Автоматика и телемеханика, № 2, 2021

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2021 г. **М.А. ГОРЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (griefer@ccas.ru)**
(Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" РАН, Москва)

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ АГРЕГИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ ИГРАХ

Исследуются две задачи о рациональном агрегировании информации в иерархических играх. Рассматриваются непрерывные способы агрегирования. Рациональность оценивается по двум критериям: максимальному гарантированному выигрышу одного из игроков и размерности пространства агрегатов.

Ключевые слова: иерархические игры, максимальный гарантированный результат, теория информации, размерность.

DOI: 10.31857/S0005231021020094

1. Введение

Опишем в нескольких словах одно из направлений развития теории игр. В 30-х гг. XX в. Г. фон Штакельберг начал рассматривать игры с фиксированным порядком шагов (см. [1], первое издание вышло в 1934 г.). Он рассматривал лишь игры без обратной связи: игроки, принимающие решения раньше, не имели никакой информации о выборах, которые будут делать игроки, принимающие решения позже.

На рубеже 60-х и 70-х гг. XX в. стали исследоваться аналогичные модели с обратной связью: некоторые игроки выбирали свои решения как функции от выборов своих партнеров. Такие модели стали исследовать практически одновременно и независимо в теории иерархических игр [2], теории активных систем [3], теории контрактов [4] и т.д. Это позволило существенно расширить класс процессов принятия решений, описываемых теоретико-игровыми моделями. В первых моделях такого рода рассматривались лишь крайние случаи: либо предполагалось, что один игрок имеет полную информацию о выборе своего партнера, либо считалось, что такой информации у него нет вовсе.

Промежуточные случаи стали изучаться следующим поколением исследователей. Рассматривались модели, в которых игроки могли получать информацию о выборах друг друга, но в агрегированном виде [5]. Это направление развивалось параллельно в теории иерархических игр и теории активных систем (дальнейшие ссылки – в [6] и [7] соответственно). По-видимому, за рубежом такие задачи отдельно не изучались, хотя, возможно, и возникали где-то в неявном виде.

Следующий шаг в данном направлении – рассмотрение моделей, в которых некоторые из игроков могут сами выбирать содержание используемой информации. Но здесь возникают новые трудности на этапе постановки задач. Для традиционных моделей легко доказывается принцип: чем большей информацией обладает игрок, тем лучше для него [8]. Поэтому ответ на вопрос о выборе "оптимального" способа обмена информацией становится тривиальным и потому неинтересным. Но при этом никак не учитывается, что использование больших объемов информации требует затрат времени, сил, денег и т.д. Для учета этого обстоятельства необходима мера объема информации.

К сожалению, на сегодняшний день (да, вероятно, и вообще) такой универсальной меры нет. Можно предложить несколько вариантов. Наиболее интересным[1] представляется вариант, рассмотренный в [9]. В этом варианте считается, что информация поступает в виде некоторых сообщений и длину этих сообщений в битах предлагается использовать. Этот подход представляется разумным, пока объемы информации относительно невелики.

При больших объемах информации возникает проблема. В другом контексте она отмечалась уже в [10]. Применительно к задачам принятия решений ее можно сформулировать так. Допустим, лицо, принимающее решения, готово обработать один терабайт информации. Тогда ситуация практически никак не изменится, если увеличить этот объем на триста килобайт или уменьшить на двести мегабайт. Таким образом, при таких объемах информации обычные числа не слишком приспособлены для их измерения. Эта проблема заслуживает отдельного обсуждения, но оно выходит за рамки данной статьи.

В физике часто подобные проблемы решаются следующим образом: большое конечное множество заменяется континуумом, и для описания его "массивности" используется какой-то обобщенный показатель. Можно использовать, например, размерность этого континуума. Это, собственно, и сделано далее. Точные формулировки содержатся в разделе 2.

Подобная задача была впервые поставлена А.Ф. Кононенко [6, 11]. Правда, в этих публикациях рассматриваемый континуум считался вложенным в евклидово пространство и в качестве "меры информации" использовалась размерность этого евклидова пространства. Это дополнительное ограничение не очень хорошо отражает суть дела и затрудняет решение задачи. Кроме того, в цитированных публикациях для решения задачи используются локальные дифференциально-геометрические методы. Как будет видно из дальнейшего, рассматриваемая задача имеет существенно глобальный характер[2]. Поэто-

[1] Ссылки на публикации, в которых рассматриваются другие варианты, можно найти в [9]. К сожалению, в большинстве случаев приходится сталкиваться с какими-то патологиями: либо решение задачи "вырождается" и плохо интерпретируется в содержательных терминах, либо в типичном случае это решение оказывается неустойчивым по отношению к малым изменениям параметров модели и т.п. Модель, рассмотренная в [9], будто бы, свободна от этих недостатков. Кроме того, на ее основе удалось построить модели, учитывающие, например, возможность ошибок при передаче информации. Все эти результаты опубликованы в журнале "Автоматика и телемеханика" и сборнике "Управление большими системами" и легко могут быть найдены по фамилии автора данной статьи.

[2] См. замечание 6 далее.

му локальными методами удается получить решение лишь для очень узкого класса игр.

Для случая антагонистических игр рассмотренная в данной статье задача была решена в [12]. В принципе, общий случай сводится к антагонистическому. Но при этом приходится использовать довольно громоздкие геометрические конструкции. Техника, впервые примененная в [9], позволяет исследовать общий случай так же просто, как и антагонистический.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать игру двух лиц в нормальной форме $\Gamma = \langle U, V, g, h\rangle$, где U и V – компактные топологические пространства, а g и h – непрерывные функции из $U \times V$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций выигрыша g и h соответственно. Выбор управления из множества U или V считается элементарной операцией.

Замечание 1. Здесь компактность понимается в смысле [13, 14] как возможность выбрать из каждого открытого покрытия конечное подпокрытие. В [15] для этого понятия используется термин бикомпактность, а компактность понимается несколько иначе. К сожалению, терминологические расхождения имеются и в других случаях. Везде далее используется терминология из [13, 14].

Введем обозначение. Далее $\Phi\,(X, Y)$ обозначает класс всех функций из множества X в множество Y.

Пусть заданы множество W и отображение $P : V \to W$. Наряду с игрой Γ будем рассматривать игру $\Gamma_P = \langle U_P, V_P, g_P, h_P\rangle$, заданную следующими условиями:

$$V_P = V, \quad U_P = \Phi\,(W, U),$$
$$g_P(u_P, v_P) = g(u_P(P(v_P)), v_P), \quad h_P(u_P, v_P) = h(u_P(P(v_P)), v_P).$$

Содержательно множество W интерпретируется как множество сообщений, которые второй игрок может передать первому, а функция P – как способ агрегирования информации о сделанном вторым игроком выборе.

Замечание 2. В дальнейшем систематически будет рассматриваться пара игр Γ и Γ_P. Удобно термин “управление” использовать в отношении исходной игры Γ, а термин “стратегия” относить к ее информационному расширению Γ_P. При этом стратегия будет пониматься как способ выбора управлений в зависимости от получаемой информации, что соответствует традиции, восходящей к фон Нейману.

