© 2021 г. А.Н. КУЛИКОВ, д-р физ.-мат. наук (anat_kulikov@mail.ru),
Д.А. КУЛИКОВ, канд. физ.-мат. наук (kulikov_d_a@mail.ru)
(Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СЛАБОДИССИПАТИВНОГО ВАРИАНТА НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ[1]

Рассматривается периодическая краевая задача для нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау в слабодиссипативном его варианте. Изучен вопрос о существовании, устойчивости и локальных бифуркациях одномодовых периодических решений. Показано, что в окрестности одномодовых периодических решений может существовать трехмерный локальный аттрактор, заполненный пространственно неоднородными периодическими по времени решениями. Для них получены асимптотические формулы. Результаты получены на базе использования и развития методов теории бесконечномерных динамических систем. В особом варианте рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения с частными производными изучен вопрос о существовании глобального аттрактора. Для этого варианта нелинейной краевой задачи найдены ее решения в виде рядов.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, локальные, глобальные аттракторы, устойчивость, бифуркации.

DOI: 10.31857/S0005231021020069

1. Введение

Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау — одно из самых изучаемых уравнений математической физики. Оно используется в различных областях физики, а также химической кинетике. В обзоре [1] приведен широкий спектр приложений, где встречается, используется это уравнение. Конечно, этот список далеко не полон, но достаточно убедительно демонстрирует актуальность изучения данного уравнения. Вывод этого уравнения на физическом уровне строгости был дан в [2].

Обычно это уравнение приводят в следующем виде:

$$v_\tau = (\alpha + i\beta)v - (b_1 + ic_1)v|v|^2 + (a_1 + id_1)\Delta v,$$

где $v = v(\tau, x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha, \beta, a_1, b_1, c_1, d_1 \in R$, $a_1 \geqslant 0$, $a_1^2 + d_1^2 \neq 0$, $\alpha > 0$, $b > 0$, $\Delta u = u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}$, т.е. Δ — оператор Лапласа. Обычно, $n = 1, 2, 3$. Наиболее изучаемый вариант данного уравнения соответствует выбору $n = 1$. Далее $n = 1$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований в рамках научного проекта (грант № 18-01-00672).

После замены $v = \eta \exp(i\beta\tau)u$ и последующей нормировки времени $\tau = \gamma t$, если $\gamma\alpha = 1$, $b\gamma\eta^2 = 1$, получаем новый нормированный вариант уравнения

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (a + id)u_{xx},$$

где $a = \gamma a_1$, $d = \gamma d_1$, $u = u(t, x)$. Подчеркнем, что в большинстве случаев изучается вариант этого уравнения, когда $a > 0$ [1–6]. Отдельного внимания заслуживает вариант, когда $a = 0$. Такой вариант уравнения Гинзбурга–Ландау встречается, например, в нелинейной оптике, используется в гидродинамике (см., например, [7–10]). Другой частный случай, когда $c = d = 0$, $a > 0$, встречается в теории конденсированных сред (см., например, [1, 5]). Отметим, что, конечно, изучается и вариант когда $n \geqslant 2$, т.е. число пространственных переменных больше одной. Так, например, в [3, 9] был изучен вопрос о влиянии геометрической размерности на характер динамики решений этого уравнения. Отметим также, что при $a > 0$ и соответствующем выборе краевых условий получаем краевую задачу, которую можно включить в класс абстрактных нелинейных уравнений, изученных в [11]. При $a = 0$ краевые задачи для этого уравнения могут быть, скорее, проинтерпретированы как гиперболические и включены в классы уравнений, изученных в [12, 13], посвященных доказательству локальной разрешимости соответствующих начально-краевых задач. Отметим еще, что уравнение Гинзбурга–Ландау при $a = 0$ часто называют и иначе: обобщенное нелинейное уравнение Шредингера.

В связи с изучением такого явления, как ферромагнетизм, появился новый вариант уравнения Гинзбурга–Ландау [14–16], который принято называть нелокальным уравнением Гинзбурга–Ландау

$$v_\tau = (\alpha + i\beta)v + (\gamma + i\delta)v_{yy} - (\alpha_1 + i\beta_1)v|v|^2 - (\alpha_2 + i\beta_2)v \left(\frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} |v|^2 dy \right).$$

Его, как правило, рассматривают с периодическими краевыми условиями

$$v(\tau, y + 2l) = v(\tau, y).$$

Здесь $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $l > 0$.

Замены, аналогичные предыдущим, а также замена $y = lx/\pi$ позволяют предыдущую краевую задачу для функции $v(\tau, y)$ свести к нормированной краевой задаче

$$u_t = u + (a - id)u_{xx} - (b + ic)u|u|^2 - (b_1 + ic_1)u \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx \right), \tag{1.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{1.2}$$

где $b_1 + b = 1$. Далее ограничимся слабодиссипативным вариантом уравнения (1.1), когда $a = 0$ $(d \neq 0)$.

Для анализа динамики решений эволюционной краевой задачи (1.1), (1.2) будут использованы такие методы анализа систем с распределенными параметрами, как метод интегральных многообразий и нормальных форм. Во многих случаях использование этих методов позволяет свести соответствующую бесконечномерную задачу к анализу конечномерной динамической системе, для которой используют, обычно, название — нормальная форма. Естественно, что существуют и иные подходы к анализу систем с распределенными параметрами. Например, в [17, 18] для анализа систем с распределенными параметрами также используется сведение к конечномерным динамическим системам. Такой вариант может оказаться эффективным при наличии симметрии в анализируемых динамических системах.

