Автоматика и телемеханика, № 3, 2021

© 2021 г. **П.Ф. ПРЯШНИКОВА, канд. техн. наук (ppf99999@rambler.ru)**
(Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе)

D-РАЗБИЕНИЕ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА ОТ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

Предложен метод построения областей устойчивости многочлена, коэффициенты которого полиномиальным образом зависят от двух вещественных параметров. Метод основан на аппроксимации областей D-разбиения множеством прямоугольников, на каждом из которых многочлен имеет одно и то же число нулей в левой полуплоскости.

Ключевые слова: многочлен, устойчивость, D-разбиение, полиномиальная зависимость.

DOI: 10.31857/S0005231021030028

1. Введение

Одной из задач теории автоматического управления является построение областей устойчивости многочлена

$$a\,(s,\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{n}a_k\,(\alpha,\beta)\,s^k, \tag{1}$$

коэффициенты которого $a_k\,(\alpha,\beta)$ $(k=0,\ldots,n)$ есть функции двух параметров α и β, определенные на множестве $\Lambda\subseteq\mathbb{R}^2$. Решение этой задачи заключается в определении множества устойчивости Λ_s, такого что $\Lambda_s\subseteq\Lambda$ и $((\alpha,\beta)\in\Lambda_s)\Leftrightarrow((a\,(s,\alpha,\beta)=0)\Rightarrow(\mathrm{Re}\,(s)<0))$.

В случае произвольных функций $a_k\,(\alpha,\beta)$ $(k=0,\ldots,n)$ единственным средством решения поставленной задачи является метод перебора [1, с. 107–108; 2, с. 136–137]. Метод перебора заключается в том, что вводится сетка Λ_c, такая что $\Lambda_c\subseteq\Lambda$ и множество Λ_c — конечно. В каждом узле сетки $(\alpha,\beta)\in\Lambda_c$ устойчивость многочлена (1) проверяется с помощью существующих критериев устойчивости, чаще всего — с помощью критериев Рауса или Гурвица. В результате проверки множество Λ_c разбивается на два подмножества $\Lambda_c=\Lambda_{cs}\bigcup\Lambda_{cu}$, где множество Λ_{cs} состоит из параметров (α,β) устойчивого многочлена, а множество Λ_{cu} состоит из параметров (α,β) неустойчивого многочлена. В качестве искомого множества Λ_s принимают множество Λ_{cs}. Недостаток метода перебора заключается в том, что Λ_c есть множество меры нуль и вопрос об устойчивости многочлена (1) в точках множества $\Lambda\backslash\Lambda_c$ остается открытым.

В частных случаях функций $a_k\,(\alpha,\beta)$ $(k=0,\ldots,n)$ задача определения множества устойчивости Λ_s решается аналитически или методом D-разбиения. Для возможности решения задачи аналитическим методом зависимости $a_k\,(\alpha,\beta)$ $(k=0,\ldots,n)$ должны быть настолько простыми, чтобы условия известных критериев устойчивости определяли граничные точки множества Λ_s в виде известных кривых, например алгебраических кривых второго порядка. Наиболее известными такими кривыми являются диаграммы

Вышнеградского. Примеры других кривых приведены в [3, с. 295; 4, с. 406]. Недостаток аналитических методов заключается в узости класса решаемых задач.

Метод D-разбиения обычно используется для линейных зависимостей $a_k(\alpha,\beta) = a_{k,1}\alpha + a_{k,2}\beta + a_{k,0}$ $(a_{k,0}, a_{k,1},\ a_{k,2} \in \mathbb{R})$ $(k = 0,\ldots,n)$. Обзор современного состояния метода D-разбиения и библиография представлены в [5]. В случае линейных зависимостей $a_k(\alpha,\beta)$ может быть найдено параметрическое представление $\alpha = \alpha(\omega)$, $\beta = \beta(\omega)$, $\omega \in [0,+\infty)$, определяющее множество Γ граничных точек подмножеств множества Λ, все точки (α,β) каждого из которых соответствуют одному и тому же числу нулей многочлена (1) в левой полуплоскости. Искомое множество Λ_s есть объединение найденных подмножеств, для которых число нулей многочлена (1) в левой полуплоскости равно n (с учетом кратности нулей). Первый недостаток метода D-разбиения заключается в том, что параметрическое представление $\alpha = \alpha(\omega)$, $\beta = \beta(\omega)$ найдено только для линейной зависимости коэффициентов многочлена (1) от параметров α и β. Для полиномиальной зависимости в [6] предложено использовать методы алгебраической геометрии, позволяющие получить в явном виде уравнение кривой D-разбиения и построить набор точек из каждой связной компоненты D-разбиения. Второй недостаток заключается в том, что функции $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ непрерывного аргумента $\omega \in \in [0,+\infty)$ заменяют сеточными функциями $\alpha(\omega_q)$ и $\beta(\omega_q)$ соответственно $(0 \le \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_Q = \omega_{\max})$. Таким образом, задача построения граничных точек Γ_s искомого множества Λ_s решается методом перебора, недостаток которого отмечен выше.

В статье предлагается метод, который в отличие от известных методов позволяет с заданной точностью ε определить множество устойчивости Λ_s для полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена (1) от двух параметров и при этом не требует замены бесконечных множеств сеточными. В предлагаемом методе использована идея метода D-разбиения о построении множеств, соответствующих одному и тому же числу нулей многочлена (1) в левой полуплоскости. Построение этих областей в предлагаемом методе принципиально отличается от метода D-разбиения, так как не требует получения параметрической зависимости $\alpha = \alpha(\omega)$, $\beta = \beta(\omega)$ и не требует замены бесконечного множества $[0,+\infty)$ сеточным.

2. Постановка задачи

Обозначим $p(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'') = \{(\alpha,\beta) | (\alpha,\beta) \in [\alpha';\alpha''] \times [\beta';\beta''];\ \alpha',\alpha'',\beta',\beta'' \in \in \Lambda;\ \alpha' < \alpha'';\ \beta' < \beta''\}$ — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, являющийся подмножеством множества Λ.

Рассматривается многочлен (1), коэффициенты которого зависят от параметров α и β полиномиальным образом

$$a_k(\alpha,\beta) = \sum_{\mu=0}^{n_{\alpha,k}} \sum_{\nu=0}^{n_{\beta,k}} a_{k\mu\nu}\alpha^{\mu}\beta^{\nu} \quad (k = 0,\ldots,n) \tag{2}$$

на прямоугольнике $\Lambda = p(\alpha_{\min};\ \alpha_{\max};\ \beta_{\min};\ \beta_{\max})$.

