Автоматика и телемеханика, № 2, 2021

© 2021 г. В.Н. БУКОВ, д-р техн. наук (v_bukov@mail.ru)
(ОАО "Бортовые аэронавигационные системы", Москва),
А.М. БРОННИКОВ, д-р техн. наук (bronnikov_a_m@mail.ru)
(Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана),
И.Ф. ГАМАЮНОВ, канд. техн. наук (ilyagama@gmail.com)
(ВУНЦ ВВС "Военно-воздушная академия
им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", Воронеж)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНФИГУРИРОВАНИЕ ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ ПО РАССОГЛАСОВАНИЮ

Развивается аналитический подход к управлению избыточностью технических систем на фоне осуществления в системе управления по рассогласованию. Новые результаты приводятся в сопоставлении с полученными ранее основными положениями подхода для случая внешнего воздействия на избыточную систему. Получены условия допустимости и формулы альтернативных конфигураций в двух вариантах: как только достаточный и как необходимый и достаточный. Методические примеры иллюстрируют применение полученных решений.

Ключевые слова: избыточная система, управление избыточностью, конфигурация системы, допустимая конфигурация, передаточная матрица, целевая функция, канонизация матриц.

DOI: 10.31857/S0005231021020021

1. Введение

Под конфигурацией избыточного оборудования понимается способ или схема выборочного соединения компонентов оборудования с целью достижения заданной цели функционирования [1–5]. Чаще всего перестройке подвергается вычислительная система [6–9], коммуникационная система [10–12] или несколько систем сразу [13–15].

Одним из наиболее распространенных технических приложений использования избыточности является синтез отказоустойчивых систем управления, для которых в случае отказа или повреждения одного из каналов управления или передачи информации можно перераспределять его функции по оставшимся исправным каналам [11, 15].

Авторам не известны работы с постановкой и решением задачи, аналогичными рассматриваемой в статье. Так, например, в [15] решается задача обеспечения неизменности управляющего воздействия на систему за счет реконфигурации регулятора при возникновении отказа органов управления и не затрагивается задача обеспечения неизменности передаточной матрицы по рассогласованию. От других работ в области стабилизации свойств линейных систем за счет управления избыточностью данную статью отличает, прежде всего, представление традиционного регулятора в цепи обратной связи в виде произведения интерфейсных и интеграционных матриц, что, по мнению авторов, наиболее соответствует практическим нуждам. Новизной статьи относительно предыдущих работ авторов является использование в качестве целевой функции передаточной матрицы по рассогласованию.

Аналитический подход к управлению избыточностью оборудования с линейными стационарными моделями и названный здесь конфигурированием, охватывает такие вопросы, как:

тестирование альтернативных конфигураций на их допустимость в смысле наличия возможности достижения целей функционирования системы в соответствующей конфигурации,

интеграция избыточных компонентов в систему с едиными целями функционирования в смысле определения настроек системы (в основном алгоритмов ее вычислительных средств), обеспечивающих достижение этих целей при выбранной допустимой конфигурации.

Данная статья нацелена на лаконичное изложение некоторых результатов направления применительно к системам, подверженным внешним воздействиям, а также на получение аналогичных результатов для систем с так называемым управлением по рассогласованию.

2. Исходные положения

Формальным объектом задачи конфигурирования (управления избыточностью) системы, подвергающейся внешнему воздействию [16, 17], является линейная динамическая система, состоящая из объекта управления и избыточных в общем случае динамических компонентов комплекса оборудования (КО), вместе в линейном приближении описываемых уравнением с дискретным временем $\tau = 1, 2, \ldots$

$$x_{\tau+1} = Ax_\tau + Bu_\tau + Gv_\tau, \quad x_{\tau=0} = x_0, \quad y_\tau = Dx_\tau, \tag{1}$$

а также избыточной бортовой интегрированной вычислительной среды, функционирование которой в линейном приближении описывается формулой

$$u_\tau = Q(z)y_\tau. \tag{2}$$

Здесь x_τ – метавектор (составной вектор) состояния объекта и компонентов размерности n на такте τ с известными начальными условиями x_0, u_τ – метавектор входов компонентов для межкомпонентных связей размерности l, v_τ – метавектор входов компонентов для внешних воздействий размерности k, y_τ – метавектор выходов всех компонентов размерности m, A – блочная числовая матрица собственной динамики объекта и компонентов размеров $n \times n$, B – блочная числовая матрица эффективности межкомпонентных связей размеров $n \times l$, G – блочная числовая матрица эффективности внешних воздействий размеров $n \times k$, D – блочная числовая матрица формирования выходов всех компонентов размеров $m \times n$, z – оператор сдвига во времени на один такт вперед [18, 19], $Q(z)$ – передаточная матрица размеров $l \times m$ (по оператору z) от метавектора выходов компонентов y_τ к метавектору их входов для межкомпонентных связей u_τ, названная конфигурационной матрицей [16].

В настоящей статье основное внимание сосредоточено на системах с управлением по рассогласованию выходов, в линейном приближении описываемых уравнением и равенствами с дискретным временем $\tau = 1,\, 2, \ldots$

$$(3)\quad x_{\tau+1} = Ax_\tau + Bu_\tau + Gv_\tau, \quad x_{\tau=0} = x_0, \quad y_\tau = Dx_\tau, \quad u_\tau = Q(z)\left(y_\tau^{\text{зад}} - y_\tau\right),$$

где $y_\tau^{\text{зад}}$ – метавектор заданных значений выходов системы.

В задаче управления избыточностью линейной системы числовые матрицы A, B, G и D в (1) и (3) полагаются фиксированными. Их значения определяют динамические свойства как объекта, так и всех (используемых и неиспользуемых в текущий момент времени) располагаемых компонентов КО в разрозненном состоянии.

Конфигурационная матрица $Q(z)$ в (2) и (3) через размещение ненулевых элементов (соответствует коммутированию входов и выходов соответствующих компонентов) объединяет компоненты КО и объект в единую систему. Посредством же конкретных значений ненулевых элементов она определяет правила обработки данных вычислительными средствами. Таким образом осуществляется подчинение функционирования системы (1), (2) или (3) общим целям и удовлетворение предъявляемых требований.

