Автоматика и телемеханика, № 2, 2021

Нелинейные системы

© 2021 г. **В.Н. АФАНАСЬЕВ, д-р техн. наук (afanval@mail.ru),**
А.П. ПРЕСНОВА (presnova.a.p@yandex.ru)
(Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва)

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ МОДЕЛЯМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА "РАСШИРЕННОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ"[1]

Проблема оптимального управления формулируется для класса динамических систем, нелинейные объекты которых представимы в виде объектов с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния. Линейность структуры преобразованной нелинейной системы и квадратичный функционал качества позволяют при синтезе оптимального управления, т.е. параметров регулятора, перейти от необходимости поиска решений уравнения Гамильтона–Якоби к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Основная проблема реализации оптимального управления связана с проблемой поиска решения такого уравнения в темпе функционирования объекта. Предложен алгоритмический метод параметрической оптимизации регулятора, основанный на использовании необходимых условий оптимальности рассматриваемой системы управления. Построенные алгоритмы могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов. Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере медикаментозного лечения пациентов при наличии ВИЧ.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, метод расширенной линеаризации, оптимальное управление, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния, параметрическая оптимизация.

DOI: 10.31857/S0005231021020057

1. Введение

Проблема линеаризации является одной из самых богатых областей исследований систем управления за последние четыре десятилетия. Самым распространенным методом анализа и синтеза систем с аналитическими (гладкими) функциями является линеаризация, основанная на разложении нелинейной

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00535).

функции в окрестностях точки, определяющей заданный режим, в ряд Тейлора и отбрасыванием нелинейных членов. Начиная с работ А.М. Ляпунова [1], основные результаты оценки устойчивости нелинейной системы по первому приближению, а также синтеза управления по первому приближению [2] основаны на изучении расположения корней характеристического уравнения системы первого приближения ("некритические задачи"). Однако для "критических задач" рассмотрения первого приближения недостаточно, управления же, синтезированные по первому приближению, могут и не обеспечить устойчивости нелинейной системе.

В отличие от этого метода развиваются методы эквивалентного представления нелинейных систем, например, метод линеаризации обратной связью (exact linearization) [3–6] или метод "расширенной линеаризации" (extendent linearization) [7–10], который и используется в данной статье.

Впервые проблема управления нелинейными объектами с их эквивалентным представлением в виде линейных моделей (State Dependent Coefficient, SDC) с параметрами, зависящими от состояния, и функционалами, матрицы штрафа которых также зависят от состояния объекта, была сформулирована в начале 60-х гг. XX столетия в [7]. С конца 90-х гг. прошлого столетия метод привлекает все большее внимание со стороны ученых и практиков. Преобразование исходного нелинейного дифференциального уравнения, которое описывает исходную систему управления, в систему с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния, и использование квадратичного функционала качества позволяют при синтезе управления осуществить переход от уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния (State Dependent Riccati Equation, SDRE). Это и составляет основу SDRE-метода синтеза оптимальных нелинейных систем управления [8–10]. Следует отметить, что до настоящего времени остается ряд вопросов, связанных с неоднозначностью представления нелинейного объекта в виде модели с линейной структурой и с параметрами, зависящими от состояния. Синтезированные управления с использованием SDC-модели и квадратичным критерием качества обеспечивают устойчивость модели при любых начальных условиях. Но этого может не быть при приложении синтезированного таким образом управления к исходной нелинейной системе. Таким образом, в общей постановке задачи синтеза не решена задача о глобальной асимптотической устойчивости нелинейной системы с управлением, синтезированным с использованием ее модели с параметрами, зависящими от состояния. Основная же проблема реализации регулятора, полученного на основе SDRE-метода, заключается в сложности нахождения решения алгебраического матричного уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния, в темпе функционирования системы.

Материал статьи размещен в следующем порядке: во втором разделе осуществлена постановка задачи управления нелинейным объектом, описываемым системой обыкновенных дифференциальных уравнений, задан квадратический функционал качества. Для синтеза оптимальных управлений использован метод динамического программирования. В третьем разделе обсуждается метод "расширенной линеаризации", используемый для синтеза оптимального управления в задаче с заданным временем переходного процесса и синтеза субоптимального управления в задаче с неограниченным временем окончания переходного процесса. Реализация синтезированного управления наталкивается на сложность реализации решений матричного уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния системы. В статье для решения этой проблемы предлагается использовать один из методов алгоритмического конструирования систем с неполной информацией [11]. В четвертом разделе излагается метод алгоритмического конструирования системы с параметрической оптимизацией, основанный на применении функции допустимых управляющих воздействий (гамильтонианов). В пятом разделе демонстрируется применение полученных теоретических результатов с использованием математической модели, описывающей поведение иммунной системы человека при наличии вируса ВИЧ, в задаче управления подачей препаратов ВААРТ. Представлены результаты математического моделирования построенной системы.

2. Задача оптимального управления нелинейным детерминированным объектом

Пусть детерминированная управляемая нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

Здесь $x(\cdot) = \{x(t) \in R^n,\, t \in [t_0, t_f]\}$ – состояние системы; $x \in \Omega_x$, $x_0 \in X_0 \subset \subset \Omega_x$ – множество возможных начальных условий системы; $u(\cdot) = \{u(t) \in R^r,$ $t \in [t_0, t_f]\}$ – управление; вектор-столбец $f(x(t))$ и матрица $g(x(t))$ – непрерывные функции соответствующих размеров.

Предположение 1. Вектор-функция $f(x(t))$ – непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т.е. $f(x(t)) \in C^1(\Omega_x)$. Кроме того, будем полагать, что функции $f(x(t))$, $g(x(t))$ такие, что из любых начальных условий $(t_0, x_0) \in \in R^+ \times \Omega_x$ исходит одно и только одно решение уравнения (2.1).

2.1. Задача с заданным временем окончания переходного процесса

Введем функционал качества

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\}dt. \tag{2.2}$$

Здесь $R = R^{\mathrm{T}}$ – положительно определенная матрица, матрицы $F = F^{\mathrm{T}}$ и $Q = Q^{\mathrm{T}}$, по крайней мере, положительно полуопределенные.