2. Постановка задачи

В работе будет изучаться краевая задача

$$u_t = u - (b_1 + ic_1)uV(u) - (b + ic)u|u|^2 - idu_{xx}, \tag{2.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2.2}$$

где $b_1, b, c_1, c \in \mathbb{R}$, $b_1, b \geqslant 0$, $b_1 + b = 1$, $d > 0$, $V(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(t,x)|^2 dx$. На протяжении большей части работы будем рассматривать вариант интегро-дифференциального уравнения (2.1) в случае, когда $b > 0$. Случай $b = 0$ является особым и будет рассмотрен отдельно в предпоследнем разделе данной работы.

Если дополнить краевую задачу (2.1), (2.2) начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \tag{2.3}$$

где комплекснозначная функция $f(x)$ имеет период 2π и справедливо включение $f(x) \in W_2^2[-\pi, \pi]$ при $x \in [-\pi, \pi]$, а через $W_2^2[-\pi, \pi]$ обозначено соответствующее пространство Соболева [19], то из [12, 13] вытекает, что для начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) справедливы утверждения:

1) она локально корректно разрешима;

2) ее решения порождают локальный гладкий поток.

Это дает основание использовать при анализе краевой задачи (2.1), (2.2) понятия и методы теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. В данном случае в качестве фазового пространства (пространства начальных условий) естественно выбрать пространство $H_2 : f(x) \in H_2$, если $f(x)$ имеет период 2π и при $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо включение $f(x) \in W_2^2[-\pi, \pi]$.

Лемма 1. *Решения краевой задачи* (2.1), (2.2) *диссипативны в норме пространства $L_2(-\pi, \pi)$: с течением времени они попадают в шар $Q(R)$ пространства $L_2(-\pi, \pi)$, где $R = 2(1 + \delta)\pi, \delta$ — любое положительное число.*

Справедливость этого утверждения проверяется следующим образом. Домножим, уравнение (2.1) на $\overline{u}(t, x)$, а сопряженное ему уравнение — на $u(t, x)$. После их сложения и интегрирования по x от $-\pi$ до π получим равенство

$$\rho_t = 2\left[\rho - \frac{1}{2\pi}b_1\rho^2 - b\rho_1\right],$$

где $\rho = \int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dx$, $\rho_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |u|^4 dx$, т.е. $\rho(t), \rho_1(t)$ — функции переменной t. В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\rho_t \leqslant 2\rho \left[1 - \frac{1}{2\pi}(b+b_1)\rho\right] \leqslant 2\rho\left(1 - \frac{1}{2\pi}\rho\right) < 0,$$

если $\rho = \rho(t) > 2\pi$, т.е. с течением времени для $\rho(t)$ будет выполнено неравенство $\rho(t) \leqslant 2(1+\delta)\pi$, где δ — сколь угодно малая положительная постоянная.

Далее в работе будут рассмотрены вопросы, касающиеся существования и устойчивости инвариантных многообразий нелинейной краевой задачи (2.1), (2.2), а также формирующих их решений.

3. Одномодовые периодические решения

Элементарно проверяется, что краевая задача (2.1), (2.2) имеет счетное семейство t периодических решений

$$u_n(t,x) = \exp(i\sigma_n t + inx), \tag{3.1}$$

где $\sigma_n = -(c_1 + c) + dn^2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Особую роль для приложений играет пространственно однородное решение $u(t,x) = u_0(t) = \exp(i\sigma_0 t)$, $\sigma_0 = -(c_1 + c)$. При проверке того, что любая функция из семейства (3.1) удовлетворяет краевой задаче (2.1), (2.2), используется равенство $b_1 + b = 1$. Решение $u_0(t)$ принято называть циклом Андронова–Хопфа или пространственно однородным периодическим решением.

Для решений краевой задачи (2.1), (2.2) справедлив "принцип самоподобия" (см., например, [9]). Суть его заключается в том, что замена

$$u(t,x) = w(t,y)\exp(i\omega_n t + inx), \tag{3.2}$$

где $\omega_n = dn^2$, $y = x + 2dnt$, переводит уравнение (2.1) в то же самое уравнение для функции $w(t,y)$, где функция $w(t,y)$ по переменной y имеет период 2π. Такая задача для $w(t,y)$, естественно, имеет решение $w_0(t) = \exp(i\sigma_0 t)$, которому соответствует уже семейство t периодических решений $u_n(t,x)$ (см. (3.1),(3.2)) основной краевой задачи (2.1), (2.2). Поэтому для изучения вопроса об устойчивости решений $u_n(t,x)$ достаточно рассмотреть соответствующий вопрос для одного представителя этого семейства: $u_0(t,x) = u_0(t) = \exp(i\sigma_0 t)$. Далее вместо σ_0 будем писать просто σ. Иначе, рассмотрим вопрос об устойчивости пространственно однородного решения $u_0(t)$.

В краевой задаче (2.1), (2.2) положим

$$u(t,x) = u_0(t)(1 + v(t,x)) = \exp(i\sigma t)(1 + v(t,x)). \tag{3.3}$$

Замена (3.3) позволяет получить новую краевую задачу для функции $v(t,x)$

$$v_t = -(b_1 + ic_1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(v + \overline{v})dx - (b + ic)(v + \overline{v}) - idv_{xx} + F_2(v) + F_3(v), \tag{3.4}$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t,x), \tag{3.5}$$

где

$$F_2(v) = -(b_1 + ic_1)\frac{1}{2\pi}\left[v\int_{-\pi}^{\pi}(v+\overline{v})dx + \int_{-\pi}^{\pi}v\overline{v}dx\right] - (b+ic)(2v\overline{v}+v^2),$$

$$F_3(v) = -(b_1 + ic_1)\frac{1}{2\pi}v\int_{-\pi}^{\pi}|v|^2dx - (b+ic)v^2\overline{v}.$$

Теперь у краевой задачи (3.4), (3.5) анализу подлежит вопрос об устойчивости нулевого решения. Для этого можно рассмотреть линеаризованный ее вариант

$$v_t = Av, \quad v(t, x+2\pi) = v(t,x), \tag{3.6}$$

где

$$Av = -(b_1 + ic_1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(v+\overline{v})dx - (b+ic)(v+\overline{v}) - idv_{xx}.$$