Решается задача определения множества устойчивости Λ_s.

Обозначим

$$p_s\left(\alpha', \alpha'', \beta', \beta''\right) =$$
$$= \Big\{ (\alpha, \beta) \,|\, \big((\alpha, \beta) \in p\left(\alpha', \alpha'', \beta', \beta''\right)\big) \wedge \big((a\,(s, \alpha, \beta) = 0) \Rightarrow (\mathrm{Re}\,(s) < 0)\big) \Big\}$$

— прямоугольник на множестве Λ, в каждой точке которого многочлен (1) устойчив, $P_s = \{p_{s,q}\}_{q=1}^{Q_s}$ — упорядоченное множество прямоугольников $p_s\,(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'')$. Предлагается строить множество $\Lambda_r = \bigcup_{p \in P_s} p$ так, чтобы при заданной точности ε построения множества устойчивости Λ_s выполнялось неравенство

$$\rho\,(\Lambda_r, \Lambda_s) \leq \varepsilon, \tag{3}$$

где ρ есть характеристика близости множеств Λ_r и Λ_s. За решение задачи Λ_s предлагается принять множество Λ_r, которое является подмножеством Λ_s и в смысле характеристики (3) отличается от Λ_s на величину, не превосходящую ε. По сути, речь идет о вписывании в множество устойчивости Λ_s прямоугольников $p_{s,q}$ $(q = 1, \ldots, Q_s)$, на каждом из которых многочлен (1) устойчив.

Таким образом, решение задачи заключается в определении характеристики ρ, разработке способа ее вычисления и способа построения прямоугольников $p_{s,q}$ $(q = 1, \ldots, Q_s)$.

3. Теоретическая часть

Предлагаемый метод определения множества устойчивости Λ_s основан на построении множества прямоугольников $P = \{p_q\}_{q=1}^{Q}$, такого что:

1) множество значений параметров $\Lambda = \bigcup_{\mathrm{p} \in P} p$;

2) пересечение каждой пары прямоугольников из множества P есть либо пустое множество, либо одноточечное множество, либо отрезок;

3) множество P включает подмножество $P_a = \{p_{a,q}\}_{q=1}^{Q_a}$, на каждом элементе которого выполняются достаточные условия непрерывности и отсутствия нулей вещественных частей всех нулей многочлена (1);

4) каждый из прямоугольников p множества $P_b = \{p_{b,q}\}_{q=1}^{Q_b} = P \backslash P_a$ имеет диаметр $d_p = \sqrt{(\alpha'' - \alpha')^2 + (\beta'' - \beta')^2}$, не превосходящий заданного значения $d_{\max}$.

Достаточные условия непрерывности вещественных частей нулей многочлена (1) на прямоугольнике p дает теорема 1.

Теорема 1. *Вещественные части всех нулей многочлена* (1) *непрерывны на прямоугольнике* p, *если каждая из точек* $(\alpha, \beta) \in p$ *не является решением уравнения*

$$a_n\,(\alpha, \beta) = 0. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении.

Достаточные условия отсутствия нулей вещественных частей нулей многочлена (1) на прямоугольнике p дает теорема 2.

Теорема 2. *Вещественные части всех нулей многочлена* (1) *не обращаются в нуль на прямоугольнике* p, *если каждая из точек* $(\alpha, \beta) \in p$ *не является решением уравнения* (4) *и совокупности*

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_{n-1}(\alpha, \beta) = 0; \\ a_0(\alpha, \beta) = 0, \end{array}\right. \tag{5}$$

где $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta)$ *есть* $(n-1)$*-й определитель Гурвица.*

Доказательство теоремы 2 дано в Приложении.

Следствие. *Из теорем 1 и 2 непосредственно следует, что прямоугольник* $p \in P_a$, *если каждая из точек* $(\alpha, \beta) \in p$ *не является решением ни одного из уравнений* (4), (5).

Левая часть каждого из уравнений (4), (5) есть многочлен вида

$$\left\{\begin{array}{l} d(\alpha, \beta) = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta); \\ d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = b_{\mu\nu} \alpha^\mu \beta^\nu \quad (b_{\mu\nu} \in \mathbb{R};\ \mu = 0, \ldots, m_\alpha;\ \nu = 0, \ldots, m_\beta)\,. \end{array}\right. \tag{6}$$

Достаточные условия отсутствия нулей многочлена (6) на прямоугольнике p дает теорема 3.

Теорема 3. *Многочлен* (6) *не имеет нулей на прямоугольнике* $p(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'')$, *если выполняется условие*

$$\left\{\begin{array}{l} p(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'') \in P_m; \\ \left[\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d'_{\mu\nu} > 0; \\ \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d''_{\mu\nu} < 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{7}$$

где P_m — *множество прямоугольников, на каждом из которых каждое слагаемое* $d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ $(\mu = 0, \ldots, m_\alpha;\ \nu = 0, \ldots, m_\beta)$ *является монотонной функцией по каждому аргументу,* $d'_{\mu\nu} = \min_{1 \le k \le 4} d_{\mu\nu}(v_k)$, $d''_{\mu\nu} = \max_{1 \le k \le 4} d_{\mu\nu}(v_k)$, $v_1 = (\alpha', \beta'')$, $v_2 = (\alpha'', \beta'')$, $v_3 = (\alpha'', \beta')$, $v_4 = (\alpha', \beta')$.

Доказательство теоремы 3 дано в Приложении.

Для построения множеств P_a и P_b будем рассматривать следующие преобразования.

Деление прямоугольника $p(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'')$ на два прямоугольника:

$$\left\{\begin{array}{l} d_\alpha(p, \lambda):\ p \mapsto \Big\{p'_\alpha = p(\alpha', \lambda, \beta', \beta'')\,;\ p''_\alpha = p(\lambda, \alpha'', \beta', \beta'')\Big\},\ \lambda \in (\alpha', \alpha'')\,; \\ d_\beta(p, \lambda):\ p \mapsto \Big\{p'_\beta = p(\alpha', \alpha'', \beta', \lambda)\,;\ p''_\beta = p(\alpha', \alpha'', \lambda, \beta'')\Big\},\ \lambda \in (\beta', \beta'')\,. \end{array}\right. \tag{8}$$

