

© 2021 г. А.А. ЩЕГЛОВА, д-р физ.-мат. наук (shchegl@icc.ru)
(Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск)

К ВОПРОСУ О СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается интервальное семейство дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) в предположениях, гарантирующих совпадение структуры общего решения каждой из систем данного семейства со структурой общего решения номинальной системы. Анализ базируется на преобразовании интервального семейства ДАУ к виду, в котором разделены дифференциальная и алгебраическая части. Данное преобразование включает в себя обращение интервальной матрицы. В предположении сверхустойчивости дифференциальной подсистемы номинальных ДАУ найдена оценка радиуса устойчивости. Получены достаточные условия робастной устойчивости на основе условия сверхустойчивости дифференциальной части интервального семейства.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, интервальные коэффициенты, произвольно высокий индекс неразрешенности, робастная устойчивость, сверхустойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231021020045

1. Введение

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.1) \quad A_0 x'(t) + B_0 x(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty),$$

где A_0 и B_0 — заданные вещественные $(n \times n)$ -матрицы, $x(t)$ — искомая n -мерная функция. Предполагается, что $\det A_0 = 0$. Системы такого рода называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы.

Статья посвящена исследованию асимптотической устойчивости ДАУ с интервальными коэффициентами.

Анализ робастной устойчивости в случае систем ДАУ существенно сложнее, чем для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной (см., например, [1, с. 186–225]). Это связано с тем, что даже в простейшем случае индекса 1 сколь угодно малое возмущение коэффициентов ДАУ может привести к нарушению внутренней структуры системы и к изменению вида общего решения.

Публикаций по робастной устойчивости ДАУ относительно немного. Первыми опубликованными исследованиями по данной тематике считаются [2, 3]. Большинство авторов рассматривают только системы с возмущенным матричным коэффициентом при $x(t)$ [3–7]. Лишь в нескольких публикациях допускаются возмущения матрицы при производной искомой вектор-функции [2, 8–10]. Отдельные исследования посвящены робастной устойчивости и оценке радиуса устойчивости нестационарных ДАУ индекса 1 [4, 5, 11]. Вычислительный аспект нахождения радиуса устойчивости ДАУ изучался в [12]. Некоторое представление о современном состоянии исследований в области робастной устойчивости ДАУ дает обзор [13, с. 63–95].

Тем не менее по-прежнему актуальным остается получение результатов по робастной устойчивости систем произвольно высокого индекса неразрешенности с возмущениями, присутствующими во всех матричных коэффициентах, в частности интервальными. Именно такого рода системам и посвящена данная статья.

Рассматривается интервальное семейство

$$(1.2) \quad (A_0 + \gamma \Delta_A) x'(t) + (B_0 + \gamma \Delta_B) x(t) = 0, \quad t \in T,$$

где $\Delta_A = (\alpha_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\Delta_B = (\beta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ — матрицы неопределенностей. При этом

$$(1.3) \quad \underline{G} \leq \Delta_A \leq \overline{G}, \quad \underline{H} \leq \Delta_B \leq \overline{H}$$

(здесь и далее матричные неравенства следует понимать в поэлементном смысле); $\underline{G}, \overline{G}, \underline{H}, \overline{H}$ задают масштабы изменения матриц A_0 и B_0 , величина $\gamma > 0$ определяет размах неопределенностей.

Для анализа используется структурная форма ДАУ с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами. В предположении сверхустойчивости дифференциальной подсистемы получена оценка величины γ , при выполнении которой каждая из систем интервального семейства (1.2) будет асимптотически устойчива. Кроме того, обоснованы достаточные условия робастной устойчивости ДАУ (1.1), вытекающие из условия сверхустойчивости дифференциальной подсистемы интервального семейства. При этом, чтобы размерность пространства решений и структура общего решения ДАУ (1.2) были такими же, как у невозмущенной системы (1.1), на интервальные возмущения налагаются ограничения в виде конечных соотношений.

2. Структурная форма для системы дифференциально-алгебраических уравнений

Для ДАУ (1.1) определим $(n(r+1) \times n)$ -матрицы

$$(2.1) \quad \begin{aligned} B_r &= \text{col}(B_0, O, \dots, O), \\ A_r &= \text{col}(A_0, B_0, O, \dots, O), \end{aligned}$$

$(n(r+1) \times nr)$ -матрицу

$$(2.2) \quad \Lambda_r = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ A_0 & O & \dots & O & O \\ B_0 & A_0 & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & A_0 & O \\ O & O & \dots & B_0 & A_0 \end{pmatrix}$$

и $(n(r+1) \times n(r+2))$ -матрицу

$$\mathcal{D}_r = (\mathcal{B}_r \mid \mathcal{A}_r \parallel \Lambda_r).$$

Предположим, что для некоторого r ($0 \leq r \leq n$) в $\mathcal{D}_r$ найдется неособенный минор $n(r+1)$ -го порядка, включающий в себя $\lambda = \text{rank } \Lambda_r$ столбцов матрицы Λ_r и все столбцы матрицы $\mathcal{A}_r$. Такой минор будем называть *разрешающим*. Обозначим через M_r матрицу, определителем которой является разрешающий минор.

