Автоматика и телемеханика, № 2, 2021

**© 2021 г. А.А. ПЕРЕГУДИН (peregudin@itmo.ru)
(Национальный исследовательский университет ИТМО;
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)**

МЕТОД ПРИТЯГИВАЮЩИХ ЦИЛИНДРОВ. РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ[1]

Представлен метод притягивающих цилиндров — обобщение метода инвариантных эллипсоидов на случаи задач слежения и наблюдения. На основе разработанного метода предложен алгоритм расчета параметров регулятора, обеспечивающего ограниченность ошибки слежения или наблюдения в присутствии ограниченных внешних возмущений. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на примерах.

Ключевые слова: задача слежения, задача наблюдения, подавление возмущений.

DOI: 10.31857/S0005231021020033

1. Введение

Задача подавления ограниченных внешних возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов ранее рассматривалась в [1–3]. В частности, в [1] решалась задача стабилизации возмущенной системы с измеряемым состоянием с помощью статического регулятора; в [2] аналогичный подход применялся для стабилизации возмущенной системы с измеряемым выходом — к статическому регулятору был добавлен динамический наблюдатель Люенбергера; в [3] аналогичная задача была решена с помощью динамического регулятора общего вида. Однако во всех этих работах решалась только задача стабилизации объекта, но не задача слежения.

Распространению метода инвариантных эллипсоидов на задачу слежения посвящены работы [4, 5], в которых на систему наложен ряд дополнительных условий. Так, в [4] предполагается, что все компоненты задающего воздействия измеряемы и могут быть использованы регулятором, а в [5] дополнительно предполагается, что их производные также измеряемы и ограничены. Отметим, что в обеих работах состояние объекта является измеряемым, а используемый регулятор — статическим. В этом смысле работы [4, 5] обобщают [1], но не более поздние [2, 3], в которых уже используется динамический регулятор при неизмеряемом состоянии объекта.

Целью настоящей работы является обобщение метода инвариантных эллипсоидов на случай задачи слежения при использовании динамического регулятора по выходу. В качестве инструмента используется новый метод, ос-

[1] Результаты разделов 3 и 4 получены при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН. Результаты разделов 5 и 6 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (грант № МД-1054.2020.8).

нованный на притягивающих множествах более общего вида, в том числе неограниченных по части переменных.

В работе использованы следующие обозначения: $\mathbb{S}^n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^{\mathrm{T}} = A\}$, если $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то $\mathrm{range}A = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, A^+— псевдообратная Мура–Пенроуза (существует у любой матрицы вне зависимости от полноты ранга).

2. Мотивирующий пример

В качестве мотивирующего примера рассмотрим неустойчивую систему, состоящую из объекта первого порядка и наблюдателя первого порядка, заданную как

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bf(t), \\ \dot{\widehat{x}}(t) = (a-l)\widehat{x}(t) + lx(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}$ – состояние объекта, $\widehat{x}(t) \in \mathbb{R}$ – состояние наблюдателя, $f(t) \in \mathbb{R}$ – внешнее возмущение, $|f(t)| \leqslant 1$, $b > 0$ и $l > a > 0$. В качестве выходной переменной объединенной системы (1) рассмотрим ошибку наблюдения

$$y(t) = x(t) - \widehat{x}(t).$$

Представленная система неустойчива и не имеет притягивающего эллипсоида по состоянию. Однако в силу того, что выход $y(t)$ имеет устойчивую динамику

$$\dot{y}(t) = (a-l)y(t) + bf(t),$$

у системы существуют притягивающие эллипсоиды по выходу. Минимальный притягивающий эллипсоид по выходу (в данном случае – отрезок минимальной длины) может быть найден аналитически как

$$\left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y^2 \leqslant \frac{b^2}{(a-l)^2} \right\}, \tag{2}$$

однако в пространстве состояний ему соответствует *неограниченное* множество

$$\left\{ (x, \widehat{x}) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - \widehat{x}| \leqslant \frac{b}{l-a} \right\}, \tag{3}$$

не являющееся эллипсоидом. Метод инвариантных эллипсоидов [1] не может быть непосредственно применен для поиска притягивающего множества (2), потому как у системы (1) не существует инвариантного эллипсоида по состоянию. Существует, однако, притягивающее подмножество пространства состояний системы в форме полосы (3). Траектория попадает в эту полосу и затем движется в ней, неограниченно удаляясь от начала координат. Рисунок 1 иллюстрирует описанную ситуацию.

Данный пример показывает, что для решения задачи слежения или наблюдения в общем случае недостаточно метода инвариантных (притягивающих) эллипсоидов, разработанного в [1–3] для решения задач стабилизации. Для обобщения существующего метода на случаи, подобные представленному выше, в настоящей работе развивается *метод притягивающих цилиндров.*

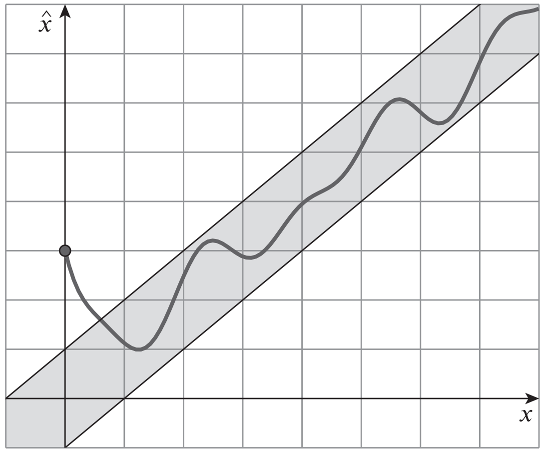

Рис. 1. Пример траектории системы. Серым цветом выделено неограниченное притягивающее подмножество пространства состояний.

3. Геометрические основы метода притягивающих цилиндров

Для описания рассматриваемых в настоящей работе притягивающих подмножеств введем следующее определение.

Определение 1. *Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, заданное как*

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{\mathrm{T}} Q x \leqslant 1\right\}, \tag{4}$$

где $Q \in \mathbb{S}^n$, $Q \succeq 0$ и $\operatorname{rank} Q = k$, называется (k, n)-цилиндром.

