

© 2021 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург),
П.А. ГУЩИН, канд. техн. наук (guschin.p@mail.ru)
(Губкинский университет, Москва)

ДИСКРЕТНОЕ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ УПРАВЛЕНИЕ СКАЛЯРНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ¹

Предложен дискретный по пространственной переменной закон управления некоторым классом систем, которые описываются скалярными линейными дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов с неизвестными параметрами и возмущениями. Доступно конечное множество дискретных измерений (по пространственной переменной) состояния объекта. Закон управления зависит от функции, которая зависит от пространственной переменной и от конечного набора измерений состояния объекта. Приведены примеры данной функции, которая позволяет реализовать управляющий сигнал лишь на отдельных интервалах по пространственной переменной и обеспечивать меньшие затраты на управление по сравнению с некоторыми другими аналогами. Доказана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы и робастность по отношению к интервально неопределенным параметрам объекта и внешним ограниченным возмущениям. Численные примеры моделирования подтвердили результаты расчетов и показали эффективность предложенного алгоритма по сравнению с некоторыми существующими аналогами.

Ключевые слова: статический закон управления, линейное дифференциальное уравнение в частных производных, функционал Ляпунова, линейное матричное неравенство, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231021030041

1. Введение

В статье рассматривается некоторый класс линейных дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов с распределенным управлением. Такие уравнения могут описывать, например, конвекционно-диффузионные процессы, вращающуюся стойку компрессора с приводом впрыска воздуха, распространение тепла в стержне, колебание струны и т.д.

¹ Результаты раздела 3 получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН. Результаты разделов 4 и 5 получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00246) в ИПМаш РАН. Результаты разделов 6 и 7 получены при поддержке гранта Президента РФ (проект № МД-1054.2020.8) в ИПМаш РАН.

Реализуемое конечномерное управление с использованием преобразования Фурье и метода Галеркина рассмотрено в публикациях [1–3]. Для линейных параболических систем в [4] предложен метод управления, основанный на движущихся датчиках и актуаторах вдоль пространственной координаты. В [5, 6] для подобных систем предложено адаптивное управление с использованием процедуры бэкстеппинга, которое достаточно трудоемко в расчете и реализации.

В отличие от [1–6] в настоящей статье будет предложен способ формирования закона управления с использованием дискретизации сигнала измерения по пространственной переменной. Для конечномерных систем подобный подход изучался в течение нескольких последних десятилетий в качестве дискретизации по уровню измеряемого сигнала [7–10] и др. В отличие от непрерывного управления, такое дискретное управление не учитывает поведение объекта между выборками, зато в ряде случаев оно позволяет решить ряд технических задач: управление через цифровые каналы связи, управление с ограничением на информационные каналы связи и т.п. В данной статье дискретизация по пространственной переменной позволит получить реализуемый сигнал управления.

Наблюдаемость систем с дискретными пространственными измерениями изучена в [11]. Дискретное по пространственной переменной управление бесконечномерными системами рассмотрено, например, в [12–15]. Методы [12, 13] неприменимы к неизвестным параметрам системы и не содержат количественного анализа устойчивости замкнутой системы и скорости сходимости решений. В отличие от [12, 13] в [14, 15] предложен метод управления системами параболического типа с неизвестными параметрами с использованием линейных матричных неравенств (ЛМН) для анализа экспоненциальной устойчивости. Однако решения [12–15] не учитывают наличие возмущений.

В настоящей статье, как и в [12–15], будет предложен метод управления с дискретизацией по пространственной переменной. Однако, в отличие от [12–15], предложенный закон управления позволит формировать различные конфигурации регулируемого сигнала по пространственной переменной. Например, по сравнению с [14, 15] предложенный закон управления не требует своей реализации по всей пространственной переменной, а стабилизация объекта может осуществляться с меньшими затратами на регулируемый сигнал. В отличие от [12–15] будет показана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы для систем параболического и гиперболического типов в условиях возмущений с использованием ЛМН. Будут приведены численные примеры моделирования и сравнительный анализ эффективности предложенного алгоритма с решением [14, 15] для систем параболического типа.