Разобьем матричные коэффициенты системы (1.1) на блоки:

$$(2.3) \quad (A_1 \ A_2) = A_0 Q, \quad (B_1 \ B_2) = B_0 Q,$$

где Q — матрица перестановок столбцов такая, что все столбцы матрицы

$$(2.4) \quad \mathcal{B}_{2,r} = \text{col}(B_2, O, \dots, O)$$

являются составляющей частью разрешающего минора, а столбцы матрицы

$$\text{col}(B_1, O, \dots, O)$$

не входят в этот минор. Блоки B_2 и A_2 имеют размеры $n \times d$, $d = nr - \lambda$. О построении матрицы Q см. [14].

Определение 1. Наименьшее значение r , при котором в матрице $\mathcal{D}_r$ найдется разрешающий минор, называется индексом неразрешенности ДАУ (1.1).

Лемма 1 [15]. Наличие разрешающего минора в матрице $\mathcal{D}_r$ необходимо и достаточно для существования оператора

$$(2.5) \quad \mathcal{R} = R_0 + R_1 \frac{d}{dt} + \dots + R_r \left(\frac{d}{dt} \right)^r$$

(R_j — $(n \times n)$ -матрицы ($j = \overline{0, r}$)), обладающего свойством: для любой n -мерной функции $\varphi(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$

$$\begin{aligned} & \mathcal{R} \left[A \frac{d}{dt} \varphi(t) + B \varphi(t) \right] = \\ & = (R_0 \ R_1 \ \dots \ R_r) \mathcal{D}_r \text{col} \left(\varphi(t), \frac{d}{dt} \varphi(t), \dots, \left(\frac{d}{dt} \right)^{(r+1)} \varphi(t) \right) = \\ & = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1} \frac{d}{dt} \varphi(t) + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} Q^{-1} \varphi(t), \end{aligned}$$

где Q — матрица перестановок из (2.3), J_1 и J_2 — некоторые матрицы соответствующих размеров.

При этом

$$(2.6) \quad (R_0 \ R_1 \ \dots \ R_r) = (E_n \ O \ \dots \ O) M_r^{-1}.$$

Таким образом, действие оператора (2.5) на систему (1.1) преобразует ее к виду

$$(2.7) \quad \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где $\text{col}(x_1(t), x_2(t)) = Q^{-1}x(t)$.

Лемма 2 [14]. Пусть в матрице D_r имеется разрешающий минор и справедливо равенство

$$(2.8) \quad \text{rank } \Lambda_{r+1} = \text{rank } \Lambda_r + n.$$

Тогда оператор $\mathcal{R}$ обладает левым обратным оператором

$$\mathcal{L} = L_0 + L_1 \frac{d}{dt}.$$

3. Достаточные условия сохранения внутренней структуры

В предположениях леммы 2 существует оператор $\mathcal{R}$ вида (2.5), который преобразует систему (1.1) к структурной форме (2.7) и при этом имеет левый обратный оператор $\mathcal{L}$. Непосредственно из существования операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ вытекает эквивалентность в смысле решений систем (1.1) и (2.7). Таким образом, системы (1.1) и (2.7) обладают одними и теми же свойствами устойчивости.

Для того чтобы иметь возможность проводить анализ устойчивости интервальных ДАУ (1.2), (1.3), опираясь на информацию о структуре и свойствах системы (1.1) (или, что то же, (2.7)), введем следующее определение.

Определение 2. Будем говорить, что возмущения $\gamma\Delta_A$ и $\gamma\Delta_B$, подчиняющиеся ограничениям (1.3), сохраняют внутреннюю структуру ДАУ (1.1), если существует оператор

$$(3.1) \quad \tilde{\mathcal{R}} = \sum_{j=0}^r \tilde{R}_j \left(\frac{d}{dt} \right)^j$$

с интервальными коэффициентами такой, что его действие на систему (1.2) преобразует ее к виду

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 & E_d \\ U_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где $\text{col}(x_1(t), x_2(t)) = Q^{-1}x(t)$, U_1 и U_2 — некоторые интервальные матрицы соответствующих размеров.

Найдем условия, при которых для системы (1.2) при каждом выборе возмущений определен оператор $\tilde{\mathcal{R}}$.

Аналогично тому, как это было сделано в (2.3), разобьем на блоки все матрицы, фигурирующие в неравенствах (1.3):

$$(3.3) \quad \Delta_A Q = (\Delta_{A_1} \ \Delta_{A_2}), \quad \Delta_B Q = (\Delta_{B_1} \ \Delta_{B_2}),$$

$$\underline{G}Q = (\underline{G}^{[1]} \ \underline{G}^{[2]}), \quad \overline{G}Q = (\overline{G}^{[1]} \ \overline{G}^{[2]}),$$

$$(3.4) \quad \underline{H}Q = (\underline{H}^{[1]} \ \underline{H}^{[2]}), \quad \overline{H}Q = (\overline{H}^{[1]} \ \overline{H}^{[2]}).$$

Здесь Q — матрица перестановок из (2.3); блоки Δ_{A_2} , Δ_{B_2} , $\underline{G}^{[2]}$, $\overline{G}^{[2]}$, $\underline{H}^{[2]}$ и $\overline{H}^{[2]}$ имеют размеры $n \times d$, также как и блоки A_2 и B_2 в (2.3).

