

© 2021 г. А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.com),  
А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru)  
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

## ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ДИАГНОСТИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ<sup>1</sup>

Рассматривается задача диагностирования динамических систем, описываемых моделями в виде нелинейных дифференциальных уравнений с неизвестными коэффициентами (параметрами системы). Для решения задачи применяется непараметрический метод диагностирования, позволяющий исключить влияние неизвестных коэффициентов уравнений на результаты диагностирования. Приводится изложение сути непараметрического метода. Предлагается новый метод принятия решений о наличии и виде дефекта, учитывающий ошибки модели, неконтролируемые возмущающие воздействия, а также шумы измерений. Отличительной особенностью этого метода является комплексное сочетание метода пороговой логики принятия решения и сопоставление сигнала рассогласования (невязки) с формируемыми в процессе диагностирования сигнатурами дефектов.

*Ключевые слова:* нелинейные динамические системы, диагностирование, робастность, непараметрический метод.

DOI: 10.31857/S0005231021020070

### 1. Введение

Современные технические системы ответственного назначения характеризуются значительной сложностью, что не позволяет гарантировать безотказность их функционирования. В связи с этим возникает задача обеспечения отказоустойчивости подобных систем. Решение последней задачи предполагает, во-первых, диагностирование (обнаружение и локализацию дефектов) и, во-вторых, парирование выявленных дефектов. Настоящая статья концентрируется на проблеме обнаружения и локализации (поиска) дефектов.

Решение задачи диагностирования осуществляется в рамках концепции аналитической избыточности [1]. Суть этой концепции состоит в предположении о существовании аналитических зависимостей между входами и выходами диагностируемой системы, измеряемыми на конечном интервале времени. Эти зависимости справедливы при исправном функционировании системы. Дефекты, возникающие в системе, приводят к их нарушению. Как следствие, задача диагностирования сводится к проверке известных аналитических зависимостей посредством соответствующей обработки (в рамках скользящего временного окна определенной размерности) входов и выходов системы.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 16-19-00046-П.

Реализация концепции аналитической избыточности предполагает два этапа диагностирования. На первом этапе формируется невязка как сигнал рассогласования между поведением имеющейся эталонной модели, используемой для нахождения аналитических зависимостей, и реальным поведением системы. На втором этапе осуществляется анализ невязки с целью обнаружения дефектов в системе и определения вида дефекта.

Выделяют два принципиально различных подхода к синтезу генератора невязки. Первый подход, предполагающий формирование генератора невязки с замкнутой петлей обратной связи, приводит к использованию наблюдателей состояния, разрабатываемых с учетом специфических требований, предъявляемых задачами диагностирования [2–4]. Достоинством этого подхода является то, что, помимо собственно генерации невязки, он позволяет также решить задачу оценивания состояния системы. Последнее может быть важно для решения различных задач управления в условиях ограниченного наблюдения состояния системы.

При использовании второго подхода осуществляется синтез генератора невязки с разомкнутой петлей обратной связи. Использование второго подхода не позволяет одновременно получать оценки состояния системы, но упрощает задачу обеспечения устойчивости невязки. По своим динамическим характеристикам формируемая невязка аналогична невязке, получаемой с использованием наблюдателя состояния, имеющего конечный отклик на начальное рассогласование. Именно этот подход используется в настоящей статье.

Помимо дефектов, на невязку могут влиять дестабилизирующие факторы: ошибки эталонной модели, различные внешние неконтролируемые возмущающие воздействия, а также шумы измерений. Как следствие, возникает задача обеспечения робастности (нечувствительности принимаемого решения к дестабилизирующим факторам или крайне низкой чувствительности к этим факторам по сравнению с чувствительностью к дефектам). Задача обеспечения робастности рассматривалась в ряде работ [5–7]. Принято различать активные и пассивные методы обеспечения робастности. Первые работают на этапе формирования невязки и базируются на принципах адаптации, полной развязки и оптимизации, в то время как вторые используют специальные методы принятия решения. В частности, на этапе обнаружения дефектов широко используются методы пороговой логики принятия решения [5–7], в основе которых лежит сравнение некоторой нормы сигнала невязки с порогом; превышение нормой невязки порога рассматривается как факт возникновения дефекта в системе.

Традиционные активные методы обеспечения робастности имеют ряд ограничений, влияющих на возможность их практического применения [8]. Специальную группу активных методов составляют так называемые непараметрические методы, предложенные в [8] для систем с непрерывным временем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (линейными и нелинейными) и в [9] для систем с дискретным временем, описываемых нелинейными разностными уравнениями. Непараметрические методы позволяют частично снять ограничения традиционных активных методов; их отличительной особенностью является то, что они обеспечивают форми-

рование невязки, не чувствительной к значениям неизвестных постоянных коэффициентов уравнений (параметров системы). Однако присутствие дестабилизирующих факторов приводит к необходимости привлечения пассивных методов обеспечения робастности, обеспечивающих приемлемый компромисс между минимальной величиной гарантированно обнаруживаемых и локализуемых дефектов, с одной стороны, и отсутствием ложных тревог в силу действия дестабилизирующих факторов, с другой.

Для обеспечения подобного компромисса в известных работах предлагается использование адаптивного порога, величина которого устанавливается с учетом измеряемых сигналов системы [5]. Идея расчета адаптивного порога для нелинейных динамических систем была сформулирована в [10]. С использованием методов теории чувствительности эта идея была распространена в [7] на случай применения непараметрического метода диагностирования. В последней работе рассматривались структурированные возмущающие воздействия, входящие в описание эталонной модели в качестве дополнительных неизвестных входов. Для расчета порога в реальном времени за основу принималось выражение для матрицы чувствительности компонент вектора невязки к неизвестным входам, представляющим возмущающие воздействия. Поскольку точное вычисление этой матрицы не представлялось возможным в силу ее зависимости от компонент вектора состояния системы, не доступных для непосредственного измерения, было предложено в процессе вычисления порога использовать верхнюю граничную оценку нормы  $H_\infty$  матрицы чувствительности в пространстве Харди [11], определяемую для заданного диапазона изменения значений компонент вектора состояния системы и зависящую только от измеряемых входов и выходов системы. Недостатком этого решения является определенное завышение величины порога и, как следствие, занижение чувствительности к дефектам. Кроме того, модель структурированных возмущающих воздействий не всегда адекватно может отражать реальную практическую ситуацию.

Предлагаемое в настоящей статье решение позволяет устранить отмеченные недостатки. Его отличительной особенностью является то, что учет воздействия дестабилизирующих факторов и формирование адаптивного порога осуществляется посредством соответствующей обработки уже сформированного сигнала невязки. Это дает возможность упростить процедуру формирования адаптивного порога для принятия решения об отсутствии дефектов в системе, а также снизить величину этого порога, тем самым увеличив чувствительность к дефектам. При этом для принятия решения о наличии дефекта в системе и о виде этого дефекта дополнительно предполагается осуществлять сопоставление сигнала невязки с сигнатурами этих дефектов.

Для обеспечения единства изложения в рамках одной статьи класс рассматриваемых моделей динамических систем ограничивается моделями с непрерывным временем, описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. Распространение полученных результатов на класс моделей с дискретным временем, описываемых нелинейными разностными уравнениями, представляется возможным с использованием результатов [9].