Деление k-го прямоугольника множества $P = \left\{p_q = p\left(\alpha'_q, \alpha''_q, \beta'_q, \beta''_q\right)\right\}_{q=1}^{Q}$ на два прямоугольника:

$$
(9) \qquad \begin{cases} D_\alpha\left(P, \lambda, k\right):\ p = p_k;\ d_\alpha\left(p, \lambda\right) = \left\{p'_\alpha,\ p''_\alpha\right\}; \\ P \mapsto \left(P \backslash \{p_k\}\right) \cup \left\{p_k = p'_\alpha;\ p_{Q+1} = p''_\alpha\right\}; \quad \lambda \in \left(\alpha', \alpha''\right); \\ D_\beta\left(P, \lambda, k\right):\ p = p_k;\ d_\beta\left(p, \lambda\right) = \left\{p'_\beta,\ p''_\beta\right\}; \\ P \mapsto \left(P \backslash \{p_k\}\right) \cup \left\{p_k = p'_\beta;\ p_{Q+1} = p''_\beta\right\}; \quad \lambda \in \left(\beta', \beta''\right). \end{cases}
$$

Деление k-го прямоугольника множества $P = \left\{p_q = p\left(\alpha'_q, \alpha''_q, \beta'_q, \beta''_q\right)\right\}_{q=1}^{Q}$ по стороне с наибольшей длиной на два равновеликих прямоугольника:

$$
(10) \qquad D\left(P, k\right) = \begin{cases} D_\alpha\Big(P, (\alpha'_k + \alpha''_k)/2, k\Big), & \text{если } \ \alpha''_k - \alpha'_k \geq \beta''_k - \beta'_k; \\ D_\beta\Big(P, (\beta'_k + \beta''_k)/2, k\Big), & \text{если } \ \alpha''_k - \alpha'_k < \beta''_k - \beta'_k. \end{cases}
$$

Перемещение k-го прямоугольника множества $P = \{p_q\}_{q=1}^{Q}$ в множество $\tilde{P} = \{\tilde{p}_q\}_{q=1}^{\tilde{Q}}$:

$$
(11) \qquad \begin{gathered} M\left(P, \tilde{P}, k\right): p = p_k; \\ \begin{pmatrix} P \\ \tilde{P} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P \backslash \{p_k\};\ p_q = p_{q+1}\ (q = k, \ldots, Q-1) \\ \tilde{P} \cup \left\{\tilde{p}_{\tilde{Q}+1} = p\right\} \end{pmatrix}. \end{gathered}
$$

На основании теорем 1–3 и преобразований (8)–(11) предлагается *алгоритм* построения множеств P_a и P_b:

1. Положим $P_a = \varnothing$, $P_b = \{\Lambda\}$, $q = 0$.

2. Преобразуем множество P_b так, чтобы выполнялось включение $P_b \subseteq P_m$. С этой целью последовательно находим: $P_b = D_\alpha\left(P_b, 0{,}1\right)$, если $\alpha_{\min} < 0 < \alpha_{\max}$; $P_b = D_\beta\left(P_b, 0{,}1\right)$, если $\beta_{\min} < 0 < \beta_{\max}$; $P_b = D_\beta\left(P_b, 0{,}2\right)$, если $\alpha_{\min} < 0 < \alpha_{\max}$ и $\beta_{\min} < 0 < \beta_{\max}$.

3. Положим $q := q + 1$.

4. Если $q > Q_b$, заканчиваем выполнение алгоритма.

5. Если на прямоугольнике $p_{b,q}$ для каждого из уравнений (4), (5) теорем 1 и 2 выполняются условия теоремы 3, то с помощью преобразования (11) $M\left(P_b, P_a, q\right)$ перемещаем прямоугольник $p_{b,q}$ из множества P_b в множество P_a и переходим к п. 4.

6. Если $d_{p,q} \leq d_{\max}$, то переходим к п. 3.

7. С помощью преобразования (10) $D(P_b, q)$ производим деление прямоугольника $p_{b,q}$ по стороне с наибольшей длиной на два равновеликих прямоугольника и переходим к п. 5.

По построению на каждом прямоугольнике $p_a \in P_a$ выполняются условия теоремы 4.

Т е о р е м а 4. Если вещественные части $\mathrm{Re}S\,(\alpha,\beta)$ *всех нулей многочлена* (1) *при полиномиальной зависимости* (2) *непрерывны и не обращаются в нуль на прямоугольнике* $p\,(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'')$, *то на этом прямоугольнике все вещественные части* $\mathrm{Re}S\,(\alpha,\beta)$ *сохраняют знак.*

Доказательство теоремы 4 дано в Приложении.

По теореме 4 во всех точках $(\alpha,\beta)\in p_a$ многочлен (1) имеет одно и то же число нулей в левой полуплоскости. Проверяя устойчивость многочлена (1) в одной из точек каждого прямоугольника $p_a\in P_a$, представим множество P_a в виде $P_a=P_r\cup P_u$, где P_r есть множество устойчивых прямоугольников, P_u есть множество неустойчивых прямоугольников.

Точку (α_g,β_g) будем называть граничной, если она является решением хотя бы одного из уравнений (4), (5). Граничные точки D-разбиения образуют подмножество множества граничных точек (α_g,β_g). Достаточное условие принадлежности граничной точки (α_g,β_g) прямоугольнику $p\,(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'')$ дает теорема 5.

Т е о р е м а 5. Прямоугольник $p\,(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'')$ *содержит граничную точку* (α_g,β_g), *если хотя бы один из многочленов уравнений* (4), (5) *принимает в точках* $v_1=(\alpha',\beta'')$, $v_2=(\alpha'',\beta'')$, $v_3=(\alpha'',\beta')$, $v_4=(\alpha',\beta')$ *значения разных знаков.*

Доказательство теоремы 5 дано в Приложении.

Множество P_b представим в виде $P_b=P_g\cup P_x$, где P_g есть множество прямоугольников, для которых выполняются условия теоремы 5, P_x есть множество прямоугольников, для которых не выполняются условия теоремы 5. Множество P_g примем в качестве граничного.

Таким образом множество Λ можно представить в виде $\Lambda=\Lambda_r\cup\Lambda_u\cup\Lambda_g\cup\cup\Lambda_x$, где $\Lambda_r=\bigcup_{\mathrm{p}\in P_r}p$ есть объединение устойчивых прямоугольников, $\Lambda_u==\bigcup_{\mathrm{p}\in P_u}p$ есть объединение неустойчивых прямоугольников, $\Lambda_g=\bigcup_{\mathrm{p}\in P_g}p$ есть объединение прямоугольников диаметра не более $d_{\max}$, содержащих по крайней мере одну граничную точку, $\Lambda_x=\bigcup_{\mathrm{p}\in P_x}p$ есть объединение прямоугольников диаметра не более $d_{\max}$, для которых не выполняются условия принадлежности к одному из множеств P_r, P_u, P_g.

