предполагалось, что время жизни запасов является непрерывной случайной величиной с заданной функцией распределения, и таким образом, не учитываются их мгновенные порчи из-за внезапных событий, например в результате небрежного отношения сотрудников склада к своей работе. Такие ситуации могут быть учтены с помощью введения потока "катастрофических" заявок, которые не требуют обслуживания, а их появление приводит к мгновенному уменьшению уровня запасов (этот поток можно называть "негативные пополнения", как аналог негативных заявок). Эти модели являются объектами дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Narayanan W.* Inventory with positive service time: a survey / Advanced Trends in Queueing Theory. Series of Books "Mathematics and Statistics" Sciences. Anisimov V., Limnios N. (Eds.). ISTE & Wiley. London. 2021. Vol. 2. P. 201–238.
2. *Bakker M., Riezebos J., Teunter R.H.* Review of inventory systems with deterioration since 2001 / Eur. J. Oper. Res. 2012. V. 221. P. 275–284.
3. *Nahmias S.* Perishable Inventory Theory. Heidelberg: Springer, 2011.
4. *Ko S.S., Kang J., Kwon E-J.* An (s, S) inventory model with level-dependent G/M/1 type structure / J. Ind. & Manag. Opt. 2016. V. 12. Iss. 2. P. 609–624.

   https://doi.org/10.3934/jimo.2016.12.609
5. *Ko S.S.* A nonhomogeneous quasi-birth-death process approach for an (s, S) policy for a perishable inventory system with retrial demands / J. Ind. & Manag. Opt.

   https://doi.org/10.3934/jimo.2019009
6. *Kocer U.U., Yalcin B.* Continuous review (s, Q) inventory system with random lifetime and two demand classes / OPSEARCH. 2020. V. 57. P. 104–118.

   https://doi.org/10.1007/s12597-019-00393-0
7. *Al Hamadi H.M., Sangeetha N., Sivakumar B.* Optimal control of service parameter for a perishable inventory system maintained at service facility with impatient customers / Ann. Oper. Res. 2015. V. 233. P. 3–23.
8. *Amirthakodi M., Radhamani V., Sivakumar B.* A perishable inventory system with service facility and feedback customers / Ann. Oper. Res. 2015. V. 233. P. 25–55.
9. *Jeganathan K., Yadavalli V.S.S.* A finite source perishable inventory system with second optional service and server interruptions / ORiON. 2016. V. 32. Iss. 1. P. 23–53.
10. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Lakshmy B.* On a queueing-inventory with reservation, cancellation, common life time and retrial / Ann. Oper. Res. 2016. V. 247. P. 365–389.

11. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Lakshmy B.* G/M/1 type queueing-inventory system with postponed, cancellation and common life time / Indian J. Pure & Appl. Math. 2016. V. 47. Iss. 2. P. 357–388.
12. *Shajin D., Krishnamoorthy A., Manikandan R.* On a queueing-inventory system with common life time and Markovian lead time process / Oper. Res. https://doi.org/10.1007/s12351-020-00560-y
13. *Laxmi P.V., Soujanya M.L.* Perishable inventory model with retrial demands, negative customers and multiple working vacations / Int. J. Math. Model. & Comput. 2017. V. 7. Iss. 4. P. 239–254.
14. *Laxmi P.V., Soujanya M.L.* Perishable inventory system with service interruptions, retrial demands and negative customers / Appl. Math. & Comput. 2015. V. 262. P. 102–110.
15. *Reshmi P.S., Jose K.P.* A queueing-inventory system with perishable items and retrial of customers / Malaya J. Mat. 2019. V. 7. Iss. 2. P. 165–170.
16. *Reshmi P.S., Jose K.P.* A production inventory model with deteriorating items and retrial demands / OPSEARCH. https://doi.org//10.1007/s12597-020-00471-8
17. *Jajaraman B., Sivakumar B., Arivarignan G.* A Perishable Inventory System with Postponed Demands and Multiple Server Vacations / Modeling and Simulation Engineering (Hindawi Publishing Corporation). V. 2012. Article ID 620960. 17 pages.
18. *Melikov A.Z., Molchanov A.A.* Stock optimization in transport/storage systems / Cybernetics. 1992. V. 27. Iss. 3. P. 484–487.
19. *Neuts M.F.* Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: John Hopkins University Press, 1981.
20. *Krishnamoorthy A., Manikandan R., Lakshmy B.* Revisit to queueing-inventory system with positive service time / Ann. Oper. Res. 2015. V. 233. P. 221–236.
21. *Zhang Y., Yue D., Yue W.* A queueing-inventory system with random order size policy and server vacations / Ann. Oper. Res. https://doi.org/10.1007/s10479-020-03859-3
22. *Melikov A.Z., Shahmaliyev M.O.* Markov models of inventory management systems with a positive service time / J. Comp. & Sys. Sci. Int. 2018. V. 57. Iss. 5. P. 767–783.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 22.03.2021

После доработки 05.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021