Примеры (k, n)-цилиндров приведены на рис. 2–4. Им соответствуют множества $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant 1\right\}$, $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - z)^2 \leqslant 1\right\}$, $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \leqslant 1\right\}$, каждое из которых можно задать в виде (4), выбрав соответствующую матрицу Q.

Замечание 1. Отметим, что при $k = n$ множество (4) является эллипсоидом и что в [1–3] авторами рассматривались притягивающие подмноже-

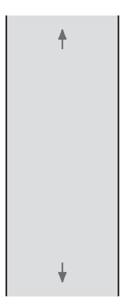

Рис. 2.

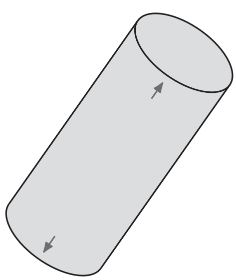

Рис. 3.

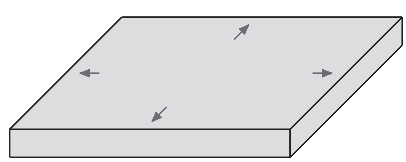

Рис. 4.

Рис. 2. Бесконечная полоса – пример (1, 2)-цилиндра.
Рис. 3. Бесконечный цилиндр – пример (2, 3)-цилиндра.
Рис. 4. Слой пространства между двумя плоскостями – пример (1, 3)-цилиндра.

ства именно такого вида. При $k < n$ множество (4) эллипсоидом уже не является, но при этом также может являться притягивающим подмножеством пространства состояний некоторой системы. В этом смысле метод притягивающих цилиндров является обобщением метода инвариантных (притягивающих) эллипсоидов.

Сформулируем геометрическое описание (k, n)-цилиндров.

Утверждение 1. *Как множество в линейном пространстве (k, n)-цилиндр (4) является суммой k-мерного эллипсоида, лежащего в подпространстве* $\mathrm{range}Q$, *и всего подпространства* $\ker Q$.

Следствие 1. *Как топологическое пространство (k, n)-цилиндр гомеоморфен прямому произведению замкнутого k-мерного шара и $\mathbb{R}^{n-k}$.*

Доказательства утверждения 1 и следствия 1 приведены в Приложении.

Известно, что образом эллипсоида при линейном отображении является эллипсоид. Обобщим это утверждение на случай (k, n)-цилиндров.

Утверждение 2. *Пусть $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}C = m$. Образом (k, n)-цилиндра (4) при отображении $y = Cx$ является (r, m)-цилиндр*

$$\left\{y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; y^{\mathrm{T}} R y \leqslant 1\right\}, \quad R = C^{+\mathrm{T}} M\big(I - (MN)(MN)^+\big)MC^+,$$

где $r = \mathrm{rank}R$, $M = Q^{1/2}$, $N = I - C^+C$.

Следствие 2. *При $n \geqslant 2$ проекцией (k, n)-цилиндра на произвольную плоскость является либо вся плоскость, либо полоса (часть плоскости между двумя параллельными прямыми), либо эллипс (часть плоскости, ограниченная эллипсом).*

Доказательства утверждения 2 и следствия 2 приведены в Приложении.

Изложенные выше утверждения дают читателю базовые представления о геометрии рассматриваемых в настоящей работе притягивающих подмножеств.

4. Анализ. Метод притягивающих цилиндров

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bf(t), \tag{5}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ – внешнее возмущение, A, B – вещественные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что внешнее возмущение ограничено и что известна матрица $G \succ 0$ такая, что

$$f^{\mathrm{T}}(t)Gf(t) \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{6}$$

Определение 2. *Притягивающим (k, n)-цилиндром системы (5)–(6) называется множество (4) такое, что для всех траекторий системы выполнено*

$$\limsup_{t\to+\infty} x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) \leqslant 1,$$

а также, если $x(t_0) \in (4)$, то $x(t) \in (4)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Согласно определению 2, притягивающие (k, n)-цилиндры являются одновременно притягивающими и инвариантными подмножествами пространства состояний.

Сформулируем достаточное условие существования притягивающего цилиндра в пространстве состояний системы (5)–(6).

Теорема 1. Если матрица $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ такова, что

$$\mathrm{rank} C = k, \quad CA(I - C^{+}C) = 0,$$

и если существуют $P \succ 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\begin{bmatrix} PCAC^{+} + (CAC^{+})^{\mathrm{T}}P + \alpha P & PCB \\ (CB)^{\mathrm{T}}P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec 0,$$

то подмножество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}PCx \leqslant 1\}$ пространства состояний системы (5)–(6) является притягивающим (k, n)-цилиндром.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Замечание 2. Отметим, что в частном случае, при $C = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, теорема 1 совпадает с основным результатом работы [1], и тогда притягивающий (k, n)-цилиндр является инвариантным эллипсоидом.

5. Синтез. Общая линейная задача слежения

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) + C_1w(t), \\ y(t) = D_1x(t) + E_1u(t) + F_1w(t), \end{cases} \tag{7}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^{a_1}$ – неизмеряемый вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^{b_1}$ – управление, $w(t) \in \mathbb{R}^{c_1}$ – неизмеряемый вектор возмущений, $y(t) \in \mathbb{R}^{b_2}$ – измеряемый выход, $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ – известные вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Пусть эталонная модель задана как

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_2x_r(t) + C_2h(t), \\ g(t) = D_2x_r(t), \end{cases} \tag{8}$$

где $x_r(t) \in \mathbb{R}^{a_2}$ – неизмеряемый вектор состояния, $h(t) \in \mathbb{R}^{c_2}$ – неизмеряемое задающее воздействие, $g(t) \in \mathbb{R}^{c_1}$ – измеряемый эталонный выход, A_2, C_2, D_2 – известные вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Замечание 3. Формально, эталонную модель можно не выделять в отдельную систему, а сделать частью уравнения (7), объединив вектор $x(t)$ с вектором $x_r(t)$, $w(t)$ с $h(t)$ и $y(t)$ с $g(t)$. Однако в настоящей работе предлагается рассмотреть (7) и (8) как две различные модели. Такое разделение не является обязательным, но помогает лучше понять смысл целевой переменной z, раскрываемый далее.