Предположение 2. Пусть $f(x(t))$, $g(x(t))$ – достаточно гладкие функции такие, что функция Беллмана $V(t, x(t))$, определенная как

$$V(s, x(\cdot)) \triangleq \inf_{u(\cdot)\in U}\frac{1}{2}\left[x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) + \int\limits_{\mathrm{s}}^{t_f}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\}dt\right], \tag{2.3}$$

дифференцируемая функция при любых допустимых управлениях $u(\cdot) \in$ $\in L_2\,[t_0, t_f]$.

В силу сделанных выше предположений значение функции $V(t, x(t))$ есть решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Гамильтона–Якоби–Беллмана [12, 13]

$$\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \min_{u \in U} H\left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right) = 0, \tag{2.4}$$

где H – гамильтониан

$$\begin{aligned} &H\left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\} + \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\left\{f(x(t)) + g(x(t))u(t)\right\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Функция $H\,(t, x(t), u(t), \partial V(t, x(t))/\partial x)$ определена и непрерывна для $t \in$ $\in [t_0, t_f]$.

Оптимальное управление $u^0(t)$ в задаче (2.1)–(2.2) является точкой стационарности гамильтониана (2.5) и определяется соотношением

$$\left\{\frac{\partial H\left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right)}{\partial u}\right\}^{\mathrm{T}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H\left(t, x(t), u(t), \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right)}{\partial u^2} = R \succ 0,$$

откуда

$$u^0(t) = -R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{2.6}$$

где вектор $\{\partial V(t, x(t))/\partial x\}^{\mathrm{T}}$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x} f(x(t)) - \\ &- \frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x} g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) = 0, \\ &V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Исходная система (2.1) с управлением (2.6) имеет вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.8}$$

Лемма 1. Если существует оптимальное управление в задаче (2.1)–(2.2), *то оно единственно и определяется уравнением* (2.8), *где вектор* $\{\partial V(t,x(t))/\partial x\}^{\mathrm{T}}$ *является решением уравнения* (2.7) [14].

Основная трудность реализации управлений в виде (2.6) заключается в нахождении вектора $\{\partial V(t,x(t))/\partial x\}^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющего скалярному уравнению в частных производных (2.7). В случае успешного решения уравнения (2.7) управление $u(\cdot)$ осуществляется с использованием принципа обратной связи по состоянию, т.е. $u(t)=u(t,x(t))$.

В дальнейшем потребуется знание о поведении гамильтониана, соответствующее оптимальному управляемому процессу $\xi=\big(x(t),u^0(t),t\in[t_0,t_f]\big)$.

Лемма 2 [13]. *Поведение гамильтониана*

$$
\begin{gathered}
H\left(t,x(t),u(t),\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right)= \\
=\frac{1}{2}\left[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right]+\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\left[f(x(t))+g(x(t))u(t)\right],
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

соответствующее управляемому процессу $\xi=\big(x(t),u^0(t),t\in[t_0,t_f]\big)$, *где*

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}x(t)=f(x(t))+g(x(t))u^0(t),\quad x(t_0)=x_0,\\
u^0(t)=-R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}},
\end{gathered}
$$

определяется решением уравнения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial t}-H\left(t,x(t),u^0(t),\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right)=0,\\
V(t_f,x(t_f))=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f).
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

2.2. Задача с неопределенным временем окончания переходного процесса

В случае, когда $t\in[t_0,t_f)$, $t_f\to\infty$, функционал качества записывается в виде

$$
J(x(\cdot),u(\cdot))=\lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\}dt. \tag{2.11}
$$

Здесь $Q=Q^{\mathrm{T}}$ и $R=R^{\mathrm{T}}$ – положительно определенные матрицы.

В этом случае $\{\partial V(x(t))/\partial t\}=0$ и оптимальное управление и соответствующая траектория системы (2.1) имеют вид

$$
u(t)=-R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{2.12}
$$

$$
\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.13}
$$

где $\{\partial V(x(t))/\partial x\}^{\mathrm{T}}$ ищется решением уравнения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}f(x(t)) - \frac{1}{2}\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} + \\
+ \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) = 0.
\end{gathered} \tag{2.14}
$$

Таким образом, проблема нахождения управления (2.12) полностью зависит от успешного решения уравнения в частных производных (2.14).

Лемма 3. Значение гамильтониана, соответствующее управляемому процессу $\xi = \big(x(t), u^0(t), t \in [t_0, t_f)\big)$, *на всем интервале управления постоянно, т.е.*

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}H\left(x(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right) = \\
= \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}f(x(t)) - \frac{1}{2}\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} + \\
+ \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) = 0.
\end{gathered} \tag{2.15}
$$

3. Метод "расширенной линеаризации" в задаче синтеза управлений

3.1. SDC-представление нелинейной системы

Будем искать решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.14), применив к исходной нелинейной модели управляемого объекта метод "расширенной линеаризации". Для этого необходимо сделать несколько предположений [8].

Предположение 3. Положим, что при $x = 0$ выполняются следующие условия: $f(0) = 0$ и, кроме этого, $g(x(t)) \neq 0$, $\forall x(t) \in \Omega_x$.

Учитывая сделанные предположения, представим исходную систему (2.1) с помощью метода "расширенной линеаризации" в виде системы с линейной структурой, параметры которой зависят от состояния объекта (SDC-представление, State Dependent Coefficient factorization [8–10]). Для этого представим вектор $f(x(t))$ в виде

$$
f(x(t)) = A(x(t))x(t). \tag{3.1}
$$

При таком представлении уравнение объекта (2.1) примет вид

$$
\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) + g(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.2}
$$

Такую запись нелинейной управляемой системы (2.1) в виде (3.2) называют SDC-представлением [8, 9].

Естественно, что такое представление (3.2) для систем, порядок которых выше первого, не является единственным. Предположим, что в общем случае матрица-функция $f(x(t))$ может быть p способами преобразована в произведение матрицы $A_i(x(t))$ с параметрами, зависящими от состояния, на вектор состояния $x(t)$, т.е.

$$f(x(t)) = A_i(x(t))x(t), \quad i = 1, \dots, p. \tag{3.3}$$

Необходимо учесть, что не все полученные таким образом p представлений вектора $f(x(t))$ можно использовать при построении системы, эквивалентной исходной. Модель с параметрами, зависящими от состояния, полученная с помощью данного преобразования (3.3), должна быть управляема.