Именно значения конфигурационной матрицы $Q(z)$, а точнее, закономерности возникновения и изменения множества ее в некотором смысле эквивалентных значений $\{Q(z)\}_\kappa$, где κ – совокупное обозначение параметров, варьирование которых порождает это множество, являются предметом поиска, исследования и практического использования в задаче управления избыточностью технической системы.

3. Передаточные матрицы системы

В развиваемом подходе требования к динамическим свойствам избыточной системы связываются со значениями передаточных матриц для вынужденных составляющих:

замкнутой системы (1), (2) от внешних воздействий v_τ к выходам y_τ

$$(4)\qquad W_y^v(z) = \left[w_{y_{j.\tau}}^{v_{i.\tau}}(z)\right]_{m\times k} = D(zI_n - A - BQ(z)D)^{-1}G,$$

где $w_{y_{j.\tau}}^{v_{i.\tau}}(z)$ – передаточная функция от i-го входа $v_{i.\tau}$ к j-му выходу $y_{j.\tau}$, I_n – единичная матрица размеров $n \times n$;

замкнутой системы (3) от заданных значений $y_\tau^{\text{зад}}$ к выходам y_τ

$$(5)\qquad W_y^{y^{\text{зад}}}(z) = \left[w_{y_{j.\tau}}^{y_{i.\tau}^{\text{зад}}}(z)\right]_{m\times m} = D(zI_n - A + BQ(z)D)^{-1}BQ(z).$$

Рисунки 1 и 2 иллюстрируют структуры моделей, соответствующих передаточным матрицам (4) и (5). В зависимости от конкретных условий рассматривается одна из этих передаточных матриц или они рассматриваются совместно.

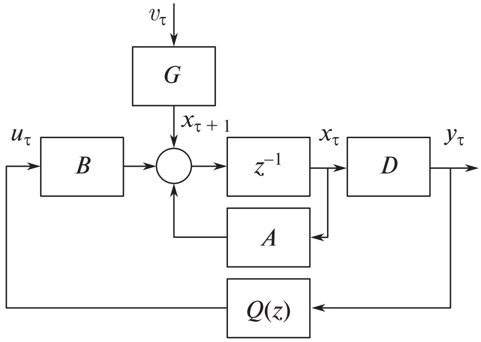

Рис. 1. Структура системы “объект + КО” с внешним воздействием.

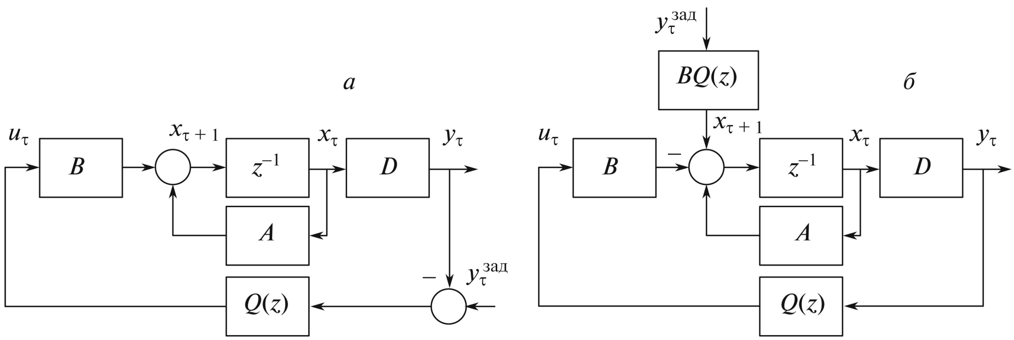

Рис. 2. Структуры системы “объект + КО” с управлением по рассогласованию выходов: *а* — исходная, *б* — преобразованная к виду рис. 1.

Принципиальное различие моделей (4) и (5), определяющее структуры матричных конструкций в основе решения задачи управления избыточностью, заключается в том, что варьируемая конфигурационная матрица $Q(z)$ находится либо только в цепи обратной связи (рис. 1) от воздействия v_τ до выхода системы y_τ, либо присутствует также и в цепи прямой связи (рис. 2) от $y_\tau^{\text{зад}}$ до y_τ.

4. Формулировка задачи и номинальная конфигурация

Для линейной динамической системы, описываемой передаточными матрицами (4) или (5), вводится понятие целевой функции [17], отражающей применение системы по назначению. В качестве такой функции для случая внешних воздействий используются выборочные строки и столбцы передаточной матрицы (4) в соответствии с весовыми матрицами α размеров $k \times g$ и β размеров $f \times m$:

$$\Phi^{\text{возд}}(z) = \beta W_y^v(z)\alpha = \beta D(zI_n - A - BQ(z)D)^{-1}G\alpha. \tag{6}$$

В задаче управления по рассогласованию выходов используются выборочные строки и столбцы передаточной матрицы (5) с весовыми матрицами α

размеров $m \times g$ и β размеров $f \times m$:

$$\Phi^{\text{расс}}(z) = \beta W_y^{y^{\text{зад}}}(z)\alpha = \beta D(zI_n - A + BQ(z)D)^{-1}BQ(z)\alpha. \tag{7}$$

Традиционная задача определения обратных связей (в общем случае речь должна идти о множестве[1] эквивалентных матриц $Q(z)$), обеспечивающих требуемое значение $\Phi_{\text{треб}}^{\text{возд}}(z)$ целевой функции для случая внешнего воздействия, заключается в разрешении уравнения (6), или значение $\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)$ – для случая управления по рассогласованию выходов, связанное с решением уравнения (7). Это кратко можно записать диаграммой

$$\Phi_{\text{треб}}(z) \overset{\text{Решение (6) или (7)}}{\Longrightarrow} \{Q(z)\}_\kappa.$$

При постановке задачи о конфигурировании (управлении избыточностью) КО осуществляется расчленение этой диаграммы на два этапа. Первый из них заключается в определении любого одного решения $Q_{\text{ном}}^{\text{возд}}(z)$ для уравнения

$$\Phi_{\text{треб}}^{\text{возд}}(z) = \beta D(zI_n - A - BQ_{\text{ном}}^{\text{возд}}(z)D)^{-1}G\alpha \tag{8}$$

или $Q_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)$ для уравнения

$$\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z) = \beta D(zI_n - A + BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)D)^{-1}BQ_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)\alpha, \tag{9}$$

названного номинальной конфигурацией КО и устраивающего разработчика.