Для достижения цели управления предполагается использование регулятора заданного динамического порядка $a_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вида

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_3 x_c(t) + B_3 y(t) + C_3 g(t), \\ u(t) = D_3 x_c(t) + E_3 y(t) + F_3 g(t), \end{cases} \tag{9}$$

где $x_c(t) \in \mathbb{R}^{a_3}$ – вектор состояния регулятора, $A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3$ – вещественные матрицы соответствующих размерностей, подлежащие выбору.

Замечание 4. При $a_3 = 0$ матрицы A_3, B_3, C_3, D_3 пустые, регулятор (9) является статическим и описывается формулой $u(t) = E_3 y(t) + F_3 g(t)$. Поскольку современные компьютерные программы (например, MATLAB) свободно работают с пустыми матрицами различных размерностей, далее не будем рассматривать этот случай отдельно, считая его частью общей теории.

Предполагается, что внешние сигналы $w(t)$, $h(t)$ ограничены и что известна матрица $G \succ 0$ такая, что

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ h(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} G \begin{bmatrix} w(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{10}$$

Замечание 5. Консервативность основного результата, который будет изложен в разделе 5.2, может быть несколько снижена путем замены (10) на пару ограничений $w(t)^{\mathrm{T}} G_1 w(t) \leqslant 1$, $h(t)^{\mathrm{T}} G_2 h(t) \leqslant 1$, где $G_1, G_2 \succ 0$, или даже на большее число ограничений, наложенных на отдельные компоненты данных векторов. Однако это приведет к увеличению числа свободных переменных и усложнению формулировок, не обязательному для настоящей статьи.

Цель управления формулируется следующим образом: при $w(t), h(t) \equiv 0$ обеспечить асимптотическую сходимость целевой переменной

$$z(t) = K_1 x(t) + K_2 x_r(t) + K_3 x_c(t) \tag{11}$$

к нулю. Если же $w(t), h(t) \not\equiv 0$, но выполнено условие (10), то переменная (11) должна асимптотически сходиться к ограниченному множеству вида $\{z \in \mathbb{R}^k \mid z^{\mathrm{T}} P z \leqslant 1\}$ и должна быть найдена соответствующая матрица $P \succ 0$. Предполагается, что матрицы $K_1 \in \mathbb{R}^{k \times a_1}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{k \times a_2}$, $K_3 \in \mathbb{R}^{k \times a_3}$, задающие цель управления, известны и что $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = k$. Последнее условие наложено для удобства и не является ограничительным, так как его выполнения всегда можно добиться, убрав из матрицы $\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$ линейно зависимые строки.

Сформулированная таким образом задача в рамках настоящей статьи называется *общей линейной задачей слежения*. Отметим несколько частных случаев:

1. Задача стабилизации. Если $K_1 = I$, $K_2 = K_3 = 0$, то при отсутствии внешних воздействий цель управления принимает вид $\|x(t)\| \to 0$. В [3] показано, что такая задача может быть решена с помощью метода инвариантных эллипсоидов.

2. Задача слежения. Если $K_1 = I$, $K_2 = -I$, $K_3 = 0$, то при отсутствии внешних воздействий цель управления имеет вид $\|x(t) - x_r(t)\| \to 0$, что соответствует слежению вектора состояния объекта за вектором состояния эталонной модели.

3. Задача наблюдения. Если $K_1 = I$, $K_2 = 0$, $K_3 = -I$, то регулятор (9) превращается в наблюдатель, вектор состояния которого должен сходиться к вектору состояния объекта. Если внешние воздействия отсутствуют, то такая цель управления может быть сформулирована как $\|x_c(t) - x(t)\| \to 0$.

Если матрицы K_i выбраны иным образом, то цель управления представляет собой некоторое сочетание задач стабилизации, слежения и наблюдения (возможно, по части переменных). Таким образом, поставленная задача синтеза может быть интерпретирована как одна из этих трех базовых задач, либо как их комбинация.

Отметим, что на матрицы $A_1, B_1, C_1, D_1, F_1, A_2, C_2, D_2$ в (7) и (8) не накладывается никаких ограничений. Однако требуется наложить ограничение на матрицу E_1, связанное с корректностью рассматриваемой обратной связи. Рассмотрим вспомогательный измеряемый выход $\widehat{y}(t) = y(t) - E_1 u(t) = D_1 x(t) + F_1 w(t)$ системы (7), который получается из выражения для $y(t)$, если убрать слагаемое с E_1. Предположим, что поставленная задача может быть решена с помощью регулятора (9), в котором вместо выхода $y(t)$ используется вспомогательный выход $\widehat{y}(t)$. Тогда после подстановки $\widehat{y}(t) = y(t) - E_1 u(t)$ получим закон управления в виде

$$u(t) = (I + E_1 E_3)^{-1}(D_3 x_c(t) + E_3 y(t) + F_3 g(t)) = \widehat{D}_3 x_c(t) + \widehat{E}_3 y(t) + \widehat{F}_3 g(t),$$

для реализации которого необходимо, чтобы матрица $(I + E_1 E_3)^{-1}$ существовала. Именно это условие и накладывается дополнительно. С учетом указанного свойства при формулировке основного результата достаточно ограничиться случаем $E_1 = 0$, что и будет сделано, при этом соответствующий регулятор для общего случая всегда может быть восстановлен.

5.2. Основной результат

Введем вспомогательные обозначения для описания замкнутой системы

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ D_3 & E_3 & F_3 \end{bmatrix}, \quad s(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ h(t) \end{bmatrix},$$

$$M = A + BXD, \quad N = C + BXF, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}, \quad n = a_1 + a_2 + a_3.$$

Тогда уравнение замкнутой системы (7)–(9), (11) может быть записано как

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = Ms(t) + Nf(t), \\ z(t) = Ks(t), \end{cases} \tag{12}$$

при этом ограничение (10) примет вид

$$f^{\mathrm{T}}(t)Gf(t) \leqslant 1, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{13}$$

Перед формулировкой основного результата введем обозначения

$$\begin{gathered}
H_1 = KAK^+ + KB(KB)^+KA(D(K^+K - I))^+DK^+,\\
H_2 = KC + KB(KB)^+KA(D(K^+K - I))^+F,\\
H_3 = KB, \quad H_4 = DK^+ + D(D(K^+K - I))^+DK^+,\\
H_5 = F + D(D(K^+K - I))^+F.
\end{gathered} \tag{14}$$