Предположение 4. Будем считать, что представление исходной нелинейной системы в виде системы с линейной структурой, но с параметрами, зависящими от состояния, является управляемым в области допустимых значений $[t_0, t_f] \times \Omega_x$, т.е. пара $\langle A_j(x(t)), g(x(t))\rangle$ является поточечно управляемой для всех $(t, x) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x$.

Следует отметить, что в настоящее время отсутствуют критерии для определения таких структурных свойств, как управляемость и наблюдаемость моделей систем, полученных с использованием метода “расширенной линеаризации”. Для полученных моделей систем можно провести “поточечную” проверку на управляемость в некоторой области исследуемого состояния системы [10, 15].

Сделанные выше предположения 3 и 4 позволят при использовании метода “расширенной линеаризации” получить представление исходной нелинейной системы (2.1) в виде модели (3.2), которая имеет линейную структуру и является управляемой.

3.2. Задача с заданным временем окончания переходного процесса

Модифицированное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.7) имеет вид

$$\begin{gathered}
\frac{dV(t,x(t))}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x} g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(t,x(t))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} - \\
-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t), \\
V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f).
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Определим функцию $V(t, x(t))$ с точностью до положительно определенной симметрической матрицы $S(x(t))$ в виде

$$V(t, x(t)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t). \tag{3.5}$$

Перепишем (3.4) с учетом (3.5)

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV(t,x(t))}{dt} = -\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)\left[S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)) + Q\right]x(t),\\
&V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

С учетом того, что $\{\partial V(t,x(t))/\partial x\}^{\mathrm{T}} = S(x(t))x(t)$, управление (2.6) принимает вид

$$
u^0(t) = -R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t),
\tag{3.7}
$$

а уравнение модели (3.2) с управлением (3.7) может быть записано как

$$
\frac{d}{dt}x(t) = \left[(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))\right]x(t), \quad x(t_0) = x_0.
\tag{3.8}
$$

Получим выражение для полной производной по времени от функции $V(t,x(t))$, используя ее представление в виде (3.5), а также учитывая выражение (3.8):

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV(t,x(t))}{dt} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)\left[\frac{dS(x(t))}{dt} + S(x(t))A(x(t)) + A^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)) - \right.\\
&\qquad\left. - 2S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))\right]x(t),\\
&V(t_f, x(t_f)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Приравнивая правые части выражений (3.6) и (3.9), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS(x(t))}{dt} + S(x(t))A(x(t)) + A^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)) -\\
&- S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)) + Q = 0,\\
&S(x(t_f)) = F.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Здесь

$$
\frac{dS(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(x(t))}{\partial x_i}\frac{dx_i(t)}{dt}.
$$

Выражение (3.10) есть уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния, и заданным краевым условием на правом конце.

Теорема 1. *Даны управляемая модель* (3.8) *системы* (2.1) *и функционал* (2.2). *Обозначим через* $J^0(t,x(t))$ *минимальную величину, достигаемую функционалом* $J(x(\cdot),u(\cdot))$ *при оптимальном управлении* $u^0(t)$, *реализованном с использованием обратной связи. Эта величина равна*

$$
J^0(t,x(t)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t), \quad t_0 \le t \le t_f.
$$

Т е о р е м а 2. *Модель нелинейной системы* (2.1), *описываемая уравнением*

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))\right]x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

в котором матрица $S(x(t))$ *является симметрической положительно определенной и находится решением дифференциального уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния* (3.10), *асимптотически устойчива.*

Доказательства теорем 1 и 2 содержатся в Приложении.

Следует отметить, что асимптотическая стабилизация может не иметь место в исходной нелинейной системе (2.1) с синтезированным SDRE-методом оптимальным управлением вида (3.7) и произвольным начальным состоянием x_0 (глобальная асимптотическая стабилизация).

3.3. Задача с неопределенным временем окончания переходного процесса (субоптимальное управление)

Как это было сделано выше, определим функцию $\{\partial V(x(t))/\partial x\}^{\mathrm{T}}$ с точностью до значения матрицы $\widehat{S}(x(t))$ в виде

$$\{\partial V(x(t))/\partial x\}^{\mathrm{T}} = \widehat{S}(x(t))x(t), \tag{3.11}$$

где $\widehat{S}(x(t))$ – симметрическая положительно определенная матрица.

Заменяя в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана (2.14) $\{\partial V(x(t))/\partial x\}^{\mathrm{T}}$ на $\widehat{S}(x(t))x(t)$ и учитывая, что $f(x(t)) = A(x(t))x(t)$, получим

$$\begin{gathered} x^{\mathrm{T}}(t)\Big[A^{\mathrm{T}}(x(t))\widehat{S}(x(t)) + \widehat{S}(x(t))A(x(t)) - \\ - \widehat{S}(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\widehat{S}(x(t)) + Q\Big]x(t) = 0 \end{gathered}$$

откуда, учитывая что $x(t)$ есть решение уравнения (3.2) с начальным условием $x(t_0) \neq 0$, имеем

$$\begin{gathered} A^{\mathrm{T}}(x(t))\widehat{S}(x(t)) + \widehat{S}(x(t))A(x(t)) - \\ - \widehat{S}(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\widehat{S}(x(t)) + Q = 0. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Управление для рассматриваемой задачи принимает вид

$$u^0(t) = -R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\widehat{S}(x(t))x(t). \tag{3.13}$$

Запишем исходную систему (2.1) с субоптимальным управлением (3.13)

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\widehat{S}(x(t))x(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.14}$$

Отметим справедливость сформулированной выше теоремы 1 об асимптотической устойчивости модели с параметрами, зависящими от состояния, и сделанного замечания относительно глобальной устойчивости исходной нелинейной системы.

Для рассматриваемой модели (3.8) исходного объекта (2.1) в случае с открытым интервалом управления можно, используя теоремы 1 и 2, сформулировать соответствующие теоремы о конечном значении функционала при оптимальном управлении и устойчивости.