## 2. Особенности генерации невязки непараметрическим методом

### 2.1. Используемые диагностические модели

Пусть диагностируемая система описывается моделью вида

$$(1) \quad dx(t)/dt = f(x(t), u(t), a), \quad y(t) = h(x(t), a),$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^p$ ,  $y(t) \in R^l$  – соответственно векторы состояния, входа (управления) и измеряемого выхода,  $a \in R^m$  – вектор коэффициентов (параметров системы), в качестве своих компонент включающий: 1) постоянные коэффициенты модели, соответствующие точно не известным параметрам системы, и 2) коэффициенты, имеющие смысл отклонений значений определенных параметров системы от первоначальных постоянных значений и принимающие ненулевое значение только в случае возникновения дефектов, подлежащих обнаружению и локализации; для удобства вектор последних коэффициентов будем рассматривать как подвектор вектора  $a$  и обозначать как  $a^f$ .

Дополнительно будем предполагать, что дефект в системе приводит к внезапному или постепенному отклонению от нуля значения соответствующей компоненты вектора  $a^f$  (номер компоненты совпадает с номером дефекта). Будем также придерживаться гипотезы о существовании только однократных дефектов в системе.

Нелинейные векторные функции  $f(*)$  и  $h(*)$  описывают соответственно динамику системы и характеристики датчиков. Здесь и ниже символ “звездочка” используется вместо пропущенных с целью упрощения записи аргументов функций.

Отметим, что в модель (1) не включено описание дестабилизирующих факторов. Учет действия этих факторов будет осуществляться по результатам обработки вектора невязки, формируемого непосредственно в процессе диагностирования.

Синтез генератора невязки требует осуществления ряда дополнительных преобразований исходной модели (1). Рассмотрим их.

Сначала осуществляется переход от модели (1) к модели без внутренних обратных связей

$$(2) \quad \begin{aligned} dx^{(1)}(t)/dt &= f^{(1)}(y(t), u(t), a), \\ dx^{(2)}(t)/dt &= f^{(2)}(x^{(1)}(t), y(t), u(t), a), \\ &\vdots \\ dx^{(N)}(t)/dt &= f^{(N)}(x^{(N-1)}(t), x^{(N-2)}(t), \dots, x^{(1)}(t), y(t), u(t), a), \end{aligned}$$
$$(3) \quad y_*(t) = h_* (x^{(N)}(t), x^{(N-1)}(t), \dots, x^{(1)}(t), a).$$

Динамика модели (2) разбита на  $N$  частей и  $x^{(i)}(t)$  – вектор состояния  $i$ -й части. Каждая часть зависит от векторов входа и выхода системы, а также векторов состояния предыдущих частей. Вектор выхода модели (3) формируется

как некоторая функция от векторов состояния частей. Преобразование модели (1) к модели (2), (3) осуществляется в предположении о существовании функциональной связи между вектором состояния модели (1) и векторами состояния частей модели (2):

$$(4) \quad x^{(i)}(t) = \varphi^{(i)}(x(t)), \quad 1 \leq i \leq N,$$

а также между векторами выхода моделей (1) и (3):

$$(5) \quad y_*(t) = \psi(y(t)),$$

где  $\varphi^{(i)}(*)$ ,  $1 \leq i \leq N$  и  $\psi(*)$  – некоторые дифференцируемые векторные функции. Отметим, что решение задачи преобразования исходной модели (1) к модели (2), (3) было получено в [8] и развито в [7] на основе дифференциально-геометрического подхода [12]. Для удобства читателя краткое изложение этого результата приведено в Приложении.

На следующем этапе синтеза генератора невязки осуществляется переход от модели (2), (3) к вход-выходному описанию системы. Для осуществления такого перехода может потребоваться преобразование компонент функций  $f^{(i)}(*)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , и  $h_*(*)$  к полиномиальному виду. Выполнение этого требования обеспечивается путем разложения функций более общего вида в ряд. Допускаемые при этом ошибки рассматриваются как ошибки модели. Особенности структуры модели (2), (3) и полиномиальное представление ее функций позволят гарантировать получение вход-выходного описания.

Рассмотрим особенности перехода. Для упрощения последующих записей введем оператор  $I$  в соответствии с условием

$$(6) \quad I \left( f^{(j)} \left( x^{(j-1)}(t), x^{(j-2)}(t), \dots, x^{(1)}(t), y(t), u(t), a \right) \right) = \\ = \int_{t_0}^t f^{(j)} \left( x^{(j-1)}(\tau), x^{(j-2)}(\tau), \dots, x^{(1)}(\tau), y(\tau), u(\tau), a \right) d\tau + x^{(j)}(t_0) = x^{(j)}(t).$$

В силу (6) можно записать

$$(7) \quad \begin{aligned} x^{(1)}(t) &= I \left( f^{(1)}(*) \right), \\ x^{(2)}(t) &= I \left( f^{(2)} \left( I \left( f^{(1)}(*) \right), y(t), u(t), a \right) \right), \\ &\vdots \\ x^{(N)}(t) &= I \left( f^{(N)} \left( I \left( f^{(N-1)}(*) \right), \dots, I \left( f^{(1)}(*) \right), y(t), u(t), a \right) \right). \end{aligned}$$

Подставляя (7) в (3), учитывая (5) и осуществляя эквивалентные преобразования, можно окончательно перейти к вход-выходному описанию системы в следующем виде:

$$(8) \quad \psi(y(t)) = (A + A^f)W(t_0, t),$$

где  $W(t_0, t)$  и  $A, A^f$  – соответственно вектор-столбец и матрицы такие, что: 1) элементами вектор-столбца  $W(t_0, t)$  являются функционалы, зависящие от значений векторов входа и выхода системы, измеряемых на интервале времени  $[t_0, t]$ ; 2) элементами матрицы  $A$  являются полиномы от компонент векторов постоянных коэффициентов  $a$ , не подверженных влиянию дефектов, и состояний частей модели (2)  $x^{(j)}(t_0)$ ,  $1 \leq j \leq N$ , в некоторый “начальный” момент времени  $t_0$ ; 3) элементами матрицы  $A^f$  являются полиномы от компонент вектора коэффициентов  $a^f$  и, возможно, других компонент вектора  $a$  и состояний частей модели. Для дальнейшего важно, что при отсутствии дефектов должно выполняться

$$(9) \quad A^f = 0.$$

С этой целью полиномиальные элементы матрицы  $A^f$  формируется таким образом, что каждый терм полиномов в качестве множителя включает хотя бы один коэффициент вектора  $a^f$ .

Модель (8) будем рассматривать как эталонную модель, используемую для нахождения аналитических зависимостей, проверка выполнения которых позволит осуществлять обнаружение и поиск дефектов.

## 2.2. Генерация невязки

Пусть  $t_0, t_1, \dots, t_L$ , где  $t_i = t_0 + i\Delta t$ ,  $1 \leq i \leq L$ , – некоторые дискретные отсчеты времени и  $\Delta t$  – период выборки измерений значений входов и выходов системы. Выбор  $\Delta t$  определяется динамикой (быстродействием) диагностируемой системы и вычислительной мощностью средств, используемых для реализации процесса диагностирования. Чем меньше  $\Delta t$ , тем меньше будут временные затраты на обнаружение и определение вида дефекта.