Сформулируем основной результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Если матрицы A, B, D, K таковы, что*

$$KB(KB)^+KA(D(I - K^+K))^+D(I - K^+K) = KA(I - K^+K), \tag{15}$$

и если существуют $P, Q \succ 0$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ такие, что $PQ = I$ и

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix} H_1Q + QH_1^{\mathrm{T}} + \alpha Q & H_2 \\ H_2^{\mathrm{T}} & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_1 \begin{bmatrix} H_3H_3^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\\
\begin{bmatrix} PH_1 + H_1^{\mathrm{T}}P + \alpha P & PH_2 \\ H_2^{\mathrm{T}}P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_2 \begin{bmatrix} H_4^{\mathrm{T}}H_4 & H_4^{\mathrm{T}}H_5 \\ H_5^{\mathrm{T}}H_4 & H_5^{\mathrm{T}}H_5 \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{16}$$

то существует набор X параметров регулятора (9) такой, что подмножество $\{s \in \mathbb{R}^n \mid s^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}PKs \leqslant 1\}$ пространства состояний замкнутой системы (12) является притягивающим (k, n)-цилиндром.

При фиксированных α, P соответствующая матрица X находится как

$$X = (KB)^+KA(D(K^+K - I))^+ + Y + (KB)^+KBYD(D(K^+K - I))^+, \tag{17}$$

где Y – любое решение линейного матричного неравенства

$$\begin{bmatrix} PH_1 + H_1^{\mathrm{T}}P + \alpha P & PH_2 \\ H_2^{\mathrm{T}}P & -\alpha G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PH_3YH_4 + (PH_3YH_4)^{\mathrm{T}} & PH_3YH_5 \\ (PH_3YH_5)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \prec 0. \tag{18}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении. Из доказательства, в частности, следует, что при выполнении условий теоремы матричное неравенство (18) всегда имеет решение.

Условие (15) является вполне естественным: оно показывает, как должны соотноситься между собой параметры объекта (7) и эталонной модели (8), чтобы решение соответствующей задачи слежения было возможным. Можно показать, что для задач стабилизации и наблюдения, при $K = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $K = \begin{bmatrix} I & 0 & -I \end{bmatrix}$ соответственно, условие (15) всегда выполнено независимо от параметров объекта и эталонной модели. Если же $K = \begin{bmatrix} I & -I & 0 \end{bmatrix}$, что соответствует задаче слежения, то условие (15) представляется в виде

$$B_1B_1^+(A_1 - A_2)(D_1^{\mathrm{T}}D_1 + D_2^{\mathrm{T}}D_2)^+(D_1^{\mathrm{T}}D_1 + D_2^{\mathrm{T}}D_2) = (A_1 - A_2).$$

Следует отметить, что выполнение этого условия еще не означает возможность построения соответствующего регулятора, ведь помимо него должно быть также выполнено второе условие теоремы 2, связанное с неравенствами (16).

5.3. Вычислительные аспекты

Поскольку на матрицы P и Q, входящие в формулировку теоремы 2, наложено дополнительное ограничение $PQ = I$, матричные неравенства (16) не являются линейными даже при фиксированном α и не могут быть непосредственно решены с помощью стандартных программных средств, таких как YALMIP или CVX. Однако существует эффективный алгоритм решения матричных неравенств именно с таким типом нелинейности, который в литературе можно встретить под названием "Cone complementarity algorithm" (алгоритм восполнения конуса) [6–9].

Алгоритм 1.

1. Задать $i = 0$. Зафиксировать параметр $\alpha > 0$ и найти положительно определенное решение $(\widehat{P}, \widehat{Q})$ системы линейных матричных неравенств (16).

2. Положить $(R_i, S_i) = (\widehat{P}, \widehat{Q})$.

3. Найти положительно определенное решение $(\widehat{P}, \widehat{Q})$ задачи минимизации:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать} && \operatorname{trace}(PS_i + QR_i) \\ &\text{при условиях} && \begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \succeq 0, \ (16). \end{aligned}$$

4. Если выполнено условие остановки (например, величина $\operatorname{trace}(\widehat{P}S_i + \widehat{Q}R_i)$ достаточно близка к $2k$ или величина i достигла предельного значения), перейти к шагу 5. Иначе увеличить i на единицу и перейти к шагу 2.

5. Принять полученную пару $(\widehat{P}, \widehat{Q})$ в качестве пары (P, Q), приближенно удовлетворяющей условиям теоремы 2. Закончить.

В [6] показано, что алгоритм 1 сходится к паре (P, Q), удовлетворяющей условиям (16) и доставляющей локальный минимум величине $\operatorname{trace}(PQ + QP)$. Несмотря на то, что в общем случае выполнение условия $PQ = I$ не гарантировано, алгоритм широко применяется [6–9] для решения задач теории управления, в которых возникают подобные матричные неравенства.

Применение теоремы 2 на практике во всей полноте предполагает выполнение следующей последовательности действий:

1. Проверить, что для поставленной задачи выполнено условие (15).

2. Применив алгоритм 1, найти взаимообратные P и Q, удовлетворяющие (16).

3. Используя найденную матрицу Q, найти матрицу Y, удовлетворяющую (18).

4. Вычислить матрицу X параметров регулятора по формуле (17).

Однако следует отметить, что нахождение пары взаимообратных матриц (P, Q) не является обязательным для синтеза регулятора. Если в процессе выполнения алгоритма 1 найдена матрица P такая, что неравенство (18) имеет решение Y, то нет необходимости далее выполнять алгоритм — можно сразу перейти к вычислению параметров регулятора по формуле (17).

6. Примеры

6.1. Задача слежения

Рассмотрим объект управления (7) с матрицами

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2{,}99 & 3{,}10 \\ -2{,}10 & 2{,}01 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}15 \end{bmatrix},$$
$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

и эталонную модель (8) с матрицами

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}01 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что объект управления является устойчивым, а эталонная модель, напротив, неустойчива. Условие (10) предполагается выполненным при $G = 1$.