В статье используются следующие обозначения: \mathbb{R}^n — евклидово пространство размерности n с нормой $|\cdot|$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ — множество всех $n \times m$ вещественных матриц; $P > 0$ и $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ означает, что P — симметрическая положительно определенная матрица; симметричные элементы симметрической матрицы будут обозначаться $*$. Непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам будут обозначаться как функции класса \mathcal{C}^1 . Нижние индек-

сы обозначают частные производные $z_\xi = \frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $z_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$. $L_2(0, l)$ — гильбертово пространство с квадратично интегрируемыми функциями $z(\xi)$, $\xi \in [0, l]$ с соответствующей нормой $\|z\|_{L_2}^2 = \int_0^l z^2(s)ds$. $H_1(0, l)$ — пространство Соболева абсолютно непрерывных скалярных функций $z : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|z\|_{H_1}^2 = \int_0^l z_s^2(s)ds$ и $z_\xi \in L_2(0, l)$. $H_2(0, l)$ — пространство Соболева скалярных функций $z : [0, l] \in \mathbb{R}$ с абсолютно непрерывными производными z_ξ , нормой $\|z\|_{H_2}^2 = \int_0^l z_{ss}^2(s)ds$ и $z_{\xi\xi} \in L_2(0, l)$.

2. Постановка задачи

2.1. Модели объектов

1. Пусть первый класс исследуемых объектов описывается скалярным линейным дифференциальным уравнением параболического типа

$$(1) \quad \begin{aligned} z_t(x, t) &= a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) + \phi z(x, t) + u(x, t) + f(x, t), \\ x &\in [0, l], \quad l > 0, \end{aligned}$$

с граничными условиями Дирихле

$$(2) \quad z(0, t) = z(l, t) = 0$$

или смешанными граничными условиями

$$(3) \quad z_x(0, t) = \gamma z(0, t), \quad z(l, t) = 0, \quad \gamma \geq 0.$$

Здесь $t \geq 0$, $z : [0, l] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — состояние объекта, $u(x, t)$ — сигнал управления, $f(x, t)$ — возмущение класса C^1 . Коэффициенты a_1 , a_2 , ϕ и функция $f(x, t)$ неизвестны, но известны границы интервалов, которым они принадлежат:

$$0 < \underline{a}_1 \leq a_1 < \infty, \quad \underline{a}_2 \leq a_2 \leq \bar{a}_2, \quad \underline{\phi} \leq \phi \leq \bar{\phi}, \quad |f(x, t)| \leq \bar{f}.$$

Величина γ в (3) может быть неизвестной.

Замечание 1. При $u(x, t) = 0$ уравнение (1) описывает конвекционно-диффузионные процессы, а при $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ и $\phi = 0$ — процессы диффузии. В [2] уравнением (1) описывается вращающаяся стойка компрессора с приводом впрыска воздуха $u(x, t)$, где $z(x, t)$ — осевой поток через компрессор. При $u(x, t) = 0$ и $a_2 = 0$ краевая задача (1), (2) описывает распространение тепла в однородном одномерном стержне с фиксированной температурой на концах, где a_1 и ϕ — коэффициенты теплопроводности и теплообмена с окружающей средой соответственно, $z(x, t)$ — значение температуры в момент времени t в точке x .

2. Пусть второй класс исследуемых объектов описывается скалярным линейным дифференциальным уравнением гиперболического типа в виде

$$(4) \quad \begin{aligned} z_{tt}(x, t) &= a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) + \phi z(x, t) - bz_t(x, t) + u(x, t) + f(x, t), \\ x &\in [0, l], \end{aligned}$$

с граничными условиями Дирихле (2) или смешанными граничными условиями (3). В (4) $\bar{b} > b > \underline{b} > 0$, где вершины \bar{b} и \underline{b} известны. Остальные константы и функции в (4) принимают те же значения, что и в (1).