Обозначим

$$(3.5) \quad \Delta_{\Lambda_r} = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ \Delta_A & O & \dots & O & O \\ \Delta_B & \Delta_A & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & \Delta_B & \Delta_A \end{pmatrix},$$

$$(3.6) \quad \underline{\Delta}_{\Lambda_r} = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ \underline{G} & O & \dots & O & O \\ \underline{H} & \underline{G} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & \underline{H} & \underline{G} \end{pmatrix}, \quad \overline{\Delta}_{\Lambda_r} = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O \\ \overline{G} & O & \dots & O & O \\ \overline{H} & \overline{G} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & \overline{H} & \overline{G} \end{pmatrix},$$

где Δ_{Λ_r} задает возмущение матрицы Λ_r (2.2). По построению

$$\underline{\Delta}_{\Lambda_r} \leq \Delta_{\Lambda_r} \leq \overline{\Delta}_{\Lambda_r}.$$

Пусть Q_Λ — матрица перестановок столбцов, такая что

$$\Lambda_r \tilde{Q} Q_\Lambda = (\Lambda_r^{[1]} \ \Lambda_r^{[2]}),$$

где

$\tilde{Q} = \text{diag} \{Q, \dots, Q\}$ имеет на главной диагонали r блоков, равных Q ;

$\Lambda_r^{[1]}$ — матрица размеров $n(r+1) \times \lambda$, состоящая из столбцов матрицы Λ_r , которые входят в разрешающий минор;

$\Lambda_r^{[2]}$ — матрица размеров $n(r+1) \times (nr - \lambda)$, состоящая из столбцов, которые не входят в упомянутый минор.

Введенные обозначения позволяют записать явное представление матрицы M_r :

$$M_r = \left(\mathcal{B}_{2,r} \mid \mathcal{A}_r \parallel \Lambda_r^{[1]} \right).$$

Аналогичным образом разобьем на блоки матрицы (3.5) и (3.6):

$$\begin{aligned}\Delta_{\Lambda_r} \tilde{Q}_r Q_\Lambda &= \left(\Delta_{\Lambda}^{[1]}, \Delta_{\Lambda}^{[2]} \right), \\ \underline{\Delta}_{\Lambda_r} \tilde{Q}_r Q_\Lambda &= \left(\underline{\Delta}_{\Lambda}^{[1]}, \underline{\Delta}_{\Lambda}^{[2]} \right), \quad \overline{\Delta}_{\Lambda_r} \tilde{Q}_r Q_\Lambda = \left(\overline{\Delta}_{\Lambda}^{[1]}, \overline{\Delta}_{\Lambda}^{[2]} \right).\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу порядка $n(r+1)$

$$(3.7) \quad \Delta_{M_r} = \left(\begin{array}{c|cc} \Delta_{B_2} & \Delta_{A_1} & \Delta_{A_2} \\ O & \Delta_{B_1} & \Delta_{B_2} \\ O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O \end{array} \left\| \Delta_{\Lambda}^{[1]} \right. \right),$$

определяющую возмущение матрицы M_r ,

$$(3.8) \quad \underline{\Delta}_{M_r} \leq \Delta_{M_r} \leq \overline{\Delta}_{M_r},$$

где

$$(3.9) \quad \begin{aligned}\underline{\Delta}_{M_r} &= \left(\begin{array}{c|cc} \underline{H}^{[2]} & \underline{G}^{[1]} & \underline{G}^{[2]} \\ O & \underline{H}^{[1]} & \underline{H}^{[2]} \\ O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O \end{array} \left\| \underline{\Delta}_{\Lambda_r}^{[1]} \right. \right), \\ \overline{\Delta}_{M_r} &= \left(\begin{array}{c|cc} \overline{H}^{[2]} & \overline{G}^{[1]} & \overline{G}^{[2]} \\ O & \overline{H}^{[1]} & \overline{H}^{[2]} \\ O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O \end{array} \left\| \overline{\Delta}_{\Lambda_r}^{[1]} \right. \right).\end{aligned}$$

Рассмотрим интервальное семейство матриц $M_r + \gamma \Delta_{M_r}$, в котором каждая из “точечных” матриц, подчиняется неравенствам

$$(3.10) \quad M_r + \gamma \underline{\Delta}_{M_r} \leq M_r + \gamma \Delta_{M_r} \leq M_r + \gamma \overline{\Delta}_{M_r}.$$

Определение 3. Пусть заданы вещественные матрицы $\underline{S} = (\underline{s}_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, $\overline{S} = (\overline{s}_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ и семейство интервальных матриц $S = (s_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$:

$$\underline{S} \leq S \leq \overline{S}.$$

Определим матрицу $\text{abs}(S) = (\hat{s}_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$, такую что

$$\hat{s}_{i,j} = \max \{ |\underline{s}_{i,j}|, |\overline{s}_{i,j}| \}.$$

В соответствии с определением 3 построим матрицу $F = \text{abs}(\Delta_A \Delta_B)$. Тогда для любой матрицы Δ_{M_r} , удовлетворяющей оценке (3.8),

$$\|\Delta_{M_r}\| \leq \|F\|,$$

где

$$\|S\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |s_{ij}| \right)$$

для любой $(n \times n)$ -матрицы S с элементами s_{ij} .