В свою очередь, устойчивость решений линейной краевой задачи (3.6) можно свести к аналогичному вопросу для следующей краевой задачи:

$$w_t = Bw, \quad w(t, x+2\pi) = w(t,x), \tag{3.7}$$

где

$$w = w(t,x) = colon(w_1, w_2), \quad w_1 = Re\, v(t,x), \quad w_2 = Im\, v(t,x),$$

$$Bw = \begin{pmatrix} -\dfrac{b_1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} w_1 dx - 2bw_1 + dw_{2xx} \\ -\dfrac{c_1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} w_1 dx - 2cw_1 - dw_{1xx} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вопрос об устойчивости решений линейной краевой задачи (3.7) может быть сведен к анализу расположений точек спектра линейного дифференциального оператора Bf, где $f = f(x) = colon(f_1(x), f_2(x))$, определенного на достаточно гладких 2π периодических вектор-функциях $f(x)$. Собственные элементы такого линейного оператора следует искать в виде

$$h_k(x) = h_k \exp(ikx), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad h_k = colon(q_1, q_2),$$

где $q_1, q_2 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, так как семейство функций $\{\exp(ikx)\}$ формирует полную ортогональную систему функций в $L_2(-\pi,\pi)$. В свою очередь, соответствующие собственные значения λ_k определяются как собственные значения счетного семейства матрицы

$$B_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2(c_1+c) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} -2b & -dk^2 \\ -2c+dk^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \pm1, \pm2, \ldots$$

Элементарные вычисления показывают, что $\lambda_{0,1} = 0$, $\lambda_{0,2} = -2$, а остальные λ_k $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ находятся как корни характеристических уравнений

$$\lambda_k^2 + 2b\lambda_k + q_k = 0, \quad q_k = dk^2(dk^2 - 2c).$$

Лемма 2. *Пусть $d - 2c > 0$, тогда все корни семейства характеристических уравнений для λ_k лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $Re\,\lambda_k \leqslant -b + \sqrt{b^2 - d(d-2c)} < 0$, т.е. величиной, не зависящей от $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ При $d - 2c < 0$ есть собственные значения, лежащие в правой полуплоскости комплексной плоскости. Наконец, при $d = 2c$ получаем $\lambda_{1,1} = \lambda_{-1,1} = 0$ $(\lambda_{1,2} = \lambda_{-1,2} = -b)$.*

Из леммы 2 и полноты системы собственных функций вытекает, что справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть $d > 2c$, тогда решение $u_0(t)$ устойчиво (цикл, порождаемый этим решением, орбитально асимптотически устойчив). При $d < 2c$ периодическое решение $u_0(t)$ неустойчиво.*

Отметим, что вместе с решением $u_0(t)$ краевая задача (2.1), (2.2) имеет семейство решений $u_0(t + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Этим объясняется наличие в спектре устойчивости при всех значениях параметров у оператора $A\,(B)$ собственного числа $\lambda_{0,1} = 0$.

При $d = 2c$ возникает критический случай в задаче об устойчивости пространственно однородного цикла. Нетрудно проверить, что линейный дифференциальный оператор

$$A_0 f = -2icf'' - (b_1 + ic_1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f + \overline{f})dx - (b + ic)(f + \overline{f})$$

имеет трехкратное нулевое собственное число. Ему отвечают собственные функции

$$h_0(x) = i, \quad h_1(x) = (-c + ib)\cos x, \quad h_2(x) = (-c + ib)\sin x.$$

В разделе 4 рассмотрим вопрос о локальных бифуркациях от пространственно однородного цикла, порожденного периодическим решением $u_0(t) = \exp(i\sigma t)$ при

$$d = 2c - \nu\varepsilon, \quad \nu = \pm 1, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad 0 < \varepsilon_0 << 1,$$

где ν будет выбрано далее. При этом здесь представляют интерес те решения краевой задачи (2.1), (2.2), которые при $\varepsilon \to 0$ стремятся к циклу $u_0(t)$. Вспомним, что наряду с периодическим решением $u_0(t)$ краевая задача (2.1), (2.2) имеет решение

$$u_0(t + \alpha) = \exp(i\sigma t)\exp(i\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, можно и целесообразно вместо замены (3.3) выполнить замену

$$u(t, x) = \exp(i\sigma t)\exp(i\psi)[1 + v(t, x)], \tag{3.8}$$

где $\psi = \psi(t, \varepsilon)$ и подходящую функцию $\psi(t, \varepsilon)$ со значениями в $\mathbb{R}$ выберем в ходе бифуркационного анализа. В результате замены (3.8) для $v(t, x)$ получим нелинейную краевую задачу, подобную краевой задаче (3.4), (3.5)

$$v_t = A(\varepsilon)v + F_2(v) + F_3(v) - i\psi_t(1 + v), \tag{3.9}$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \tag{3.10}$$

где

$$A(\varepsilon)v = A_0 v + \nu\varepsilon A_1 v,$$

$$A_0 v = -2icv_{xx} - (b_1 + ic_1)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(v + \overline{v})dx - (b + ic)(v + \overline{v}),$$

$$A_1 v = iv_{xx}.$$

Нелинейные слагаемые $F_2(v), F_3(v)$ были указаны ранее.