Замечание 2. При $u(x, t) = 0$ и $a_2 = 0$ краевая задача (4), (2) описывает колебания однородной струны с фиксированными концами и рассеиванием энергии, где a_1 , b и ϕ — коэффициенты упругости, диссипации и жесткости соответственно, $z(x, t)$ и $z_t(x, t)$ — прогиб и скорость струны соответственно в момент времени t в точке x .

2.2. Цель управления

Для решения задачи разобьем отрезок $[0, l]$ на N подинтервалов, необязательно равной длины, и обозначим:

$$(5) \quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = l, \quad \Delta \geq x_{j+1} - x_j, \quad j = 0, \dots, N - 1.$$

Здесь Δ — известная константа. Предположим, что N сенсоров расположены внутри данных подинтервалов, т.е. доступны измерению только сигналы $z(\bar{x}_j, t)$, где $\bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$, $j = 0, \dots, N - 1$.

Цель управления состоит в разработке дискретного по пространственной переменной x закона управления, который обеспечит экспоненциальную устойчивость замкнутой системы для (1) и (4).

3. Синтез закона управления

Зададим закон управления в виде

$$(6) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= -KF^j(z(\bar{x}_j, t), x, t), \\ x &\in [x_j, x_{j+1}), \quad \bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N - 1, \end{aligned}$$

где $K > 0$, функция $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ класса C^1 для любых $t \geq 0$ и $x \in [0, l]$;
- (б) производная $F_x^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ ограничена для любых $t \geq 0$ и $x \in [0, l]$;
- (в) $F^j(z(\bar{x}_j, t), \bar{x}_j, t) = z(\bar{x}_j, t)$, $\bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$, $j = 0, \dots, N - 1$.

Условие (а) требуется для решения краевой задачи (см. раздел 6). Требования (б) и (в) необходимы для доказательства устойчивости замкнутой системы и ограниченности всех сигналов в ней. Приведем примеры функции $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$.

Пример 1. Пусть

$$F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = \varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)z(\bar{x}_j, t),$$

где $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ класса C^1 , $\varphi_x^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)z(\bar{x}_j, t)$ ограничена для любых x и t , а также $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), \bar{x}_j, t) = 1$. В частности, если $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = 1$ для любых x и t , то получим закон управления из [14, 15]. Далее рассмотрим примеры других функций $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$.

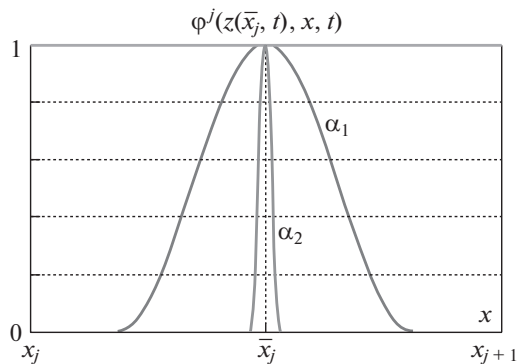


Рис. 1. График функции $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 2 (при $z(\bar{x}_j, t) = \text{const} > 0$) на интервале $x \in [x_j, x_{j+1})$ при различных значениях $\alpha > 0$ ($(\alpha = \alpha_1) < (\alpha = \alpha_2)$).

Пример 2. В [14, 15] $u(x, t) \neq 0$ на всем интервале $[x_j, x_{j+1})$, если $z(\bar{x}_j, t) \neq 0$. Приведем пример, когда $u(x, t) \neq 0$ лишь на части интервала $[x_j, x_{j+1})$ при $z(\bar{x}_j, t) \neq 0$. Пусть в примере 1 функция φ^j задана в виде