Если отображение P постоянно, то игра Γ_P в естественном смысле изоморфна игре Γ. Особое место занимает случай, когда $W = V$, а отображение P – тождественное. Соответствующую игру по традиции будем обозначать через Γ_2. Н.С. Кукушкин показал, что при любом способе обмена информацией первый игрок гарантированно получает выигрыш, который не превосходит максимального гарантированного результата в игре Γ_2. Таким образом, этот результат – это идеал, которого хотелось бы достичь, по возможности, с наименьшими объемами передаваемой информации. Именно такая постановка вопроса исторически была первой (см., например, [6, 11]). В частности, по этой причине во многих работах речь идет об "агрегировании информации". В данной статье используется несколько иной подход: акцент сделан на получении "достаточно хорошего" (но не обязательно максимального) результата при приемлемом объеме передаваемой информации.

Будем считать, что игрок номер один обладает правом первого хода, т.е. он первым выбирает свою стратегию и сообщает ее партнеру. В таком случае нетрудно оценить множество рациональных выборов второго игрока. В самом деле, если он действительно стремится к максимизации значения функции h_P, то естественно предположить, что он выберет свою стратегию из множества $BR\,(u_P)$, определенного одним из условий[3]:

- $BR(u_P) = \left\{ v \in V : \, h(u_P(P(v)), v) = \max\limits_{w \in V} h(u_P(P(w)), w) \right\}$, если верхняя грань $\sup\limits_{v \in V} h(u_P(P(v)), v)$ достигается;
- $BR(u_P) = \left\{ v \in V : \, h(u_P(P(v)), v) \geqslant \sup\limits_{w \in V} h(u_P(P(w)), w) - \kappa \right\}$ в противном случае (здесь κ – наперед заданное положительное число).

Следовательно, выбрав стратегию u_P, при разумном поведении партнера первый игрок может с гарантией рассчитывать на получение выигрыша

$$\inf_{v \in BR(u_P)} g(u_P(P(v)), v),$$

а его максимальный гарантированный результат составит

$$R_\kappa(\Gamma_P) = \sup_{u_P \in \Phi(W,U)} \inf_{v \in BR(u_P)} g(u_P(P(v)), v).$$

Аналогичным образом определяется максимальный гарантированный результат первого игрока в исходной игре Γ:

$$R_\kappa(\Gamma) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in BR(u)} g(u, v),$$

где

$$BR(u) = \left\{ v \in V : \, h(u, v) = \max_{w \in V} h(u, w) \right\}.$$

Непосредственно проверяется, что игра Γ_P является квазиинформационным расширением игры Γ. Некоторые простые следствия этого факта будут использоваться далее. В частности, из этого факта следует, что для любых W и $P : V \to W$ справедливы неравенства $R_\kappa\,(\Gamma) \leqslant R_\kappa\,(\Gamma_P) \leqslant R_\kappa\,(\Gamma_2)$. Кроме

[3] Поскольку по определению $V = V_P$, здесь и далее вместо v_P и V_P будем писать v и V соответственно. Это сокращает формулы и не должно вызвать недопонимания.

того, при “увеличении объема доступной информации” максимальный гарантированный результат первого игрока не убывает. Определение квазиинформационного расширения и доказательства этих простых фактов можно найти в [8].

Если считать, что интересы управляемой системы отождествляются с интересами первого игрока (Центра), то для оценки качества управления системой довольно естественно использовать величину $R_{\kappa}(\Gamma_P)$. Попробуем определить меру сложности управления системой. Для этого придется несколько уменьшить класс рассматриваемых игр Γ_P. В контексте изложенного в разделе 1 достаточно естественным выглядит следующее п р е д п о л о ж е н и е.

Будем считать, что пространство W наделено топологией, а отображение P непрерывно.

В таком случае достаточно разумно использовать в качестве меры сложности процесса управления размерность пространства W[4]. Но здесь требуется несколько уточнений.

Очевидно, множество W всегда можно снабдить тривиальной топологией, объявив открытыми пустое множество, само множество W и только их. Тогда всякое отображение $P : V \to W$ будет непрерывным. Соответствующая задача была, по сути, решена в [16]. Найденное там решение не очень хорошо интерпретируется. Да и размерность такого топологического пространства определить непросто[5]. Поэтому нужны дополнительные предположения, исключающие такого рода тривиальные решения. Из изложенного в данном абзаце следует, что это должны быть предположения типа отделимости.

В дальнейшем будем считать, что пространство W – нормальное. (Напомним, что нормальным называется такое пространство, что, во-первых, для любых двух различных точек x и y найдется открытое множество O, для которого $x \in O$ и $y \notin O$, а, во-вторых, для любых непересекающихся замкнутых множеств X_1 и X_2 найдутся такие открытые множества O_1 и O_2, что $X_1 \subset O_1$, $X_2 \subset O_2$ и $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.)

Для простоты сделаем еще одно техническое предположение. Будем рассматривать только пространства W, имеющие счетную базу. От этого предположения можно было бы отказаться, но это потребовало бы более тонких топологических рассуждений, что выходит за рамки данной статьи. Данное предположение будет использоваться только при доказательстве необходимых условий в разделе 5.

Содержательная интерпретация более общих пространств в контексте задачи об агрегировании информации вызывает определенные затруднения. Поэтому, не имея в том конкретной нужды, рассматривать их не станем.

---

[4] Переходя на неформальный уровень, можно мыслить так. Центр в процессе игры Γ_P получает некоторое “сообщение” о положении точки $w \in W$. Можно предполагать, что ему сообщаются “координаты” точки w. И чем меньше этих координат, тем лучше. А количество координат – это уже “размерность”.

[5] Формальное определение размерности должно отражать определенные содержательные представления. Придумать определение, удовлетворяющее этому условию для всех топологических пространств, не удается. Поэтому обычно накладывают дополнительные условия типа отделимости.

Существует несколько альтернативных определений размерности. Для некоторых топологических пространств по-разному определенные размерности не совпадают. Но такие пространства "устроены" весьма сложно, и их вряд ли можно рассматривать в качестве "разумных" решений в задачах принятия решений. Поэтому выбор такого определения можно делать достаточно произвольно. В дальнейшем будет удобно пользоваться определением Чеха–Лебега. Соответствующая размерность пространства X обозначается через $\dim X$.

Напомним, что согласно этому определению размерностью пространства называется наименьшее натуральное число m, для которого в любое конечное открытое покрытие пространства можно вписать покрытие кратности m. Несложно показать, что размерность куба $[0,1]^m$ не превосходит m. Сложнее, с использованием теоремы Брауэра, доказывается обратное неравенство $\dim [0,1]^m \geqslant m$. Следовательно, $\dim [0,1]^m = m$. Кроме того, размерность является топологическим инвариантом пространства. А поскольку m-мерный симплекс (выпуклая оболочка $m+1$ точек общего положения, расположенных в евклидовом пространстве) гомеоморфен m-мерному кубу, его размерность тоже равна m.