4. Вспомогательная бифуркационная задача

Пусть $v(0, x) = f(x) \in H_2$. Если при этом $f(x)$ — четная функция, то такое подпространство H_2 обозначим через $H_{2,ev}$. В силу специфики структуры правой части уравнения (3.9) подпространство $H_{2,ev}$ инвариантно для решений краевой задачи (3.9), (3.10). Поэтому можно добавить еще одно условие

$$v(t, -x) = v(t, x). \tag{4.1}$$

При этом любое решение краевой задачи (3.9), (3.10), (4.1) будет решением более общей задачи (3.9), (3.10). Следовательно, можно и полезно сначала изучить вспомогательную краевую задачу (3.9), (3.10), (4.1). В свою очередь, краевую задачу (3.9), (3.10), (4.1) можно и естественно заменить на краевую задачу следующего вида:

$$v_t = A_0 v + \varepsilon\nu A_1 v + F_2(v) + F_3(v) - i\psi_t(1 + v), \tag{4.2}$$

$$v_x(t, 0) = v_x(t, \pi) = 0, \tag{4.3}$$

где теперь

$$A_0 v = -2icv_x - (b_1 + ic_1)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(v + \overline{v})dx - (b + ic)(v + \overline{v}), \quad A_1 v = iv_{xx},$$

$$F_2(v) = -\frac{1}{\pi}(b_1 + ic_1)\left[v\int\limits_0^{\pi}(v + \overline{v})dx + \int\limits_0^{\pi} v\overline{v}dx\right] - (b + ic)\Big[2v\overline{v} + v^2\Big],$$

$$F_3(v) = -\frac{1}{\pi}(b_1 + ic_1)v\int\limits_0^{\pi} v\overline{v}dx - (b + ic)v^2\overline{v}.$$

Приступим к анализу краевой задачи (4.2), (4.3). При ее анализе следует учесть, что линейный оператор A_0 имеет двукратное нулевое собственное число (нулевому собственному числу отвечают две собственные функции i, $(-c+ib)\cos x$).

При $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уже реализуется случай, близкий к критическому, двукратного нулевого собственного значения спектра устойчивости. Следовательно, в окрестности нулевого состояния равновесия вспомогательной краевой задачи существует двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon)$ [20–22], которое часто называют центральным. Анализ локальной динамики решений краевой задачи (4.2), (4.3), как известно [21–23], может быть, сведен к анализу системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_t = G_0(\psi, z, \varepsilon), \quad z_t = G_1(\psi, z, \varepsilon), \tag{4.4}$$

где $G_0(\psi, z, \varepsilon)$, $G_1(\psi, z, \varepsilon)$ — достаточно гладкие функции, которые в данном случае обладают рядом свойств:

1) $G_0(\psi, 0, \varepsilon) = G_1(\psi, 0, \varepsilon) = 0$;

2) $G_0(\psi, z, 0) = G_1(\psi, z, 0) = 0$;

3) обе эти функции не зависят от ψ, так как в равенстве (3.8) можно ψ заменить на $\psi + \alpha$, где α — любая действительная постоянная, и получить то же самое вспомогательное уравнение для $\psi + \alpha$.

Эти замечания позволяют считать, что еще до детального определения правых частей системы (4.4) можно считать, что $G_0 = \varepsilon g_0(z, \varepsilon)$, $G_1 = \varepsilon g_1(z, \varepsilon)$, где по-прежнему $g_0(z, \varepsilon), g_1(z, \varepsilon)$ – достаточно гладкие функции, для которых выполнены тождества $g_0(0, \varepsilon) = 0$, $g_1(0, \varepsilon) = 0$. Система дифференциальных уравнений (4.4) играет во многом определяющую роль. В качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений ее обычно называют нормальной формой Пуанкаре (Пуанкаре–Дюлака) [22, 23]. Ее конкретный вид будет определен далее в процессе реализации алгоритма, который является развитием известного алгоритма Крылова–Боголюбова на случай бесконечномерных динамических систем (см., например, [9]).

Отметим также, что в ситуации общего положения достаточно определить укороченный вариант правых частей нормальной формы (4.4). Такой вариант нормальной формы получил название укороченной нормальной формы ("trancated" normal form) [22]. Вместо системы (4.4) далее будет рассматриваться следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\psi_t = \varepsilon q_0(z), \quad z_t = \varepsilon q_1(z), \quad q_0(z) = g_0(z, 0), \quad q_1(z) = g_1(z, 0). \tag{4.5}$$

Перейдем к изложению алгоритма построения нормальной формы. Решения краевой задачи (4.2), (4.3), принадлежащие $V_2(\varepsilon)$, можно и целесообразно искать в виде

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(x, z) + \varepsilon w_2(x, z) + \varepsilon^{3/2} w_3(x, z) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{4.6}$$

где $z = z(t)$ – одна из компонент нормальной формы. Положим также

$$w_1(x, z) = (-c + ib) z \cos x,$$

т.е. $A_0 w_1 = 0$. Если теперь подставить сумму (4.6) в нелинейную краевую задачу (4.2), (4.3) с последующим приравниванием членов при ε и $\varepsilon^{3/2}$, то получим уже две линейные неоднородные краевые задачи для определения $w_2(x,z)$, $w_3(x,z)$

$$w_{2t} = A_0 w_2 + F_2(w_1) - iq_0(z), \tag{4.7}$$

$$w_{2x}(t,0) = w_{2x}(t,\pi) = 0, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} w_{3t} = A_0 w_3 - q_1(z)(-c+ib)\cos x + F_2(w_1,w_2) + F_3(w_1) - \\ - iq_0(z)w_1 + \nu A_1 w_1, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$w_{3x}(t,0) = w_{3x}(t,\pi) = 0. \tag{4.10}$$

Отметим, что выше

$$F_2(w_1) = -(b_1+ic_1)\frac{1}{\pi}\left[w_1\int\limits_0^\pi (w_1+\overline{w}_1)dx + \int\limits_0^\pi w_1\overline{w}_1 dx\right] - (b+ic)\Big[2w_1\overline{w}_1 + w_1^2\Big],$$

$$F_3(w_1) = -(b_1+ic_1)w_1\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi w_1\overline{w}_1 dx\right] - (b+ic)w_1^2\overline{w}_1,$$

$$\begin{aligned} F_2(w_1,w_2) = -(b_1+ic_1)\frac{1}{\pi}\left[w_1\int\limits_0^\pi (w_2+\overline{w}_2)dx + w_2\int\limits_0^\pi (w_1+\overline{w}_1)dx + \right. \\ \left. + \int\limits_0^\pi (w_1\overline{w}_2 + \overline{w}_1 w_2)dx\right] - 2(b+ic)\Big[w_1\overline{w}_2 + \overline{w}_1 w_2 + w_1 w_2\Big]. \end{aligned}$$

При формировании краевых задач (4.7), (4.8) и (4.9), (4.10) производные по переменной t от функций w_1, w_2, w_3 вычислялись в силу нормальной формы (4.5).