С учетом (9) аналитические зависимости, связывающие входы и выходы исправной системы на интервале времени  $T_L = [t_0, t_L]$  (в рамках размеров текущего скользящего временного окна), можно записать в виде

$$(10) \quad Y(t_L) = AV(t_L),$$

где матрицы

$$(11) \quad Y(t_L) = (\psi(y(t_1))\psi(y(t_2)) \dots \psi(y(t_L))),$$

$$(12) \quad V(t_L) = (W(t_0, t_1)W(t_0, t_2) \dots W(t_0, t_L)).$$

Пусть размер скользящего временного окна выбран таким образом, что

$$(13) \quad \text{rank } V(t_{L-1}) = \text{rank } V(t_L).$$

В этом случае матрица  $V(t_L)$  имеет ненулевое ядро [11]. Напомним, что для любого вектора  $v(t_L)$ , принадлежащего ядру матрицы  $V(t_L)$ , выполняется равенство  $V(t_L)v(t_L) = 0$ . Поэтому правило проверки аналитических зависимостей (вычисления невязки) может быть предложено в следующем виде

$$(14) \quad r(t_L) = Y(t_L)v(t_L), \quad v(t_L) \in \ker V(t_L),$$

где  $r(t_L)$  – значение вектора невязки, формируемое в момент времени  $t_L$  и  $v(t_L)$  – произвольный вектор, принадлежащий ядру матрицы  $V(t_L)$ . Действительно, в силу (10) из (14) получаем

$$(15) \quad r(t_L) = AV(t_L)v(t_L) = 0.$$

Для сведения к минимуму временных затрат на обнаружение дефекта размер скользящего временного окна должен быть минимально возможным, при котором выполняется (13). Это достигается за счет применения следующего алгоритма генерации невязки.

*Алгоритм 1* (генерация невязки).

1. Положить  $L = 1$ . Вычислить  $V(t_1) = W(t_0, t_1)$ .
2. Принять  $L = L + 1$ . Вычислить  $V(t_L)$  согласно (12).
3. Проверить выполнение равенства (13). При его невыполнении перейти к п. 2.
4. Вычислить  $Y(t_L)$  согласно (11).
5. Вычислить невязку согласно (14).
6. Конец.

Заметим, что вычислительную сложность алгоритма можно уменьшить за счет исключения п. 3. Действительно, при значении  $L = L_{\max}$ , где величина  $L_{\max}$  на единицу превышает число столбцов матрицы  $A$ , число столбцов матрицы  $V(t_L)$  превышает число ее строк и матрица  $V(t_L)$  будет заведомо иметь ненулевое ядро. Однако в этом случае минимальный размер временного окна не будет гарантирован.

Дополнительно отметим, что в [13] также рассматривались правила генерации невязки, отличающиеся от правила, представленного формулой (14).

### 3. Комплексный метод принятия решений

#### 3.1. Пороговая логика

В отсутствие дефектов и дестабилизирующих факторов правило (14) обеспечивает формирование вектора невязки, равного нулю. На практике из-за действия различных дестабилизирующих факторов, описание которых не включено в эталонную модель (8), формируемое значение вектора невязки будет ненулевым. При этом возникает необходимость ответа на вопрос: “Является ли действие дестабилизирующих факторов единственной причиной формирования ненулевого вектора невязки?” Для ответа на этот вопрос предлагается использовать пороговую логику принятия решения.

Пусть по результатам вычисления невязки и ее анализа при положениях скользящего временного окна, предшествующих текущему его положению, сделан вывод об исправности системы до момента времени  $t = t_{L-1}$  включительно, где момент времени  $t_{L-1}$  рассматривается в привязке к текущему временному положению интервала  $T_L$ . В этом случае значение порога, используемого для принятия решения в момент времени  $t_L$ , предлагается вычислять по формуле

$$(16) \quad \Pi(t_L) = \Pi_0 + \max_{\tau \in T_*} (r(\tau)^T r(\tau))^{1/2}, \quad T_* = \{t_0, t_{L-1}\},$$



где верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование. Постоянную составляющую порога  $\Pi_0$  предлагается определять по результатам моделирования или натуральных испытаний исправной системы в соответствии с требованием отсутствия ложных тревог.

Если генерируемое в момент времени  $t_L$  значение нормы вектора невязки не превышает порога, принимается решение об отсутствии дефектов в системе. Поскольку предложенный способ вычисления порога не учитывает возможное изменение интенсивности действия дестабилизирующих факторов в момент времени  $t_L$ , возможно нарушение неравенства

$$(17) \quad (r^T(t_L)r(t_L))^{1/2} \leq \Pi(t_L)$$

даже при отсутствии дефектов. Как следствие, принятие окончательного решения о дефекте в системе требует проведения дополнительной проверки (см. ниже). Если эта проверка не подтвердит факт присутствия дефекта, то при следующем положении временного окна будет сформированно большее значение порога.

Заметим, что предложенный способ вычисления порога позволяет учитывать возможное изменение интенсивности действия дестабилизирующих факторов в процессе диагностирования, что обеспечивает адаптацию порога к реальным условиям диагностирования.

### 3.2. Сопоставление с сигнатурами дефектов

Пусть дефект в системе впервые приводит к ненулевому значению параметра  $a_j^f$  в момент времени  $t_L$  такому, что результатом является нарушение неравенства (17). При этом матрица  $A$  не меняет своего значения, в то время как  $A^f \neq 0$ . Тогда по-прежнему будет выполняться (15) и, как следствие, “вклад” дефекта в значение вектора невязки в момент времени  $t_L$  будет определяться равенством

$$(18) \quad r(t_L) = A^f W(t_0, t_L) v_L(t_L),$$

где  $v_L(t_L)$  – значение последней компоненты вектора  $v(t_L)$ .

Предположив, что величина дефекта достаточно мала, воспользуемся линейным приближением

$$(19) \quad A^f = \left( \partial A^f / \partial a_j^f \right)_{|a^f=0} a_j^f.$$

Тогда в силу (18) и (19) при отсутствии дестабилизирующих факторов направление вектора невязки будет совпадать с направлением вектора

$$(20) \quad \sigma_j(t_L) = \left( \partial A^f / \partial a_j^f \right)_{|a^f=0} W(t_0, t_L).$$

Вектор  $\sigma_j(t_L)$  назовем сигнатурой  $j$ -го дефекта.

Влияние дестабилизирующих факторов на невязку чревато неполным совпадением направлений векторов  $r(t_L)$  и  $\sigma_j(t_L)$ . В этом случае вывод о присутствии в системе  $j$ -го дефекта может быть сделан на основе оценки углового расстояния между векторами  $r(t_L)$  и  $\sigma_j(t_L)$ . В качестве такой оценки



предлагается использовать абсолютное значение косинуса угла между этими векторами, рассчитываемое по формуле

$$(21) \quad \alpha_j(t_L) = \frac{|r^T(t_L) \sigma_j(t_L)|}{(r^T(t_L) r(t_L))^{1/2} (\sigma_j^T(t_L) \sigma_j(t_L))^{1/2}}.$$

Чем ближе значение  $\alpha_j(t_L)$  к единице, тем больше степень уверенности в том, что в системе имеет место  $j$ -й дефект.

Отметим, что в выражение для частных производных  $(\partial A^f / \partial a_j^f)_{af=0}$  могут входить значения неизвестных коэффициентов и компонент векторов  $x^{(j)}(t_0)$ ,  $1 \leq j \leq N$ . Для того чтобы иметь возможность вычислять сигнатуры дефектов непосредственно в процессе диагностирования, предлагается находить оценки значений этих коэффициентов и компонент векторов для последующей подстановки их в (20). Нахождение оценок предполагается осуществлять в два этапа: 1) вычисление элементов матрицы  $A$  путем прямого решения уравнения (10) и 2) выражение искомых значений коэффициентов и компонент векторов через значения элементов матрицы  $A$ .