Остановимся на одном обстоятельстве. Пусть $\varphi : W \to W'$ – гомеоморфизм. Тогда, с одной стороны, так как φ – гомеоморфизм, то $\dim W = \dim W'$. А с другой стороны, так как φ – взаимно однозначное отображение, то разумно считать, что с помощью отображений P и P' передается одна и та же информация, только по-разному закодированная. Этот факт можно рассматривать как аргумент в пользу использования размерности в качестве меры сложности информационного обмена[6]. Заметим кстати, что в таком случае несложно показать, что игры Γ_P и $\Gamma_{P'}$ изоморфны в том смысле, что каждая из них является квазиинформационным расширением другой. Поэтому получим равенство $R_\kappa(\Gamma_P) = R_\kappa(\Gamma_{P'})$.

Если зафиксировать показатель качества управления системой и количественную меру сложности информационных обменов, то получим двухкритериальную задачу. С одной стороны, хотелось бы, чтобы качество управления было повыше. А с другой – чтобы сложность информационных обменов была поменьше. Если эти показатели задавать так, как сделано выше, то эти две цели "почти противоположны": с уменьшением сложности качество всегда не увеличивается, а часто уменьшается. Поэтому возникает вопрос о свертке этих двух критериев. Здесь возможны разные варианты.

В данной статье будут получены условия для чисел γ и m, при которых для заданной игры Γ существуют такие нормальное топологическое пространство W со счетной базой и непрерывная функция $P : V \to W$, что одновременно $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leqslant m$.

З а м е ч а н и е 3. При сформулированных условиях образ

$$P(V) = \{w \in W : \exists v \in V \quad w = P(v)\}$$

[6] Разумеется, первое, что приходит в голову в качестве меры "массивности" множества, – это его мощность. Но такая мера слишком "груба": и одномерный отрезок и многомерный куб имеют мощность континуума (а, видимо, именно такие случаи представляют основной интерес). Поэтому нужна более "тонкая" мера.

множества V при отображении P – компактное, а значит, замкнутое подмножество пространства W. Следовательно, $\dim P(V) \leqslant \dim W$ (см. [14], с. 567). Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что отображение P сюръективно, а множество W компактно.

Займемся решением поставленной задачи.

3. Альтернативное определение максимального гарантированного результата

Удобнее пользоваться другим определением максимального гарантированного результата.

Определение 1. Число γ называется гарантированным результатом первого игрока в игре Γ_P, если существуют стратегия $u_P \in \Phi(W, U)$ и такое число λ, что выполняются условия:

1°. Существует стратегия $v \in V$ для которой $h(u_P(P(v)), v) \geqslant \lambda$;

2°. Для любой стратегии $v \in V$ или $g(u_P(P(v)), v) > \gamma$, или $h(u_P(P(v)), v) < \lambda$. Точная верхняя грань $R(\Gamma_P)$ гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным гарантированным результатом.

Замечание 4. В предыдущих публикациях [17] использовалось аналогичное определение, но там вместо строгого неравенства $g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) > \gamma$ использовалось нестрогое неравенство $g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) \geqslant \gamma$. Несложно видеть, что эти две формы эквивалентны. В данной статье удобнее пользоваться определением со строгим неравенством.

При сделанных в разделе 2 предположениях справедливо равенство $R_\kappa\left(\Gamma_P\right) = R\left(\Gamma_P\right)$. В этом разделе будут установлены некоторые факты, необходимые для его доказательства.

Введем следующее понятие. Назовем стратегию $u_P \in U_P$ регулярной, если верхняя грань

$$\sup_{v \in V} h(u_P(P(v)), v)$$

достигается. Пусть U_P^r – множество всех регулярных стратегий. Наряду с игрой $\Gamma_P = \langle U_P, V_P, g_P, h_P \rangle$ можно рассмотреть игру $\Gamma_P^r = \langle U_P^r, V_P, g_P, h_P \rangle$ (здесь сужения функций g_P и h_P на множество U_P^r обозначены теми же символами). Для игры Γ_P^r можно определить величины $R_\kappa\left(\Gamma_P^r\right)$ и $R\left(\Gamma_P^r\right)$, практически дословно повторяя определения этих величин для игры Γ_P. Из включения $U_P^r \subset U_P$ непосредственно следуют неравенства $R_\kappa\left(\Gamma_P^r\right) \leqslant R_\kappa\left(\Gamma_P\right)$ и $R\left(\Gamma_P^r\right) \leqslant R\left(\Gamma_P\right)$.

Установим следующие вспомогательные факты.

Лемма 1. Имеет место неравенство $R_\kappa\left(\Gamma_P\right) \leqslant R\left(\Gamma_P\right)$.

Лемма 2. Справедливо равенство $R_\kappa\left(\Gamma_P^r\right) = R\left(\Gamma_P^r\right)$.

Лемма 3. Выполняется равенство $R\left(\Gamma_P^r\right) = R\left(\Gamma_P\right)$.

Доказательства лемм 1–3 приведены в Приложении.

Из этих лемм немедленно следует равенство $R_\kappa\left(\Gamma\right) = R\left(\Gamma\right)$, которое будет использовано в дальнейшем.

4. Достаточные условия существования агрегата

В этом и следующем разделах будем заниматься вопросом о том, при каких условиях, связывающих числа γ и m, существуют пространство W и отображение $P : V \to W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leqslant m$.

Простейшее из таких условий может быть сформулировано следующим образом.

Т е о р е м а 1. *Пусть числа γ и m таковы, что существуют такие управления $u_0, u_1, \ldots, u_n$ из множества U и число λ, что множества*

$$O_i = \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\}, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{1}$$

$$O_i = \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = k+1, \ldots, n, \tag{2}$$

покрывают множество V и кратность покрытия $O_0, O_1, \ldots, O_n$ не превосходит $m+1$, а множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geqslant \lambda\}.$$

Тогда существуют нормальное пространство W со счетной базой и непрерывное отображение $P : V \to W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leqslant m$.

Доказательство теоремы 1 см. в Приложении.

Можно сформулировать другое достаточное условие.

Т е о р е м а 2. *Пусть числа γ и m таковы, что существуют такие управления $u_0, u_1, \ldots, u_n$ из множества U и число λ, что множества*

$$O_i = \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\} \cup \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

покрывают множество V и кратность покрытия $O_0, O_1, \ldots, O_n$ не превосходит $m+1$, а множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geqslant \lambda\}.$$

Тогда существуют нормальное пространство W со счетной базой и непрерывное отображение $P : V \to W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leqslant m$.

Доказательство теоремы 2 практически не отличается от доказательства теоремы 1[7] и поэтому не приводится.

Достаточные условия теорем 1 и 2, вообще говоря, независимы. Понять причину несложно. Говоря неформально, множества O_i из теоремы 1 "меньше" соответствующих множеств из теоремы 2. Поэтому для того чтобы покрыть множество V, таких множеств потребуется больше. А поэтому кратность такого покрытия может оказаться большой. А с другой стороны, "бо́льшим" множествам из теоремы 2 может оказаться "тесно" в пространстве V, и по этой причине покрытие будет иметь бо́льшую кратность. Все зависит от конкретной игры. Соответствующие конкретные примеры строятся без труда.

Можно формулировать и другие подобные достаточные условия. Самым общим из них является следующее.