Для искомого множества устойчивости Λ_s справедливы включения

$$\begin{cases}\Lambda_r\subseteq\Lambda_s;\\ \Lambda_s\subseteq\Lambda_r\cup\Lambda_g\cup\Lambda_x.\end{cases}\tag{12}$$

Как было отмечено выше, за область устойчивости будем принимать Λ_r. Из (12) следует, что Λ_r отличается от Λ_s не более чем на $\Lambda_g\cup\Lambda_x$. Поэтому за критерий близости множеств Λ_r и Λ_s предлагается принять

$$\rho\,(\Lambda_r,\Lambda_s)=\begin{cases}S(\Lambda_g)+S\,(\Lambda_x)\,, & \text{если}\quad \Lambda_r=\varnothing;\\ (S(\Lambda_g)+S\,(\Lambda_x))/S\,(\Lambda_r)\,, & \text{если}\quad \Lambda_r\neq\varnothing,\end{cases}\tag{13}$$

где $S(\Omega)$ есть площадь множества Ω. Все площади множеств (13) легко вычисляются, так как каждое из множеств есть объединение прямоугольников.

Следующая теорема гарантирует, что для любой точки устойчивости $(\alpha_0, \beta_0) \in \Lambda$ многочлена $a(s, \alpha, \beta)$ существует такое $d_{\max}$, что эта точка будет накрыта устойчивым прямоугольником $p_0 \in P_r$.

Теорема 6. *Если многочлен $a(s, \alpha, \beta)$ устойчив в точке $(\alpha_0, \beta_0) \in \Lambda$, то существует такое положительное вещественное число d, что для любого $d_{\max} \in (0; d)$ существует устойчивый прямоугольник $p_0 \in P_r$, такой что $(\alpha_0, \beta_0) \in p_0$.*

Доказательство теоремы 6 дано в Приложении.

Объем вычислений предложенного метода определяется числом арифметических операций v_1 и v_2, необходимых для построения соответственно многочлена $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta)$ и множества прямоугольников $P = P_a \cup P_b$. Значение v_1 возрастает при увеличении степеней многочленов $a(s, \alpha, \beta)$, $a_k(\alpha, \beta)$ $(k = 0, \ldots, n)$ и зависит от способа вычисления определителя $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta)$. Значение $v_2 = \left(O\left(n^3\right) + O(n_1) + O(n_2) + O(n_3)\right) \cdot O(Q)$, где $O\left(n^3\right)$ — число арифметических операций, необходимых для построения таблицы Рауса, $O(n_1)$, $O(n_2)$, $O(n_3)$ — число арифметических операций, необходимых для проверки выполнения условий (7) для многочленов соответственно уравнений (4) и (5), n — степень многочлена $a(s, \alpha, \beta)$; n_1, n_2, n_3 — число слагаемых многочленов левых частей соответственно уравнений (4) и (5); $O(\cdot)$ — символ “O – большое” [7, с. 164]; Q — число элементов множества P. Значение v_2 возрастает при увеличении степеней многочленов $a(s, \alpha, \beta)$, $a_k(\alpha, \beta)$ $(k = 0, \ldots, n)$. Значение Q возрастает при увеличении сложности границы D-разбиения и уменьшении $d_{\max}$. Сложность границы D-разбиения определяется степенями и коэффициентами многочленов уравнений (4) и (5), причем, как показывают примеры 1–3, доминирующей может быть зависимость от коэффициентов. Значение $d_{\max}$ выбирается путем последовательного уменьшения до достижения заданной точности аппроксимации множества устойчивости Λ_s множеством прямоугольников Λ_r. При уменьшении $d_{\max}$ сохраняются все устойчивые прямоугольники, найденные ранее. Величина $\rho(\Lambda_r, \Lambda_s)$ есть верхняя оценка возможного увеличения площади множества устойчивых прямоугольников при дальнейшем уменьшении $d_{\max}$. Пример 1 иллюстрирует возможность применения предложенного метода с использованием ПЭВМ при достаточно высоких степенях многочленов $a(s, \alpha, \beta)$, $a_k(\alpha, \beta)$ $(k = 0, \ldots, n)$. В примере 1 при $d_{\max} = 10^{-3}$ площадь множества устойчивых прямоугольников при дальнейшем уменьшении $d_{\max}$ может увеличиться не более чем на 61,8 %, а при $d_{\max} = 10^{-4}$ может увеличиться не более чем на 3,38 %.

Вычислительные алгоритмы предложенного метода допускают параллельные вычисления, что может быть использовано для снижения времени решения задачи построения областей устойчивости.

4. Результаты численного эксперимента

Предложенный метод построения областей устойчивости реализован в виде прикладной компьютерной программы в среде разработки Embarcadero RAD Studio. С помощью разработанной программы решены задачи построения областей устойчивости различного уровня сложности. На рис. 2, 4 и 6 множество Λ_r выделено белым цветом, множество Λ_u выделено оттенками

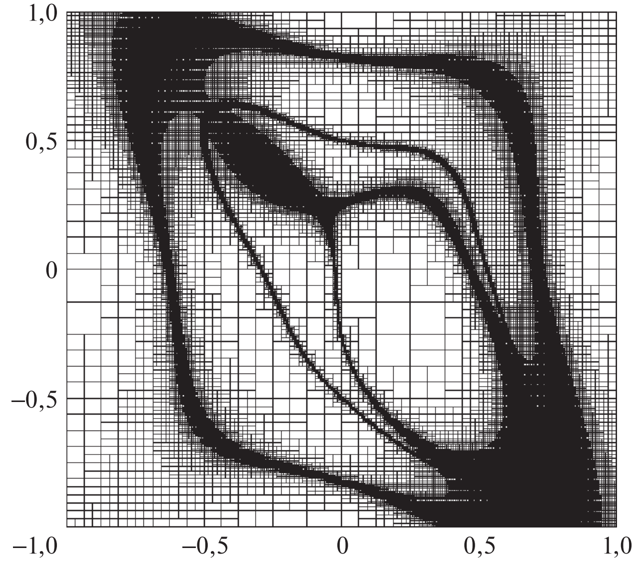

Рис. 1. Множество P примера 1.