Утверждение. Пусть

$$(3.11) \quad \gamma \|F\| < \frac{1}{\|M_r^{-1}\|}.$$

Тогда матрица $M_r + \gamma \Delta_{M_r}$ будет обратима при любых неопределенностях Δ_A и Δ_B , удовлетворяющих неравенствам (1.3). Кроме того, справедливы оценки:

$$(3.12) \quad \|(M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1}\| \leq \frac{\|M_r^{-1}\|}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|},$$

$$(3.13) \quad \|(M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} - M_r^{-1}\| \leq \frac{\gamma \|M_r^{-1}\|^2 \|F\|}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|}.$$

Утверждение является очевидным следствием известных результатов [16, с. 205].

Обозначим через M_{r+1} обратимую подматрицу порядка $n(r+2)$ матрицы $\mathcal{D}_{r+1}$, включающую в себя $n + \lambda$ столбцов матрицы Λ_{r+1} и все столбцы матрицы $(\mathcal{B}_{2,r+1} \ \mathcal{A}_{r+1})$ (см. (2.4), (2.3), (2.1)).

Теорема 1. Пусть:

- 1) в матрице $\mathcal{D}_r$ существует разрешающий минор;
- 2) имеет место равенство (2.8);
- 3) при каждом выборе матриц Δ_A и Δ_B , подчиняющихся ограничениям (1.3),

$$(3.14) \quad (E_{n+d} \ O_\lambda) M_r^{-1} \Delta_\Lambda^{[2]} = O$$

(индекс при нулевой матрице указывает на число ее столбцов), а матрица $M_r^{-1} \Delta_{M_r}$ обладает структурой

$$(3.15) \quad M_r^{-1} \Delta_{M_r} = \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix},$$

где размеры нулевого блока $(n+d) \times \lambda$; * обозначает матрицу, явный вид которой несуществен.

Если кроме того

$$(3.16) \quad \gamma \|F\| < \frac{1}{\|M_{r+1}^{-1}\|},$$

то при каждом выборе матриц Δ_A и Δ_B оператор (3.1), преобразующий ДАУ (1.2) к виду (3.2), существует, имеет левый обратный оператор $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{L}_0 + \tilde{L}_1 \frac{d}{dt}$ и его коэффициенты вычисляются по формуле

$$(3.17) \quad \begin{pmatrix} \tilde{R}_0 & \tilde{R}_1 & \dots & \tilde{R}_r \end{pmatrix} = (E_n \ O) (M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1}.$$

Доказательство теоремы 1 опущено.

Замечание 1. Нетрудно показать, что неравенство (3.16) гарантирует оценку (3.11).

4. Оценка радиуса робастной устойчивости ДАУ

В этом разделе в предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получена оценка величины γ , при выполнении которой ДАУ (1.2) будут асимптотически устойчивы для всех матричных коэффициентов из рассматриваемых интервальных семейств. Эта оценка является следствием формулы для радиуса сверхустойчивости дифференциальной подсистемы

$$(4.1) \quad x_1'(t) + U_2 x_1(t) = 0$$

интервального семейства (3.2).

Определение 4. Решением ДАУ (1.1) будем называть n -мерную вектор-функцию $x_*(t) \in \mathbb{C}^1(T)$, обращающую систему (1.1) в тождество при подстановке.

При каждом выборе возмущений Δ_A и Δ_B , подчиняющихся оценкам (1.3), решение системы (1.2) будем понимать в смысле определения 4.

Определение 5. Интервальное семейство (1.2) будем называть асимптотически устойчивым, если при каждом выборе возмущений (1.3) соответствующая система ДАУ из этого семейства асимптотически устойчива.

Замечание 2. Как было отмечено выше, в предположениях леммы 2 системы (1.1) и (2.7) обладают одними и теми же свойствами устойчивости. Пусть дифференциальная подсистема ДАУ (2.7)

$$(4.2) \quad x_1'(t) + J_2 x_1(t) = 0$$

асимптотически устойчива, т.е. любое решение $x_1(t)$ этой системы обладает свойством $\|x_1(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. В свою очередь любое решение алгебраической подсистемы находится по формуле $x_2(t) = -J_1 x_1(t)$ и, следовательно, $\|x_2(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. Поэтому будем называть систему (2.7) или, что то же, систему (1.1) асимптотически устойчивой, если этим свойством обладает система (4.2).