Предположим, что размер скользящего временного окна  $L$  является минимальным, таким, что выполняется равенство (13). Тогда матрица  $V(t_0, t_{L-1})$ , во-первых, имеет ранг  $L$  и, во-вторых, зависит от значений векторов входа и выхода исправной системы, измеренных на отрезке времени  $T_* = [t_0, t_{L-1}]$ . Если матрица  $V(t_0, t_{L-1})$  не является квадратной, то, пользуясь представлением

$$AV(t_0, t_{L-1}) = [A_1 A_2] \begin{bmatrix} V_1(t_0, t_{L-1}) \\ V_2(t_0, t_{L-1}) \end{bmatrix},$$

где  $V_1(t_0, t_{L-1})$  – квадратная невырожденная матрица, из (10) получим

$$(22) \quad A_1 = [Y(t_0, t_{L-1}) - A_2 V_2(t_0, t_{L-1})] V_1^{-1}(t_0, t_{L-1}).$$

При этом для нахождения матрицы  $A_1$  потребуется задание матрицы  $A_2$  путем дополнительного определения значений некоторых коэффициентов и не доступных для непосредственного измерения компонент вектора состояния системы. Если дополнительно определяемые коэффициенты принимают значения в пределах известных интервалов (допусков), то для их определения целесообразно использовать средние значения допусков. Однако при этом будет возможным осуществлять лишь приближенное вычисление сигнатур дефектов. Если дополнительно определяемыми являются значения компонент состояния системы в момент времени  $t_0$ , то может потребоваться использование дополнительного наблюдателя состояния для их оценивания.

Очевидно, что если  $V(t_0, t_{L-1})$  – квадратная матрица, то никакого доопределения не требуется и для нахождения матрицы  $A$  достаточно положить в (22)  $A_1 = A$ ,  $V_1(t_0, t_{L-1}) = V(t_0, t_{L-1})$  и  $A_2 V_2(t_0, t_{L-1}) = 0$ .

### 3.3. Реализация комплексного метода принятия решения

В приведенных выше соотношениях для вычисления вектора невязки (14), порога (16), а также значений сигнатуры дефектов и углового расстояния

(соотношения (20) и (21) соответственно) используется “внутреннее” время интервала  $T_L$ , представляющего скользящее временное окно. Для того чтобы привязать это “внутреннее” время к текущему времени системы  $t$ , достаточно положить в соответствующих соотношениях

$$(23) \quad t_L = t, \quad t_i = t - (L - i)\Delta t, \quad 0 \leq i \leq L - 1.$$

Рассмотрим особенности совместного использования описанных выше методов для принятия решения о наличии дефекта в системе и о виде дефекта. Во-первых, для реализации метода пороговой логики должна существовать возможность вычисления в реальном времени: 1) вектора невязки и 2) порога. Вычисление вектора невязки в момент времени  $t$  является возможным, если доступны значения входов и выходов системы на отрезке времени  $T_L$ , предшествующем моменту  $t$ . Как было показано выше, это требование гарантированно выполняется при  $i \geq L_{\max}$ . Далее, для формирования порога необходимо иметь возможность использовать значения вектора невязки, сформированные на отрезке времени не менее чем  $T_*$ ; длина этого отрезка не превышает  $(L_{\max} - 1)\Delta t$ .

Во-вторых, должно быть установлено пороговое значение  $\alpha_{\min}$ , достаточно близкое к единице, такое что выполнение неравенства

$$(24) \quad \alpha_j(t) \geq \alpha_{\min}$$

позволяет сделать формальное заключение о присутствии в системе  $j$ -го дефекта.

Опишем алгоритм, реализующий комплексный подход к принятию решений.

*Алгоритм 2 (принятие решений).*

1. Запустить работу алгоритма с момента времени  $t = t_{L_{\max}}$ .
2. Положить  $i = L_{\max} - 1$ .
3. Воспользовавшись алгоритмом 1, вычислить вектор невязки  $r(t)$ .
4. Если  $i \geq 1$ , положить  $i = i - 1$ ,  $t = t + \Delta t$  и перейти к п. 3.
5. Положить  $t = t + \Delta t$ .
6. Воспользовавшись алгоритмом 1, вычислить вектор невязки  $r(t)$ .
7. Воспользовавшись соотношением (16), вычислить значение порога  $\Pi(t)$ .
8. Если неравенство (17) выполняется, перейти к п. 5.
9. Для каждого  $j$  вычислить  $\sigma_j(t)$  и  $\alpha_j(t)$  согласно (20) и (21) соответственно.
10. Если ни для одного  $j$  неравенство (24) не выполняется, перейти к п. 5.
11. Если для некоторого  $j$  и всех  $i, i \neq j$ , выполняется  $\alpha_j(t) > \alpha_i(t)$ , принять решение о  $j$ -м дефекте в системе.

Приведем ряд комментариев к алгоритму. Выполнение п. 1 гарантирует наличие информации о входах и выходах системы, достаточной для вычисления невязки на начальном этапе диагностирования. П.п. 2–4 обеспечивают вычисление значений вектора невязки, необходимых для формирования порога на начальном этапе диагностирования. П.п. 5–10 представляют этап диагностирования, завершаемый обнаружением дефекта, в то время как при

выполнении п. 11 принимается решение о виде дефекта. Заметим, что если при выполнении этого пункта для некоторой пары дефектов с номерами  $i$  и  $j$  имеет место  $\alpha_i(t) \simeq \alpha_j(t)$ , то это означает неразличимость этих дефектов в рамках используемой процедуры диагностирования.

## 4. Пример

### 4.1. Формирование эталонной модели

Проиллюстрируем особенности применения полученных результатов на уже ставшем классическим примере объекта [14], состоящего из трех последовательно соединенных баков с площадями поперечного сечения  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  и  $\vartheta_3$ . Баки соединены между собой трубами с площадями поперечного сечения  $\vartheta_4$  и  $\vartheta_5$ . В первый бак вливается жидкость, а из последнего через отверстие поперечного сечения  $\vartheta_6$ , расположенное в дне третьего бака, вытекает. Модель объекта представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 dx_1(t)/dt &= a_1 u_1(t) - (a_2 - a_2^f) \sqrt{x_1(t) - x_2(t)}, \\
 dx_2(t)/dt &= (a_2 - a_2^f) \sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - (a_3 - a_3^f) \sqrt{x_2(t) - x_3(t)}, \\
 dx_3(t)/dt &= (a_3 - a_3^f) \sqrt{x_2(t) - x_3(t)} - (a_4 - a_4^f) \sqrt{x_3(t)}, \\
 y_1(t) &= x_2(t), \quad y_2(t) = x_3(t),
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

где переменные входа  $u_1(t)$  и состояния  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_1(t) \geq x_2(t) \geq x_3(t)$ , введены для обозначения соответственно объема поступающей жидкости в единицу времени и уровней жидкости в баках. Непосредственно измеряемыми являются уровни  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ . Постоянные коэффициенты – это  $a_1 = 1/\vartheta_1$ ,  $a_2 = \vartheta_4 \sqrt{2g}/\vartheta_1$ ,  $a_3 = \vartheta_5 \sqrt{2g}/\vartheta_2$ ,  $a_4 = \vartheta_6 \sqrt{2g}/\vartheta_3$ , и  $g$  – гравитационная постоянная. Диагностированию подлежат дефекты, приводящие к засорению труб и, как следствие, уменьшению площади их сечения. На модели (25) дефекты задаются ненулевыми (положительными) значениями коэффициентов  $a_2^f$ ,  $a_3^f$  и  $a_4^f$ .