[7] Функции φ_i нужно определить условием $\varphi_i(v) = \max\{g(u_i, v) - \gamma, \lambda - h(u_i, v), 0\}$, а остальное повторяется практически дословно.

Теорема 3. Пусть числа γ и m таковы, что существуют такие управления $u_0, u_1, \ldots, u_n$ из множества U и число λ, что множества

$$O_i = \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\} \cup \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

покрывают множество V, множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geqslant \lambda\},$$

и существуют множества $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ и непрерывные функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_l : V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

- *множества $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ покрывают V;*
- *покрытие $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ вписано в покрытие $O_0, O_1, \ldots, O_n$;*
- *кратность покрытия $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ не превосходит $m + 1$;*
- *$\varphi_i(v) > 0$ при $v \in \Omega_i$ и $\varphi_i(v) = 0$ при $v \in V \backslash \Omega_i \quad (i = 0, 1, \ldots, l)$.*

Тогда существуют нормальное пространство W со счетной базой и непрерывное отображение $P : V \to W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leqslant m$.

Доказательство теоремы 3 практически не отличается от доказательства теоремы 1, поэтому приводить его не будем.

Замечание 5. В данной статье не делается предположений относительно выполнения аксиом отделимости в пространстве V. Есть основания считать, что в некоторых моделях такие предположения могут оказаться ограничительными. Поэтому существование функций φ_i приходится отдельно предусматривать в условии теоремы 3. Теоремы 1 и 2 показывают, что такие функции могут естественно возникать из теоретико-игровых соображений. Разумеется, условие существования таких функций выполняется автоматически, если пространство V вполне регулярно. Но условие теоремы 3 слабее этого предположения.

Разумеется, достаточное условие теоремы 3 менее конструктивно, чем достаточные условия теорем 1 и 2. Но оно допускает обращение.

5. Необходимое условие существования агрегата

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть числа γ и m таковы, что существуют нормальное пространство W со счетной базой и непрерывное отображение $P : V \to W$, для которых $R(\Gamma_P) > \gamma$ и $\dim W \leqslant m$. Тогда существуют такие управления $u_0, u_1, \ldots, u_n$ из множества U и число λ, что множества

$$O_i = \{v \in V : g(u_i, v) > \gamma\}, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$
$$O_i = \{v \in V : h(u_i, v) < \lambda\}, \quad i = k + 1, \ldots, n,$$

покрывают множество V, множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geqslant \lambda\},$$

и существуют множества $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ и непрерывные функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_l : V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

- *множества* $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ *покрывают* V;
- *покрытие* $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ *вписано в покрытие* $O_0, O_1, \dots, O_n$;
- *кратность покрытия* $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$ *не превосходит* $m+1$;
- $\varphi_i(v) > 0$ *при* $v \in \Omega_i$ *и* $\varphi_i(v) = 0$ *при* $v \in V \backslash \Omega_i \quad (i = 0, 1, \dots, l)$.

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Замечание 6. Из результатов теорем 3 и 4 видно, что оптимальное решение определяется в основном глобальными свойствами рассматриваемой игры: количеством множеств в покрытии и их взаимными пересечениями. Локальные свойства, например гладкость функций выигрыша или размерность касательного пространства к многообразию V, не существенны (даже если в конкретной модели они определены). Кроме того, понятно, что скорее всего это решение будет устойчиво по отношению к малым изменениям параметров игры, в том числе и нарушающим эти локальные свойства.

Как и достаточные условия раздела 3, необходимые условия можно записывать в различной форме. Удобство той или иной записи зависит от конкретной игры.

6. Структура оптимального решения

При постановке задачи были наложены лишь самые общие ограничения на структуру множества W и отображения P. Если, скажем, найденное множество W окажется совсем уж экзотическим, то вряд ли такое решение можно будет считать осмысленным с точки зрения принятия решений. На самом деле в этой задаче таких неприятностей не предвидится. Кое-что в этом направлении уже сделано: из доказанных теорем следует, что оптимальное множество W можно искать в классе компактных подмножество конечномерных евклидовых пространств. Но и среди таких множеств имеются множества, устроенные весьма сложно, например как ковер Серпинского. Однако можно пойти и дальше.

Ранее установлено, что можно выбрать отображение так, что образ $P(V)$ будет содержаться в некотором симплексе. В этом разделе будет показано, что отображение P можно выбирать так, что каждая грань этого симплекса либо входит в $P(V)$ целиком, либо не пересекается с $P(V)$, т.е. оптимальное множество W можно искать в классе симплициальных комплексов.

Для простоты и конкретности будем отталкиваться от достаточных условий из теоремы 1. В других случаях рассуждения аналогичны.

Пусть $O_0, O_1, \dots, O_n$ и Θ – множества, предусмотренные условием теоремы 1. Фиксируем точку $v_0 \in O_0 \cap \Theta$ и такое число γ_0, что $\gamma < \gamma_0 < g(u_0, v_0)$. Пусть $Z = \{v \in V : g(u_0, v) \geqslant \gamma_0\}$. По построению $v_0 \in Z \subset O_0$, а в силу непрерывности функции g множество Z замкнуто. Для $i = 1, \dots, n$ положим $O_i' = O_i \backslash Z$.

Множества $O_i{}'$ открыты. Совокупность множеств $O_0, O_1{}', \dots, O_n{}'$ попрежнему покрывает пространство V, и кратность этого покрытия не превосходит $m+1$. А кроме того, точка v_0 покрывается лишь одним множеством O_0 (и не принадлежит множествам $O_1{}', \dots, O_n{}'$).

Отображение P определим так же, как в доказательстве теоремы 1, но с использованием покрытия $O_0, {O_1}', \ldots, {O_n}'$ вместо покрытия $O_0, O_1, \ldots, O_n$: функции φ_i определим условиями:

$$\varphi_0\,(v) = \max\left\{g\,(u_0, v) - \gamma, 0\right\},$$
$$\varphi_i\,(v) = \max\left\{\min\left[g\,(u_i, v) - \gamma, \gamma_0 - g\,(u_0, v)\right], 0\right\}, \quad i = 1, \ldots, k,$$
$$\varphi_i(v) = \max\left\{\min\left[\lambda - h\,(u_i, v)\,, \gamma_0 - g\,(u_0, v)\right], 0\right\}, \quad i = k+1, \ldots, n,$$

а все остальное повторим дословно. Получим отображение множества V в симплекс S. Но в данном случае можно быть уверенными в том, что вершина a_0 симплекса S принадлежит $P\,(V)$, в частности, $P\,(v_0) = a_0$. Дословно повторяя доказательство теоремы 1, можно убедиться, что в соответствующей новому отображению P игре Γ_P можно построить стратегию, гарантирующую первому игроку получение выигрыша γ. Фиксируем построенную таким образом стратегию u_P.