Для решения таких задач разработан широкий арсенал подходов и методов, использующих как строгие положения теорий управления и оптимизации [20–23], так и инженерные приемы и методики, основанные на опыте, переносе отработанных на прототипах решений и пр. [24]. Примем, что как минимум по одному решению $Q_{\text{ном}}^{\text{возд}}(z)$ для (8) и $Q_{\text{ном}}^{\text{расс}}(z)$ для (9) существуют.

Второй этап сосредоточен только на порождении множества решений, эквивалентных номинальному в смысле неизменности значения целевой функции $\Phi_{\text{треб}}^{\text{возд}}(z)$ или $\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z)$, что записывается диаграммой

$$\underbrace{\Phi_{\text{треб}}(z) \overset{\text{Решение (8) или (9)}}{\Longrightarrow} Q_{\text{ном}}}_{\text{Этап 1}}\underbrace{(z) \overset{\text{Конфигурирование}}{\Longrightarrow} \{Q(z)\}_\kappa}_{\text{Этап 2}}. \tag{10}$$

Считается, что первый этап выполняется предварительно, и далее все внимание сосредотачивается только на втором этапе. При этом существование конфигураций $Q^{\text{возд}}(z)$ и $Q^{\text{расс}}(z)$, отличных от номинальных, пока остается открытым вопросом.

[1] В подавляющем большинстве применений различных подходов либо единственность решения обеспечивается “излишними” условиями (например, процедуры типа метода наименьших квадратов обеспечивают минимальность квадратичной нормы результата, что с содержательной стороны не всегда имеет внятное обоснование), либо разработчик не подозревает о существовании других эквивалентных решений поставленной задачи.

5. Формализация и допустимость конфигурации

Исследования показали, что решение уравнений (6) или (7) дает значения матриц $Q(z)$ с заполненными (не нулевыми) практически всеми их элементами, что противоречит физическому содержанию задачи, поскольку какая-то (порой значительная) часть этих элементов должна принимать заведомо нулевые значения. Это отражает (формализует) управляемое отключение некоторых компонентов комплекса в реализуемой конфигурации системы.

Удачным разрешением указанной ситуации стало [16, 17] представление конфигурационных матриц в виде произведения

$$Q(z) = C_{\text{вх}} E(z) C_{\text{вых}}, \tag{11}$$

где $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ – распределительные матрицы размеров $l \times p$ и $q \times m$, т.е. матрицы, содержащие бинарные элементы и не более одного единичного элемента в строке, названные интерфейсными матрицами [17], поскольку без учета задержек моделируют функционирование входных и выходных интерфейсов всех компонентов и каналов связи между ними за исключением объекта, $E(z)$ – в общем случае рациональная полиномиальная матрица размеров $p \times q$, моделирующая обработку вычислительными средствами всех поступающих данных и задержек в интерфейсных устройствах и каналах связи, названная интеграционной матрицей [17].

В выборе интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, осуществляемом преимущественно на основе инженерных доводов, заключается процесс конфигурирования избыточной системы, а определение интеграционной матрицы $E(z)$ путем решения специальных матричных уравнений составляет процесс интеграции избыточной системы.

Задача конфигурирования избыточной системы, подвергающейся внешнему воздействию v_τ, базирующаяся на уравнении (6) с заданным значением целевой функции (8), решена ранее. В [25] изложены формальные условия допустимости возможных конфигураций, задаваемых выбором $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, в [26] – решение основного уравнения интеграции для множества интеграционных матриц $\{E(z)\}_\kappa$, соответствующих допустимым конфигурациям и заданной целевой функции, а в [27] – общая методика решения таких задач.

Далее рассматривается только задача конфигурирования избыточной системы с управлением по рассогласованию выходов $y_\tau^{\text{зад}} - y_\tau$, связанная с решением уравнения (7) и заданным значением целевой функции (9).

Как и ранее в задаче с внешним воздействием [25, 26], конфигурацию $Q(z)$ будем считать допустимой, если при выбранных матрицах $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$ в системе (7) существует возможность (существует соответствующая $E(z)$) сохранения неизменным значение целевой функции

$$\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z),$$

зафиксированное весовыми функциями α, β и номинальной конфигурацией КО $Q_{\text{ном}}(z)$ в соответствии с (9).

6. Управление по рассогласованию

Задача заключается в том, чтобы для целевой функции системы (9) определить допустимость заданных интерфейсных матриц $C_{\text{вх}}$, $C_{\text{вых}}$ и при их допустимости найти множество таких интеграционных матриц $E(z)$, при которых значение целевой функции $\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z)$ остается неизменным:

$$\beta D(zI_n - A + BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D)^{-1}BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}\alpha = \Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z). \tag{12}$$

Уравнение (12) относительно неизвестной матрицы $E(z)$ является основным уравнением интеграции избыточной системы при управлении по рассогласованию выходов.

Далее используются обозначения канонизации [20] произвольной матрицы S ранга r: $\overline{S}^{\text{L}}$ и $\overline{S}^{\text{R}}$ – левый и правый делители нуля максимального ранга, $S^{\sim\text{L}}$, $S^{\sim\text{R}}$ и $S^{\sim}$ – левый, правый и сводный канонизаторы, удовлетворяющие тождествам

$$\overline{S}^{\text{L}}S = 0, \quad S\overline{S}^{\text{R}} = 0, \quad S^{\sim\text{R}}S^{\sim\text{L}} = S^{\sim} \quad \text{и} \quad S^{\sim\text{L}}SS^{\sim\text{R}} = I_r.$$

Неединственность указанных матричных образований позволяет отбирать среди множества альтернатив упрощенные решения (с нулевыми и единичными значениями элементов) для ускорения вычислений и обеспечения наглядности примеров [26].

Решение задачи сформулировано в виде двух теорем.