Рассмотрим поэтапно задачу синтеза эталонной модели. Осуществив преобразование (25) к модели без внутренних обратных связей, получим

$$\begin{aligned}
 dx_1^{(1)}(t)/dt &= a_1 u_1(t) - (a_3 - a_3^f) \sqrt{y_1(t) - y_2(t)}, \\
 dx_2^{(1)}(t)/dt &= (a_3 - a_3^f) \sqrt{y_1(t) - y_2(t)} - (a_4 - a_4^f) \sqrt{y_2(t)}, \\
 dx_1^{(2)}(t)/dt &= (a_2 - a_2^f) \sqrt{x_1^{(1)}(t) - 2y_1(t)} - (a_3 - a_3^f) \sqrt{y_1(t) - y_2(t)}, \\
 y_1(t) &= x_1^{(2)}(t), \quad y_2(t) = x_2^{(1)}(t),
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

при

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(x(t)) &= (x_1(t) + x_2(t), x_3(t))^T, \quad \varphi^{(2)}(x(t)) = x_2(t), \\ \psi(y(t)) &= (y_1(t), y_2(t))^T.\end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением (6) и делая подстановку согласно (7), запишем

$$x_1^{(1)}(t) = a_1 \int_{t_0}^t u_1(\tau) d\tau - (a_3 - a_3^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau + x_1^{(1)}(t_0),$$

$$(27) \quad x_2^{(1)}(t) = (a_3 - a_3^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau - (a_4 - a_4^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_2(\tau)} d\tau + x_2^{(1)}(t_0),$$

$$(28) \quad \begin{aligned}x_1^{(2)}(t) &= (a_2 - a_2^f) \times \\ &\times \int_{t_0}^t \left( \sqrt{a_1 \int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' - (a_2 - a_2^f) \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' + x_1^{(1)}(t_0) - 2y_1(\tau)} \right) d\tau - \\ &- (a_3 - a_3^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau + x_1^{(2)}(t_0).\end{aligned}$$

Используем разложение квадратного корня в ряд Маклорена. Положим

$$(29) \quad \mu(\tau) = a_1 \int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' - (a_2 - a_2^f) \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' - 2y_1(\tau).$$

Можно показать (посредством моделирования), что для используемых значений  $u_1(t)$  и  $x_i(t_0)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , выполняется  $|\mu(\tau)/x_1^{(1)}(t_0)| < 1$ . Как следствие, справедлива приближенная запись

$$\sqrt{1 + \frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)} - \frac{1}{8} \left( \frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)} \right)^2 - \dots$$

Ограничившись первыми тремя членами разложения, получим приближенное равенство

$$(30) \quad \begin{aligned}x_1^{(2)}(t) &= (a_2 - a_2^f) \sqrt{x_1^{(1)}(t_0)} \int_{t_0}^t \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)} - \frac{1}{8} \left( \frac{\mu(\tau)}{x_1^{(1)}(t_0)} \right)^2 \right) d\tau - \\ &- (a_3 - a_3^f) \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau + x_1^{(2)}(t_0).\end{aligned}$$

С учетом (27) и (29), (30) запишем матрицы эталонной модели (8):

$$A = \begin{pmatrix} x_1^{(2)}(t_0) & a_2 \sqrt{x_1^{(1)}(t_0)} & \frac{a_1 a_2}{2\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2}{\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{a_2}{2x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & -a_3 & \frac{-a_2^2}{2\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} \\ x_2^{(1)}(t_0) & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & \frac{a_1^2 a_2}{8x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{a_1 a_2^2}{4x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2^3}{8x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2^2}{2x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & 0 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^f = \begin{pmatrix} 0 & -a_2^f \sqrt{x_1^{(1)}(t_0)} & \frac{-a_1 a_2^f}{2\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{a_2^f}{\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2^f}{2x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & a_3^f & \frac{-2a_2 a_2^f + (a_2^f)^2}{2\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3^f & 0 \\ 0 & \frac{-a_1^2 a_2^f}{8x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{a_1(-2a_2 a_2^f + (a_2^f)^2)}{4x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-3a_2^2 a_2^f + 3a_2(a_2^f)^2 - (a_2^f)^3}{8x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & \frac{-a_2 a_2^f + (a_2^f)^2}{2x_1^{(1)}(t_0)\sqrt{x_1^{(1)}(t_0)}} & a_4^f & 0 \end{pmatrix},$$

$$W(t_0, t) = \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' d\tau & \int_{t_0}^t y_1(\tau) d\tau & \int_{t_0}^t y_1^2(\tau) d\tau & \int_{t_0}^t \sqrt{y_1(\tau) - y_2(\tau)} d\tau \\ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' d\tau & \int_{t_0}^t \sqrt{y_2(\tau)} d\tau & \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' \right)^2 d\tau \\ \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{\tau} u_1(\tau') d\tau' \right) \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' d\tau & \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' \right)^2 d\tau \\ \int_{t_0}^t y_1(\tau) \left( \int_{t_0}^{\tau} \sqrt{y_1(\tau') - y_2(\tau')} d\tau' \right) d\tau \end{pmatrix}^T.$$

Анализ полученных матриц позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, реализуемая в соответствии с алгоритмом 1 процедура генерации невязки является непараметрической, поскольку не требует знания точных значений параметров объекта диагностирования (коэффициенты  $a_1 - a_4$ ). Это также обуславливает универсальность процедуры: она пригодна для любых трехбачковых объектов, независимо от их геометрических размеров. Во-вторых, матрицы частных производных  $(\partial A^f / \partial a_j^f)_{a^f=0}$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , зависят от коэффициентов модели.

Для того чтобы исключить необходимость оценивания значений неизвестных параметров и переменных объекта диагностирования для вычисления

матрицы производных  $(\partial A^f / \partial a_j^f)_{|a^f=0}$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , рассмотрим структуру матрицы  $A^f$ . Несложно видеть, что дефект, соответствующий  $a_2^f$ , влияет только на первую строку матрицы  $A^f$ , дефект, соответствующий  $a_4^f$ , влияет только на вторую строку матрицы  $A^f$ , в то время как вклад дефекта, соответствующего  $a_3^f$ , в строки матрицы  $A^f$  одинаков по величине, но различается по знаку. Теперь учитывая (20), можно принять  $\sigma_1 = (1 \ 0)^T$ ,  $\sigma_2 = (1 \ -1)^T$  и  $\sigma_3 = (0 \ 1)^T$ . Таким образом, принятие решения не требует знания значений параметров объекта. Следовательно, процедура принятия решения также является универсальной и пригодна для любых трехбачковых объектов.

#### 4.2. Результаты моделирования

Полученные выше матрицы эталонной модели были использованы для моделирования в среде пакета MatLab процесса диагностирования трехбачкового объекта. При моделировании исправного объекта задавались следующие значения параметров объекта:  $a_1 = 1 \text{ м}^{-2}$ ,  $a_2 = a_3 = a_4 = 0,4427 \text{ м}^{1/2}/\text{с}$ . Генерация невязки и принятие решений осуществлялись на основе алгоритмов 1 и 2. Результаты, полученные для исправного объекта, представлены на рис. 1, где графики  $a-g$  описывают поведение соответственно переменных  $u(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  и нормы вектора невязки, а также адаптивного порога. Неравенство невязки нулю здесь обуславливается приближенным характером эталонной модели в связи с использованием при ее получении разложения квадратного корня в ряд Маклорена. Значение постоянной составляющей порога