Пусть динамический порядок a_3 регулятора (9) положен равным 1, а целевая переменная (11) задана как

$$z(t) = x(t) - x_r(t),$$

что соответствует задаче слежения и выбору матрицы

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что в этом случае условие (15) выполнено. Тогда в результате выполнения алгоритма 1 при $\alpha = 0{,}5$ может быть найдена матрица

$$P = \begin{bmatrix} 1485 & -1585 \\ -1585 & 1698 \end{bmatrix} \succ 0$$

и затем по формулам (18), (17) восстановлены параметры

$$X = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ D_3 & E_3 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}95 & 4{,}95 \end{bmatrix}$$

регулятора (9), который, несмотря на заданный динамический порядок $a_3 = 1$, оказывается статическим.

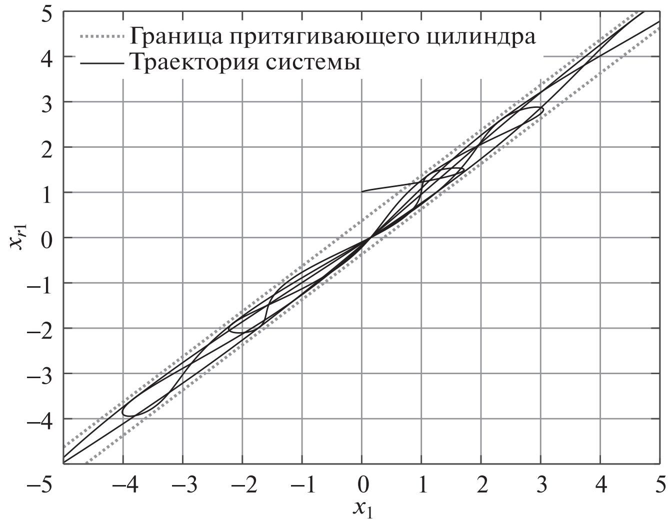

Рис. 5. Проекция притягивающего (k, n)-цилиндра и траектории замкнутой системы.

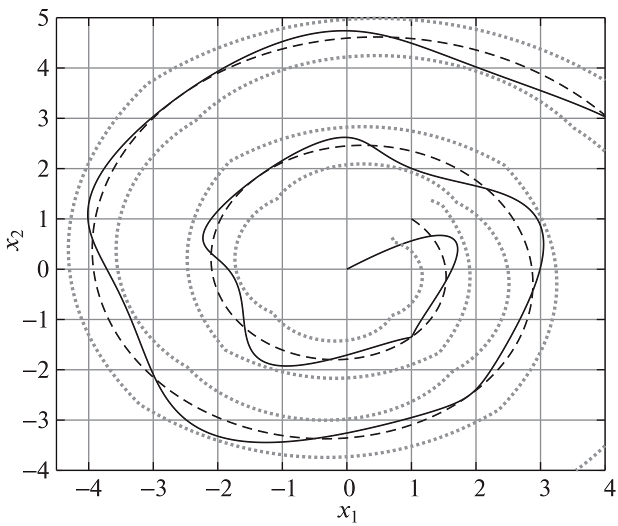

Рис. 6. Траектория объекта (—), траектория эталонной модели (- -) и границы допустимого коридора (...).

При моделировании внешнее возмущение было задано как $w(t) = \sin(0{,}4t)$, а начальные условия положены равными $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $x_r(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Результаты моделирования представлены на рис. 5, 6. На рис. 5 показана проекция траектории замкнутой системы: по оси абсцисс отложено значение первой координаты вектора состояния объекта, а по оси ординат — значение первой координаты вектора состояния эталонной модели. Также показаны границы полосы, являющейся проекцией притягивающего (k, n)-цилиндра на эту плоскость.

На рис. 6 показаны траектория $x(t)$ объекта и траектория $x_r(t)$ эталонной модели. На рисунке также отмечены границы "допустимого коридора", имеющего следующий смысл: если в данный момент времени каждая из проекций траектории замкнутой системы – на плоскость (x_1, x_{r1}) (см. рис. 5) и на плоскость (x_2, x_{r2}) (не приводится, так как выглядит аналогично) — находится внутри соответствующей проекции притягивающего (k, n)-цилиндра, то траектория $x(t)$ в данный момент времени находится в границах допустимого коридора. Иными словами, тот факт, что траектория объекта, начиная с какого-то момента, не выходит за границы точечного пунктира, является иллюстрацией того, что траектория замкнутой системы попадает внутрь (k, n)-цилиндра и не покидает его.

6.2. Задача наблюдения

Рассмотрим объект (7) с матрицами

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}168 & -0{,}132 & -0{,}052 \\ 0{,}148 & -0{,}152 & 0{,}028 \\ 0{,}204 & -0{,}196 & -0{,}006 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0{,}8 & -0{,}2 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0{,}02 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что объект является неустойчивым. В этом примере эталонная модель не рассматривается, т.е. все матрицы в (8) пустые. Условие (10) предполагается выполненным при $G = 1$.

Пусть динамический порядок a_3 регулятора (9) положен равным 3, а целевая переменная (11) задана как

$$z(t) = x(t) - x_c(t),$$

что соответствует задаче наблюдения и выбору матрицы

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что в этом случае условие (15) выполнено. Тогда в результате выполнения алгоритма 1 при $\alpha = 0{,}3$ может быть найдена матрица

$$P = \begin{bmatrix} 192 & -624 & 222 \\ -624 & 2051 & -732 \\ 222 & -732 & 289 \end{bmatrix} \succ 0$$

и затем по формулам (18), (17) восстановлены параметры

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3{,}970 & -15{,}341 & 3{,}750 \\ 1{,}506 & -5{,}585 & 1{,}386 \\ 0{,}559 & -1{,}618 & 0{,}349 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 19{,}011 \\ 6{,}792 \\ 1{,}777 \end{bmatrix}$$

регулятора (9), который в этой задаче выполняет роль наблюдателя.