Т е о р е м а 1. *Достаточным условием существования интеграционных матриц $E(z)$, обеспечивающих выполнение равенства (12) при заданных интерфейсных матрицах $C_{\text{вх}}$ и $C_{\text{вых}}$, является одновременное выполнение двух условий с блочной матрицей $\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}$*

$$\overline{BC_{\text{вх}}}^{\text{L}}BQ^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z)\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix} = 0, \tag{13}$$

$$BQ^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z)\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}\overline{C_{\text{вых}}\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}}^{\text{R}} = 0, \tag{14}$$

при этом множество интеграционных матриц $E_{\mu,\eta}(z)$ описывается формулой

$$\begin{aligned}\{E(z)\}_{\mu,\eta} = {} & \underbrace{(BC_{\text{вх}})^{\sim}BQ^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z)\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}\left(C_{\text{вых}}\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}\right)^{\sim}}_{\text{Базовое решение}} + \\ & + \underbrace{\overline{BC_{\text{вх}}}^{\text{R}}\mu}_{\substack{\text{Вариация}\\ \text{столбцов}}} + \underbrace{\eta\,\overline{C_{\text{вых}}\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}}^{\text{L}}}_{\text{Вариация строк}},\end{aligned} \tag{15}$$

где μ и η – произвольные матрицы подходящих размеров, выбор которых ограничен условием

$$\det\left(zI_n - A + BC_{\text{вх}}E_{\mu,\eta}(z)C_{\text{вых}}D\right) \neq 0. \tag{16}$$

Только достаточность теоремы 1 обусловлена удовлетворением требования неизменности раздельно для знаменателя и числителя матричной дроби (12), что исключает учет возможной компенсации их вариаций и тем самым значительно сужает множество получаемых решений. Вместе с тем теорема 1 обладает двумя важными достоинствами: относительной вычислительной простотой и возможностью получения заведомо физически реализуемых решений, т.е. решений в виде матриц $E(z)$, степень полиномов числителей которых не превышает степень полинома знаменателя.

Исчерпывающее же решение задачи дает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Необходимым и достаточным условием существования интеграционных матриц $E(z)$, обеспечивающих выполнение равенства (12) при заданных интерфейсных матрицах $C_{вх}$ и $C_{вых}$, является одновременное выполнение двух условий разрешимости основного уравнения интеграции*

$$\overline{\aleph(z)}^{\mathrm{L}}\,\overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{L}}\,(zI_n - A)\,(\beta D)^{\sim}\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z) = 0, \tag{17}$$

$$\delta_\xi(z)\,\overline{C_{\text{вых}}\,(\alpha - D\delta_\xi(z))}^{\mathrm{R}} = 0 \tag{18}$$

и условия существования передаточной матрицы замкнутой системы

$$\det\,(zI_n - A + BC_{\text{вх}}E_{\xi,\vartheta,\psi}(z)C_{\text{вых}}D) \neq 0, \tag{19}$$

где

$$\aleph(z) = \overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{L}}\,(zI_n - A)\,\overline{\beta D}^{\mathrm{R}}, \tag{20}$$

матрица $\delta_\xi(z)$ принадлежит множеству, вычисляемому по формулам

$$\{\delta(z)\}_\xi = (\beta D)^{\sim}\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z) + \overline{\beta D}^{\mathrm{R}}\rho_\xi(z), \tag{21}$$

$$\{\rho(z)\}_\xi = -(\aleph(z))^{\sim}\overline{BC}^{\mathrm{L}}(zI_n - A)(\beta D)^{\sim}\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z) + \underbrace{\overline{\aleph(z)}^{\mathrm{R}}\xi}_{\substack{\text{Вариация базового}\\ \text{решения на 2-м ярусе}}}, \tag{22}$$

ξ – матрица подходящих размеров с почти произвольными элементами, обеспечивающими выполнение условий (18) *и* (19), *при этом все множество интеграционных матриц $E_{\xi,\vartheta,\psi}(z)$ описывается формулой*

$$\begin{aligned}\{E(z)\}_{\xi,\vartheta,\psi} = {} & \underbrace{(BC_{\text{вх}})^{\sim}\,(zI_n - A)\,\delta_\xi(z)(C_{\text{вых}}\,(\alpha - D\delta_\xi(z)))^{\sim}}_{\text{Базовое решение}} + \\ & + \underbrace{\overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{R}}\vartheta}_{\substack{\text{Вариация стролбцов}\\ \text{на 1-м ярусе}}} + \underbrace{\psi\,\overline{C_{\text{вых}}\,(\alpha - D\delta_\xi(z))}^{\mathrm{L}}}_{\substack{\text{Вариация строк}\\ \text{на 1-м ярусе}}},\end{aligned} \tag{23}$$

где ϑ и ψ – удовлетворяющие условию[2] (19) *произвольные матрицы подходящих размеров.*

[2] Строго говоря, условия (15) и (19) могут нарушаться в конечном числе значений z, называемых полюсами соответствующих передаточных функций.

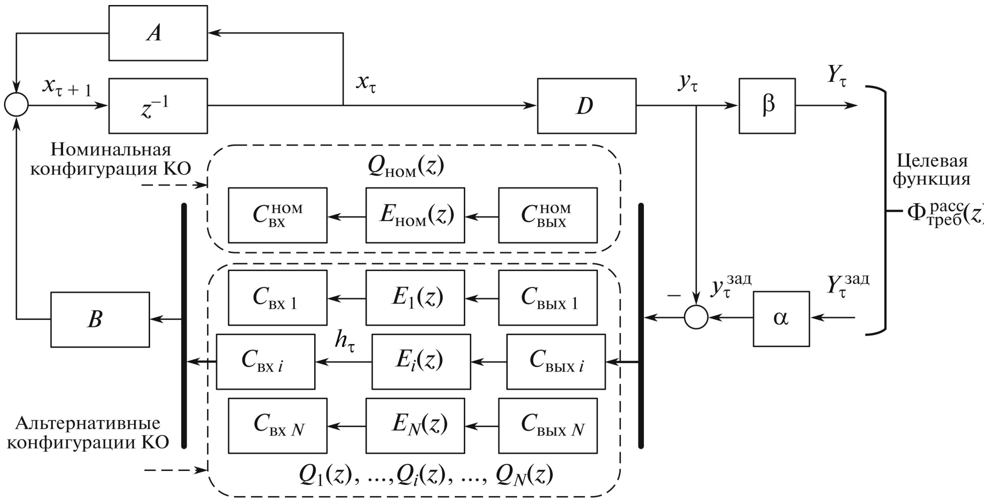

Рис. 3. Общая структура системы “объект + избыточный КО”.