Замечание 3. В предположениях теоремы 1 можно провести аналогичные рассуждения в отношении систем (1.2) и (3.2). Существование операторов $\tilde{R}$ и $\tilde{L}$ гарантирует, что семейства (1.2) и (3.2) имеют одни и те же решения, так что они и асимптотически устойчивы одновременно. Последнее имеет место, если этим же свойством обладает каждая система из интервального семейства (4.1).

В условиях теоремы 1 по построению

$$U_2 = (O_d \ E_{n-d}) \tilde{R}_0 (B_1 + \gamma \Delta_{B_1}),$$

где матрицы B_1 и Δ_{B_1} определены в (2.3) и (3.3) соответственно, $\tilde{R}_0$ — первый коэффициент дифференциального оператора (3.1), который переводит (1.2) в систему (3.2).

С учетом (3.17) можно получить представление

$$(4.3) \quad U_2 = J_2 + \Delta_{U_2},$$

где $J_2 = (O_d \ E_{n-d} \ O_{nr}) M_r^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}$ — матричный коэффициент из (2.7) и (4.2), $\Delta_{U_2} = (\delta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-d}}$,

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Delta_{U_2} = & (O_d \ E_{n-d} \ O_{nr}) \left((M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} - M_r^{-1} \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix} + \\ & + \gamma (O_d \ E_{n-d} \ O_{nr}) (M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_{B_1} \\ O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определение 6. В условиях теоремы 1 будем говорить, что система (1.1) робастно устойчива относительно ограничений (1.3), если каждая система из интервального семейства (1.2) асимптотически устойчива.

Определение 7. Радиусом робастной устойчивости системы (1.1) относительно ограничений (1.3) будем называть точную верхнюю грань по всем значениям параметра γ , при которых интервальное семейство (1.2) асимптотически устойчиво.

Для матрицы $J_2 = (\zeta_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-d}}$ из (4.2) определим величину

$$\sigma(J_2) = \min_{1 \leq i \leq n-d} \left(\zeta_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} |\zeta_{i,j}| \right).$$

Система (4.2) называется *сверхустойчивой* [1, с. 199], если

$$(4.5) \quad \sigma(J_2) > 0.$$

Сверхустойчивая система асимптотически устойчива.

По замечанию 2 в предположениях леммы 2 система (1.1) будет асимптотически устойчива, если сверхустойчива система (4.2).

Обратимся к интервальному семейству (4.1).

Лемма 3 [1, с. 223]. Пусть система (4.2) сверхустойчива, т.е. имеет место неравенство (4.5). Интервальное семейство (4.1), (4.3) будет сверхустойчиво при всех $\delta_{i,j}$:

$$(4.6) \quad |\delta_{i,j}| \leq \eta, \quad i, j = \overline{1, n-d},$$

тогда и только тогда, когда

$$\eta < \eta^* := \frac{\sigma(J_2)}{n-d}.$$

Величина η^* называется радиусом сверхустойчивости семейства (4.1), (4.3), (4.6).

В рассматриваемом случае невозможно априори указать величину η , определяющую границы изменения элементов матрицы Δ_{U_2} из (4.3), поскольку система (4.1) получена из (1.2) посредством обращения интервальной матрицы.

Для получения оценки $|\delta_{i,j}|$ разобьем следующие $(n-d) \times n(r+1)$ -матрицы на блоки размеров $(n-d) \times n$:

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} O_d & E_{n-d} & O_{nr} \end{pmatrix} (M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 & \mathcal{M}_1 & \dots & \mathcal{M}_r \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} O_d & E_{n-d} & O_{nr} \end{pmatrix} M_r^{-1} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_r \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(4.8) \quad \begin{aligned} J_2 &= P_0 B_1, \\ \Delta_{U_2} &= (\mathcal{M}_0 - P_0) B_1 + \gamma \mathcal{M}_0 \Delta_{B_1}. \end{aligned}$$

Используя обозначения для элементов матриц

$$(4.9) \quad \mathcal{M}_0 = (\mu_{i,l})_{i=\overline{1, n-d}, l=\overline{1, n}}, \quad P_0 = (p_{i,j})_{i=\overline{1, n-d}, j=\overline{1, n}},$$

$$(4.10) \quad B_1 = \left(b_{i,j}^{[1]} \right)_{i=\overline{1, n}, j=\overline{1, n-d}}, \quad \Delta_{B_1} = \left(\beta_{i,j}^{[1]} \right)_{i=\overline{1, n}, j=\overline{1, n-d}},$$

запишем (4.8) поэлементно

$$(4.11) \quad \delta_{i,j} = \sum_{l=1}^n (\mu_{i,l} - p_{i,l}) b_{l,j}^{[1]} + \gamma \sum_{l=1}^n \mu_{i,l} \beta_{l,j}^{[1]}, \quad i, j = \overline{1, n-d}.$$

Здесь величины $\mu_{i,l}$ и $\beta_{l,j}^{[1]}$ являются “точечными” значениями из соответствующих интервалов.