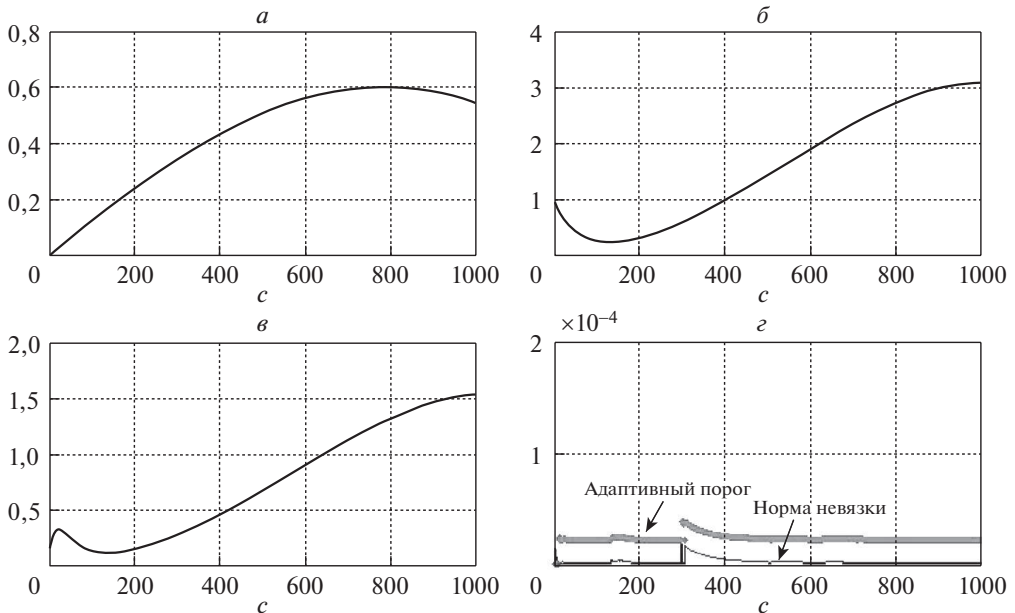


Рис. 1. Случай исправного функционирования трехбачкового объекта.

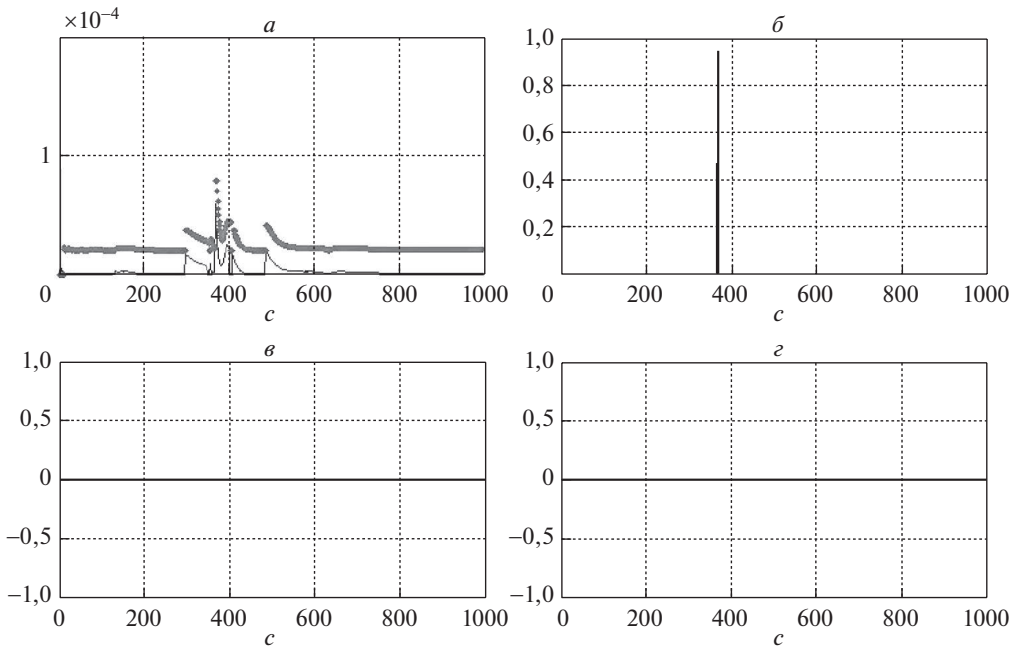


Рис. 2. Первый дефект в трехбаковом объекте.

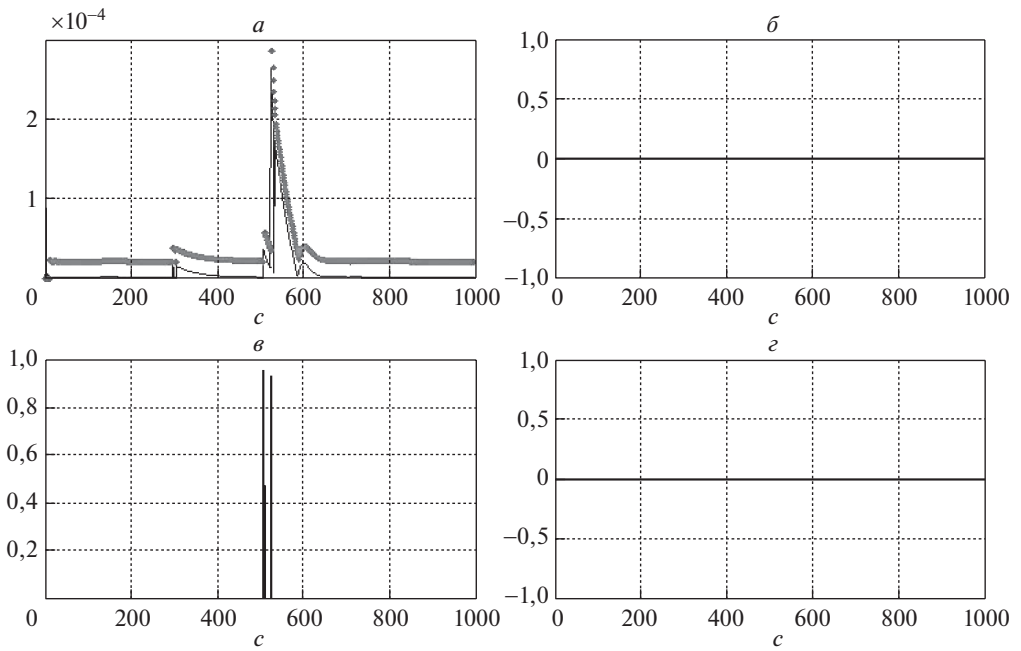


Рис. 3. Второй дефект в трехбаковом объекте.



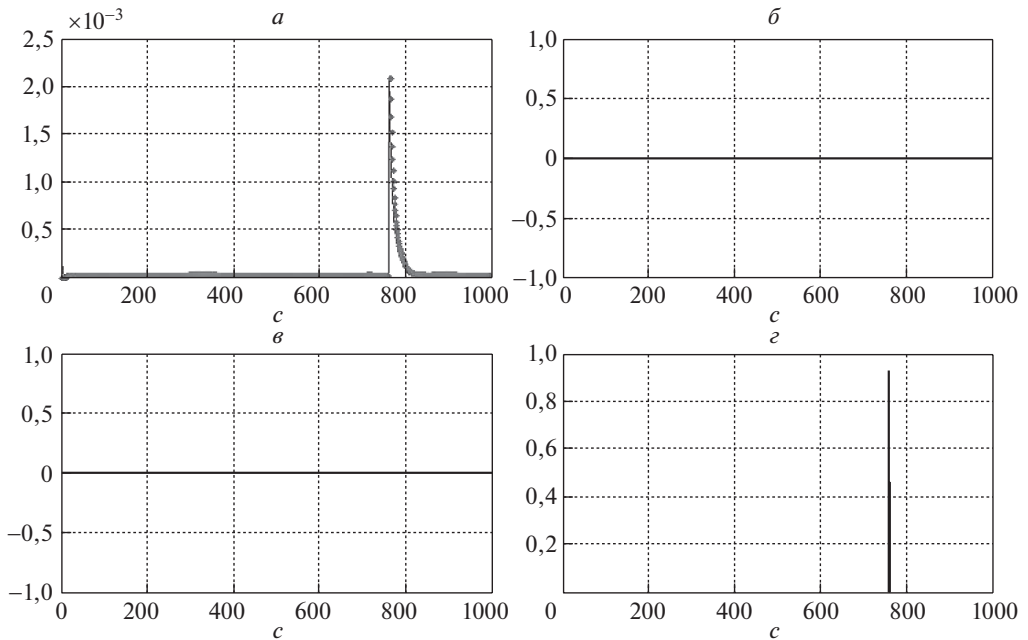


Рис. 4. Третий дефект в трехбаковом объекте.