Т е о р е м а 3. *Даны управляемая модель* (3.8) *системы* (2.1) *и функционал* (2.11). *Обозначим через* $J^0(x(\cdot))$ *минимальную величину, достигаемую функционалом* $J(x(\cdot), u(\cdot))$ *при оптимальном управлении, реализованном с использованием обратной связи. Эта величина равна*

$$J^0(x(t_0)) = \frac{1}{2} x_0^{\mathrm{T}} \widehat{S}(x_0) x_0,$$

где положительно определенная симметрическая матрица определяется решением алгебраического уравнения типа Риккати с постоянными параметрами

$$A^{\mathrm{T}}(x_0)\widehat{S}(x_0) + \widehat{S}(x_0)A(x_0) - \widehat{S}(x_0)g(x_0)R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x_0)\widehat{S}(x_0) + Q = 0.$$

Т е о р е м а 4. *Модель нелинейной системы* (2.1)*, описываемая уравнением*

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left[A(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\widehat{S}(x(t))\right]x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

в котором матрица $\widehat{S}(x(t))$ *является симметрической положительно определенной и находится решением алгебраического уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния* (3.12)*, асимптотически устойчива с положением равновесия в точке* $x = 0$.

Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны доказательствам теорем 1 и 2.

Однако отметим, асимптотическая стабилизация может не иметь место в исходной нелинейной системе (2.1) с синтезированным SDRE-методом субоптимальным управлением вида (3.13) и произвольным начальным состоянием x_0 (глобальная асимптотическая стабилизация).

В заключение данного раздела отметим, что выражения для оптимального (3.7) и субоптимального (3.13) управлений нелинейной системой получены. Однако проблема реализации таких управлений наталкивается на проблему поиска решения уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния системы (3.10) или (3.12), в темпе функционирования системы управления. Поиск решения этой проблемы, описанный в следующем разделе статьи, основан на установленных закономерностях поведения гамильтониана при оптимальном управлении и соответствующем состоянии нелинейного объекта (леммы 2 и 3).

4. Конструирование алгоритмов оптимизации нелинейных неопределенных систем управления

Представлен новый метод формирования алгоритмов оптимизации нелинейных неопределенных систем управления, основанный на применении функций допустимых значений управляющих воздействий (гамильтонианов) [16]. Под термином "неопределенные системы" понимаются системы с неполной информацией о параметрах и действующих возмущениях [11].

4.1. Общая структура алгоритмов параметрической оптимизации нелинейных неопределенных систем

Пусть нелинейный управляемый объект описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = \widetilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.1}$$

здесь $x(\cdot) = \{x(t) \in R^n,\ t \in [t_0, t_f)\}$ – состояние объекта; $u(\cdot) = \{u(t) \in R^r$, $t \in [t_0, t_f)\}$ – управляющие воздействия; $\eta(\cdot) = \left\{\eta(t) \in \Delta \subset R^k, t \in [t_0, t_f)\right\}$ – вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, при этом известно, что $\left|d\eta(t)/dt\right| \le \max_{\eta\in\Delta} |d\eta(t)/dt| = \sigma$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$; вектор параметров объекта, оптимизирующих работу системы: $a(\cdot) = \{a(t) \in A \subset R^p, t \in [t_0, t_f)\}$. Отметим, что в общем случае $k \ge p$. Выделенные для параметрической оптимизации параметры системы могут находиться как в самом объекте, так и в регуляторе.

Как следует из лемм 1 и 2, поведение гамильтонианов при оптимальных управлениях $u^0(t)$ и соответствующих траекториях $x(t)$ определяется вполне определенными выражениями. Это свойство гамильтонианов положим в основу конструкции алгоритмов оптимизации системы управления.

Сформулируем необходимые условия, при которых функционал качества достигает минимального значения, основываясь на поведении гамильтониана вдоль оптимальной траектории. Рассмотрим вначале случай, когда $k = p$ и параметры $a(t)$ могут "парировать" возмущения $\eta(t)$, т.е. возможно выполнение условия $a(t) - \eta(t) = 0$.

Пусть скалярная функция $\varphi(t)$ соответствует значению гамильтониана при оптимальном управляемом процессе $\xi = \left(x(t), u^0(t), t \in [t_0, t_f)\right)$ на всем интервале управления, т.е.

$$\varphi(t) = -H\left(x(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right),$$

где $H\left(x(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right)$ – значение гамильтониана в каждый момент времени управления при отсутствии параметрических возмущений (или при полном их парировании) при оптимальном управлении и соответствующей траектории системы (4.1).

Введем скалярную функцию $\Re(\cdot)$ такую, что

$$\Re\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) = H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) + \varphi(t).$$

Таким образом, условие, которое достигается при $a(t) - \eta(t) = 0$,

$$\Re\left(x(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right) = 0 \tag{4.2}$$

есть необходимое условие оптимальности системы управления.

Предположение 5. Необходимые условия оптимальности в задачах (2.1), (2.2) и (2.1), (2.11), а именно условия вида (4.2), являются и достаточными условиями оптимальности.

Это предположение выполняется в случае, когда

а) задача унимодальная, т.е. функционал имеет только один минимум и отсутствуют другие точки стационарности гамильтониана;

б) исследователь располагает информацией об области нахождения главного экстремума (минимума) функционала качества, которая соответствует заданной области допустимых управлений, так что можно рассматривать задачу с одним глобальным минимумом.

Необходимые и достаточные условия оптимальности (4.2) будут использоваться в качестве основы при конструировании алгоритмов оптимизации неопределенных систем [11].

Таким образом, в случае, когда $a(t) - \eta(t) \neq 0$, условие (4.2) выполняться не будет, т.е. $\Re\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) \neq 0$.