Теорема 2 отличается от теоремы 1 существенно большей сложностью, связанной с количеством процедур канонизации и “двухъярусностью” варьирования решения: первого путем выбора матриц ϑ и ψ в формуле (23) с проверкой условия (19) и второго путем выбора матрицы ξ в формуле (22) с проверкой условий (18), (19). При этом условие (17) по аналогии с результатами [26] является автономным в том смысле, что не зависит от варьируемых матриц.

Трудность использования теоремы 2 связана с неявным ограничением выбора матрицы ξ в формуле (22) условиями (18) и (19) через формулу (21). Способ прямого удовлетворения таких ограничений не найден, но в частных весьма распространенных случаях при выполнении любого из двух равенств

$$\overline{\beta D}^{\mathrm{R}} = 0, \quad \overline{\aleph(z)}^{\mathrm{R}} = 0 \tag{24}$$

матрица $\delta_\xi(z)$ принимает единственное значение, а условия (18) и (19) не зависят от выбора ξ.

Доказательства теорем приведены в Приложении.

Обобщающая иллюстрация решенной задачи показана на рис. 3, где жирными элементами условно показаны коммутационные средства, осуществляющие подключение эквивалентных по целевой функции номинальной или одной из N альтернативных конфигураций.

Содержательное объяснение условий (24) сводится к следующему. Введенная в (20) матрица $\aleph(z)$ является фактором связности[3] для динамической системы

$$F_Y^h(z) = \beta D(zI_n - A)^{-1} B C_{\text{вх}}, \tag{25}$$

представляющей собой часть системы (12) от p-мерного выхода h_τ всех вычислительных средств КО к тестовым выходам Y_τ при оборванных связях

[3] В [20] использован термин “матрица связности”, который здесь корректируется.

КО: $E(z) = 0$. Согласно теореме 2.4 и определению 2.6 из [20] любое из условий (24) соответствует отсутствию в системе (25) линейной зависимости входов, обусловленной только ее внутренней связностью, т.е. без учета внешней связности, формализуемой делителем нуля $\overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{R}}$ и учитываемой явно в (23). На рис. 3 показано положение вектора h_τ, относящегося к определению функции (25).

7. Примеры

Управление самолетом. Пример из [25] с упрощенной моделью продольного движения самолета преобразуем к задаче управления по рассогласованию выходов (7). Соответствующие матрицы имеют значения:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Номинальная конфигурация задана следующими значениями матриц:

$$C_{\text{вх}}^{\text{ном}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{\text{вых}}^{\text{ном}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{\text{ном}}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{b_1} & \dfrac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} \end{bmatrix}, \quad Q_{\text{ном}} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{b_1} & \dfrac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{\text{треб}}^{\text{расс}}(z) = \frac{a_3}{z - a_{\text{ж}}}.$$

В рамках примера для различных вариантов конфигураций выполнены вычисления в соответствии теоремами 1 и 2 с привлечением программы MatLab. Полученные результаты с целью проверки подставлялись в (12). Выборочно результаты вариантов (вариант 0 – номинальный) сведены в табл. 1 и 2, где выполнение условий теорем отмечено символами: “+” — выполняется, “–” — не выполняется.

В табл. 2 введены дополнительные обозначения функций:

$$(26) \quad q(z) = \frac{a_3\left((z - a_1)(z - a_4) - a_2 a_3\right)}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2 a_3}, \quad p(z) = -\frac{a_3 (z - a_1)}{(z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2 a_3},$$

$$r(z) = \frac{a_3 (z - 1)\left((z - a_1)(z - a_4) - a_2 a_3\right)}{(z - 1)\left((z - a_1)(z - a_{\text{ж}}) - a_2 a_3\right) - a_2 a_3 (z - a_1)},$$

$$t(z) = \frac{(z-1)\left((z-a_1)(z-a_ж)-a_2a_3\right)}{a_2a_3(z-a_1)},$$

$$f(z) = \frac{a_3\,(z-1)\left((z+a_1)(z-a_4)+a_2a_3\right)}{(z-a_1)\left((z+1)(z-a_ж)+a_2a_3\right)},$$

$$s(z) = \frac{(z-1)\left((z-a_1)(z-a_ж)-a_2a_3\right)}{a_2a_3(a_1-1)}.$$

Для варианта 1 далее приводятся некоторые детали вычислений.

Таблица 1. Генерирование альтернативных конфигураций по теореме 1

№	Конфигурация		Условия существ. (13), (14)	Решение по формуле (15)	
	$C_{вх}$	$C_{вых}$		Базовое решение	Вариация столбцов
0	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$	+ +	$\begin{bmatrix}\frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4-a_ж}{b_1}\end{bmatrix}$	—
1	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$	+ +	$\begin{bmatrix}\frac{a_3}{b_2} & \frac{a_4-a_ж}{b_2}\end{bmatrix}$	—
2	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$	+ +	$\begin{bmatrix}\frac{a_3}{b_1} & \frac{a_4-a_ж}{b_1}\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{b_2}{b_1}\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1 & \mu_2\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$	+ −	Нет решения	
4	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$	+ −		

Таблица 2. Генерирование альтернативных конфигураций по теореме 2

№	Конфигурация		Условия существ. (17)–(19)	Решение по формуле (23)		
	$C_{вх}$	$C_{вых}$		Базовое решение	Вариация столбцов	Вариация строк
0	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$	+ + +	$\begin{bmatrix}\frac{q\,(z)}{b_1} & 0\end{bmatrix}$	—	$\psi\begin{bmatrix}p(z) & 1\end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$	+ + +	$\begin{bmatrix}\frac{q\,(z)}{b_2} & 0\end{bmatrix}$	–	$\psi\begin{bmatrix}p(z) & 1\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}1\,0\\0\,1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$	+ + +	$\begin{bmatrix}-\frac{b_2}{b_1}\\1\end{bmatrix}[\vartheta_1\ \vartheta_2]$	$\begin{bmatrix}-\frac{b_2}{b_1}\\1\end{bmatrix}[\vartheta_1\ \vartheta_2]$	$\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{bmatrix}[\,p(z)\ 1]$
3	$\begin{bmatrix}1\,0\\0\,1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$	+ + +	$\begin{bmatrix}\frac{r(z)}{b_1} & \frac{r(z)}{b_1}\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-\frac{b_2}{b_1}\\1\end{bmatrix}[\vartheta_1\ \vartheta_2]$	$\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{bmatrix}[\ 1\ t(z)]$
4	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$	+ + +	$\begin{bmatrix}\frac{f\,(z)}{b_1} & \frac{f\,(z)}{b_1}\end{bmatrix}$	–	$\psi\begin{bmatrix}1 & s(z)\end{bmatrix}$