$$(7) \quad \varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = \begin{cases} 0,5 + 0,5 \cos \left(\frac{\alpha(x - \bar{x}_j)}{1 + z^2(\bar{x}_j, t)} \right), & x \in \left[\bar{x}_j - \frac{\pi(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}{\alpha}; \bar{x}_j + \frac{\pi(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}{\alpha} \right], \\ 0, & x \in \left[x_j; \bar{x}_j - \frac{\pi(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}{\alpha} \right) \cup \left(\bar{x}_j + \frac{\pi(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}{\alpha}; x_{j+1} \right]. \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 0$ — достаточно большое число, которое может быть выбрано из условия $\alpha > \max \left\{ \frac{\bar{x}_j - x_j}{\pi(1 + z^2(\bar{x}_j, t))}, \frac{x_{j+1} - \bar{x}_j}{\pi(1 + z^2(\bar{x}_j, t))} \right\}$. Очевидно, что $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), \bar{x}_j, t) = 1$, $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ класса \mathcal{C}^1 и $\varphi_x^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)z(\bar{x}_j, t)$ ограничена для любых $t \geq 0$, $x \in [0, l]$ и $z(\bar{x}_j, t) \in \mathbb{R}$. Графики функции (7) приведены на рис. 1.

Пример 3. В (7) переход между значениями φ^j зависит от $z(\bar{x}_j, t)$. Далее приведем пример, исключаяющий данную зависимость. Зададим в примере 2 функцию φ^j в виде

$$(8) \quad \varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{(1+z^2(\bar{x}_j, t))(\beta_j^2 - (x - \bar{x}_j)^2)} + \frac{\alpha}{\beta_j(1+z^2(\bar{x}_j, t))}}, & x \in (\bar{x}_j - \beta_j; \bar{x}_j + \beta_j), \\ 0, & x \in [x_j; \bar{x}_j - \beta_j] \cup [\bar{x}_j + \beta_j; x_{j+1}). \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 0$, $\beta_j \leq \min\{x_{j+1} - \bar{x}_j, \bar{x}_j - x_j\}$. В отличие от (7) в (8) переход между значениями функции не зависит от $z(\bar{x}_j, t)$, а зависит только от β_j . Очевидно, что $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), \bar{x}_j, t) = 1$, функция $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ класса \mathcal{C}^1 , а также

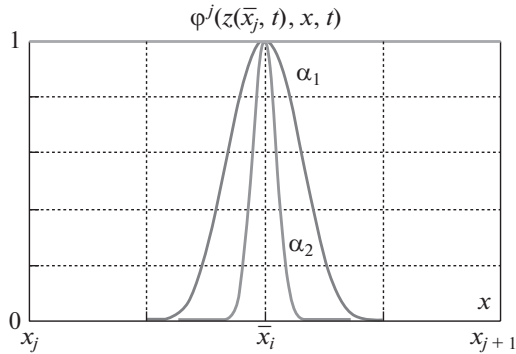


Рис. 2. График функции $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 3 (при $z(\bar{x}_j, t) = \text{const} > 0$) на интервале $x \in [x_j, x_{j+1}]$ при различных значениях $\alpha > 0$ ($(\alpha = \alpha_1) < (\alpha = \alpha_2)$).

$\varphi_x^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)z(\bar{x}_j, t)$ ограничена для любых $t \geq 0$, $x \in [0, l]$ и $z(\bar{x}_j, t) \in \mathbb{R}$. Графики функции (8) приведены на рис. 2.

Замечание 3. В [14] использовался закон управления $u(x, t) = -Kz(\bar{x}_j, t)$, $\bar{x}_j = 0,5(x_j + x_{j+1})$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N - 1$, что является частным случаем (6) (см. пример 1). Если функцию $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ выбрать как в примерах 2 или 3, то из рис. 1 и 2 видно, что площадь под кривой $\varphi^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = 1$ для [14] может быть существенно больше, чем площадь под остальными кривыми. Таким образом, предложенный закон управления может стабилизировать объект (1) при меньших затратах на управление, что далее будет продемонстрировано на численных примерах.