Теорема 5. Пусть неопределенная нелинейная динамическая система описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = \widetilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x(t) \in R^n$ – состояние объекта; $u(t) \in R^r$ – управляющие воздействия; $\eta(t) \in \Delta \subset R^k$, $\left|d\eta(t)/dt\right| \leq \max_{\eta\in\Delta}\left|d\eta(t)/dt\right| = \sigma$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ – вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений; $a(t) \in \mathrm{A} \subset R^p$ – вектор параметров объекта, оптимизирующих работу системы. Предполагается также, что при $p = k$ во внутренней области множества значений параметров A, *при соответствующем $u^0(t) \in U$, существуют такие значения $a^0(t) \in \mathrm{A}$, при которых достигается заданная цель параметрического управления, т.е.*

$$a^0(t) = \arg\left[\min_{a\in A} J(x(t), u^0(t), \eta(t), a(t))\right] = \arg\left[J(x^0(t), u^0(t), \eta(t), a^0(t))\right] \in \mathrm{A},$$

что соответствует выполнению условия

$$\Re\left(x^0(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a^0(t)\right) = 0.$$

Алгоритм

$$(4.3)\quad \begin{gathered} \frac{d}{dt}a(t) = -\left\{\frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial a}\right\}^{\mathrm{T}} \times \\ \times\, \Re\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right), \\ a(t_0) = a_0 \end{gathered}$$

обеспечивает исходной системе асимптотическое свойство параметрической оптимизации в смысле заданного функционала качества $J(x(t), u(t))$ *при выполнении условия*

$$(4.4)\quad \Re^2\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)\left\|\frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial a}\right\|^2 >$$
$$> \left|\Re\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)\frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial \eta}\sigma\right|.$$

Отметим, что назначение начального условия $a(t_0)$ для алгоритма (4.3) параметрической оптимизации зависит от априорной информации о состоянии в данный момент времени возмущенных параметров $\eta(t_0)$.

Дадим пояснение о возможности реализации алгоритма (4.3). Как видно, этот алгоритм содержит неизмеряемую информацию о возмущенных параметрах $\eta(t)$. Вся информация о возмущенных параметрах и параметрах оптимизации содержится в выражении, описывающем гамильтониан системы. Действительно:

$$\begin{gathered} H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) = \\ = L(x(t), u(t)) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\widetilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t)) = \\ = L(x(t), u(t)) + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\left\{dx(t)/dt\right\}, \end{gathered}$$

так как $dx(t)/dt = \widetilde{f}(x(t), u(t), \eta(t), a(t))$. Здесь $L(x(t), u(t))$ – интегрант функционала (2.2) или (2.11). Таким образом, для реализации алгоритма (4.3) необходимо располагать информацией о $dx(t)/dt$.

Как выше отмечалось, количество параметров системы, подвергающихся возмущениям, может быть больше, чем параметров, на которые возлагается задача уменьшения наилучшим образом влияния этих возмущений, т.е. в этом случае $k > p$. Условие успешной параметрической оптимизации системы в этом случае формулируется следующей теоремой.

Т е о р е м а 6. *Пусть вектор параметров объекта, подвергающихся воздействию неконтролируемых возмущений, отвечает условию* $\eta(t) \in \Delta \subset R^k$, $\left|d\eta(t)/dt\right| \le \max_{\eta\in\Delta} \left|d\eta(t)/dt\right| = \sigma$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, *а вектор параметров объекта, оптимизирующих работу системы, есть* $a_p(t) \in \mathrm{A}_p \subset R^p$, $p < k$. *Предполагается, что в области множества значений параметров* A_p, *выделенных в системе управления для ее оптимизации, при соответствующем* $u_p^0(t) \in U$ *существуют такие значения* $a_p^0(t) \in \mathrm{A}_p$, *при которых достигается заданная цель параметрического управления, т.е.*

$$\begin{aligned} a_p^0(t) &= \arg\left[\min_{a_0\in A} J_p(x_p(t), u_p^0(t), \eta(t), a_p(t))\right] = \\ &= \arg\left[J_p(x_p^0(t), u_p^0(t), \eta(t), a_p^0(t))\right] \in \mathrm{A}_p, \end{aligned} \tag{4.5}$$

что соответствует выполнению условия

$$\Re_p\left(x_p^0(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p^0(t)\right) = 0. \tag{4.6}$$

Алгоритм

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_p(t) = -\left\{\frac{\partial H\left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t)\right)}{\partial a_p}\right\}^{\mathrm{T}} \times \\ \times \Re_p\left(x_p(t), u_p(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t)\right) \end{aligned}$$

обеспечивает исходной системе асимптотическое свойство параметрической оптимизации в смысле заданного функционала качества $J_p(x_p(t), u_p^0(t))$, $(p < k)$ *при выполнении условия*

$$\begin{aligned} &\Re_p^2\left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t)\right)\left\|\frac{\partial H\left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t)\right)}{\partial a_p}\right\|^2 - \\ &-\left|\Re_p\left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t)\right),\right. \\ &\qquad\qquad \left. a_p(t)\frac{\partial H\left(x_p(t), u_p^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a_p(t)\right)}{\partial \eta}\sigma\right| > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнение условия (4.5) обеспечивает существование необходимого условия оптимальности (4.6), которое используется в структуре алгоритма параметрической оптимизации. Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

Назначение начального условия $a_p(t_0)$ так же, как и для алгоритма (4.3), зависит от априорной информации о состоянии в данный момент времени возмущенных параметров $\eta(t_0)$.

4.2. Алгоритмы оптимизации нелинейных систем, линеаризованных с помощью метода "расширенной линеаризации"

Полученные в разделе 4.1 алгоритмы параметрической оптимизации неопределенных нелинейных динамических систем применимы для поиска субоптимального решения задачи построения нелинейной системы управления, рассмотренной в разделе 3.2 статьи, а именно, для нахождения матрицы $\widehat{S}\,(x(t))$, минуя проблемы нахождения решения уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния (3.5). Для этого представим матрицу $\widehat{S}\,(x(t))$ в виде

$$\hat{S}(x(t)) = S_0 + s(t), \tag{4.7}$$

здесь матрица S_0 находится из решения уравнения Риккати с постоянными параметрами (при $x(t_0) = x_0$)

$$S(x_0)A(x_0) + A^{\mathrm{T}}(x_0)S(x_0) - S(x_0)g(x_0)R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x_0)S(x_0) + Q = 0, \tag{4.8}$$

а матрица $s(t)$ – матрица настраиваемых параметров.