Из условий разрешимости краевой задачи (4.7), (4.8) в классе функций, явным образом не зависящих от t, определяем, что

$$q_0(z) = \Big[c(b^2 + (2b-1)c^2) + 2bc^2 c_1\Big]z^2,$$

а соответствующее решение можно выбрать в следующем виде:

$$w_2(x,z) = \left[-bc^2 - \frac{b^2+c^2}{4}\right]z^2 + \left[\frac{3c^2-b^2}{12} - i\frac{b(9c^2+b^2)}{24c}\right]z^2\cos 2x.$$

Условия разрешимости неоднородной краевой задачи (4.9), (4.10) позволяют найти

$$q_1(z) = \frac{1}{b}(\nu c - lz^2)z,$$

где

$$l = \frac{2(12b+3)c^4 - 9b^2c^2 + b^4}{6}.$$

Подчеркнем, что $l > 0$ при всех $c \in \mathbb{R}$, если $b \in (0{,}59; 1]$. Случай $l \leqslant 0$ реализуется редко и требует отдельного анализа. Далее $l > 0$.

Рассмотрим теперь второе уравнение нормальной формы (4.5), т.е. уравнение

$$z_t = \frac{\varepsilon}{b}(\nu c - lz^2)z. \tag{4.11}$$

Лемма 3. Обыкновенное дифференциальное уравнение (4.11) *имеет три состояния равновесия*

$$S_0 : z = 0; \quad S_\pm : z(t) = \eta_\pm = \pm\sqrt{\frac{\nu c}{l}},$$

если $\nu > 0$ (*в данном случае* $c > 0$). *При этом* S_0 *неустойчиво,* $S_\pm$ *асимптотически (экспоненциально) устойчивы.*

Доказательство леммы 3 стандартно.

Из результатов работ [24–27] вытекает, что для вспомогательной краевой задачи (4.2), (4.3) справедливо утверждение.

Теорема 2. Существует $\varepsilon_0 > 0$, *такое что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *каждому ненулевому состоянию равновесия* $S_\pm$ *обыкновенного дифференциального уравнения* (4.11) *соответствует пространственно неоднородное состояние равновесия*

$$\begin{gathered} S_\pm(\varepsilon) : v_\pm(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\eta_\pm(-c + ib)\cos x + \\ + \varepsilon\eta_\pm^2\left[-bc^2 - \frac{b^2+c^2}{4} + \left(\frac{3c^2 - b^2}{12} - i\frac{b(9c^2+b^2)}{24c}\right)\cos 2x\right] + o(\varepsilon). \end{gathered} \tag{4.12}$$

Эти оба состояния равновесия устойчивы в норме фазового пространства решений вспомогательной краевой задачи (4.2), (4.3).

Отметим, что в данном случае $c \neq 0$ ($c > 0$). При $c = 0$ все одномодовые периодические решения устойчивы и, следовательно, необходимые условия в задаче о локальных бифуркациях не выполнены.

5. Результаты для основной краевой задачи

Полученные результаты в предыдущем разделе автоматически переносятся на краевую задачу (3.9), (3.10), (4.1), т.е. когда дополнительно предполагается четность относительно x функции $v(t, x)$. Вместе с тем решения краевой задачи (3.9), (3.10) трансляционно инвариантны, т.е. замена $x \to x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ переводит одно решение краевой задачи (3.9), (3.10) в другое. В частности, решения $v_\pm(x, \varepsilon)$, указанные в рамках теоремы 2, будут решениями краевой задачи (3.9), (3.10). Итак, справедливо утверждение.

Теорема 3. Существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нелинейная краевая задача (3.9), (3.10) *имеет одномерное притягивающее многообразие $V_1(\alpha, \varepsilon)$, сформированное однопараметрическим семейством состояний равновесия*

$$v(x, \varepsilon, \alpha) = v_+(x + \alpha, \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

где для $v_+(x, \varepsilon)$ приведена асимптотическая формула (4.12).

Отметим, что в последней теореме использовано решение $v_+(x, \varepsilon)$ из теоремы 2. В (5.1) можно в правой части взять $v_-(x, \varepsilon)$, т.е. положить

$$v(x, \varepsilon, \beta) = v_-(x + \beta, \varepsilon),$$

но замена $\beta = \alpha + \pi$ приводит к описания того же однопараметрического семейства.

Основным следствием из теорем 2, 3 является следующая теорема – основной результат при анализе краевой задачи (2.1), (2.2) в случае, если $b > 0$ ($b \in (0, 1]$), $c > 0$.

Теорема 4. При всех ε, указанных в рамках теорем 2, 3 и $d = 2c - \nu\varepsilon$, краевая задача (2.1), (2.2) *при каждом целом n имеет двупараметрическое семейство устойчивых предельных циклов*

$$u(t, x, \varepsilon, n) = \exp(i\sigma_n t + inx + i\varepsilon\omega_n t + i\beta_n)\Big[1 + v_+(x + \alpha_n, \varepsilon)\Big], \tag{5.2}$$

где

$$\omega_n(\varepsilon) = \omega(\varepsilon) = \varepsilon\omega_0 + o(\varepsilon), \quad \omega_0 = \Big[c(b^2 + (2b-1)c^2) + 2bc^2 c_1\Big]\frac{c\nu}{l},$$

а функция $v_+(x, \varepsilon)$ была указана ранее, α_n, β_n — произвольные действительные постоянные.