Пример 4. Приведем пример управления, близкого к граничному. Пусть $N = 2$. Тогда отрезок $[0, l]$ имеет следующее разбиение: $0 = x_0 < x_1 = l$. Если выбрать единственную на отрезке $[0, l]$ функцию (7) или (8) с достаточно большим значением α и точкой \bar{x}_0 , достаточно близкой к левому или правому концу отрезка $[0, l]$, то получим управление, близкое к граничному. Если взять $N = 3$, то можно две точки \bar{x}_0 и \bar{x}_1 выбрать достаточно близко к левому и правому концам соответственно.

4. Основной результат для системы параболического типа (1)

Подставим (6) в (1) и запишем уравнение замкнутой системы:

$$(9) \quad \begin{aligned} z_t(x, t) &= a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) + f(x, t) - \\ &- (K - \phi)z(x, t) + K[z(x, t) - F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)], \\ &x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Теорема 1. Рассмотрим замкнутую систему (9) при граничных условиях (2) или (3). Пусть для заданных коэффициентов $\bar{R} > 0$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $K > 0$ будут разрешимы следующие два линейных матричных неравенства:

$$(10) \quad \Psi(a_2 = \underline{a}_2) \leq 0, \quad \Psi(a_2 = \bar{a}_2) \leq 0,$$

где

$$(11) \quad \Psi = \begin{bmatrix} -2K + 2\bar{\phi} + 2\delta + K\bar{R} & a_2 & 1 & 0 \\ * & -2a_1 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2} K\bar{R}^{-1} & 0 & -\frac{4\Delta^2}{\pi^2} K\bar{R}^{-1} \\ * & * & -\beta_1 & 0 \\ * & * & * & -\beta_2 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2} K\bar{R}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда будет выполнено следующее неравенство

$$(12) \quad \|z(\cdot, t)\|_{L_2}^2 \leq e^{-2\delta t} \|z(\cdot, 0)\|_{L_2}^2 + \frac{\gamma}{2\delta},$$

где

$$\gamma = \beta_1 \sup_{t \geq 0} \int_0^l f^2(x, t) dx + \beta_2 \sup_{t \geq 0} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (F_x^j(x, t))^2 dx.$$

Перед доказательством теоремы 1 рассмотрим две вспомогательные леммы.

Лемма 1 (расширенное неравенство Виртингера). Пусть $z \in H_1(0, l)$ — скалярная функция, $0 = \chi_0 < \chi_1 < \dots < \chi_{n-1} < \chi_n = l$ и $\Delta \geq \chi_i - \chi_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$. Если $z(\chi_i) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, тогда

$$(13) \quad \int_0^l z^2(\xi) d\xi \leq \frac{4\Delta^2}{\pi^2} \int_0^l z_\xi^2(\xi) d\xi.$$

Доказательство. Перепишем левую часть неравенства (13) в виде

$$\int_0^l z^2(\xi) d\xi = \int_0^{\chi_1} z^2(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^{n-2} \int_{\chi_i}^{\chi_{i+1}} z^2(\xi) d\xi + \int_{\chi_{n-1}}^l z^2(\xi) d\xi.$$

Применяя неравенство Виртингера [16] к каждому интегральному выражению, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\chi_1} z^2(\xi) d\xi + \int_{\chi_{n-1}}^l z^2(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^{n-2} \int_{\chi_i}^{\chi_{i+1}} z^2(\xi) d\xi \leq \\ & \leq \frac{4\Delta^2}{\pi^2} \left(\int_0^{\chi_1} z_\xi^2(\xi) d\xi + \int_{\chi_{n-1}}^l z_\xi^2(\xi) d\xi \right) + \frac{\Delta^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n-2} \int_{\chi_i}^{\chi_{i+1}} z_\xi^2(\xi) d\xi \leq \frac{4\Delta^2}{\pi^2} \int_0^l z_\xi^2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть функция $V : [t_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ дифференцируема на $[t_0, \infty)$ и задано дифференциальное неравенство

$$(14) \quad \dot{V}(t) \leq -\delta V(t) + f(t),$$

где $\delta > 0$ и $\sup_{t \geq t_0} |f(t)| = \beta$. Тогда справедливо следующее неравенство

$$(15) \quad V(t) \leq e^{-\delta(t-t_0)}V(t_0) + \frac{\beta}{\delta}, \quad t \geq t_0.$$