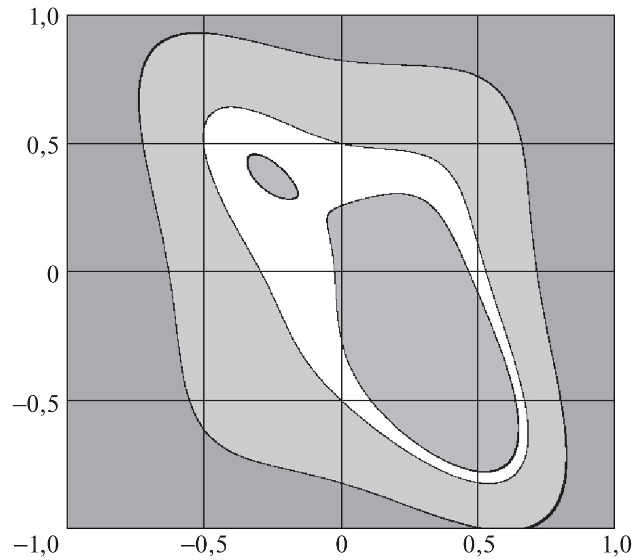

Рис. 2. D-разбиение примера 1.

серого цвета, множества Λ_g и Λ_x выделены черным цветом. Оттенки серого цвета соответствуют различному числу нулей многочлена в правой полуплоскости.

В *примере 1* решена задача построения областей устойчивости в пространстве параметров $(\alpha, \beta) \in [-1; 1] \times [-1; 1]$ многочлена $a(s, \alpha, \beta) = 10(1 + 3\alpha - 10\alpha\beta + 2\alpha^2 + 16\alpha^2\beta^2 - 40\alpha^4 - 16\beta^4) + 10s + 14s^2 + 11s^3 + 5{,}3s^4 + 1{,}6s^5 + 0{,}32s^6 + 0{,}039s^7 + 10^{-4}(27 - \alpha^4 + \beta^2 + \alpha^5\beta^7) \cdot s^8 + 10^{-5}(8 + 1{,}5\alpha\beta + \alpha^2 - 2\beta^2) \cdot s^9$. Левые части уравнений (4), (5) имеют соответственно вид $a_9(\alpha, \beta) = 10^{-5}(8 +$

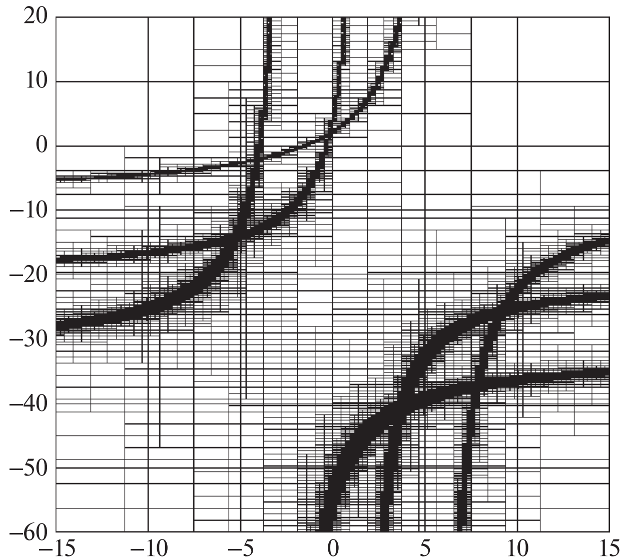

Рис. 3. Множество P примера 2.

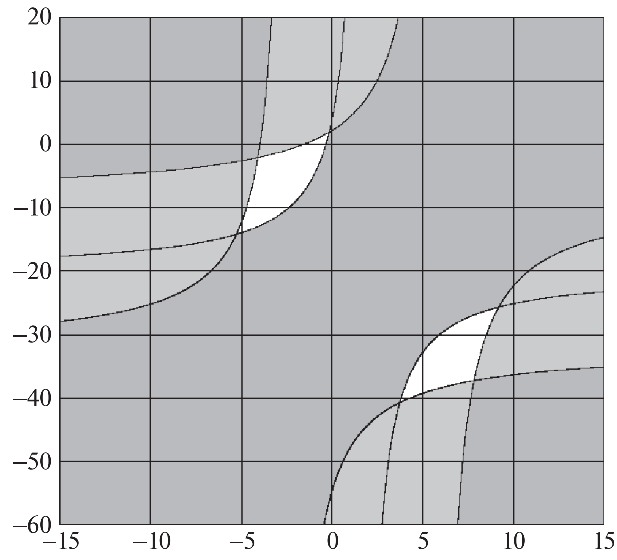

Рис. 4. D-разбиение примера 2.

$+1{,}5\alpha\beta+\alpha^2-2\beta^2)$, $a_0(\alpha,\beta)=10(1+3\alpha-10\alpha\beta+2\alpha^2+16\alpha^2\beta^2-40\alpha^4-16\beta^4)$, $\Delta_8(\alpha,\beta)=-0{,}00065075+\cdots+1{,}0486\cdot10^{-10}\beta^{24}+\cdots-1{,}892\cdot\alpha\beta^{19}+\cdots+$ $+10^{-12}\alpha^{20}\beta^{28}+\cdots+2{,}56\cdot10^{-10}\alpha^{24}$ есть многочлен 48-й степени, включающий 454 слагаемых. Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max}=10^{-4}$ приведено на рис. 1, изображение D-разбиения — на рис. 2. Множество P содержит 2809726 прямоугольников, $\rho\,(\Lambda_r,\Lambda_s)=0{,}0338$. При $d_{\max}=10^{-3}$ множество P содержит 159760 прямоугольников, $\rho\,(\Lambda_r,\Lambda_s)=0{,}618$.

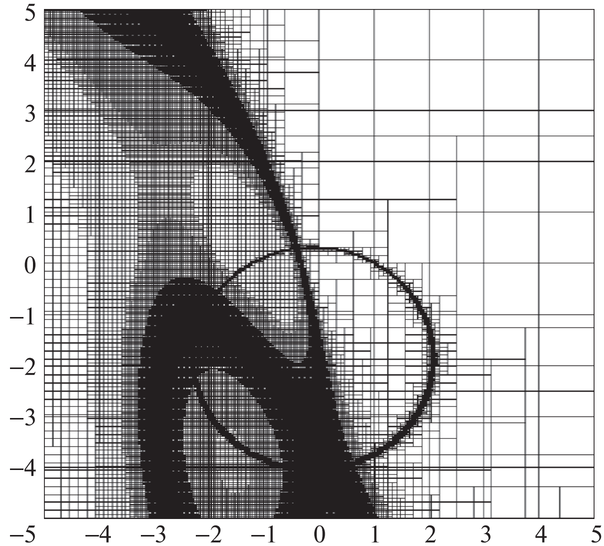

Рис. 5. Множество P примера 3.