Замечание 1. Теорема 4 сформулирована при положительных c ($d = 2c - \varepsilon$, $\nu = 1$). Если $c < 0$, то будет иметь место аналогичная теорема, но при этом $d = 2c + \varepsilon$, $\nu = -1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. В рамках доказательства ν следует заменить на $-\nu$.

Особый случай возникает, если $b = 0$, т.е. $b_1 = 1$ ($b_1 = 1 - b$). Понятно, что семейство решений (3.1) существует. Все решения семейства (3.1) в ситуации общего положения будут по t периодическими функциями. Если $dn^2 - (c_1 + c) = 0$ при некоторых $\pm k$, то эти два решения из указанного семейства будут уже состояниями равновесия. При анализе устойчивости решений (3.1) (если $b = 0$) получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + q_k = 0, \quad q_k = dk^2(dk^2 - 2c)$$

и при любом выборе c, если постоянная k^2 достаточно велика, спектр устойчивости содержит счетный набор корней вида $\pm i\omega$, т.е. реализуется критический случай в задаче об устойчивости этих решений с бесконечномерным вырождением или эти решения заведомо неустойчивы. Подчеркнем, что, если

$$d > 0, \quad d - 2c < 0 \quad \text{или} \quad d < 0, \quad d - 2c > 0,$$

то решения семейства (3.1) будут неустойчивыми.

При $b = c = 0$ возникает особый вариант при анализе краевой задачи (2.1), (2.2), который может быть изучен с использованием другого подхода.

6. Нелокальное уравнение Гинзбурга–Ландау в специальном случае

В этом разделе рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$u_t = u - (1 + ic_1)uV(u) - idu_{xx}, \tag{6.1}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{6.2}$$

которую дополним начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \tag{6.3}$$

Здесь $d, c_1 \in \mathbb{R}$, $V(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(t,x)|^2 dx$, $f(x)$ — комплекснозначная 2π периодическая функция, принадлежащая при $x \in [-\pi, \pi]$ пространству Соболева $W_2^2[-\pi, \pi]$. В иных терминах $f(x) \in H_2$.

Решение смешанной задачи (6.1)–(6.3) можно записать в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t) \exp(inx). \tag{6.4}$$

Из равенства Парсеваля заключаем, что

$$V(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2.$$

Следовательно, коэффициенты ряда (6.4) можно находить как решения задачи Коши счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_n = a_n u_n - (1 + ic_1)u_n V, \tag{6.5}$$

$$u_n(0) = f_n, \tag{6.6}$$

где $u_n(t)$ – комплекснозначная функция t, $a_n = 1 + idn^2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Как и ранее, $V(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n(t)|^2$, $f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-inx)dx$. Подчеркнем, что $\{f_n\} \subset l_{2,2}$, т.е. последовательность $\{f_n\}$ принадлежит гильбертову пространству бесконечных последовательностей, для которых сходится ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 |f_n|^2$. Наконец, при тех t, когда решение задачи Коши (6.5), (6.6) существует, компоненты $\{u_n(t)\}$ таковы, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 |u_n(t)|^2 < \infty$.

Как известно, $l_{2,2}$ следует интерпретировать как дискретный аналог пространства Соболева H_2. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_*, \mathbb{Z}_0$ — подмножества $\mathbb{Z} : \mathbb{Z}_* \cup \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$. Рассмотрим подпространство $l_{2,2,0}$, состоящее из тех $\{u_n\} \in l_{2,2}$, для которых $u_k = 0$, если $k \in \mathbb{Z}_0$. Очевидно, что линейное подпространство $l_{2,2,0}$ инвариантно для решений задачи (6.5), (6.6) в обычном смысле, т.е. если $f_k = 0$, то $u_k(t) = 0$ при всех рассматриваемых k.

Последнее замечание позволяет считать сначала, что $f_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, т.е. рассматривается "общий" случай. В частности, $u_n(t) \neq 0$ ни при одном n, если $t \in I$ — интервалу существования решений. Положим в таком случае

$$u_n(t) = \rho_n(t)\exp(i\varphi_n(t))$$

и вместо задачи (6.5), (6.6) получим две следующие вспомогательные задачи Коши:

$$\dot\rho_n = \rho_n - \rho_n V(\rho), \quad \rho_n(0) = r_n = |f_n|, \tag{6.7}$$

$$\dot\varphi_n = dn^2 - c_1 V(\rho), \quad \varphi_n(0) = \psi_n, \tag{6.8}$$

где $V(\rho) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k^2$, $\psi_n = \arg f_n$. Подчеркнем, что задачу Коши (6.7) можно изучить отдельно, а затем найти решения задачи Коши (6.8).