Доказательство. Обозначим

$$y(t) = e^{-\delta(t-t_0)}V(t_0) + \frac{\beta}{\delta}, \quad t \geq t_0.$$

Легко проверить, что функция $y(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$(16) \quad \dot{y}(t) = -\delta y(t) + \beta, \quad t \geq t_0.$$

Воспользуемся принципом сравнения и покажем, что $V(t) \leq y(t)$ для любых $t \geq t_0$. Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots$ — последовательность положительных чисел таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0^+$. Тогда функция

$$(17) \quad \dot{y}_n(t) = -\delta y_n(t) + \frac{\beta}{\delta} + \frac{\varepsilon_n}{\delta}$$

является решением дифференциального уравнения

$$(18) \quad \dot{y}_n(t) = -\delta y_n(t) + \beta + \varepsilon_n.$$

Предположим, что существует $t^* > t_0$, такое что

$$(19) \quad t^* = \inf\{t > t_0 : V(t) \geq y_n(t)\}.$$

Тогда $V(t^*) \geq y_n(t^*)$ и $V(t) < y_n(t)$ при $t_0 \leq t \leq t^*$. Из (14) и (18) имеем $\dot{V}(t^*) < \dot{y}_n(t^*)$. С другой стороны, из $V(t) < y_n(t)$ при $t < t^*$ и $V(t^*) = y_n(t^*)$ следует, что $\dot{V}(t^*) \geq \dot{y}_n(t^*)$. Пришли к противоречию. Значит, $V(t) < y_n(t)$ для всех $t \geq t_0$ и $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, $V(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t)$ при всех $t \geq t_0$. Доказательство леммы 2 закончено.

Доказательство теоремы 1. Для анализа устойчивости замкнутой системы (9) рассмотрим следующий функционал Ляпунова

$$(20) \quad V(t) = \int_0^l z^2(x, t) dx.$$

Дифференцируя $V(t)$ по времени вдоль траекторий (9), составим следующее выражение

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) + 2\delta V(t) &= 2 \int_0^l \left[a_1 z(x, t) z_{xx}(x, t) + a_2 z(x, t) z_x(x, t) - \right. \\
 (21) \quad &\quad \left. - (K - \phi) z^2(x, t) + z(x, t) f(x, t) \right] dx + \\
 &+ 2K \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} z(x, t) \left[z(x, t) - F^j(x, t) \right] + 2\delta \int_0^l z^2(x, t) dx,
 \end{aligned}$$

где ради краткости в доказательстве обозначим $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = F^j(x, t)$. С учетом граничных условий (2) или (3) проинтегрируем по частям первое слагаемое в (21):

$$\begin{aligned}
 (22) \quad &2a_1 \int_0^l z(x, t) z_{xx}(x, t) dx = \\
 &= 2a_1 z(x, t) z_x(x, t) \Big|_0^l - 2a_1 \int_0^l z_x^2(x, t) dx \leq -2\underline{a}_1 \int_0^l z_x^2(x, t) dx.
 \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга для предпоследнего слагаемого в (21), получим

$$\begin{aligned}
 (23) \quad &2K \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} z(x, t) \left[z(x, t) - F^j(x, t) \right] dx \leq \\
 &\leq K\bar{R} \int_0^l z^2(x, t) dx + K\bar{R}^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[z(x, t) - F^j(x, t) \right]^2 dx.
 \end{aligned}$$

Согласно условию (в) $z(x, t) = F^j(x, t)$ в точке $x = \bar{x}_j$. Тогда применяя лемму 1 к (23), получим

$$\begin{aligned}
 (24) \quad &K\bar{R}^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[z(x, t) - F^j(x, t) \right]^2 dx \leq \\
 &\leq \frac{4\Delta^2}{\pi^2} K\bar{R}^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[z_x^2(x, t) - 2z_x(x, t) F_x^j(x, t) + (F_x^j(x, t))^2 \right] dx.
 \end{aligned}$$