Из (4.11) следует, что

$$(4.12) \quad |\delta_{i,j}| \leq \sum_{l=1}^n |\mu_{i,l} - p_{i,l}| |b_{l,j}^{[1]}| + \gamma \sum_{l=1}^n |\mu_{i,l}| |\beta_{l,j}^{[1]}|, \quad i, j = \overline{1, n-d}.$$

С учетом (3.12) и (3.13)

$$(4.13) \quad \sum_{l=1}^n |\mu_{i,l} - p_{i,l}| \leq \|\mathcal{M}_0 - P_0\| \leq \|(M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1} - M_r^{-1}\| \leq \frac{\gamma \|M_r^{-1}\|^2 \|F\|}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|},$$

$$(4.14) \quad \sum_{l=1}^n |\mu_{i,l}| \leq \|\mathcal{M}_0\| \leq \|(M_r + \gamma \Delta_{M_r})^{-1}\| \leq \frac{\|M_r^{-1}\|}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|}.$$

Обозначим через b^* максимальный элемент матрицы $|B_1|$:

$$(4.15) \quad b^* = \max_{1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq n-d} |b_{l,j}^{[1]}|;$$

а через β^* — максимальный элемент матрицы $\text{abs}(\Delta_{B_1})$:

$$(4.16) \quad \beta^* = \max_{1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq n-d} \text{abs}(\beta_{l,j}^{[1]}).$$

Введем в рассмотрение величину

$$(4.17) \quad \theta = \|M_r^{-1}\| [\|M_r^{-1}\| \|F\| b^* + \beta^*].$$

Используя (4.13)–(4.17), оценку (4.12) можно усилить:

$$|\delta_{i,j}| \leq \frac{\gamma \theta}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|}.$$

Из замечания 3 следует, что семейство (1.2) будет асимптотически устойчиво, если сверхустойчива интервальная система (4.1). Согласно лемме 3 последнее имеет место, когда

$$\frac{\gamma \theta}{1 - \gamma \|F\| \|M_r^{-1}\|} < \eta^*,$$

откуда получаем искомую оценку радиуса робастной устойчивости системы (1.1)

$$(4.18) \quad \gamma < \frac{\eta^*}{\theta + \eta^* \|F\| \|M_r^{-1}\|}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и справедливо условие (4.5). Система ДАУ (1.1) будет робастно устойчива относительно ограничений (1.3), если имеет место неравенство (4.18), в котором $\eta^ = \frac{\sigma(J_2)}{n-d}$, а величина θ находится по формуле (4.17).*

5. Достаточное условие робастной устойчивости как следствие робастной сверхустойчивости дифференциальной подсистемы

Положим $\gamma = 1$, так что система (1.2) приобретает вид

$$(5.1) \quad (A_0 + \Delta_A) x'(t) + (B_0 + \Delta_B) x(t) = 0, \quad t \in T.$$

Как было показано в разделе 4, в предположениях теоремы 1 каждая система интервального семейства (5.1) будет асимптотически устойчива, если тем же свойством обладает и семейство (4.1).

В обозначениях (4.7), (2.3) и (3.3) интервальная матрица $U_2 = (u_{i,j})_{i,j=\overline{1,n-d}}$ из (3.2) и (4.1) находится по формуле

$$U_2 = \mathcal{M}_0(B_1 + \Delta_{B_1}).$$

С использованием (4.9), (4.10)

$$u_{i,j} = \sum_{l=1}^n \mu_{i,l} \left(b_{l,j}^{[1]} + \beta_{l,j}^{[1]} \right).$$

Допустим, удалось получить оценки

$$(5.2) \quad \underline{u}_{i,j} \leq u_{i,j} \leq \overline{u}_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, n-d}.$$

По определению каждая из систем семейства (4.1) будет сверхустойчива, если выполняется условие

$$(5.3) \quad \sigma(U_2) = \min_{1 \leq i \leq n-d} \left(u_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} |u_{i,j}| \right) > 0.$$

Поскольку

$$u_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} |u_{i,j}| \geq \underline{u}_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} \max \{ |\underline{u}_{i,j}|, |\overline{u}_{i,j}| \},$$

то неравенство (5.3) будет иметь место, если

$$(5.4) \quad \min_{1 \leq i \leq n-d} \left(\underline{u}_{i,i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{n-d} \max \{ |\underline{u}_{i,j}|, |\overline{u}_{i,j}| \} \right) > 0.$$

Тем самым доказан следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\gamma = 1$ и выполнены все предположения теоремы 1. Если кроме того имеет место неравенство (5.4), то система (1.1) будет робастно устойчива относительно ограничений (1.3).

Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим ДАУ

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) = 0.$$

Для этой системы справедливо условие 1 теоремы 1, так как в матрице

$$D_1 = \left(\begin{array}{cc|cc||c|c} -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & -3 \end{array} \right)$$

имеется подматрица M_1 , обведенная штриховой линией, определителем которой является разрешающий минор. При этом $r = 1$, $d = 1$, $Q = E_2$, $B_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\text{rank } \Lambda_1 = \lambda = 1$. Используя явный вид матрицы Λ_2 , нетрудно вычислить $\text{rank } \Lambda_2 = 3$. Следовательно, условие 2 теоремы 1 тоже выполнено.