Если уравнение с номером m ($m \in \mathbb{Z}$) умножить на ρ_0, а уравнение с номером 0 умножить на ρ_m, то после почленного вычитания получаем равенство

$$\dot\rho_m\rho_0 - \dot\rho_0\rho_m = 0.$$

Итак, $\rho_0^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_m}{\rho_0}\right) = 0$. Следовательно, $\rho_m(t) = r_m\rho_0(t)/r_0$. В результате получим уравнение для определения $\rho_0(t)$

$$\dot\rho_0 = \rho_0 - \rho_0^3\beta, \tag{6.9}$$

где $\beta = \frac{1}{r_0^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m^2$. Подчеркнем, что ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m^2$ сходится в силу предположения о включении $\{f_n\}$ в $l_{2,2}$. Интегрируя уравнение Бернулли (6.9) с учетом начального условия $\rho_0(0) = r_0$, получаем, что

$$\rho_0(t) = r_0\frac{\exp(t)}{\sqrt{1 + Q(\exp(2t) - 1)}}, \quad Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k^2.$$

Поэтому

$$\rho_m(t) = r_m\frac{\exp(t)}{\sqrt{1 + Q(\exp(2t) - 1)}}, \quad \rho_m(0) = r_m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

Следовательно, решение смешанной начально-краевой задачи (6.1)–(6.3) имеет вид

$$u(t,x) = V_0(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma_m(t)) r_m \exp(imx), \tag{6.10}$$

где

$$\sigma_m(t) = dm^2t - \frac{c_1}{2}\ln(1 + Q(\exp(2t) - 1)) + \psi_m,$$
$$V_0(t) = \exp(t)\Big[1 + Q(\exp(2t) - 1)\Big]^{-1/2}.$$

Добавим, что $\lim_{t\to\infty} V_0(t) = (1/Q^{1/2})$, $\lim_{t\to\infty} \rho_m(t) = (r_m/Q^{1/2})$. Отметим, что функцию (6.10) можно записать в виде

$$u(t,x) = V_0(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \exp(i\varphi_k(t)) \exp(ikx), \tag{6.11}$$

где

$$\varphi_k(t) = dk^2 t - c_1 \ln(1 + Q(\exp(2t) - 1))/2.$$

При этом учтено, что $r_k \exp(i\psi_k) = f_k$.

З а м е ч а н и е 2. Формула (6.10) была выведена в предположении, что все $r_m = |f_m| \neq 0$. Если же оказалось, что $r_k = 0$ при $k \in \mathbb{Z}_0$ (некоторому подмножеству $\mathbb{Z}$), то полученную формулу следует модифицировать и суммирование в ней следует вести по тем m, которые принадлежат $\mathbb{Z}_*$, т.е. в правой части остаются только те номера n, для которых соответствующий $r_n \neq 0$.

Из предыдущих построений вытекает, что справедливо утверждение.

Т е о р е м а 5. *Пусть $f(x) \in H_2$, тогда начально-краевая задача* (6.1)–(6.3) *имеет решение при всех $t \geqslant 0$ (см. (6.11)). При этом при всех $t \geqslant 0$ функция $u(t,x)$ обладает следующими свойствами*:

1) *она непрерывна по совокупности переменных*;

2) *при любом $t_0 \geqslant 0$ функции одного переменного $u_t(t_0,x), u_{xx}(t_0,x) \in L_2(-\pi,\pi)$*;

3) *$u_x(t,x)$ непрерывны по совокупности переменных*;

4) *$\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = f(x)$ в смысле нормы пространства H_2.*

Проверка свойств опирается на изучение сходимости ряда в правой части (6.11), а также того обстоятельства, что в данном случае ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} m^4 r_m^2 < \infty$.

Т е о р е м а 6. *Начально краевая задача* (6.1)–(6.3) *имеет инвариантное многообразие V_∞, выделяемое условием $f(x) \in V_\infty$, если*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 1, \quad f(x) \in H_2.$$

Все решения начально краевой задачи (6.1)–(6.3) *с начальными условиями, не принадлежащими к V_∞, с течением времени приближаются к этому многообразию.*

Многообразие V_∞ имеет размерность, равную бесконечности ($dim V_\infty = \infty$), и является глобальным аттрактором.

Доказательство теоремы 6 основано на анализе формулы (6.10). Действительно, если $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 1$, то $V_0(t) = 1$ и правая часть равенства (6.10) упрощается,

$$u_\infty(t,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m \exp(i(dm^2 t - c_1 t + \psi_m)) \exp(imx)$$

и, конечно, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(t,x)|^2 dx = 1$ уже при всех t ($\psi_m = \varphi_m(0)$).

Наконец, при $t \to \infty$ функция в правой части (6.10) приближается к функции

$$u_*(t,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{r_m}{Q^{1/2}} \exp(i(dm^2 t - c_1 t + \delta_m)) \exp(imx),$$

где $\delta_m = -c_1(\ln Q)/2 + \arg(f_m)$, $Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2$, где уже $u_*(t,x)$ является решением, принадлежащим V_∞. Подчеркнем, что приближение следует понимать в смысле

$$\lim_{t\to\infty} ||u(t,x) - u_*(t,x)||_{H_2} = 0.$$

Следствием из последних утверждений является утверждение.

Следствие 1. *Решения краевой задачи* (6.1), (6.2), *принадлежащие* V_∞, *можно записать в виде*

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(i(dn^2 - c_1)t) \exp(inx), \tag{6.12}$$

где $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 1$. *Все эти решения устойчивы в смысле определения Ляпунова в метрике фазового пространства решений краевой задачи* (6.1), (6.2), *т.е.* H_k.

Каждое решение семейства (6.12) является бесконечной суммой слагаемых вида $f_n \exp(i\sigma_n t) \exp(inx)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma_n = dn^2 - c_1$, где любое такое слагаемое будет периодической функцией периода $2\pi/\sigma_n$ (или не зависит от t, если при некотором $n = k$ оказалось, что $\sigma_k = 0$). Но, с другой стороны, частоты σ_n (периоды $T_n = 2\pi/\sigma_n$) в ситуации общего положения несоизмеримы и, следовательно, решение $u(t,x)$, принадлежащее V_∞, будет квазипериодической функцией. Конечно, существует вариант, когда все решения (6.12) будут t-периодическими функциями. Например, если $c_1 = 0$.

7. Заключение

В работе рассмотрены два основных варианта постановки периодической краевой задачи для нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау в слабодиссипативном варианте, когда коэффициент при u_{xx} чисто мнимый.