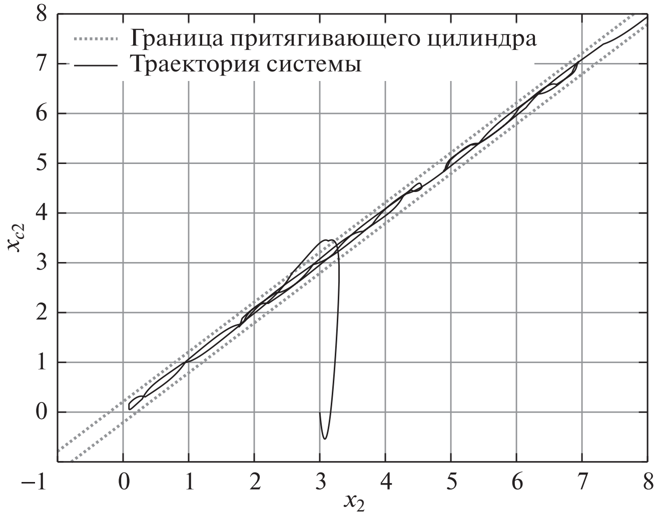

Рис. 7. Проекция притягивающего (k, n)-цилиндра и траектории замкнутой системы.

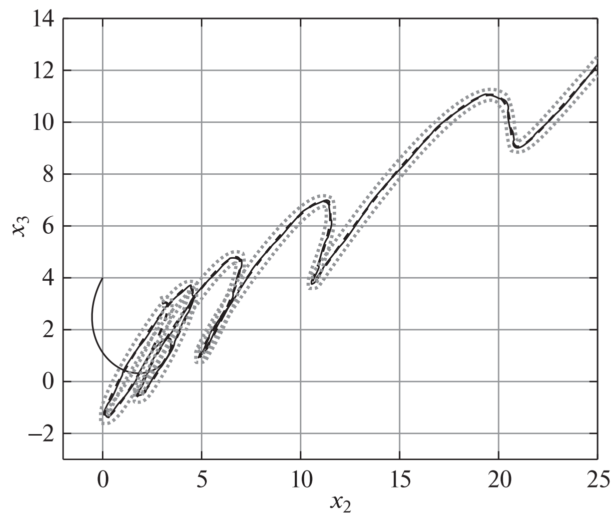

Рис. 8. Траектория объекта (—), траектория эталонной модели (- -) и границы допустимого коридора (. . .).

Можно заметить, что для полученных матриц выполнено $A_3 = A_1 - B_3D_1$, а значит, структура системы (9) совпадает со структурой наблюдателя Люенбергера

$$\dot{x_c}(t) = A_1x_c(t) + B_3(y(t) - D_1x_c(t)).$$

Примечательно, что такая структура не была создана искусственно, а получилась сама собой в результате выполнения алгоритма 1.

При моделировании внешняя помеха была задана как $w(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\sin(0{,}1t))$, а начальные условия положены равными $x(0) = \begin{bmatrix} 3{,}2 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $x_c(0) = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Результаты моделирования представлены на рис. 7 и 8. На рис. 7 показана проекция траектории замкнутой системы: по оси абсцисс отложено значение второй координаты вектора состояния объекта, а по оси ординат — значение второй координаты вектора состояния регулятора (наблюдателя). Также показаны границы полосы, являющейся проекцией притягивающего (k, n)-цилиндра на эту плоскость.

На рис. 8 показаны траектория $x(t)$ объекта и траектория $x_c(t)$ регулятора (наблюдателя). На рисунке также отмечены границы "допустимого коридора", имеющего следующий смысл: если в данный момент времени каждая из проекций траектории замкнутой системы — на плоскость (x_2, x_{c2}) (см. рис. 7) и на плоскость (x_3, x_{c3}) (не приводится, так как выглядит аналогично) — находится внутри соответствующей проекции притягивающего (k, n)-цилиндра, то траектория $x(t)$ в данный момент времени находится в границах допустимого коридора. Иными словами, тот факт, что траектория наблюдателя начиная с какого-то момента не выходит за границы точечного пунктира, является иллюстрацией того, что траектория замкнутой системы попадает внутрь (k, n)-цилиндра и не покидает его.

7. Заключение

В работе предложено обобщение метода инвариантных эллипсоидов, позволяющее находить притягивающие подмножества пространства состояний более общего вида. Показано, что предложенный метод может быть использован для решения задач стабилизации, слежения и наблюдения, а также их комбинаций. Предложен алгоритм, позволяющий применять основой результат на практике с помощью стандартных программных средств. На численных примерах продемонстрирована эффективность предложенного подхода.

Автор выражает благодарность Игорю Борисовичу Фуртату и анонимному рецензенту за ценные замечания, позволившие улучшить форму и содержание статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Матрица Q симметричная, поэтому пространство $\mathbb{R}^n$ можно представить как прямую сумму ее образа и ядра:

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{range}Q \oplus \ker Q.$$

Иными словами, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует единственное разложение

$$x = x_r + x_k, \quad x_r \in \mathrm{range}Q, \quad x_k \in \ker Q.$$

Тогда (k, n)-цилиндр (4) можно представить как

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{\mathrm{T}}Qx \leqslant 1\Big\} = \Big\{(x_r + x_k) \in \mathbb{R}^n \mid (x_r + x_k)^{\mathrm{T}}Q(x_r + x_k) \leqslant 1\Big\} =$$
$$= \Big\{(x_r + x_k) \in \mathbb{R}^n \mid x_r^{\mathrm{T}}Qx_r \leqslant 1\Big\} = \Big\{x_r \in \mathrm{range}Q \mid x_r^{\mathrm{T}}Qx_r \leqslant 1\Big\} + \ker Q.$$

Сужение оператора Q на подпространство range$Q$ имеет полный ранг. Следовательно, множество $\{x_r \in \mathrm{range}Q \mid x_r^{\mathrm{T}} Q x_r \leqslant 1\}$ является k-мерным эллипсоидом.

Доказательство следствия 1. Символом $\cong$ обозначим гомеоморфность. Из того что range$Q \cong \mathbb{R}^k$, ker$Q \cong \mathbb{R}^{n-k}$, а множества $\{x_r \in \mathrm{range}Q \mid x_r^{\mathrm{T}} Q x_r \leqslant 1\}$ и ker$Q$ ортогональны друг другу, следует, что

$$\left\{x_r \in \mathrm{range}Q \mid x_r^{\mathrm{T}} Q x_r \leqslant 1\right\} + \mathrm{ker}Q \quad \cong \quad \left\{x \in \mathbb{R}^k \mid x^{\mathrm{T}} x \leqslant 1\right\} \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Лемма 1 [10]. *Если матрицы A, U, C, V таковы, что обе части равенства*

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

имеют смысл (все операции определены), то указанное равенство выполнено.