Покажем, что для соответствующей интервальной системы (5.1) имеют место все предположения теоремы 3. Поскольку

$$M_1^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc||c|c} 1/2 & & 0 & 0 & 0 & \\ -1/3 & & 2/3 & 1 & 0 & \\ \hline -1/2 & & 1 & 2 & 0 & \\ 7/36 & & -7/18 & -2/3 & 1/6 & \end{array} \right),$$

$$\Delta_{\Lambda}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{M_1} = \left(\begin{array}{cc|cc||c|c} \beta_{1,2} & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & 0 \\ \beta_{2,2} & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & 0 \\ \hline 0 & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \alpha_{1,1} \\ 0 & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \alpha_{2,1} \end{array} \right),$$

то

$$(E_{n+d} \ O_{\lambda}) M_1^{-1} \Delta_{\Lambda}^{[2]} = \text{col}(0, \alpha_{1,2}, 2\alpha_{1,2}),$$

$$M_1^{-1} \Delta_{M_1} = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & \alpha_{1,1} \\ * & * & * & 2\alpha_{1,1} \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

где звездочками обозначены элементы, явный вид которых несуществен. Таким образом, условия (3.14) и (3.15) означают, что

$$(5.6) \quad \alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = 0.$$

Равенства (5.6) представляют собой условия сохранения внутренней структуры для интервальных ДАУ (5.1).

С учетом (5.6) зададим масштабы изменения коэффициентов системы (5.5):

$$(5.7) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,03 & -0,025 \end{pmatrix} \leq \Delta_A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,03 & 0,025 \end{pmatrix},$$

$$(5.8) \quad \begin{pmatrix} -0,05 & -0,045 \\ -0,02 & -0,02 \end{pmatrix} \leq \Delta_B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0,05 & 0,045 \\ 0,02 & 0,02 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\|F\| = 0,095$. В свою очередь $\|M_2^{-1}\| = 10,5$ (явное представление матрицы M_2^{-1} из-за громоздкости приводить не будем). Очевидно, что неравенство (3.16) выполняется. Таким образом, для рассматриваемых ДАУ имеют место все предположения теоремы 1.

Найдем оценку радиуса устойчивости, пользуясь теоремой 2. В соответствии с формулой (2.6) $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}$ и в (2.7) $J_2 = (7/3)$. Очевидно, что неравенство (4.5) выполнено и $\eta^* = 7/3$. По формуле (4.17) находим $\theta = 3,66625$. Наконец, из (4.18) получаем искомую оценку $\gamma < \frac{7}{13,32625} \approx 0,52$.

Проверим для рассматриваемой системы выполнение достаточного условия робастной устойчивости, предоставляемого теоремой 3. Ввиду того что $U_2 = (u_{1,1})$, условие (5.4) в данном случае имеет вид $\underline{u}_{1,1} > 0$, где

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \mu_{1,1}(-3 + \beta_{1,1}) + \mu_{1,2}(2 + \beta_{2,1}), \\ \mu_{1,1} &= \frac{-1 - \beta_{2,2}}{h}, \quad \mu_{1,2} = \frac{2 + \beta_{1,2}}{h}, \\ h &= (2 + \beta_{1,2})(6 + \alpha_{2,1}) - (-3 + \beta_{1,1})(-3 + \alpha_{2,2}). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (5.7), (5.8) $\underline{u}_{1,1} = \frac{67619}{35551} > 1,9 > 0$. Согласно теореме 3 это означает, что система (5.5) робастно устойчива относительно ограничений (5.7), (5.8).

Замечание 4. Следует отметить, что получить явные формулы для фигурантов неравенства (5.4) в общем случае невозможно без дополнительных предположений о свойствах матрицы $M_r + \Delta_{M_r}$, обратная к которой используется для вычисления M_0 (см. (4.7)). Интервальный анализ предоставляет весьма скромные средства для нахождения оценок обратных интервальных матриц. Например, можно предположить, что $M_r + \underline{\Delta}_{M_r}$ и $M_r + \overline{\Delta}_{M_r}$ ($\underline{\Delta}_{M_r}$ и $\overline{\Delta}_{M_r}$ — “крайние” матрицы для Δ_{M_r} (см. (3.8), (3.9)) положительно обратимы, являются M -матрицами или H -матрицами [17, с. 104–113]. К сожалению, все эти предположения вступают в противоречие с условиями (5.3), (5.4) и (4.5).

6. Заключение

В статье получены оценка радиуса устойчивости и достаточные условия робастной устойчивости для ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности с использованием условия сверхустойчивости.