Если $b, c \neq 0$, то краевая задача (2.1), (2.2) имеет счетный набор периодических решений вида (3.1). При этом дан ответ об их устойчивости и изучен вопрос об их локальных бифуркациях. Подчеркнем, что в данной ситуации он мало отличается от ответа на аналогичный вопрос для краевой задачи (2.1), (2.2) при $b_1 = c_1 = 0$, т.е. для относительно традиционного варианта уравнения Гинзбурга–Ландау, а именно уравнения вида

$$u_t = u - (b + ic)u|u|^2 - idu_{xx},$$

где $b > 0$, $d \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Иная ситуация при анализе уравнения (2.1) возникает, если $b_1 > 0$ ($b_1 = 1$), но $b = c = 0$. Тогда, как уже отмечалось, краевая задача (2.1), (2.2) имеет глобальный аттрактор V_∞ ($dimV_\infty = \infty$). Решения $u(t,x) \in V_\infty$, конечно, при всех $t \geqslant 0$ принадлежат H_2, но нормы их в H_2 как функций, зависящих от x при всех рассматриваемых t, могут быть велики, хотя их нормы в $L_2(-\pi,\pi)$ фиксированы и равны $\sqrt{2\pi}$. Действительно, пусть в начальной краевой задаче (6.1)–(6.3) $f(x) \in H_2$ и $f(x) \in V_\infty$, т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi$. В качестве примера возьмем $f(x) = \exp(imx)$. Тогда ей соответствует решение $u(t,x) = \exp(i\sigma_m t)\exp(imx)$, где $\sigma_m = dm^2 - c_1$. При любом t это решение как функция x имеет норму $|u(t,x)|_{L_2} = \sqrt{2\pi}$, т.е. принадлежит V_∞. Однако, $|u_{xx}(t,x)|^2_{L_2} = 2\pi m^4$, т.е. стремится к бесконечности. Это же замечание справедливо и для кинетической энергии, которая пропорциональна $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |u_t|^2 dx = \pi\sigma_m^2 = \pi(dm^2 - c_1)^2 \to \infty$, если $m \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aranson I.S., Kramer L.* The World of the Complex Ginzburg-Landau Equation // Rev. Modern. Phys. 2002. V. 74. P. 99–143.
2. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* On the Formation of Dissipative Structures in Reaction-Diffusion Systems // Prog. Ther. Phys. 1975. V. 54. No. 3. P. 687–699.
3. *Bartucelli M., Constantin P., Doerling C.R., Gibbon J.D., Gisselfalt M.* On the Possibility of Soft and Hard Turbulence in the Complex Ginzburg-Landau Equation // Phys. D. 1990. V. 44. No. 3. P. 421–444.
4. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
5. *Kulikov A.N., Rudy A.S.* States of Equilibrium of Considered Matter with Ginzburg-Landau ψ^4-Model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 15. P. 75–85.
6. *Kulikov A.* Bifurcation d'Andronov-Hopf et Systems d'Equation aux derivees partielles singulieres de type parabolique // Caher Mathematiques. 1988. Fasc. 1. P. 57–60.
7. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. John Wiley and Sons Inc., 1974
8. *Scheuer J., Malomed B.A.* Stable and Chaotic Solutions of the Complex Ginsburg-Landau Equation with Periodic Boundary Conditions // Physica D. 2002. V. 161. No. 1. P. 102–115.
9. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференц. уравн. Т. 46. № 9. С. 1290–1299.
10. *Drazin P.G.* Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge. Cambridge Univ. Press, 2002.
11. *Sobolevskii P.E.* Equations of a Parabolic Type in a Banach Space // Tr. Mosk. Mat. Obs. 1961. V. 10. P. 297–350.
12. *Segal I.* Nonlinear Semigroups // Ann. Math. 1963. V. 78. No. 2. P. 339–364.
13. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Тр. ММО. 1970. Т. 23. С. 37–60.

    Yakubov S.Ya. Solvability of the Cauchy Problem for Abstract Second Order Hyperbolic Equations, and Their Applications // Tr. Mosk. Mat. Obs. 1970. V. 23. P. 37–60.

14. *Duan J., Hung V.L., Titi E.S.* The Effect of Nonlocal Interactions on the Dynamics of the Ginzburg–Landau Equation // ZAMP. 1996. V. 47. No. 3. P. 432–455.

15. *Matkowsky B.J., Volpert V.A.* Coupled Nonlocal Complex Ginzburg–Landau Equations in Gasless Combustion // Physica D. 1992. V. 54. No. 3. P. 203–219.

16. *Elmer F.J.* Nonlinear and Nonlocal Dynamics of Spatially Extended Systems: Stationary States, Bifurcations and Stability // Physica D. 1988. V. 30. No. 3. P. 321–341.

17. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // ДАН. 2017. Т. 472. № 6. С. 627–630.

    Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Attractors in the Filtration Models // Dokl. Ross. Akad. Nauk. 2017. V. 472. No. 6. P. 627–630.

18. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact Geometry and Non-Linear Differential Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.

19. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1959.

20. *Куликов А.Н.* Интегральные многообразия гиперболических уравнений в случае близком к критическому пары чисто мнимых собственных значений // Вестн. Яросл. ун-та. 1975. В. 13. С. 94–117.

21. *Marsden J., McCracken M.* Hopf Bifurcation and Its Applications. New York: Springer, 1982.

22. *Guckenheimer J., Holmes P.J.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

23. *Chow S.-N., Li C., Wang D.* Normal forms and bifurcations of planar vector fields. Cambridge and New York: Cambridge University Press, 1994.

24. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифференц. уравн. 2003. Т. 39. № 5. С. 584–601.

25. *Куликов А.Н.* О бифуркациях инвариантных торов // Межвузовский мат. сборник “Исследования по устойчивости и теории колебаний”. 1983. С. 112–117.

26. *Колесов А.Ю., Куликов А.Н.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2003.

27. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Инвариантные торы волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 04.03.2020

После доработки 05.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020