Будем последовательно упрощать множество $W = P\,(V)$, используя следующую процедуру. Выберем грань S_0 симплекса S, относительная внутренность которой пересекается с W, но содержит и точку a, не принадлежащую W (если такой грани нет, то все уже доказано). Пусть π – проекция симплекса S_0 на его границу из точки a, т.е. $\pi\,(a')$ – это (единственная) точка пересечения луча aa' с границей симплекса S_0. Отображение π оставляет неподвижными все точки, не принадлежащие внутренности симплекса S_0, в частности точку a_0, если она является его вершиной. Пусть

$$Q\,(v) = \begin{cases} \pi\,(P\,(v))\,, & \text{если} \quad P\,(v) \in W \cap S_0, \\ P\,(v)\,, & \text{если} \quad P\,(v) \notin W \backslash S_0. \end{cases}$$

По построению отображение $Q : V \to S$ непрерывно и $Q\,(V) \subset P\,(V)$.

Пусть u_Q – сужение функции u_P с множества $P\,(V)$ на множество $Q\,(V)$. Непосредственно проверяется, что стратегия u_Q гарантирует первому игроку в игре Γ_Q получение результата γ (практически дословно проходят соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1 с учетом того, что $P\,(v_0) = Q\,(v_0)$).

При повторении такой процедуры число граней, которые пересекаются с множеством $P\,(V)$, но не содержатся в нем целиком, будет уменьшаться. А поскольку симплекс S имеет конечное число граней, в конце концов, получатся искомое множество W и отображение P.

Хорошо известно, что всякий симплициальный комплекс размерности m может быть вложен в евклидово пространство размерности $2m + 1$. Таким образом, достаточные условия, полученные в разделе 3, одновременно дают и достаточные условия для задачи, рассмотренной в [11] (об этой постановке говорилось в разделе 1). Впрочем, в [12] построен пример игры, в которой "оптимальное" множество W представляет собой три ребра тетраэдра, выходящие из одной вершины. Такое множество одномерно, но не может быть вложено в одномерное евклидово пространство. Таким образом, задача из [11] и задача, рассмотренная в данной статье, все-таки существенно различны.

Несколько слов об отображении P. При его построении в теореме 1 использовались функции выигрыша в игре Γ. Понятно, что если эти функции "сложные", то сложным будет и отображение P. И это принципиально. С другой стороны, использованные выше рассуждения показывают, что если функции g и h "простые", то среди решений рассматриваемой задачи найдутся такие, у которых отображение P не намного сложнее. Понятию "сложности" в данных рассуждениях можно придать точный смысл несколькими разумными способами, но это уводит слишком далеко от темы данной статьи. Поэтому ограничимся сделанными неформальными замечаниями.

7. Вычисления

Полученные необходимое и достаточные условия записаны в немного нетрадиционной форме. Поэтому имеет смысл обсудить вопрос о том, насколько они конструктивны.

В теории иерархических игр задача считается решенной, если ее удается свести к вычислению максиминов на "простых" множествах. В рассматриваемой задаче эти множества должны фигурировать в описании игры Γ (в игре Γ_P появляется уже гораздо более сложное функциональное пространство $U_P = \Phi\,(W, U)$). Разумеется, так понимаемое решение в общем случае далеко от получения конкретных численных результатов. Но и их полезность во многих случаях отрицать нельзя. Поэтому будем следовать традиции.

Покажем, как полученные результаты можно переписать в более традиционной форме. Для конкретности вновь обратимся к результатам теоремы 1.

Определим функцию

$$\vartheta\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Множества O_i, определенные условиями (1) и (2), покрывают пространство V тогда и только тогда, когда

$$\min_{v\in V} \max \left\{ \max_{i=1,\dots,k} \left[g\,(u_i, v) - \gamma\right], \max_{i=k+1,\dots,n} \left[\lambda - h\,(u_i, v)\right] \right\} > 0,$$

или, что то же самое,

$$\min_{v\in V} \max \left\{ \max_{i=1,\dots,k} \left[\vartheta\,(g\,(u_i, v) - \gamma)\right], \max_{i=k+1,\dots,n} \left[\vartheta\,(\lambda - h\,(u_i, v))\right] \right\} > 0.$$

Аналогично кратность рассматриваемого покрытия не превосходит $m+1$, если

$$\max_{v\in V} \left\{ \sum_{i=0}^{k} \vartheta\,(g\,(u_i, v) - \gamma) + \sum_{i=k+1}^{n} \vartheta\,(\lambda - h\,(u_i, v)) \right\} \leqslant m + 1,$$

или

$$\min_{v\in V} \left\{ m + 2 - \sum_{i=0}^{k} \vartheta\,(g\,(u_i, v) - \gamma) - \sum_{i=k+1}^{n} \vartheta\,(\lambda - h\,(u_i, v)) \right\} > 0.$$

Наконец, множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \{v \in V : h(u_0, v) \geqslant \lambda\}$$

тогда и только тогда, когда

$$\max_{v \in V} \min \{\vartheta(g(u_0, v) - \gamma), 1 - \vartheta(\lambda - h(u_0, v))\} > 0.$$

Все три условия выполняются в том и только том случае, когда

$$\min \left\{ \min_{v \in V} \max \left\{ \max_{i=1,\ldots,k} [\vartheta(g(u_i, v) - \gamma)], \max_{i=k+1,\ldots,n} [\vartheta(\lambda - h(u_i, v))] \right\}, \right.$$

$$\min_{v \in V} \left\{ m + 2 - \sum_{i=0}^{k} \vartheta(g(u_i, v) - \gamma) - \sum_{i=k+1}^{n} \vartheta(\lambda - h(u_i, v)) \right\},$$

$$\left. \max_{v \in V} \min \{\vartheta(g(u_0, v) - \gamma), 1 - \vartheta(\lambda - h(u_0, v))\} \right\} > 0.$$

А поскольку числа k и n и управления u_i можно выбирать, достаточное условие из теоремы 1 записывается в виде

$$\max_{k \geqslant 0} \max_{n \geqslant k} \max_{(u_0, u_1, \ldots, u_n) \in U^{n+1}} \min \left\{ \min_{v \in V} \max \left\{ \max_{i=1,\ldots,k} [\vartheta(g(u_i, v) - \gamma)], \right. \right.$$

$$\left. \max_{i=k+1,\ldots,n} [\vartheta(\lambda - h(u_i, v))] \right\},$$

$$\min_{v \in V} \left\{ m + 2 - \sum_{i=0}^{k} \vartheta(g(u_i, v) - \gamma) - \sum_{i=k+1}^{n} \vartheta(\lambda - h(u_i, v)) \right\},$$

$$\left. \max_{v \in V} \min \{\vartheta(g(u_0, v) - \gamma), 1 - \vartheta(\lambda - h(u_0, v))\} \right\} > 0.$$

Аналогичным образом можно переформулировать достаточные условия теоремы 2 и другие похожие утверждения. Теоремы 3 и 4, разумеется, менее конструктивны. Понятно, что их нельзя сделать конструктивными, не имея конструктивного способа описания топологии на пространстве V. Если такой способ есть, например топология задается метрикой, то идеи, аналогичные использованным в этом разделе, применимы. Соответствующие конструкции сложнее, поэтому приводить их не станем.

8. Заключение

Итак, в данной статье приведена сбалансированная постановка топологической задачи синтеза рациональных способов агрегирования информации.