Система ДАУ состоит из двух взаимосвязанных частей: подсистемы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), разрешенной относительно производной, и подсистемы алгебраических уравнений. Под сверхустойчивостью системы ДАУ понимается сверхустойчивость ее дифференциальной части. Таким образом, класс сверхустойчивых ДАУ соизмерим с классом сверхустойчивых систем, разрешенных относительно производной. Несмотря на то, что этот класс довольно узок, понятие сверхустойчивости позволяет получить простое или явное представление для радиуса робастной устойчивости систем ОДУ (см., в частности, [18, 19]). Подход к исследованию ДАУ, связанный с предположением о сверхустойчивости, наследует все преимущества и недостатки, присущие исследованию робастной устойчивости сверхустойчивых систем, разрешенных относительно производной.

Особенностью ДАУ является то, что даже в случае индекса 1 сколь угодно малое возмущение коэффициентов может привести к тому, что изменится размерность дифференциальной и алгебраической подсистем и свойства общего решения возмущенной системы не будут иметь ничего общего со свойствами общего решения номинальной системы [20, с. 7]. Для того чтобы избежать подобной ситуации и гарантировать наследование интервальными ДАУ свойства устойчивости, на матрицы возмущений накладываются ограничения (называемые “условиями сохранения структуры”), обеспечивающие совпадение структуры общего решения возмущенной и номинальной систем. Преимуществом результатов, представленных в данной статье, является то, что использованные предположения не накладывают ограничений на внутреннюю структуру номинальных ДАУ, ориентированы на системы произвольного индекса с возмущениями, присутствующими не только в матрице при $x(t)$, но и в матрице при производной. Полученные условия робастной устойчивости носят конструктивный характер и несложны для проверки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Byers R., Nichols N.K. On the Stability Radius of a Generalized State-Space System // Linear Algebra Appl. 1993. No. 188–189. P. 113–134.
3. Qiu L., Davisov E.J. The Stability Robustness of Generalized Eigenvalues // IEEE Trans. Autom. Control. 1992. No. 37. P. 886–891.
4. Chyan C.J., Du N.H., Linh V.H. On Data-Dependence of Exponential Stability and the Stability Radii for Linear Time-Varying Differential-Algebraic Systems // J. Differ. Equat. 2008. No. 245. P. 2078–2102.
5. Du N.H., Linh V.H. Stability Radii for Linear Time-Varying Differential-Algebraic Equations with Respect to Dynamics Perturbations // J. Differ. Equat. 2006. No. 230. P. 579–599.
6. Fang C.-H., Chang F.-R. Analysis of Stability Robustness for Generalized State-Space Systems with Structured Perturbations // Syst. Control Lett. 1993. No. 21. P. 109–114.
7. Lee L., Fang C.-H., Hsieh J.-G. Exact Unidirectional Perturbation Bounds for Robustness of Uncertain Generalized State-Space Systems: Continuous-Time Cases // Automatica. 1997. No. 33. P. 1923–1927.

8. *De Teran F., Dopico F.M., Moro J.* First Order Spectral Perturbation Theory of Square Singular Matrix Pencil // *Linear Algebra Appl.* 2008. No. 429. P. 548–576.
9. *Linh V.H., Mehrmann V.* Lyapunov, Bohl and Sacker-Sell Spectral Intervals for Differential-Algebraic Equations // *J. Dyn. Differ. Equat.* 2009. V. 21. P. 153–194.
10. *Lin Ch., Lam J., Wang J., Yang G.-H.* Analysis on Robust Stability for Interval Descriptor Systems // *Syst. Control Lett.* 2001. No. 42. P. 267–278.
11. *Berger T.* Robustness of Stability of Time-Varying Index-1 DAEs // *Math. Control Signals Syst.* 2014. No. 26. P. 403–433.
12. *Benner P., Sima V., Voigt M.* L_∞ -norm Computation for Continuous-Time Descriptor Systems Using Structured Matrix Pencils // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2010. V. 57. No. 1. P. 233–238.
13. *Du N.H., Linh V.H., Mehrmann V.* Robust Stability of Differential-Algebraic Equations / *Surveys in Differential-Algebraic Equations I.* Ilchmann A., Reis T. (Eds.). Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
14. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса // *АиТ.* 2017. № 5. С. 36–55.
Shcheglova A.A., Kononov A.D. Robust Stability of Differential-Algebraic Equations with an Arbitrary Unsolvability Index // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. P. 798–814.
15. *Щеглова А.А., Кононов А.Д.* Устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений в условиях неопределенности // *Диффер. уравнения.* 2018. Т. 54. № 7. С. 881–890.
Shcheglova A.A., Kononov A.D. Stability of Differential-Algebraic Equations under Uncertainty // *Differ. Equat.* 2018. No. 7. P. 860–869.
16. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
17. *Neumaier A.* Interval Methods for Systems of Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
18. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления I // *АиТ.* 2002. № 8. С. 37–53.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable Linear Control Systems I. Analysis // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 8. P. 1239–1254.
19. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления II // *АиТ.* 2002. № 11. С. 56–75.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable Linear Control Systems II. Design // *Autom. Remote Control.* 2002. V. 63. No. 11. P. 1745–1763.
20. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 02.09.2019

После доработки 11.02.2020

Принята к публикации 09.07.2020