Лемма 2 [11]. *Для произвольной матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ верно, что*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (A^{\mathrm{T}} A + \varepsilon I)^{-1} A^{\mathrm{T}} = A^{+}.$$

Указанное равенство выполнено даже в тех случаях, когда $(A^{\mathrm{T}} A)^{-1}$ не существует.

Доказательство утверждения 2. Воспользуемся полнотой строчного ранга матрицы C и рассмотрим семейство матриц R_ε с параметром ε, определенных как

$$R_\varepsilon = \left(C(Q + \varepsilon I)^{-1} C^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, \quad \varepsilon > 0.$$

Известно (см. [1]), что если $Q \succ 0$, то $R = (CQ^{-1}C^{\mathrm{T}})^{-1}$. При $Q \succeq 0$ в силу непрерывности отображения $x \mapsto Cx$ имеем $R = \lim_{\varepsilon \to 0+} R_\varepsilon$. Согласно лемме 1

$$(Q + \varepsilon I)^{-1} = (\varepsilon I + MM)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} I - \frac{1}{\varepsilon} M \left(I + \frac{1}{\varepsilon} MM\right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} M.$$

Тогда

$$R_\varepsilon = \left(C(Q + \varepsilon I)^{-1} C^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\varepsilon} CC^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\varepsilon} CM(I + \frac{1}{\varepsilon} MM)^{-1} \frac{1}{\varepsilon} MC^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

Заметим, что матрица CC^{T} обратима. Вновь применяя лемму 1, получаем

$$R_\varepsilon = \varepsilon(CC^{\mathrm{T}})^{-1} +$$
$$+ (CC^{\mathrm{T}})^{-1} CM \left(I + \frac{1}{\varepsilon} M\big(I - C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}C\big)M\right)^{-1} MC^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Воспользуемся известными равенствами

$$C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1} = C^{+}, \quad I - C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}C = N = N^2$$

и перепишем R_ε в виде

$$R_\varepsilon = \varepsilon(CC^{\mathrm{T}})^{-1} + C^{+\mathrm{T}}M\left(I + \frac{1}{\varepsilon}MNNM\right)^{-1}MC^{+}.$$

Применяя лемму 1, получаем

$$R_\varepsilon = \varepsilon(CC^{\mathrm{T}})^{-1} + C^{+\mathrm{T}}M\Big(I - MN\big(\varepsilon I + NMMN\big)^{-1}NM\Big)MC^{+}.$$

Тогда согласно лемме 2, учитывая, что $M = M^{\mathrm{T}}$, $N = N^{\mathrm{T}}$, имеем

$$R = \lim_{\varepsilon \to 0+} R_\varepsilon = C^{+\mathrm{T}}M\Big(I - MN\big(MN\big)^{+}\Big)MC^{+}.$$

Наконец заметим, что $I - MN\big(MN\big)^{+} \succeq 0$ и, следовательно, $R \succeq 0$.

Доказательство следствия 2. Если C – проекция на $\mathbb{R}^2$, то $m = 2$, $r \leqslant 2$. Значит, образом (k, n)-цилиндра может быть только $(0, 2)$, $(1, 2)$ или $(2, 2)$-цилиндр.

Лемма 3 [12]. *Если $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times l}$, то матричное уравнение*

$$AXB = C$$

разрешимо относительно $X \in \mathbb{R}^{m\times k}$ тогда и только тогда, когда

$$AA^{+}CB^{+}B = C,$$

и в этом случае все решения можно параметризовать как

$$X = A^{+}CB^{+} + Y - A^{+}AYBB^{+},$$

где $Y \in \mathbb{R}^{m\times k}$ – произвольная матрица.

Лемма 4 [13]. *Если $A \in \mathbb{S}^n$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $A^2 = A$, то $A(BA)^{+} = (BA)^{+}$.*

Лемма 5 [14]. *Если $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $C \in \mathbb{S}^n$, то матричное неравенство*

$$AXB + (AXB)^{\mathrm{T}} + C \prec 0$$

разрешимо относительно $X \in \mathbb{R}^{m\times k}$ в том и только в том случае, если существуют $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$C \prec \mu_1 AA^{\mathrm{T}}, \quad C \prec \mu_2 B^{\mathrm{T}}B.$$

Доказательство теоремы 1. Введем переменную $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^k$, составим уравнение ее динамики

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBf(t)$$

и найдем условие, при котором оно может быть записано независимо от $x(t)$, т.е. условие существования матрицы X такой, что

$$\dot{y}(t) = XCx(t) + CBf(t) = Xy(t) + CBf(t).$$

Для этого рассмотрим уравнение $CA = XC$. В соответствии с леммой 3 оно разрешимо относительно X в том и только в том случае, если выполнено условие $CA(I - C^+C) = 0$, и тогда все решения могут быть параметризованы как $X = CAC^+ + Y(I - CC^+)$, где Y – произвольная матрица соответствующей размерности. Если дополнительно выполнено условие $\mathrm{rank} C = k$, то уравнение имеет единственное решение $X = CAC^+$.

Так как все соответствующие условия включены в формулировку теоремы, динамика переменной $y(t)$ может быть записана независимо от $x(t)$ в виде

$$\dot{y}(t) = CAC^+y(t) + CBf(t). \tag{П.1}$$

Обозначим: $V = y^{\mathrm{T}}Py$. Заметим, что из матричного неравенства

$$\begin{bmatrix} PCAC^+ + (CAC^+)^{\mathrm{T}}P + \alpha P & PCB \\ (CB)^{\mathrm{T}}P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec 0$$

следует, что

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ f(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} PCAC^+ + (CAC^+)^{\mathrm{T}}P + \alpha P & PCB \\ (CB)^{\mathrm{T}}P & -\alpha G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ f(t) \end{bmatrix} \leqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0,$$

и тогда

$$\dot{V}(t) + \alpha V(t) \leqslant \alpha f^{\mathrm{T}}(t)Gf(t), \quad \forall t \geqslant 0.$$

При выполнении условия (6) из этого следует, что

$$\limsup_{t \to +\infty} V(t) \leqslant 1$$

и если $V(t_0) \leqslant 1$, то $V(t) \leqslant 1$ при всех $t \geqslant t_0$. При этом $V = x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}PCx$, $C^{\mathrm{T}}PC \succeq 0$ и $\mathrm{rank} C^{\mathrm{T}}PC = k$, а значит, подмножество

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^{\mathrm{T}}Qx \leqslant 1 \right\}, \quad Q = C^{\mathrm{T}}PC$$

пространства состояний системы (5)–(6) является притягивающим (k, n)-цилиндром.