В соответствии с изложенным выше способом представления матрицы $\hat{S}(x(t))$ (4.7) запишем алгоритм для нахождения $s(t)$

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}s(t) = -\left\{\frac{\partial H\,(x(t), u(t), [S_0 + s(t)]\,x(t))}{\partial s}\right\}^{\mathrm{T}} \Re\,(x(t), u(t), [S_0 + s(t)]\,x(t))\,, \\ s(t_0) = 0, \end{gathered} \tag{4.9}$$

здесь

$$\begin{gathered} \Re\,(x(t), u(t), [S_0 + s(t)]\,x(t)) = \\ = H\,(x(t), u(t), [S_0 + s(t)]\,x(t)) - H\left(x^0(t), u^0(t), S(x^0)x^0(t)\right), \\ H\,(x(t), u(t), [S_0 + s(t)]\,x(t)) = \\ = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)\Big\{Q - [S_0 + s(t)]^{\mathrm{T}}\,g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\,[S_0 + s(t)] + \\ + 2\,[S_0 + s(t)]^{\mathrm{T}}\,A(x(t))\Big\}x(t), \end{gathered}$$

$S(x^0)$ – матрица, при которой выполняется условие

$$\Re\left(x^0(t), u^0(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a^0(t)\right) = 0.$$

Функция чувствительности $\left\{\partial H\,(x(t), u(t), [S_0 + s(t)]\,x(t))\,/\partial s\right\}^{\mathrm{T}}$ определяется выражением

$$\begin{gathered} \left\{\frac{\partial H\,(x(t), u(t), [S_0 + s(t)]\,x(t))}{\partial s}\right\}^{\mathrm{T}} = \\ = \left[-g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))(S_0 + s(t)) + A(x(t))\right]x(t)x^{\mathrm{T}}(t). \end{gathered}$$

С учетом (3.7) и (4.7) управление с параметрической оптимизацией при использовании данного алгоритма принимает вид

$$u(t) = -R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))[S_0 + s(t)]x(t). \tag{4.10}$$

Система (2.1) с управлением (4.10) принимает вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))\left[S_0 + s(t)\right]x(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.11}$$

где матрица S_0 определяется решением уравнения (4.8), а матрица $s(t)$ находится с использованием алгоритма (4.9).

Таким образом, для исходной нелинейной системы (2.1) решена задача синтеза субоптимального управления с параметрической оптимизацией регулятора в случае незаданного времени переходного процесса.

5. Демонстрация работы алгоритма параметрической оптимизации в задаче управления нелинейной системой

Для проверки возможности использования рассмотренных в статье подходов построения систем управления с параметрической неопределенностью и проверки работоспособности алгоритмов параметрической оптимизации в этом разделе представлены результаты конструирования системы медикаментозного лечения иммунного заболевания ВИЧ. В качестве объекта исследования была выбрана модель поведения иммунной системы человека при наличии в ней ВИЧ, предложенная в [17–19]. Модель образуют пять дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}i(t) = \lambda - di(t) - \beta(1 - \eta u(t))i(t)y(t),\\
&\frac{d}{dt}y(t) = \beta(1 - \eta u(t))i(t)y(t) - ay(t) - p_1 z_1(t)y(t) - p_2 z_2(t)y(t),\\
&\frac{d}{dt}z_1(t) = c_1 z_1(t)y(t) - b_1 z_1(t),\\
&\frac{d}{dt}w(t) = c_2 i(t)y(t)w(t) - c_2 q y(t)w(t) - b_2 w(t),\\
&\frac{d}{dt}z_2(t) = c_2 q y(t)w(t) - h z_2(t),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

здесь обозначены: i – незараженные Т-клетки иммунной системы, Т-хелперы; y – зараженные Т-хелперы (вирусы); z_1 – Т-киллеры; w – В-лимфоциты; z_2 – иммуноглобулины, клетки-памяти; λ – скорость производства Т-хелперов в организме. Управление системой (5.1) осуществляется подачей лекарственных препаратов (u – доза вводимого препарата), максимальная эффективность которых выражается коэффициентом η. Значения параметров, использованных при построении и проведении математического моделирования, приняты из [18]. Параметры являются безразмерными и усредненными, так как сама модель описывает поведение иммунной системы на качественном уровне и является безразмерной.

Для примера был рассмотрен очень слабый пациент, имеющий вирус ВИЧ. Для такого состояния начальные значения примем равными: $i = 0{,}2$, $y = 2$, $z_1 = 0{,}08$, $w = 0{,}01$, $z_2 = 0{,}01$. Для рассматриваемой модели иммунной системы значение концентрации здоровых клеток иммунной системы для нормальной жизнедеятельности должно быть в диапазоне 8–10. Значения $i \leq 1$ говорят о том, что иммунная система не справляется с инфекциями, попадающими в организм, и состояние пациента близко к стадии наступления СПИДа.

Перепишем систему (5.1) в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t),\\ x(t_0) = x_0,\end{gathered} \tag{5.2}$$

где $x^{\mathrm{T}}(t) = [i(t)y(t)z_1(t)w(t)z_2(t)]$,

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} [-d - \beta y(t)]\, i(t) \\ \beta i(t)y(t) - ay(t) - p_1 z_1(t)y(t) - p_2 z_2(t)y(t) \\ c_1 z_1(t)y(t) - b_1 z_1(t) \\ c_2 i(t)y(t)w(t) - c_2 q y(t)w(t) - b_2 w(t) \\ c_2 q y(t)w(t) - h z_2(t) \end{bmatrix},$$

$$g(x(t)) = \begin{bmatrix} \beta\eta i(t)y(t) \\ -\beta\eta i(t)y(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Перепишем систему (5.2) в SDC-представлении, учитывая что $(\,10 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^{\mathrm{T}}$ точка равновесия системы (5.1)

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) + g(x(t))u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

здесь

$$A(x(t)) =$$
$$= \begin{pmatrix} -d - \beta y & -10\beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta y & 10\beta - (a + p_1 z_1 + p_2 z_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 y - b_1 & 0 & 0 \\ c_2 y w & 0 & 0 & 10 c_2 y - c_2 q y - b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2 q y w}{z_2} - h \end{pmatrix},$$

где переменные i, y, z_1, w, z_2, как и в (5.1), зависят от времени, т.е. $i(t), y(t), z_1(t), w(t), z_2(t)$.