Обозначим $\eta_j = \text{col}\{z(x, t), z_x(x, t), f(x, t), F_x^j(x, t)\}$. Применяя (22)–(24) к (21), получим

$$(25) \quad \begin{aligned} \dot{V}(t) + 2\delta V(t) - \beta_1 \int_0^l f^2(x, t) dx - \beta_2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_x^j(x, t) dx \leq \\ \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \eta_j^T \Psi \eta_j dx, \end{aligned}$$

где Ψ задана в (11). Матрица (11) аффинна по отношению к параметру a_2 . Значит, согласно [17] если выполнены ЛМН (10) в вершинах $a_2 = \{\underline{a}_2, \bar{a}_2\}$, то ЛМН $\Psi \leq 0$ будет выполнено для любых $a_2 \in [\underline{a}_2, \bar{a}_2]$. Следовательно, будет выполнено неравенство

$$(26) \quad \dot{V}(t) + 2\delta V(t) - \beta_1 \int_0^l f^2(x, t) dx - \beta_2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_x^j(x, t) dx \leq 0.$$

Воспользовавшись леммой 2, решение дифференциального неравенства (26) определим в виде

$$(27) \quad V(t) \leq V(0)e^{-2\delta t} + \frac{\gamma}{2\delta}.$$

Тогда из (27) следует (12). Теорема 1 доказана.

5. Основной результат для системы гиперболического типа (4)

Подставим (6) в (4) и запишем уравнение замкнутой системы:

$$(28) \quad \begin{aligned} z_{tt}(x, t) = a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) - \bar{b} z_t(x, t) + f(x, t) - \\ - (K - \phi) z(x, t) + K \left[z(x, t) - F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) \right], \\ x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Теорема 2. Рассмотрим замкнутую систему (28) при граничных условиях (2) или (3). Пусть для заданных коэффициентов $p \in (-0,5; 0,5)$, $\bar{R} > 0$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $K > 0$ будут разрешимы следующие линейные матричные неравенства в соответствующих вершинах:

$$(29) \quad \Psi \left(\phi = \{\underline{\phi}, \bar{\phi}\}, a_2 = \{\underline{a}_2, \bar{a}_2\}, b = \{\underline{b}, \bar{b}\} \right) \leq 0,$$

$$(30) \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0,5pa_2 & \Psi_{13} & 0,5p & 0 \\ * & \Psi_{22} & a_2 & 0 & -\frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} \\ * & * & \Psi_{33} & 1 & 0 \\ * & * & * & -\beta_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_2 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_{11} = -0,5p(K - \bar{\phi}) + 0,25K\bar{R}p^2 + 2\delta,$$

$$\Psi_{13} = 1 - 0,5pb - K + \phi + K\bar{R}p,$$

$$\Psi_{22} = -pa_1 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1},$$

$$\Psi_{33} = 0,5p - 2\underline{b} + 0,5K\bar{R}.$$

Тогда будет выполнено неравенство (12), параметры которого рассчитываются с учетом (29).

Доказательство. Для анализа устойчивости замкнутой системы (28) рассмотрим функционал Ляпунова в виде

$$(31) \quad V(t) = \int_0^l \left[a_1 z_x^2(x, t) + z^2(x, t) + pz(x, t)z_t(x, t) + z_t^2(x, t) \right] dx.$$

При $p \in (-0,5; 0,5)$ будет справедливо неравенство $z^2 + pz z_t + z_t^2 \geq 0$. Значит, $V(t) \geq 0$. Дифференцируя $V(t)$ по времени вдоль траекторий (28), составим выражение