Вычисления по теореме 1 (табл. 1). Предварительные расчеты:

$$BC_{\text{вх}} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{R}} = 0,$$

$$\overline{BC}^{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (BC)^{\sim} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{b_2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}}^{\mathrm{L}} = 0,$$

$$\left(C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}\right)^{\sim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие (13) выполняется:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{b_1} & \dfrac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_{\text{ном}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}} = 0.$$

Условие (14) также выполняется:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{b_1} & \dfrac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_{\text{ном}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\overline{C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}}^{\mathrm{R}}} = 0.$$

Решение по формуле (15) единственное:

$$E(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{b_2} & 0 \end{bmatrix}}_{(BC_{\text{вх}})^{\sim}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{b_1} & \dfrac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_{\text{ном}}} \times \tag{27}$$

$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\left(C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}\right)^{\sim}} + \underbrace{\overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{R}}}_{0} \mu + \eta \underbrace{\overline{C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}}^{\mathrm{L}}}_{0} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{b_2} & \dfrac{a_4 - a_{\text{ж}}}{b_2} \end{bmatrix}.$$

Вычисления подтверждают выполнение (16) у вариантов 1 и 2. Следовательно, конфигурация строки 1 в табл. 1 является допустимой. Проверка подтверждает совпадение $\Phi^{\text{расс}}(z)$ и $\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z)$. У вариантов 3 и 4 условие (14) не выполняется, из чего следует, что конфигурации недопустимы.

Вычисления по теореме 2 (табл. 2). Предварительные расчеты:

$$\beta D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\beta D}^{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\beta D)^{\sim} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \aleph(z) = \begin{bmatrix} z-a_1 & 0 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}.$$

Фактор связности $\aleph(z)$ обратим, и его оба делителя нуля равны нулю. Условие (17) выполняется, а вычисления по формуле (22) дают единственное значение

$$\rho(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-a_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix}}_{\aleph^{\sim}=\aleph^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{L}}} \underbrace{\begin{bmatrix} z-a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & z-a_4 & 0 \\ 0 & a_2 & z-1 \end{bmatrix}}_{(zI_n-A)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{(\beta D)^{\sim}} \underbrace{\frac{a_3}{z-a_{\text{ж}}}}_{\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{a_2a_3}{(z-a_1)(z-a_{\text{ж}})} \\ \dfrac{a_2a_3}{(z-1)(z-a_{\text{ж}})} \end{bmatrix}.$$

Матрица $\delta_\xi(z)$ имеет единственное значение

$$\delta(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{(\beta D)^{\sim}} \underbrace{\frac{a_3}{z-a_{\text{ж}}}}_{\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{\beta D}^{\mathrm{R}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{a_2a_3}{(z-a_1)(z-a_{\text{ж}})} \\ \dfrac{a_2a_3}{(z-1)(z-a_{\text{ж}})} \end{bmatrix}}_{\rho(z)} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_2a_3}{(z-a_1)(z-a_{\text{ж}})} \\ \dfrac{a_3}{z-a_{\text{ж}}} \\ \dfrac{a_2a_3}{(z-1)(z-a_{\text{ж}})} \end{bmatrix},$$

и, соответственно, матричное выражение, результаты повторной канонизации которого используются в (20) и (23), принимает тоже единственное значение

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_{\text{вых}}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\alpha} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{a_2a_3}{(z-a_1)(z-a_{\text{ж}})} \\ \dfrac{a_3}{z-a_{\text{ж}}} \\ \dfrac{a_2a_3}{(z-1)(z-a_{\text{ж}})} \end{bmatrix}}_{\delta(z)} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(z-a_1)(z-a_ж)-a_2a_3}{(z-a_1)(z-a_ж)} \\ -\dfrac{a_3}{z-a_ж} \end{bmatrix}.$$

Канонизация этой матрицы дает:

$$\overline{C_{вых}\left(\alpha - D\delta_\xi(z)\right)}^{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{(z-a_1)(z-a_ж)-a_2a_3}{a_3(z-a_1)} \end{bmatrix},$$

$$\overline{C_{вых}\left(\alpha - D\delta_\xi(z)\right)}^{\mathrm{R}} = 0,$$

$$\left(C_{вых}\left(\alpha - D\delta_\xi(z)\right)\right)^{\sim} = \begin{bmatrix} \dfrac{(z-a_1)\,(z-a_ж)}{(z-a_1)\,(z-a_ж)-a_2a_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие (18) выполняется. Вычисления по формуле (23) в итоге дают множество решений

$$\{E(z)\}_\psi = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{q(z)}{b_2} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Базовое решение}} + \underbrace{\psi \begin{bmatrix} p(z) & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Вариация строк}}, \tag{28}$$

где функции $q(z)$ и $p(z)$ принимают значения (26), ψ – произвольное число или выражение такие, что выполняется условие (19). Соответствующее ограничение имеет вид неравенства

$$\psi(z) \neq \frac{a_2\left(a_3b_1 - b_2q(z)\right) - b_1\left(z-a_1\right)\left(z-a_4\right)}{b_1b_2\left((z-a_1)+a_2p(z)\right)}.$$

При любых других значениях этой функции условие (19) выполняется, и конфигурация допустима. Вычисления показывают совпадение $\Phi^{\text{расс}}(z)$ и $\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z)$ у вариантов 1–4.

Множество решений (28) содержит физически реализуемые и не реализуемые элементы, что связано с выбором варьируемого параметра ψ.