$\Pi_0 = 0,2 \times 10^{-4}$  выбрано из условия отсутствия ложной тревоги в момент времени  $t = 300$  с, см. график  $z$ .

На рис. 2, 3 и 4 приведены результаты моделирования для случаев возникновения в объекте первого, второго и третьего дефектов, приводящих соответственно к: 1) засорению трубы между первым и вторым баками (значение коэффициента  $a_2^f = 0,1$  с момента времени  $t = 350$  с), 2) засорению трубы между вторым и третьим баками (значение коэффициента  $a_3^f = 0,2$  с момента времени  $t = 500$  с) и 3) засорению слива из третьего бака (значение коэффициента  $a_4^f = 0,1$  с момента времени  $t = 700$  с). Графики  $a$  описывают поведение нормы сигнала невязки и адаптивного порога. На графиках  $б-г$  приводятся значения угловых расстояний  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , в случае превышения ими порогового значения  $\alpha_{\min} = 0,9$ . Если для некоторого  $\alpha_j$  порог не превышает, то на графиках приводится значение  $\alpha_j = 0$ .

Сопоставление графиков  $б-г$ , полученных для различных дефектов, позволяет сделать вывод о возможности локализации всех трех дефектов.

## 5. Заключение

В работе предложено эффективное решение задачи робастного диагностирования нелинейных динамических систем в условиях воздействия дестабилизирующих факторов (ошибок эталонной модели, неконтролируемых внешних возмущающих воздействий и ошибок измерений доступных переменных системы). Отличительной особенностью этого решения является совместное использование активного (непараметрический метод генерации невязки) и

пассивного (комплексный метод принятия решения о наличии дефекта и виде этого дефекта) подходов к обеспечению робастности.

Новизна статьи состоит в разработке комплексного метода принятия решения, обеспечивающего определенный компромисс между минимальной величиной гарантированно обнаруживаемых и локализуемых дефектов и отсутствием ложных тревог.

Особенностью комплексного метода является сочетание пороговой логики принятия решения, использующей адаптивный порог, и сопоставление формируемого вектора невязки с сигнатурами дефектов, также формируемых в реальном времени с учетом текущих значений входов и выходов диагностируемой системы. Еще одной особенностью этого метода является ориентированность на получение минимально возможного размера скользящего временного окна, что должно положительно сказаться на оперативности принятия решений.

С другой стороны, увеличение размера скользящего временного окна может положительно сказаться на подавлении эффекта воздействия дестабилизирующих факторов, носящих случайный характер, за счет следующего: 1) в соотношениях (16), (17) и (21) вместо евклидовой нормы вектора невязки использовать евклидову норму для среднего значения вектора невязки, вычисленную на некотором интервале времени; и 2) применить метод наименьших квадратов для оценивания неизвестных параметров системы вместо использования прямого решения, получаемого из уравнения (22). Рациональный выбор размера скользящего временного окна представляет самостоятельную задачу и может рассматриваться как предмет дополнительного исследования.

В качестве предмета дополнительного исследования также может рассматриваться задача перенесения полученных результатов на случай моделей с дискретным временем, задаваемых разностными уравнениями.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим задачу преобразования модели (1) к модели (2), (3), приняв во внимание (4) и (5). Дифференцируя обе части равенства (4) по времени, запишем

$$(П.1) \quad \dot{x}^{(i)} = \left( \partial \varphi^{(i)}(x) / \partial x \right) f(x, u, a), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Осуществляя подстановки согласно (2) в левую часть уравнений (П.1) и учитывая (1) и (4), получим

$$(П.2) \quad \begin{aligned} f^{(1)}(h(x), u, a) &= \left( \partial \varphi^{(1)}(x) / \partial x \right) f(x, u, a), \\ f^{(2)}\left(\varphi^{(1)}(x), h(x), u, a\right) &= \left( \partial \varphi^{(2)}(x) / \partial x \right) f(x, u, a), \\ &\vdots \\ f^{(N)}\left(\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(N-1)}(x), h(x), u, a\right) &= \left( \partial \varphi^{(N)}(x) / \partial x \right) f(x, u, a). \end{aligned}$$

Далее, совместно рассматривая второе уравнение из (1), уравнения (3) и (5), запишем

$$(П.3) \quad h_* \left( \varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(N)}(x) \right) = \psi(h(x, a)).$$

Уравнения (П.2) и (П.3) могут быть непосредственно использованы для нахождения функций  $f^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , и  $h_*$  преобразованной модели (2), (3) при заранее найденных функциях  $\varphi^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , и  $\psi$ .

Воспользовавшись языком дифференциальной геометрии [12], опишем способ нахождения функций  $\varphi^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , обеспечивающих разрешимость уравнений (П.2). Пусть  $\Lambda_i$  обозначает расслоение, введенное для функции  $\varphi^{(i)}$ :  $\Lambda_i = \text{span}\{\lambda \mid (\partial\varphi^{(i)}/\partial x)\lambda = 0\}$ , где символ “*span*” обозначает линейную оболочку системы векторов (ковекторов). Пусть также  $\Omega_i = \Lambda_i^\perp$  – соответствующее корасслоение, где символ “ $\perp$ ” обозначает аннигилятор, т.е.  $\Lambda_i^\perp = \{\omega \in R^n \mid \langle \omega, \lambda \rangle = 0 \forall \lambda \in \Lambda_i\}$ , и скобки

$$\langle \omega, \lambda \rangle = \sum_s \omega_s \lambda_s$$

введены для обозначения внутреннего произведения.

Положим  $f_{ij}(x) = f(x, u_i, a_j)$ , где  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq v_1$ ,  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq v_2$  – некоторые фиксированные значения векторов входа  $u$  и параметров  $a$ ,  $v_1$  и  $v_2$  – конечные значения такие, что векторная функция  $f(x, u, a)$  при любых допустимых значениях векторов  $u$  и  $a$  линейно выражается через семейство векторных функций (полей)  $F = \{f_{ij}(x), 1 \leq i \leq v_1, 1 \leq j \leq v_2\}$ .