Предложен метод ее решения. И постановка, и метод решения оказались достаточно простыми. Кроме того, было показано, что среди оптимальных решений задачи непременно найдутся способы агрегирования информации, вполне разумные с содержательной точки зрения. Это дает основание говорить о целесообразности продолжения изучения подобных моделей. Такие исследования представляются особенно актуальными в связи с появлением технологий работы с "большими данными". Остановимся на некоторых возможных направлениях исследования.

В теоремах 1 и 2 свойства топологии на множестве V практически не используются. В теореме 3 эти свойства используются уже существенно. В [12] построен пример, показывающий, что в общем случае обойтись без использования свойств топологии, заданной на множестве V, нельзя. В этой связи возникает следующий вопрос. Кроме заданной внешним образом топологии на множестве V, можно определить на нем внутреннюю топологию – топологию, базу которой образуют прообразы открытых множеств действительной прямой $\mathbb{R}$ при отображениях g и h (при всех фиксированных u). Интересно более детально разобраться, каким образом соотношение между внутренней и внешней топологиями влияет на характер оптимальных способов агрегирования информации и сложность их построения.

В контексте моделирования процессов обмена информацией проще интерпретировать не топологическую размерность Чеха–Лебега, а какие-то варианты фрактальных размерностей, скажем, размерность Минковского. Речь идет о следующем.

Можно мыслить размерность линейного пространства или гладкого многообразия как количество координат, достаточное для определения положения отдельной точки. Эти представления как-то формализуются определениями топологической размерности, в частности размерности Чеха–Лебега. И ровно такие идеи были заложены, например, в публикациях [6, 11]. Но есть и некоторые возражения: координата — это действительное число, которое задается бесконечной десятичной дробью. Но чтобы задать такую дробь, уже нужен "бесконечный объем" информации. Не исключено, что в каких-то случаях соответствующие конструкции будут неадекватно описывать реальность.

Возможен иной взгляд на вещи, в известном смысле идущий из теории информации. Будем рассматривать количество сообщений, достаточное, чтобы с заданной точностью задать положение любой точки множества. Разумеется, это количество существенно зависит от заданной точности. А вот скорость роста этого количества при увеличении точности вполне характеризует размерность множества[8]. Таким образом, приходим к понятию фрактальной размерности. Но в этом случае нужна количественная мера близости точек, т.е. топология должна быть заменена, например, метрикой.

Поэтому рассмотрение постановки задачи с заменой размерности Чеха–Лебега фрактальной размерностью вполне оправдано. Видимо, решающий шаг в решении соответствующей задачи сделан в данной статье. Действи-

[8] Чтобы с точностью ε задать положение точки на единичном отрезке, потребуется порядка $1/\varepsilon$ сообщений, а чтобы с той же точностью задать положение точки единичного трехмерного куба, нужно уже около $1/\varepsilon^3$ сообщений.

тельно, в общем случае фрактальная размерность не является целым числом, но для “хороших” множеств оказывается целой и совпадает с топологической размерностью. Более того, если для какого-то “экзотического” множества (например, канторова совершенного множества) эти размерности не совпадают, то фрактальная размерность больше. Поэтому полученные в данной статье результаты дают ответ в новой задаче. Остается только поставить эту задачу и обосновать этот ответ.

В данной статье удалось обойтись самыми простыми техническими средствами. Было бы интересно понять, что может дать современная топологическая техника для исследования подобных моделей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Пусть γ – произвольное число, строго меньшее $R_\kappa(\Gamma_P)$. Тогда найдется стратегия u_P, для которой

$$\gamma < \inf_{v\in BR(u_P)} g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right).$$

Фиксируем любую такую стратегию и положим $\lambda = \max\limits_{v\in V} h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right)$, если выбранная стратегия регулярна, и $\lambda = \sup\limits_{v\in V} h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) - \kappa$ в противном случае.

При таком выборе γ, u_P и λ первый пункт определения 1 выполняется (достаточно взять произвольное v из непустого множества $BR\left(u_P\right)$). В силу условия $\gamma < \inf\limits_{v\in BR(u_P)} g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right)$ для $v \in BR\left(u_P\right)$ справедливо неравенство $\gamma < g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right)$, а в силу выбора λ для $v \notin BR\left(u_P\right)$ имеет место неравенство $h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) < \lambda$. Следовательно, и второй пункт определения 1 выполняется.

Таким образом, γ – это гарантированный результат первого игрока в смысле определения 1. В силу произвольности γ отсюда следует нужное неравенство $R_\kappa\left(\Gamma_P\right) \leqslant R\left(\Gamma_P\right)$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Неравенство $R_\kappa\left(\Gamma^r_P\right) \leqslant R\left(\Gamma^r_P\right)$ доказывается практически так же, как и неравенство из леммы 1. Докажем обратное неравенство $R_\kappa\left(\Gamma^r_P\right) \geqslant R\left(\Gamma^r_P\right)$.

Пусть γ – произвольный гарантированный результат в смысле определения 1. Фиксируем стратегию u_P и число λ, существование которых предусмотрено этим определением. Для стратегии v из первого пункта этого определения $\lambda \leqslant h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) \leqslant \max\limits_{v\in V} h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right)$, т.е. $\lambda \leqslant \max\limits_{v\in V} h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right)$. Но тогда для любого $v \in BR\left(u_P\right)$ выполняется неравенство $h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) \geqslant \lambda$ и в силу второго пункта определения 1 имеет место неравенство $g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) > \gamma$. Следовательно, $\inf\limits_{v\in BR(u_P)} g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) \geqslant \gamma$ и тем более

$$R_\kappa\left(\Gamma^r_P\right) = \sup_{u_P\in U^r_P} \inf_{v\in BR(u_P)} g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right), v\right) \geqslant \gamma.$$

В силу произвольности γ отсюда следует нужное неравенство $R_\kappa(\Gamma_P^r) \geqslant R(\Gamma_P^r)$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Достаточно доказать, что $R(\Gamma_P^r) \geqslant R(\Gamma_P)$. Сделаем это.

Для каждого $w \in W$ множество $P^{-1}(w) = \{v \in V : P(v) = w\}$ компактно. Поэтому максимум $\max\limits_{v \in P^{-1}(w)} h(u,v)$ достигается при всех $u \in U$ и $w \in W$. Обозначим $f(u,w) = \max\limits_{v \in P^{-1}(w)} h(u,v)$.

Точечно-множественное отображение $P^{-1}(w)$ замкнуто, т.е. замкнут его график

$$\{(w,v) \in W \times V : w = P(v)\}.$$

Следовательно, при любом фиксированном $u \in U$ функция $f(u,w)$ полунепрерывна сверху на множестве W, т.е. ее подграфик

$$\Delta(u) = \{(w,t) \in W \times R : t \leqslant f(u,w)\}$$

замкнут.

Но тогда замкнуто и пересечение таких множеств

$$\Delta_0 = \bigcap_{u \in U} \Delta(u) = \left\{(w,t) \in W \times R : t \leqslant \inf_{u \in U} f(u,w)\right\}.$$

Следовательно, в некоторой точке $u_P^p(w)$ достигается минимум $\min\limits_{u \in U} f(u,w)$ и, кроме того, функция $\phi(w) = \min\limits_{u \in U} f(u,w)$ полунепрерывна сверху на множестве W (так как Δ_0 – ее подграфик).