Среди решений $\{E(z)\}_\psi$ присутствует и решение (27), полученное ранее по теореме 1, в чем можно убедиться, используя в (28) значение параметра

$$\psi = \frac{a_4 - a_ж}{b_1}.$$

Пример подтверждает справедливость утверждений теорем 1 и 2, а табл. 1 и 2 демонстрируют более широкие возможности применения теоремы 2.

Методический пример[4]. Рассмотрим следующие матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = D = \beta = I_2, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[4] Пример подсказан рецензентом статьи.

Таблица 3. Альтернативные конфигурации в методическом примере

№	Конфигурация: $C_{\text{вх}}$	Конфигурация: $C_{\text{вых}}$	Условия существ. (17)–(19)	Решение по формуле (23): Базовое решение	Решение по формуле (23): Вариация столбцов	Решение по формуле (23): Вариация строк
0	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$+ \;\; + \;\; +$	$\begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	–	$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix}$
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$+ \;\; + \;\; +$	$\begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix}$
				Значения $E(z)$, не являющиеся решениями		
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$+ \;\; + \;\; -$	$\begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix}$

Пусть задана номинальная конфигурация

$$Q^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z) = \underbrace{I_2}_{C^{\text{ном}}_{\text{вх}}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{z^3}{z^2+1} & \dfrac{z^2}{z^2+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{\text{ном}}(z)} \underbrace{I_2}_{C^{\text{ном}}_{\text{вых}}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{z^3}{z^2+1} & \dfrac{z^2}{z^2+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Варианты трех конфигураций приведены в табл. 3, где вариант 0 соответствует номинальной конфигурации при выборе $\psi_1(z) = -\frac{z}{z^2+1}$, $\psi_2 = 0$. Вариант 2 сформирован заведомо неработоспособным, поскольку в (12) для него имеет место равенство $C_{\text{вых}}\alpha = 0$.

Применим теорему 2 для варианта 2. Условия (17), (18) выполнены:

$$\aleph(z) = \overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{L}}(zI_2 - A)\underbrace{\overline{\beta D}^{\mathrm{R}}}_{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} zI_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\overline{\aleph(z)}^{\mathrm{L}}\,\overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{L}}\,(zI_2 - A)\,(\beta D)^{\sim}\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z) = 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} zI_2 I_2 \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\delta(z) = (\beta D)^{\sim}\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z) = \Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z),$$

$$C_{\text{вых}}\,(\alpha - D\delta_\xi(z)) = \begin{bmatrix} -z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{C_{\text{вых}}\,(\alpha - D\delta_\xi(z))}^{\mathrm{R}} = 0.$$

Однако условие (19) не выполняется, в чем можно убедиться следующими вычислениями:

$$(BC_{\text{вх}})^{\sim\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (BC_{\text{вх}})^{\sim\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(BC_{\text{вх}})^{\sim} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{E(z)\}_{\vartheta,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} zI_2 \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{z} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -z & \psi_1 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 + \psi_2 \end{bmatrix},$$

$$\det\left(zI_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z & \psi_1 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 + \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом, в конфигурации варианта 2 ни одно из вычисленных значений $E(z)$ не может быть решением задачи из-за невыполнения условия (19).

8. Заключение

Применительно к избыточному комплексу оборудования, реализующему управление по рассогласованию выходов системы, предложено аналитическое решение задачи генерирования (тестирования и интеграции) альтернативных конфигураций, обеспечивающих неизменность целевой функции его функционирования, зафиксированной в номинальной конфигурации. В отличие от ранее решенной аналогичной задачи применительно к системе, подвергающейся внешнему воздействию, вновь полученное решение является более сложным, что выражено в существенно большем числе операций с полиномиальными матрицами и двумя ярусами их варьирования.

Предлагаемый подход не ограничен исключительно областью линейных систем. В сочетании с использованием различных приемов декомпозиции и линеаризации он становится универсальным инструментом для структурных решений в избыточных системах более широкого круга.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что равенство (12), содержащее матричную дробь, будет справедливо, если одновременно выполняются равенства для знаменателя и правого числителя:

$$BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}D = BQ^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z)D, \quad BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}}\alpha = BQ^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z)\alpha. \tag{П.1}$$

В блочном форме этим равенствам соответствует запись

$$BC_{\text{вх}}E(z)C_{\text{вых}} \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix} = BQ^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z) \begin{bmatrix} D & \alpha \end{bmatrix}. \tag{П.2}$$

Уравнение (П.2) относительно неизвестной матрицы согласно теореме 1.6 из [20] разрешимо, если и только если выполнены условия (13) и (14), а его решение согласно теореме 1.7 из [20] определяется формулой (15). Равенство (12) имеет смысл, если и только если выполняется условие (16). Вместе с тем, выполнение первого условия (П.1) гарантирует неизменность знаменателя матричной дроби (12), а значит и существование таких варьируемых параметров μ и η, при которых детерминантное условие (16) выполняется. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Вводя с учетом (11) замену

$$\delta(z) = (zI_n - A + BQ(z)D)^{-1}BQ(z)\alpha, \tag{П.3}$$

перепишем уравнение (12) в виде

$$\beta D\delta(z) = \Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z). \tag{П.4}$$

Это уравнение всегда разрешимо относительно матрицы $\delta(z)$, поскольку условие существования решения

$$\overline{\beta D}^{\mathrm{L}}\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z) = 0,$$

соответствующее теореме 1.4 из [20], при подстановке значения $\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z)$ из (9) становится тождеством:

$$\underbrace{\overline{\beta D}^{\mathrm{L}}\beta D}_{0}(zI_n - A + BQ^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z)D)^{-1}BQ^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z)\alpha = 0.$$

Множество решений $\delta(z)$ уравнения (П.4) в соответствии с теоремой 1.4 из [20] записывается формулой (22), где ρ – некоторая матрица подходящих размеров, возможные значения которой уточняются далее.