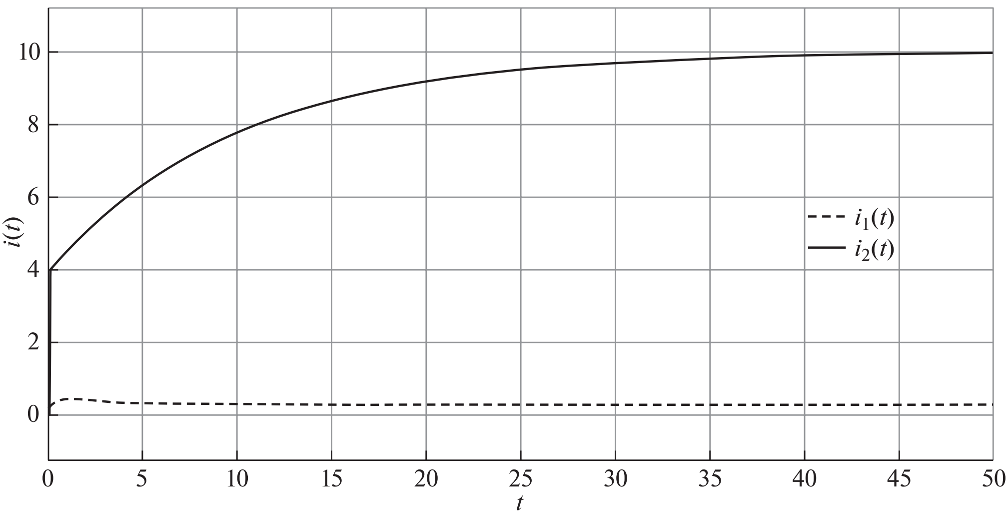

Рис. 1.

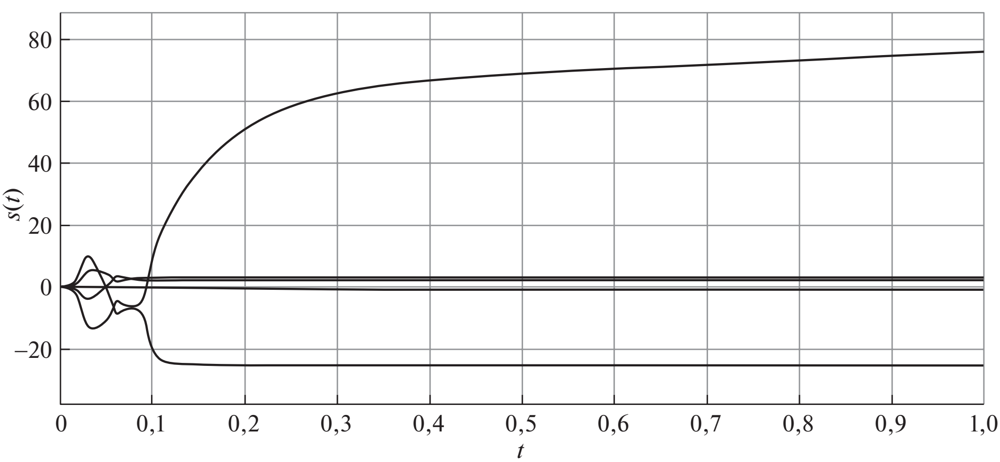

Рис. 2.

Для назначенных начальных условий и заданных матриц Q, R с использованием пакета прикладных программ MATLAB получено решение матричного уравнения Риккати S_0:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 113{,}426 & 112{,}15 & 0 & 115780 & 0 \\ 112{,}15 & 111{,}7475 & 0 & 114460 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 115780 & 114460 & 0 & 11885 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

Организация алгоритма оптимизации параметров матрицы $s(t)$ для рассматриваемого примера полностью соответствует приведенному в четвертом разделе статьи (4.7)–(4.11) методу поиска субоптимального решения задачи построения нелинейной системы управления.

В статье приведены результаты моделирования исходной системы (5.1) в отсутствие каких-либо управляющих воздействий (без лечения, $u = 0$) и с управлениями, синтезированными с использованием алгоритма (4.9), см. рис. 1 и 2.

Результаты компьютерного моделирования подтверждают эффективность полученного алгоритмического метода синтеза управлений с параметрической оптимизацией. Как видно из приведенных результатов моделирования, разработанное целенаправленное воздействие на иммунную систему, помогает ей установить приемлемый уровень собственных клеток и контролировать концентрацию зараженных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Подставим в подынтегральную часть функционала

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\}dt$$

выражение $d\left[x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t)\right]/dt$, компенсировав вне интеграла следующим соотношением $0{,}5\left[x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t) - x^{\mathrm{T}}(t_f)S(x(t_f))x(t_f)\right]$. Получим

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\left[x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t) - x^{\mathrm{T}}(t_f)S(x(t_f))x(t_f)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{t_f}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) + d\left[x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t)\right]/dt\right\}dt.$$

Принимая во внимание то, что

$$\text{(П.1)}\qquad \frac{d}{dt}x(t) = \left[(x(t)) - g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))\right]x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

и что $S(x(t_f)) = F$, имеем

$$J^0(t,x(t)) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t), \quad t_0 \le t \le t_f.$$

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы об асимптотической устойчивости модели (П.1) введем в рассмотрение функцию Ляпунова $V_L(x(t))$ такую, что

$$\text{(П.2)}\qquad \omega_1\{|x|\} \le V_L(x(t)) \le \omega_2\{|x|\}, \quad dV_L(x(t))/dt \le -\omega_3\{|x|\},\ \forall x,$$

где $\omega_i\{|x|\}$, $i=1,2,3$ – скалярные неубывающие функции такие, что $\omega_i(0)=0$, $\omega_i\{|x|\}>0$. Используя вторую теорему Ляпунова, получим, что при выполнении условия

$$\frac{dV_L(x(t))}{dt}=\frac{\partial V_L(x(t))}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt}\leq -\omega_3\{|x|\} \tag{П.3}$$

система будет устойчива. Назначим $V_L(x(t))$ в виде

$$V_L(x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))x(t),$$

где $S(x(t))$ – положительно определенная симметрическая матрица, являющаяся решением уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния,

$$\begin{gathered}\frac{dS(x(t))}{dt}+S(x(t))A(x(t))+A^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))-\\ -S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))+Q=0,\\ S(x(t_f))=F.\end{gathered} \tag{П.4}$$