Таким образом, корректно определена стратегия наказания u_P^p и она является регулярной, т.е. достигается максимум

$$\lambda_0 = \max_{v \in V} h\left(u_P^p(P(v)), v\right) = \max_{w \in W} \min_{u \in U} \max_{v \in P^{-1}(w)} h(u,v).$$

Пусть теперь γ – произвольный гарантированный результат в игре Γ_P в смысле определения 1. Фиксируем стратегию u_P и число λ, существование которых предусмотрено этим определением.

Поскольку по построению

$$\lambda_0 = \min_{u_P{}' \in U_P} \max_{v \in V} h\left(u_P{}'(P(v)), v\right) = \max_{v \in V} h\left(u_P^p(P(v)), v\right),$$

найдется управление v, для которого $h(u_P(P(v)), v) \geqslant h\left(u_P^p(P(v)), v\right) \geqslant \lambda_0$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda \geqslant \lambda_0$. В самом деле, второй пункт определения 1 выполнить тем легче, чем больше λ; а первый пункт при $\lambda = \lambda_0$ выполняется в силу только что установленного неравенства.

В силу выбора u_P и λ существует v, для которого $h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right),v\right) \geqslant \lambda$. Если для всех v выполняется условие $h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right),v\right) \leqslant \lambda$, то стратегия u_P является регулярной: максимум $\max\limits_{v\in V} h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right),v\right)$ достигается и равен λ. В таком случае лемма 3 доказана.

В противном случае существует точка v_0, в которой $h\left(u_P\left(P\left(v_0\right)\right),v_0\right) > \lambda$. Положим $w_0 = P\left(v_0\right)$ и рассмотрим стратегию u_P^r, определенную условием

$$u_P^r\left(w\right) = \begin{cases} u_P\left(w_0\right), & \text{если} \quad w = w_0, \\ u_P^p\left(w\right), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Стратегия u_P^r является регулярной. Действительно, выберем v_1, доставляющее максимум $\max\limits_{v\in P^{-1}(w_0)} h\left(P\left(w_0\right),v\right)$. Тогда для $v \in P^{-1}\left(w_0\right)$ имеем

$$h\left(u_P^r\left(P\left(v\right)\right),v\right) = h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right),v\right) \leqslant h\left(u_P\left(P\left(v_1\right)\right),v_1\right) = h\left(u_P^r\left(P\left(v_1\right)\right),v_1\right).$$

А для $v \notin P^{-1}\left(w_0\right)$ получим

$$h\left(u_P^r\left(P\left(v\right)\right),v\right) = h\left(u_P^p\left(P\left(v\right)\right),v\right) \leqslant \lambda_0 <$$
$$< h\left(u_P\left(P\left(v_0\right)\right),v_0\right) \leqslant h\left(u_P\left(P\left(v_1\right)\right),v_1\right) = h\left(u_P^r\left(P\left(v_1\right)\right),v_1\right).$$

Таким образом, верхняя грань $\sup\limits_{v\in V} h\left(u_P^r\left(P\left(v\right)\right),v\right)$ достигается, например, в точке v_1.

Покажем, что для стратегии u_P^r и числа $\lambda_1 = h\left(u_P^r\left(P\left(v_1\right)\right),v_1\right)$ выполняются оба пункта определения 1. По определению числа λ_1 выполняется первый пункт и, кроме того, $\lambda_1 \geqslant \lambda$ и $\lambda_1 > \lambda_0$.

Если $v \in P^{-1}\left(w_0\right)$ и $h\left(u_P^r\left(P\left(v\right)\right),v\right) = h\left(u_P^r\left(P\left(v_1\right)\right),v_1\right)$, то

$$h\left(u_P^r\left(P\left(v\right)\right),v\right) = h\left(u_P\left(P\left(v\right)\right),v\right) \geqslant \lambda$$

и в силу второго пункта определения 1 (для стратегии u_P и числа λ) получим $g\left(u_P^r\left(P\left(v\right)\right),v\right) = g\left(u_P\left(P\left(v\right)\right),v\right) > \gamma$ и в этом случае второй пункт определения 1 выполнен.

Если $v \in P^{-1}(w_0)$, но $h(u_P^r(P(v)),v) \neq h(u_P^r(P(v_1)),v_1)$, то по определению числа λ_1 и управления v_1 имеем $h(u_P^r(P(v)),v) < h(u_P^r(P(v_1)),v_1) = \lambda_1$ и снова второй пункт определения 1 выполнен.

Наконец, если $v \notin P^{-1}\left(w_0\right)$, то $h\left(u_P^r\left(P\left(v\right)\right),v\right) = h\left(u_P^p\left(P\left(v\right)\right),v\right) \leqslant \lambda_0 < \lambda$ и опять второй пункт определения 1 выполнен.

Таким образом, стратегия u_P^r позволяет первому игроку гарантированно получить выигрыш γ. В силу произвольности γ отсюда следует неравенство $R\left(\Gamma_P^r\right) \geqslant R\left(\Gamma_P\right)$.

Лемма 3 доказана полностью.

Доказательство теоремы 1. Определим функции

$$\varphi_i\left(v\right) = \max\left\{g\left(u_i,v\right) - \gamma, 0\right\}, \quad i = 0,1,\ldots,k,$$
$$\varphi_i(v) = \max\left\{\lambda - h\left(u_i,v\right), 0\right\}, \quad i = k+1,\ldots,n,$$
$$\phi\left(v\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\left(v\right).$$

Очевидно, эти функции непрерывны и неотрицательны, а поскольку множества $O_0, O_1, \ldots, O_n$ покрывают пространство V, функция $\phi(v)$ строго положительна в любой точке v.

Выберем в n-мерном евклидовом пространстве n-мерный симплекс S. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – его вершины. Рассмотрим отображение $P : V \to S$, определенное условием

$$P(v) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi_i(v)}{\phi(v)} a_i.$$

Отображение P является непрерывным.

Пусть $I \subset \{0, 1, \ldots, n\}$. Если для любого $j \notin I$ выполняется условие $v \notin O_j$, то точка $P(v)$ принадлежит грани симплекса S с множеством вершин $\{a_i,\ i \in I\}$. Так как по условию кратность покрытия $O_0, O_1, \ldots, O_n$ не превосходит $m + 1$, образ $P(v)$ любой точки v принадлежит грани симплекса S, которая имеет не более $m + 1$ вершин и, следовательно, размерность, не превосходящую m.

Пусть W – образ множества V при отображении P. Множество W компактно и, как только что установлено, вложено в m-мерный подкомплекс симплекса S. Следовательно, размерность множества W не превосходит m. Евклидово пространство нормально и имеет счетную базу. Эти свойства наследует и его подпространство W.

Таким образом, определена некоторая игра Γ_P. Построим стратегию u_P в этой игре следующим образом. Пусть $w \in W$ и S_0 – наименьшая по включению грань симплекса S, содержащая w (разумеется, если размерность S_0 больше нуля, то w принадлежит внутренности S_0). Пусть $\{a_i,\ i \in I\}$ – множество вершин этой грани. Выберем наименьшее $i \in I$ и положим $u_P(w) = u_i$.