Рассмотрим три операции дифференцирования. Первая операция (дифференцирование Ли) вводится для скалярной функции  $\alpha$  и векторного поля  $\gamma \in \text{span } F$  следующим образом:

$$L_\gamma \alpha = (\partial\alpha/\partial x)\gamma.$$

Вторая операция (скобки Ли) вводится для двух векторных полей  $\lambda_1 \in \Lambda$  и  $\lambda_2 \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  – некоторое расслоение:

$$[\lambda_1, \lambda_2] = (\partial\lambda_2/\partial x)\lambda_1 - (\partial\lambda_1/\partial x)\lambda_2.$$

Третья операция вводится для ковекторного поля  $\omega \in \Omega$  и векторного поля  $\lambda \in \Lambda$ , где  $\Lambda$  и  $\Omega$  – некоторые расслоение и корасслоение соответственно; результатом является ковекторное поле, определяемое следующим образом:

$$L_\lambda \omega = \lambda^T (\partial\omega^T/\partial x)^T + \omega (\partial\lambda/\partial x).$$

В соответствии с определением расслоения  $\Lambda_i$  векторная функция  $\varphi^{(i)}$  может быть найдена посредством интегрирования однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$(П.4) \quad \left( \partial\varphi^{(i)}/\partial x \right) \lambda = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda_i.$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (П.4) определяются теоремой Фробениуса (см. [12], с. 23). В соответствии с этой теоремой регулярное (т.е. имеющее постоянный ранг во всей области определения) расслоение интегрируемо, если оно инволютивно (замкнуто) относительно операции взятия скобок Ли. Процедура интегрирования уравнений (П.4) также может быть найдена в [12].

Далее, согласно свойствам приведенных выше операций дифференцирования (см. [12], с. 10), для ковекторного поля  $\omega \in \Omega_i$  и векторного поля

$$(П.5) \quad \lambda \in \Lambda_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} \Lambda_j \cap \ker(\partial h / \partial x), \quad i \geq 2,$$

(при  $i = 1$  принимаем  $\Lambda = \ker(\partial h / \partial x)$ ) справедливо

$$(П.6) \quad L_\gamma \langle \omega, \lambda \rangle = \langle L_\gamma \omega, \lambda \rangle + \langle \omega, [\gamma, \lambda] \rangle, \quad \gamma \in G.$$

По построению корасслоения  $\Omega_i$  для  $\lambda \in \Lambda_i$  и  $\omega \in \Omega_i$  выполняется  $\langle \omega, \lambda \rangle = 0$  и, как следствие,

$$L_\gamma \langle \omega, \lambda \rangle = 0.$$

Дополнительно положим в (П.6)

$$(П.7) \quad \langle \omega, [\gamma, \lambda] \rangle = 0,$$

что приведет к

$$(П.8) \quad \langle L_\gamma \omega, \lambda \rangle = 0.$$

Равенство (П.8) эквивалентно включению

$$(П.9) \quad L_\gamma \omega \in \sum_{j=1}^{i-1} \Omega_j + \text{span}(\partial h / \partial x).$$

При  $\partial \varphi_s^{(i)} / \partial x = \omega$ , где нижний индекс “s” указывает номер компоненты векторной функции  $\varphi^{(i)}$ , это означает, что соответствующая компонента векторной функции  $(\partial \varphi^{(i)} / \partial x) f(*)$  может быть выражена через компоненты векторных функций  $h(x)$ ,  $\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(i-1)}(x)$  и векторов  $u, a$ . Поскольку это должно выполняться для всех компонент векторной функции  $(\partial \varphi^{(i)} / \partial x) f(*)$ , для которых найдутся “свои” ковекторы  $\omega$ , удовлетворяющие (П.9), существуют некоторые векторные функции  $f^{(i)}(*)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , удовлетворяющие уравнениям (П.2). При этом равенство (П.7) может рассматриваться как достаточное условие разрешимости уравнений (П.2). Опираясь на вышеизложенное, приведем алгоритм нахождения функций  $\varphi^{(i)}(x)$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

*Алгоритм 3* (нахождение функций  $\varphi^{(i)}(x)$ ,  $1 \leq i \leq N$ ).

1. Положить  $i = 1$ , сформировать расслоение  $\Lambda'_1 = \ker(\partial h / \partial x)$ .

2. Сформировать расслоение  $\Lambda_i = \Lambda'_i \cap \text{span}\{[\gamma, \lambda] \mid \gamma \in G, \lambda \in \Lambda'_i\}$ .
3. Если  $i \geq 2$  и  $\Lambda_i \supseteq \Lambda_{i-1}$ , положить  $N = i$  и перейти к п. 5.
4. Положить  $i = i+1$  и найти расслоение  $\Lambda'_i$  в соответствии с (П.5). Перейти к п. 2.

5. Найти векторные функции  $\varphi^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , посредством интегрирования уравнений (П.4).

6. Для сокращения размерности получаемой модели исключить из функций  $\varphi^{(i)}$ ,  $i \geq 2$ , компоненты, функционально зависимые от компонент векторных функций  $\varphi^{(j)}$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ .

Конец.

Отметим следующее. П.п. 1, 2 и 4 алгоритма позволяют формировать расслоения  $\Lambda_i$ , одновременно удовлетворяющие соотношению (П.5) и ограничению (П.7). Проверка функциональной зависимости (последний пункт алгоритма) может быть проведена с использованием анализа ранга соответствующих матриц Якоби (см. [15, с. 112]).

Способ нахождения функции  $\psi(h(x))$ , обеспечивающий разрешимость уравнений (П.3), предполагает интегрирование замкнутого расслоения  $\Lambda_\psi \supseteq \supseteq \ker(\partial h / \partial x) + \bigcap_{i=1}^N \Lambda_i$ .

Пример преобразования модели (25) к модели (26) приведен в [7, с. 104–114].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chow E., Willsky A.* Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1984. V. 29. P. 603–614.
2. *Patton R., Kangethe S.* Robust fault diagnosis using eigenstructure assignment of observers. – In Fault diagnosis in dynamic systems. Theory and application / Eds. Patton R.J., Frank P.M., Clark R.N. N.Y.: Prentice Hall, 1989. P. 99–154.
3. *Ding X., Frank P.M.* An adaptive observer-based fault detection scheme for nonlinear dynamic systems // Proc. 12th World Congress IFAC 1993. V. 8. P. 307–310.
4. *De Persis C., Isidori A.* A Geometric Approach to Nonlinear Fault Detection and Isolation // IEEE Trans. Automat. Contr. 2001. V. AC-46. No. 6. P. 853–865.
5. *Gertler J.* Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems. N.Y.: Marcel Dekker., 1998.
6. *Chen J., Patton R.* Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems. London: Kluwer Academic Publishers., 1999.
7. *Шумский А.Е., Журабок А.Н.* Методы и алгоритмы диагностирования и отказоустойчивого управления динамическими системами. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2009.
8. *Shumsky A.* Redundancy Relations for Fault Diagnosis in Nonlinear Uncertain Systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2007. V. 17. P. 477–489.
9. *Журабок А.Н., Шумский А.Е.* Непараметрический метод диагностирования нелинейных динамических систем // АиТ. 2019. № 2. С. 22–41.  
*Zhirabok A.N., Shumskii A.E.* Nonparametric Method for Diagnosis of Nonlinear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 2. P. 217–233.
10. *Seliger R., Frank P.M.* Robust residual evaluation by threshold selection and performance index for nonlinear observer-based fault diagnosis // Proc. of IFAC Conf. Tooldiag'93. Toulouse, France. 1993. P. 496–504.

11. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982.
12. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer Verlag, 1989.
13. *Жиравок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В.* Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // *АиТ.* 2017. № 7. С. 3–21.  
*Zhirabok A.N., Shumskii A.E., Pavlov S.V.* Diagnosis of linear dynamic systems by the nonparametric method // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 7. P. 1173–1188.
14. *Patton R.J., Frank P.M., Clark R.N.* Fault diagnosis in dynamic systems. Theory and applications / N.Y.: Prentice Hall, 1989.
15. *Корн Г, Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.*

Поступила в редакцию 02.11.2019

После доработки 14.08.2020

Принята к публикации 10.09.2020