Определим $\omega_3\{|x|\}$ в виде $\omega_3\{|x|\}=x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)$, $\forall x\neq 0$. Тогда с учетом (П.1) должно выполняться условие (П.3)

$$\begin{gathered}\frac{dV_L(x(t))}{dt}=\\ =x^{\mathrm{T}}(t)\left[\frac{dS(x(t))}{dt}+S(x(t))A(x(t))+A^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))-\right.\\ \left.-S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))+Q\right]x(t)-\\ -x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t)\leq 0.\end{gathered}$$

Учитывая (П.4), будем иметь

$$x^{\mathrm{T}}(t)S(x(t))g(x(t))R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t)\geq 0.$$

Это условие выполняется при всех $x(t)\neq 0$. Следовательно, модель (П.1) нелинейной системы (2.1) является асимптотически устойчивой.

Доказательство теоремы 5. Для построения алгоритма параметрической оптимизации системы

$$\frac{d}{dt}x(t)=\widetilde{f}(x(t),u(t),\eta(t),a(t)),\quad x(t_0)=x_0, \tag{П.5}$$

введем функцию Ляпунова

$$\begin{gathered}V_L(\eta(t),a(t))=\\ =\frac{1}{2}\left\{\Re\left(x(t),u(t),\frac{\partial V(x(t))}{\partial x},\eta(t),a(t)\right)-\Re\left(x^0(t),u^0(t),\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\right)\right\}^2=\\ =\frac{1}{2}\Re^2\left(x(t),u(t),\frac{\partial V(x(t))}{\partial x},\eta(t),a(t)\right).\end{gathered} \tag{П.6}$$

Тогда для асимптотической параметрической оптимизации ее производная должна быть отрицательной для случая $a(t) - \eta(t) \neq 0$:

$$\frac{d}{dt} V_L(\eta(t), a(t)) = \tag{П.7}$$

$$= \Re\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial \eta} \frac{d}{dt}\eta(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial a} \frac{d}{dt} a(t) \right] < 0,$$

так как $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H^0}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial \eta} = 0$ и $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial a} = 0$.

Назначим алгоритм параметрической оптимизации в виде

$$\frac{d}{dt} a(t) = -\left\{ \frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial a} \right\}^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \Re\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right),$$

$$a(t_0) = a_0.$$

При таком назначении алгоритма параметрической оптимизации из условия (П.14) получим

$$\Re\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) \frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial \eta} \frac{d}{dt}\eta(t) -$$

$$- \Re^2\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) \frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial a} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial a} \right\} < 0.$$

Учитывая, что на скорость изменения возмущающих воздействий наложено ограничение, т.е. $\left|d\eta(t)/dt\right| \leq \max_{\eta \in \Delta} \left|d\eta(t)/dt\right| = \sigma$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, можно записать условие успешного выполнения процесса оптимизации:

$$\Re^2\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) \left\| \frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial a} \right\|^2 >$$

$$> \left| \Re\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right) \frac{\partial H\left(x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t))}{\partial x}, \eta(t), a(t)\right)}{\partial \eta} \sigma \right|.$$

Заключение

В статье для нелинейных динамических систем, представимых моделями, построенными с использованием метода "расширенной линеаризации", и квадратических функционалов качества произведен синтез управляющих воздействий, реализация которых требует получения решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Линейная структура моделей и квадратический функционал качества позволяют перейти от уравнения в частных производных к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Основная проблема реализации оптимального управления связана с проблемой поиска решения такого уравнения в темпе функционирования объекта. В статье предложен алгоритмический метод параметрической оптимизации регулятора, основанный на использовании необходимых условий оптимальности, выраженных в виде поведения гамильтониана на оптимальной траектории системы управления. Построенные алгоритмы могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов. Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере медикаментозного лечения пациентов при наличии ВИЧ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: УРСС, 2004.
2. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959.
3. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London: Springer, 1995.
4. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. New York: Prentice Hall, 2002.
5. *Mehra R., Chinde V., Kazi K., and Singh N.M.* Feedback Linearization of Single-Input and Multi-Input Control System // Proc. 19th World Congress IFAC. Cape Town, 2014. P. 5479–5484.
6. *Афанасьев В.Н., Орлов П.В.* Субоптимальное управление нелинейным объектом, линеаризуемым обратной связью // Изв. РАН ТиСУ. 2011. № 3. С. 13–22.
7. *Pearson J.D.* Approximation Methods in Optimal Control // J. Electron. Control. 1962. № 12. P. 453–469.
8. *Cimen T.D.* State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey // Proc. 17th World Conf. IFAC. Seoul, 2008. P. 3771–3775.
9. *Mracek C.P., Cloutier J.R.* Missile longitudinal autopilot design using the state-dependent Riccati equation method // Proc. Int. Conf. on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace. Daytona Beach, 1996. P. 387–396.
10. *Афанасьев В.Н.* Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: URSS, 2015.
11. *Афанасьев В.Н.* Динамические системы с неполной информацией: Алгоритмическое конструирование. М.: Наука. Физматлит, 2008.
12. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Изд-во Мир, 1974.
13. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Кн. 1. М.: МЦНМО, 2011.

14. *Галеев Э.М., Зеликин М.Ю., Конягин С.В.* Оптимальное управление. М.: МЦНМО, 2008.
15. *Гамкрелидзе Р.В.* Скользящие режимы в теории оптимального управления // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 180–193.
16. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
17. *Perelson A.S, Kirschner D.E.* Dynamics of Hiv Infection of CD4+T Cells // Math. Biosci. 1993. V. 114. P. 81–125.
18. *Wodarz D., Nowak M.A.* Specific Therapy Regimes Could Lead to Long-Term Immunological Control of HIV // Proc. National. Acad. Sci. 1999. V. 96. P. 14464–14469.
19. *Zurakowski R., Teel A.* A Model Predictive Control Based Scheduling Method for HIV Therapy // J. Theor. Biol. 2006. V. 238. P. 368–382.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 08.04.2020

После доработки 06.06.2020

Принята к публикации 10.09.2020