Покажем, что выполняются оба пункта определения 1.

По построению отображения P для любого $v \in O_0$ наименьшая грань, содержащая точку $P(v)$, имеет a_0 своей вершиной. Следовательно, по определению стратегии u_P выполняется равенство $u_P(P(v)) = u_0$. А поскольку $O_0 \cap \cap \Theta \neq \varnothing$, для некоторой точки $v \in O_0$ имеем $h(u_P(P(v)), v) = h(u_0, v) \geqslant \lambda$. Таким образом, первый пункт определения 1 выполнен.

Пусть теперь v – произвольная точка множества V, а I – множество всех индексов i, для которых выполняется условие $v \in O_i$. Поскольку множества $O_0, O_1, \ldots, O_n$ покрывают V, множество I не пусто. Тогда по построению отображения P множество вершин наименьшей грани симплекса S, содержащей точку $P(v)$, есть в точности множество $\{a_i,\ i \in I\}$. Тогда по определению функции u_P для некоторого $i \in I$ выполняется равенство $u_P(P(v)) = u_i$. Если $i \leqslant k$, то $g(u_P(P(v)), v) = g(u_i, v) > \gamma$ (так как $v \in O_i$). А в противном случае $h(u_P(P(v)), v) = h(u_i, v) < \lambda$. Следовательно, и второй пункт определения 1 выполнен.

Итак, по определению γ – гарантированный результат в игре Γ_P. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу неравенства $R(\Gamma_P) > \gamma$ число γ является гарантированным результатом в игре Γ_P. Фиксируем стратегию u_P и число λ, существование которых постулируется в определении 1. Выберем управление v_0, для которого справедливо неравенство $h\left(u_P\left(P\left(v_0\right)\right), v_0\right) \geqslant \lambda$ (такое существует в силу первого пункта определения 1). Положим $u_0 = u_P\left(P\left(v_0\right)\right)$ и

$$O_0\left(u\right) = \left\{v \in V : g\left(u_0, v\right) > \gamma\right\}.$$

Множество O_0 не пусто, поскольку в силу второго пункта определения 1 $g\left(u_P\left(P\left(v_0\right)\right), v_0\right) = g\left(u_0, v_0\right) > \gamma$, т.е. $v_0 \in O_0$. Кроме того, по определению множество O_0 пересекается с множеством

$$\Theta = \left\{v \in V : h\left(u_0, v\right) \geqslant \lambda\right\}.$$

Для $u \in U$ определим множество

$$O'\left(u\right) = \left\{v \in V : g\left(u, v\right) > \gamma\right\} \cup \left\{v \in V : h\left(u, v\right) < \lambda\right\}.$$

Множество $O'\left(u\right)$ открыто. Поэтому его дополнение $Y\left(u\right) = V \backslash O'\left(u\right)$ замкнуто и, следовательно, компактно. Тогда компактно множество $Y'\left(u\right) = P\left(Y\left(u\right)\right) \subset W$. Значит, множество $Y'\left(u\right)$ замкнуто, а его дополнение $O''\left(u\right) = W \backslash Y'\left(u\right)$ – открытое множество, возможно пустое.

Но если $u = u_P\left(P\left(v\right)\right)$ для некоторого $v \in V$, то в силу второго пункта определения 1 выполняется включение $P\left(v\right) \in O''\left(u_P(P\left(v\right))\right)$, т.е. соответствующее множество $O''\left(u\right)$ не пусто.

Как отмечалось выше, можно считать, что функция P отображает множество V на все множество W. В таком случае семейство открытых множеств $O''\left(u_P\left(P\left(v\right)\right)\right)$, $v \in V$, покрывает компактное пространство W. Значит, из этого семейства можно выбрать конечное покрытие пространства W. Обозначим множества этого покрытия через ${O_1}'', \ldots, {O_n}''$, а соответствующие им управления – через $u_1, \ldots, u_n$. Пусть

$$O_i = \left\{v \in V : g\left(u_i, v\right) > \gamma\right\} \cup \left\{v \in V : h\left(u_i, v\right) < \lambda\right\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

По построению множества $O_0, O_1, \ldots, O_n$ (и даже множества $O_1, \ldots, O_n$) покрывают V. А кроме того, для любого множества $\Omega' \subset {O_i}''$ его полный прообраз $P^{-1}\left(\Omega'\right)$ принадлежит O_i.

Но по условию пространство W имеет размерность m. Значит, в покрытие ${O_1}'', \ldots, {O_n}''$ можно вписать покрытие ${\Omega_0}'', {\Omega_1}'', \ldots, {\Omega_l}''$, кратность которого не превосходит $m+1$. Тогда множества $\Omega_0 = P^{-1}\left({\Omega_0}''\right)$, $\Omega_1 = P^{-1}\left({\Omega_1}''\right), \ldots$ $\ldots, \Omega_l = P^{-1}\left({\Omega_l}''\right)$ образуют покрытие множества V, вписанное в покрытие $O_0, O_1, \ldots, O_n$ и имеющее кратность, не превосходящую $m+1$.

Пространство W предполагается нормальным и имеющим счетную базу. Поэтому для каждого i можно определить функцию $\psi_i : W \to \mathbb{R}$ так, что $\psi_i\left(w\right) > 0$ при $w \in {\Omega_i}''$ и $\psi_i\left(w\right) = 0$ в противном случае (см. [14, с. 82]). Тогда для функций $\psi_i \circ P$ имеем $\varphi_i\left(v\right) > 0$ при $v \in O_i$ и $\varphi_i\left(v\right) = 0$ для остальных v.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Von Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
2. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
3. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.
4. *Bolton P., Dewatripont M.* Contract Theory. Cambridge: The MIT Press, 2004.
5. *Алиев В.С., Цветков А.В.* Игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации // Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: ИПУ, 1985. С. 35–42.
6. *Алиев В.С.* Точное агрегирование информации в многошаговых играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе партнера // Управление большими системами. Вып. 24. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 5–17.
7. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Агрегирование информации в моделях стимулирования // АиТ. 2001. № 4. С. 120–127.

   Novikov D.A., Tsvetkov A.V. Aggregation of Information in Incentive Models // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 4. P. 617–623.
8. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.
9. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации // АиТ. 2011. № 3. С. 124–144.

   Gorelov M.A. Maximal Guaranteed Result for Limited Volume of Transmitted Information // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 3. P. 580–599.
10. *Рашевский П.К.* О догмате натурального ряда // Успехи математических наук, 1973. Т. 28. Вып. 4 (172). С. 243–246.
11. *Алиев В.С., Кононенко А.Ф.* Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях. М.: ВЦ РАН, 1990.
12. *Горелов М.А.* Непрерывные информационные агрегаты в антагонистических играх // Динамика неоднородных систем. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2008. С. 41–57.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
14. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
15. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
16. *Горелов М.А.* Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 3. С. 376–387.
17. *Горелов М.А.* Максимальный гарантированный результат в иерархических играх // Управление большими системами. Вып. 67. М.: ИПУ РАН, 2017. С. 4–31.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 05.05.2020

После доработки 24.08.2020

Принята к публикации 10.09.2020