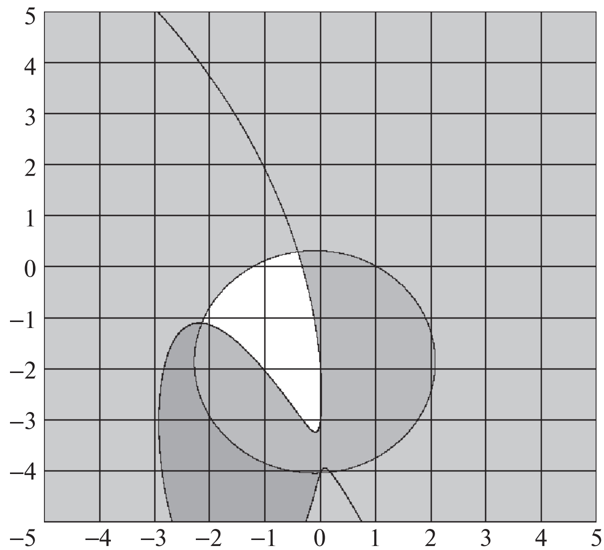

Рис. 6. D-разбиение примера 3.

В *примере 2* решена задача построения областей устойчивости в пространстве параметров $(\alpha, \beta) \in [-15; 15] \times [-60; 20]$ дискретной системы $A + B \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + C$, где $A = \begin{pmatrix} -0{,}8848 & 0{,}4457 \\ -0{,}8733 & -0{,}9326 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0{,}3914 & 0{,}2508 \\ -0{,}5576 & 0{,}0266 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0{,}1514 & 0{,}7854 \\ -0{,}4255 & -0{,}8148 \end{pmatrix}$ [5, с. 24, пример 7]. Характеристический многочлен непрерывного аналога рассматриваемой дискретной системы имеет вид $a(s, \alpha, \beta) = (49{,}6243 + 32{,}4534\alpha - 22{,}8882\beta + 3{,}95979\alpha\beta) + (-53{,}5986 - 159{,}577\alpha +$

$+ 13{,}6791\beta - 7{,}91957\alpha\beta)s + (503{,}974 + 9{,}2091\alpha + 127{,}124\beta + 3{,}95979\alpha\beta)s^2$. Левые части уравнений (4), (5) имеют соответственно вид $a_2(\alpha, \beta) = 503{,}974 + 9{,}2091\alpha + 127{,}124\beta + 3{,}95979\alpha\beta$, $a_0(\alpha, \beta) = 49{,}6243 + 32{,}4534\alpha - 22{,}8882\beta + 3{,}95979\alpha\beta$, $\Delta_1(\alpha, \beta) = -53{,}5986 - 159{,}577\alpha + 13{,}6791\beta - 7{,}91957\alpha\beta$. Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 10^{-4}$ приведено на рис. 3, изображение D-разбиения — на рис. 4. Множество P содержит 291837 прямоугольников, $\rho(\Lambda_r, \Lambda_s) = 0{,}078$.

В *примере 3* решена задача построения областей устойчивости в пространстве параметров $(\alpha, \beta) \in [-5; 5] \times [-5; 5]$ обратной связи $K = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ системы непрерывного времени, заданной матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 79 & 20 & -30 & -20 \\ -41 & -12 & 17 & 13 \\ 167 & 40 & -60 & -38 \\ 33{,}5 & 9 & -14{,}5 & -11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}219 & 0{,}9346 \\ 0{,}047 & 0{,}3835 \\ 0{,}6789 & 0{,}5194 \\ 0{,}6793 & 0{,}831 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}0346 & 0{,}5297 & 0{,}0077 & 0{,}0668 \\ 0{,}0535 & 0{,}6711 & 0{,}3834 & 0{,}4175 \end{pmatrix}$$

[6, с. 46, пример 4]. Характеристический многочлен этой системы $a(s, \alpha, \beta) = (-39{,}115\beta^2 - 146{,}0203\beta - 39{,}115\alpha^2 - 7{,}8565\alpha + 49{,}2585) + (-13{,}8017\beta^2 - 101{,}223\beta - 13{,}8017\alpha^2 - 366{,}9898\alpha - 116{,}492)s + (0{,}1023\beta^2 + 13{,}3905\beta + 0{,}1023\alpha^2 - 34{,}9711\alpha + 62{,}5862)s^2 + (-0{,}8821\beta - 0{,}7704\alpha + 3{,}0635)s^3 + s^4$. Левые части уравнений (4), (5) имеют соответственно вид $a_4(\alpha, \beta) = 1$, $a_0(\alpha, \beta) = -39{,}115\beta^2 - 146{,}0203\beta - 39{,}115\alpha^2 - 7{,}8565\alpha + 49{,}2585$, $\Delta_3(\alpha, \beta) = -36367{,}1 - 39702\beta - 13793\beta^2 - 1521{,}69\beta^3 + 7{,}77969\beta^4 + 1{,}24545\beta^5 - 137463\alpha - 56555\alpha\beta - 5815{,}47\alpha\beta^2 - 189{,}119\alpha\beta^3 + 1{,}08776\alpha\beta^4 - 86405{,}5\alpha^2 - 12995{,}7\alpha^2\beta - 506{,}74\alpha^2\beta^2 + 2{,}4909\alpha^2\beta^3 - 18159{,}2\alpha^3 - 189{,}119\alpha^3\beta + 2{,}17547\alpha^3\beta^2 - 514{,}515\alpha^4 + 1{,}24545\alpha^4\beta + 1{,}08774\alpha^5$. Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 10^{-5}$ приведено на рис. 5, изображение D-разбиения — на рис. 6. Множество P содержит 16261342 прямоугольника, $\rho(\Lambda_r, \Lambda_s)= 0{,}00899$.

5. Заключение

В статье предложен новый метод построения областей устойчивости многочлена в пространстве двух параметров, от которых коэффициенты многочлена зависят полиномиальным образом. Предложенный метод и разработанное программное обеспечение могут быть использованы при решении научных и инженерных задач параметрического анализа и синтеза систем управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Если $\forall\,(\alpha, \beta) \in p$ имеет место неравенство $a_n\,(\alpha, \beta) \neq 0$, то на прямоугольнике p нули многочлена (1) являются непрерывными функциями его коэффициентов a_k $(k = 0, \ldots, n)$ [8, с. 252–253]. В свою очередь коэффициенты a_k $(k = 0, \ldots, n)$ при полиномиальной зависимости (2) являются непрерывными функциями переменных α

и β в $\mathbb{R}^2$. Тогда по теореме о непрерывности композиции функций [7, с. 492] нули многочлена (1) являются непрерывными функциями переменных α и β на прямоугольнике p. Из непрерывности нулей следует непрерывность их вещественных частей.