Доказательство теоремы 2. В соответствии с теоремой 1 подмножество $\{s \in \mathbb{R}^n \mid s^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} P K s \leqslant 1\}$ системы (12) является притягивающим (k, n)-цилиндром, если выполнены условия

$$KM(I - K^+K) = 0, \tag{П.2}$$

$$\begin{bmatrix} PKMK^+ + (KMK^+)^{\mathrm{T}} P + \alpha P & PKN \\ (KN)^{\mathrm{T}} P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec 0. \tag{П.3}$$

Для существования регулятора (9) такого, чтобы для замкнутой системы (12) выполнялось условие (П.2), необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$K(A + BXD)(I - K^+K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad KBXD(I - K^+K) = -KA(I - K^+K)$$

было разрешимо относительно X. В соответствии с леммой 3 это так в том и только в том случае, если выполнено

$$\begin{aligned} KB(KB)^+KA(I - K^+K)(D(I - K^+K))^+D(I - K^+K) = \\ = KA(I - K^+K), \end{aligned} \tag{П.4}$$

причем все соответствующие матрицы X могут быть параметризованы как

$$\begin{aligned} X = (KB)^+KA(K^+K - I)(D(I - K^+K))^+ + \\ + Y - (KB)^+KBYD(I - K^+K)(D(I - K^+K))^+, \end{aligned} \tag{П.5}$$

где Y – произвольная матрица соответствующей размерности. Согласно лемме 4 (П.4) и (П.5) равносильны (15) и (17) соответственно.

С учетом выражений $M = A + BXD$, $N = C + BXF$ условие (П.3) может быть переписано в виде

$$\begin{bmatrix} PKAK^+ + (KAK^+)^{\mathrm{T}} P + \alpha P & PKC \\ (KC)^{\mathrm{T}} P & -\alpha G \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} PKB \\ 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} DK^+ & F \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} PKB \\ 0 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} DK^+ & F \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{T}} \prec 0$$

и после подстановки (17) и применения обозначений (14) представлено как

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} PH_1 + H_1^{\mathrm{T}} P + \alpha P & PH_2 \\ H_2^{\mathrm{T}} P & -\alpha G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PH_3 \\ 0 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} H_4 & H_5 \end{bmatrix} + \\ + \left(\begin{bmatrix} PH_3 \\ 0 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} H_4 & H_5 \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{T}} \prec 0. \end{aligned} \tag{П.6}$$

Согласно лемме 5 соответствующая матрица Y – а значит, и набор X параметров регулятора (9) – существует в том и только в том случае, если найдутся $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, при которых выполнены матричные неравенства

$$\begin{bmatrix} PH_1 + H_1^{\mathrm{T}} P + \alpha P & PH_2 \\ H_2^{\mathrm{T}} P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_1 \begin{bmatrix} PH_3 H_3^{\mathrm{T}} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{П.7}$$

(П.8) $$\begin{bmatrix} PH_1 + H_1^{\mathrm{T}}P + \alpha P & PH_2 \\ H_2^{\mathrm{T}}P & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_2 \begin{bmatrix} H_4^{\mathrm{T}}H_4 & H_4^{\mathrm{T}}H_5 \\ H_5^{\mathrm{T}}H_4 & H_5^{\mathrm{T}}H_5 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если матрица Q такова, что $PQ = I$, то (П.7) равносильно

(П.9) $$\begin{bmatrix} H_1Q + QH_1^{\mathrm{T}} + \alpha Q & H_2 \\ H_2^{\mathrm{T}} & -\alpha G \end{bmatrix} \prec \mu_1 \begin{bmatrix} H_3H_3^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

чтобы увидеть это, достаточно умножить (П.7) слева и справа на $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что (П.8), (П.9) совпадают с (16), (П.6) равносильно (18) и что при фиксированных α, P матричное неравенство (18) является линейным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.

   Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.

2. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.

   Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.

3. *Хлебников М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // АиТ. 2011. № 4. С. 27–42.

   Khlebnikov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: A Linear Dynamic Output Controller // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 4. P. 699–712.

4. *Железнов К.О., Хлебников М.В.* Применение метода инвариантных эллипсоидов для решения линейной задачи слежения // Тр. МФТИ. 2013. Т. 5. № 4. С. 115–121.

5. *Железнов К.О., Квинто Я.И., Хлебников М.В.* Решение задачи слежения для линейной системы управления на основе метода инвариантных эллипсоидов // УБС. 2018. № 71. С. 45–60.

6. *El Ghaoui L., Oustry F., AitRami M.* A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 1. P. 1171–1176.

7. *Briat C.* Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems: Analysis, Observation, Filtering and Control. Springer, 2015.

8. *Arzelier D., Henrion D., Peaucelle D.* Robust State-Feedback $\mathcal{D}$-stabilization via a Cone Complementarity Algorithm // 6th European Control Conference. Portugal. 2001.

9. *Song X., Zhou S., Zhang B.* A Cone Complementarity Linearization Approach to Robust $\mathcal{H}_\infty$-controller Design for Continuous-Time Piecewise Linear Systems with Linear Fractional Uncertainties // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2008. V. 2. No. 4. P. 1264–1274.

10. *Henderson H. V., Searle S. R.* On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices // SIAM Rev. 1981. V. 23. No. 1. P. 53–60.
11. *Gene G. H., Van Loan C. F.* Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, 1996.
12. *Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis K.M.* A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design / Nonlinear Analysis. London: Taylor & Francis, Ltd, 1998.
13. *Maciejewski A.A., Klein C.A.* Obstacle Avoidance for Kinematically Redundant Manipulators in Dynamically Varying Environments // Int. J. Robot. Res. 1985. V. 4. No. 3. P. 109–117.
14. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 02.04.2020

После доработки 15.07.2020

Принята к публикации 10.09.2020