Теперь перепишем формулу (П.3) следующим образом:

$$BQ(z)\,(\alpha - D\delta(z)) = (zI_n - A)\,\delta(z),$$

куда подставляем (11) и любой из элементов $\delta_\xi(z)$ множества (21):

$$BCE(z)C\,(\alpha - D\delta_\xi(z)) = (zI_n - A)\,\delta_\xi(z). \tag{П.5}$$

Одно из условий разрешимости двухстороннего матричного уравнения (П.5) в соответствии с теоремой 1.7 из [20] записывается в виде равенства

$$\overline{BC_{\text{вх}}}^{\mathrm{L}}\,(zI_n - A)\,\delta_\xi(z) = 0,$$

которое с учетом (21) и введением обозначения (20) перепишем в виде

$$\aleph(z)\rho = -\overline{BC}^{\mathrm{L}}\,(zI_n - A)\,(\beta D)^{\sim}\Phi^{\text{расс}}_{\text{треб}}(z). \tag{П.6}$$

Выполнение этого условия явным образом зависит от выбора матрицы ρ, введенной в (21). Решая (П.6) как левостороннее уравнение относительно указанной матрицы, согласно теореме 1.4 [20] получаем условие разрешимости в виде равенства (17) и решение в виде формулы (22).

Вторым условием разрешимости (П.5) в соответствии с теоремой 1.7 из [20] является выполнение равенства (18) (обратимый сомножитель $(zI_n - A)$ слева опущен как не влияющий на результат проверки), а все множество решений описывается формулой (23).

Однако скрытое в формулах теоремы варьирование знаменателя матричной дроби (12) требует проверки его существования, т.е. существования таких варьируемых параметров ξ, ϑ и ψ, при которых выполняется детерминантное условие (19). Выполнение аналогичного условия для матрицы $Q^{\text{расс}}_{\text{ном}}(z)$ связано с существованием по определению номинальной конфигурации. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агеев А.М., Бронников А.М., Буков В.Н., Гамаюнов И.Ф.* Супервизорный метод управления избыточностью технических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 3. С. 59–69.
2. *Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф., Озеров Е.В., Шурман В.А.* Концепция управляемой избыточности комплексов бортового оборудования // Науч. чтения по авиации, посвящ. пам. Н.Е. Жуковского: Матер. XVI Всерос. науч.-практ. конф. / Гл. ред. С.П. Халютин (11–12 апр. 2019, Москва). М.: Изд. дом Акад. им. Н.Е. Жуковского, 2019. С. 17–33.
3. *Amato F., Cosentino C., Mattei M., Paviglianiti G.* A Direct/Functional Redundancy Scheme for Fault Detection and Isolation on an Aircraft // Aerospace Sci. Technol. 2006. V. 10. No. 4. P. 338–345.
4. *Bartys M., Patton R.J., Syfert M., Heras S., Quevedo J.* Introduction to the DAMADICS Actuator FDI Benchmark Study // Control Engineering Practice. 2006. V. 14. No. 6. P. 577–596. Special Issue “Fault Diagnosis of Actuator Systems: the DAMADICS Benchmark Problem”.
5. *Patton R.J., Uppal F.J., Simani S., Polle B.* Reliable Fault Diagnosis Scheme for a Spacecraft Attitude Control System // J. Risk Reliabil. 2008. V. 222. No. 2. P. 139–152.
6. *Клюшников В.Ю.* Повышение целевой эффективности наноспутников информационного обеспечения // Изв. ВУЗов. Приборостроение. 2018. Т. 61. № 5. С. 414–422.
7. *Gupta S.* Dynamic Microcontroller Reconfiguration Delivers More Than 100% Resource Utilization. URL: https://www.radiolocman.com/review/article.html?di=148343. (Дата обращения: 26.05.2020).
8. *Филиппов А.К.* Современные архитектуры динамически реконфигурируемых систем обработки информации // Проектирование и технология электронных средств. 2007. № 2. С. 2–9.
9. *Потомский С.Ю., Полойко Н.А.* Архитектура распределенной системы управления на основе реконфигурируемой многоконвейерной вычислительной среды L-Net // Системный администратор. 2014. № 10 (143). URL: http://samag.ru/archive/article/2806. (Дата обращения: 26.05.2020).
10. *Knyazeva N.* Improving the Structural Survivability of the Telecommunications Network // Inform. Models Anal. V. 2. 2013. No. 3. P. 275–284.
11. *Hagiyev C., Caliskan F.* Fault Diagnosis and Reconfiguration in Flight Control Systems. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2004.
12. *Grebeshkov A.Y., Zuev A.V., Kiporov D.S.* Computer Simulation of Average Channel Access Delay in Cognitive Radio Network // Commun. Computer Inform. Sci. 2016. V. 678. P. 325–336.
13. *Дегтярев А.Р., Киселев С.К.* Отказоустойчивые реконфигурирующиеся комплексы интегрированной модульной авионики // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2016. Т. 12. № 1. С. 89–99.
14. *Кулаков А.Ю., Павлов А.Н., Потрясаев С.А., Соколов Б.В.* Методы, алгоритмы и технологии реконфигурации бортовых систем маломассоразмерных космических аппаратов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2018. Т. 61. № 7. С. 596–603.
15. *Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В.* Аналитический синтез многосвязных отказоустойчивых систем управления с упрощенной схемной реализацией // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 1. С. 108–117.

16. *Агеев А.М.* Конфигурирование избыточных комплексов бортового оборудования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 175–192.
17. *Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф.* Аналитический подход к формированию конфигураций технических систем // АиТ. 2017. № 9. С. 67–83.
18. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
19. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в 5 томах. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
20. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006.
21. *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.
22. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
23. *Красовский А.А., Александров А.Г., Артемьев В.М. и др.* Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
24. Авиация ВВС России и научно-технический прогресс: боевые комплексы и системы вчера, сегодня, завтра / Под. ред. Е.А. Федосова. М.: Дрофа, 2005.
25. *Буков В.Н., Бронников А.М.* Тестирование конфигураций избыточных интегрированных комплексов оборудования // АиТ. 2019. № 2. С. 76–95.
26. *Буков В.Н., Бронников А.М., Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф.* Интеграция комплекса оборудования выбранной конфигурации // АиТ. 2019. № 4 С. 105–125.
27. *Буков В.Н., Бронников А.М, Агеев А.М., Гамаюнов И.Ф., Шурман В.А.* Генерация альтернативных связей последовательно соединенных подсистем в избыточном комплексе оборудования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 2. С. 53–65.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 27.02.2020

После доработки 22.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020