Покажем, что в точках (α, β), в которых $a_n(\alpha, \beta) = 0$, вещественные части нулей многочлена (1) могут иметь бесконечный предел. Сделаем замену переменной $s = \frac{1}{\xi}$, которая при $\xi \neq 0$ отображает многочлен (1) в функцию $f(\xi, \alpha, \beta) = \varphi(\xi, \alpha, \beta)/\xi^n$, где $\varphi(\xi, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(\alpha, \beta)\,\xi^k$. В точках (α, β), в которых $a_0(\alpha, \beta) \neq 0$, нули многочлена $\varphi(\xi, \alpha, \beta)$ есть непрерывные функции переменных α и β. В силу непрерывности, если $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to(\alpha_0,\beta_0)} a_n(\alpha, \beta) = 0$, то при $(\alpha, \beta) \to (\alpha_0, \beta_0)$ у многочлена $\varphi(\xi, \alpha, \beta)$ существует бесконечно малый нуль ξ. При этом у многочлена (1) существует бесконечно большой нуль $s = \frac{1}{\xi}$, вещественная часть которого может стремиться к бесконечности, т.е. не являться непрерывной в точке (α_0, β_0). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим утверждения: A — точка (α, β) не является решением совокупности (5), B — вещественные части нулей многочлена (1) не обращаются в нуль в точке (α, β). Справедливо утверждение $(\text{A} \Rightarrow \text{B}) \Leftrightarrow (\neg\text{A} \Rightarrow \neg\text{B})$, в силу которого доказательство справедливости требуемого утверждения $\text{A} \Rightarrow \text{B}$ заменим доказательством справедливости равносильного утверждения $\neg\text{B} \Rightarrow \neg\text{A}$. Если имеет место утверждение $\neg\text{B}$, при котором в точке (α, β) существует нуль s многочлена (1), вещественная часть которого равна нулю, то имеет место равенство $s = i\omega$ $(\omega \in \mathbb{R})$. При $\omega \neq 0$ у многочлена (1) с вещественными коэффициентами существует комплексно-сопряженный нуль $\overline{s} = -i\omega$, отличный от s. По условию теоремы $a_n(\alpha, \beta) \neq 0$ и тогда имеет место формула Орландо [9, с. 465]: $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta) = (-1)^{n(n+1)/2} a_n^{n-1}(\alpha, \beta) \cdot \prod_{k<q}^{1,\ldots,n} (s_k(\alpha, \beta) + s_q(\alpha, \beta))$. Так как $s + \overline{s} = 0$, то из формулы Орландо следует $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta) = 0$. Если $\omega = 0$, то многочлен (1) имеет нуль $s = 0$, откуда следует $a_0(\alpha, \beta) = 0$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. По условию теоремы каждое слагаемое $d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ $(\mu = 0, \ldots, m_\alpha; \nu = 0, \ldots, m_\beta)$ является монотонной функцией по каждому аргументу на прямоугольнике p, следовательно принимает наибольшее и наименьшее значения в вершинах прямоугольника, так что $d'_{\mu\nu} = \min_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$, $d''_{\mu\nu} = \max_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$. Тогда для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ имеют место неравенства

$$\left\{\begin{aligned} d(\alpha, \beta) &= \sum_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \geq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum_{\nu=0}^{m_\beta} d'_{\mu\nu}; \\ d(\alpha, \beta) &= \sum_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \leq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum_{\nu=0}^{m_\beta} d''_{\mu\nu}. \end{aligned}\right. \tag{П.1}$$

Если выполняется первое из неравенств совокупности (7), то из первого неравенства системы (П.1) следует, что $d(\alpha, \beta) > 0$ для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ и, следовательно, многочлен $d(\alpha, \beta)$ не имеет нулей на прямоугольнике p. Если выполняется второе из неравенств совокупности (7), то из второго неравенства системы (П.1) следует, что $d(\alpha,\beta)<0$ для любой точки $(\alpha,\beta)\in p$ и, следовательно, многочлен $d(\alpha,\beta)$ не имеет нулей на прямоугольнике p. Теорема 3 доказана.

Для доказательства теорем 4 и 5 используется теорема П.1.

Теорема П.1 [7, с. 495]. *Если функция $f: E\to\mathbb{R}$, непрерывная на связном множестве E, принимает в точках $a,b\in E$ значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется точка $c\in E$, в которой $f(c)=C$.*

Доказательство теоремы 4. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, рассмотрим утверждения: A — непрерывные вещественные части $\mathrm{Re}S(\alpha,\beta)$ всех нулей многочлена (1) не обращаются в нуль на прямоугольнике p, B — все вещественные части $\mathrm{Re}S(\alpha,\beta)$ сохраняют знак на прямоугольнике p. Заменим доказательство справедливости требуемого утверждения A $\Rightarrow$ B доказательством справедливости равносильного утверждения $\neg B\Rightarrow\neg A$. Предположим, что имеет место утверждение $\neg B$, при котором на прямоугольнике p существуют точки (α_1,β_1) и (α_2,β_2), в одной из которых функции $\mathrm{Re}S(\alpha,\beta)$ положительна, а в другой — отрицательна. Если в теореме П.1 положить $E=p$, $f=\mathrm{Re}S(\alpha,\beta)$, $a=(\alpha_1,\beta_1)$, $b=(\alpha_2,\beta_2)$, $A=\mathrm{Re}S(\alpha_1,\beta_1)$, $B=\mathrm{Re}S(\alpha_2,\beta_2)$, $C=0$, то будут выполнены все условия этой теоремы. Тогда по теореме П.1 на прямоугольнике p существует точка $c=(\alpha_0,\beta_0)$, в которой $\mathrm{Re}S(\alpha_0,\beta_0)=0$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. По условию теоремы существует пара точек, например v_1,v_2, в которых один из многочленов $d(\alpha,\beta)$ принимает значения разных знаков. Тогда теорема 5 является прямым следствием теоремы П.1, если положить $E=p$, $f=d(\alpha,\beta)$, $a=v_1$, $b=v_2$, $A=d(v_1)$, $B=d(v_2)$, $C=0$. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим многочлен (6), каждое слагаемое которого $d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ $(\mu=0,\ldots,m_\alpha;\ \nu=0,\ldots,m_\beta)$ есть непрерывная функция аргументов α и β. В силу непрерывности для точки $(\alpha_0,\beta_0)\in\mathbb{R}^2$ и для любого $\varepsilon>0$ существует круг $V_{r_{\mu\nu}}(\alpha_0,\beta_0)=$ $=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2}\le r_{\mu\nu}\right\}$ радиуса $r_{\mu\nu}>0$ с центром в точке (α_0,β_0), такой что $\forall(\alpha,\beta)\in V_{r_{\mu\nu}}(\alpha_0,\beta_0)$ выполняется неравенство $|d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)-d_{\mu\nu}(\alpha_0,\beta_0)|<\varepsilon$. Если положить $r=\min\{r_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu=0}^{\mu=m_\alpha;\ \nu=m_\beta}$, то на круге $V_r(\alpha_0,\beta_0)=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2}\le r\right\}$ выполняется система неравенств

$$|d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)-d_{\mu\nu}(\alpha_0,\beta_0)|<\varepsilon\,(\mu=0,\ldots,m_\alpha;\quad \nu=0,\ldots,m_\beta)\,. \tag{П.2}$$

Круг $V_r(\alpha_0,\beta_0)$ есть компакт, в силу чего непрерывная функция $d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ достигает на круге своих наименьшего и наибольшего значений $d_{\mu\nu,\min}=$ $=\min\limits_{(\alpha,\beta)\in V_r(\alpha_0,\beta_0)} d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)=d_{\mu\nu}(\alpha_{\mu\nu,\min},\beta_{\mu\nu,\min})$; $d_{\mu\nu,\max}=\max\limits_{(\alpha,\beta)\in V_r(\alpha_0,\beta_0)} d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)=$ $=d_{\mu\nu}(\alpha_{\mu\nu,\max},\beta_{\mu\nu,\max})$, где $(\alpha_{\mu\nu,\min},\beta_{\mu\nu,\min})\in V_r(\alpha_0,\beta_0)$ и $(\alpha_{\mu\nu,\max},\beta_{\mu\nu,\max})\in$

$\in V_r(\alpha_0, \beta_0)$. Тогда при $(\alpha, \beta) = (\alpha_{\mu\nu,\min}, \beta_{\mu\nu,\min})$ неравенства (П.2) принимают вид

$$d_{\mu\nu}(\alpha_0, \beta_0) - d_{\mu\nu,\min} < \varepsilon\,(\mu = 0, \ldots, m_\alpha; \quad \nu = 0, \ldots, m_\beta)\,, \tag{П.3}$$

при $(\alpha, \beta) = (\alpha_{\mu\nu,\max}, \beta_{\mu\nu,\max})$ неравенства (П.2) принимают вид

$$d_{\mu\nu,\max} - d_{\mu\nu}(\alpha_0, \beta_0) < \varepsilon\,(\mu = 0, \ldots, m_\alpha; \quad \nu = 0, \ldots, m_\beta)\,. \tag{П.4}$$

Суммируя неравенства (П.3) по $\mu = 0, \ldots, m_\alpha$, $\nu = 0, \ldots, m_\beta$, получим в качестве следствия неравенство $\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha_0, \beta_0) - \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\min} <$ $< (m_\alpha + 1)\,(m_\beta + 1)\,\varepsilon$, равносильное неравенству

$$\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\min} > d\,(\alpha_0, \beta_0) - (m_\alpha + 1)\,(m_\beta + 1)\,\varepsilon. \tag{П.5}$$

Аналогично из неравенств (П.4) следует неравенство

$$\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\max} < d\,(\alpha_0, \beta_0) + (m_\alpha + 1)\,(m_\beta + 1)\,\varepsilon. \tag{П.6}$$

Если $d(\alpha_0, \beta_0) > 0$, то можно положить $\varepsilon = d(\alpha_0, \beta_0)(2(m_\alpha + 1)(m_\beta + 1))^{-1}$, и тогда из неравенства (П.5) следует, что существует круг $V_{r'}(\alpha_0, \beta_0)$, на котором выполняется неравенство

$$\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\min} > \frac{d\,(\alpha_0, \beta_0)}{2} > 0. \tag{П.7}$$

Если $d(\alpha_0, \beta_0) < 0$, то можно положить $\varepsilon = -d(\alpha_0, \beta_0)(2(m_\alpha + 1)(m_\beta + 1))^{-1}$, и тогда из неравенства (П.6) следует, что существует круг $V_{r''}(\alpha_0, \beta_0)$, на котором выполняется неравенство

$$\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\max} < \frac{d\,(\alpha_0, \beta_0)}{2} < 0. \tag{П.8}$$

Из устойчивости многочлена $a\,(s, \alpha, \beta)$ в точке (α_0, β_0) по критерию устойчивости Гурвица следует, что все значения $a_0\,(\alpha_0, \beta_0)$, $a_n\,(\alpha_0, \beta_0)$, $\Delta_{n-1}\,(\alpha_0, \beta_0)$ или все положительны, или все отрицательны. Каждая из функций $a_0\,(\alpha, \beta)$, $a_n\,(\alpha, \beta)$, $\Delta_{n-1}\,(\alpha, \beta)$ есть многочлен вида (6), в силу чего для этих функций существует круг $V_r\,(\alpha_0, \beta_0)$, на котором выполняется одно из неравенств (П.7) или (П.8). Положим $d = r$, выберем $d_{\max} \in (0; d)$ и построим множество прямоугольников $P = P_a \cup P_b$. Пусть p есть прямоугольник из множества P, которому принадлежит точка (α_0, β_0). Если предположить, что прямоугольник $p \in P_b$, то справедливо неравенство $d_p \le d_{\max} < d$, следовательно $p \subseteq V_r\,(\alpha_0, \beta_0)$. Тогда на прямоугольнике p выполняется одно из неравенств (П.7) или (П.8) и, следовательно, $p \in P_a$. Полученное противоречие доказывает, что $p \in P_a$. На каждом прямоугольнике множества P_a многочлен $a\,(s, \alpha, \beta)$ или устойчив, или неустойчив. Поскольку многочлен $a\,(s, \alpha, \beta)$ устойчив в точке $(\alpha_0, \beta_0) \in p$, то p есть устойчивый прямоугольник, покрывающий точку (α_0, β_0). Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чернецкий В.И., Дидук Г.А., Потапенко А.А.* Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. Л.: Энергия, 1970.
2. *Савин М.М., Елсуков В.С., Пятина О.Н.* Теория автоматического управления. Ростов на Дону: Феникс, 2007.
3. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005.
4. *Dorf R., Bishop R.* Modern Control Systems. New Jersey: Prentice Hall, 2011.
5. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // АиТ. 2008. № 2. С. 3–40.

   Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. D-decomposition Technique State-of-the-art // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
6. *Васильев О.О.* Исследование D-разбиений методами вычислительной вещественной алгебраической геометрии // АиТ. 2012. № 12. С. 36–55.

   Vasil'ev O.O. Study of D-decompositions by the Methods of Computational Real-valued Algebraic Geometry // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 12. P. 1978–1993.
7. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 1. М.: МЦНМО, 2012.
8. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2000.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 11.08.2017

После доработки 10.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020