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{V}(t) + 2\delta V(t) &= 2 \int_0^l \left[a_1 z_x(x, t)z_{xt}(x, t) + z(x, t)z_t(x, t) + 0,5pz_t^2(x, t) + \right. \\ &+ \left. \left[0,5pz(x, t) + z_t(x, t) \right] \left[a_1 z_{xx}(x, t) + a_2 z_x(x, t) - \right. \right. \\ &\left. \left. - bz_t(x, t) + f(x, t) - (K - \phi)z(x, t) \right] dx + \right. \\ &+ 2K \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[0,5pz(x, t) + z_t(x, t) \right] \left[z(x, t) - F^j(x, t) \right] + \\ &\left. + 2\delta \int_0^l z^2(x, t) dx, \right. \end{aligned}$$

где ради краткости в доказательстве обозначим $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t) = F^j(x, t)$. С учетом граничных условий (2) или (3), проинтегрируем по частям первое слагаемое в (32):

$$\begin{aligned}
 & 2a_1 \int_0^l z_x(x, t) z_{xt}(x, t) dx = \\
 (33) \quad & = 2a_1 z_x(x, t) z_t(x, t) \Big|_0^l - 2a_1 \int_0^l z_t(x, t) z_{xx}(x, t) dx = \\
 & = -2a_1 \int_0^l z_t(x, t) z_{xx}(x, t) dx.
 \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга для предпоследнего слагаемого в (32), получим

$$\begin{aligned}
 & 2K \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [0,5pz(x, t) + z_t(x, t)] [z(x, t) - F^j(x, t)] dx \leq \\
 (34) \quad & \leq K\bar{R} \int_0^l [0,5pz(x, t) + z_t(x, t)]^2 dx + \\
 & + K\bar{R}^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [z(x, t) - F^j(x, t)]^2 dx.
 \end{aligned}$$

Так как $z(x, t) = F^j(x, t)$ в точке $x = \bar{x}_j$ (см. условие (в)), то, применяя лемму 1 к (34), получим (24). Обозначим

$$\bar{\eta}_j = \text{col}\{z(x, t), z_x(x, t), z_t(x, t), f(x, t), F_x^j(x, t)\}.$$

Применяя (22), (33), (34) и (24) к (32), запишем результат в виде

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & \dot{V}(t) + 2\delta V(t) - \beta_1 \int_0^l f^2(x, t) dx - \beta_2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_x^j(x, t) dx \leq \\
 & \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{\eta}_j^T \bar{\Psi} \bar{\eta}_j dx.
 \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\Psi}$ задано в (30). Матрица $\bar{\Psi}$ аффинна по отношению к параметрам ϕ , a_2 и b . Согласно [17] если выполнены ЛМН (29) в вершинах $\phi = \{\underline{\phi}, \bar{\phi}\}$, $a_2 = \{\underline{a}_2, \bar{a}_2\}$ и $b = \{\underline{b}, \bar{b}\}$, то ЛМН $\bar{\Psi} \leq 0$ выполнено для любых $\phi \in [\underline{\phi}, \bar{\phi}]$, $a_2 \in [\underline{a}_2, \bar{a}_2]$ и $b \in [\underline{b}, \bar{b}]$. Следовательно, будет выполнено неравенство (35). Воспользовавшись леммой 2, решение дифференциального неравенства (35) можно записать в виде (27). Тогда из (27) следует неравенство (12), параметры которого рассчитываются с учетом (29). Теорема 2 доказана.

6. Решение краевой задачи

Покажем, что существуют решения уравнений (9) и (28), удовлетворяющие граничным условиям (2) или (3).

6.1. Замкнутая система (9)

Сначала рассмотрим уравнение (9) с граничными условиями (2). Краевую задачу (9), (2) можно сформулировать как абстрактную неоднородную задачу Коши в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$ в виде

$$(36) \quad \dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + F(t, z(t)), \quad z_0 = z(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Здесь оператор

$$\mathcal{A} = a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial x} + \phi$$

имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{z \in H_2(0, l) : z(0) = z(l) = 0\},$$

$$F(t, z(t)) = f(t) + u(t),$$

функция $u(t)$ задана в (6). Согласно теореме 1, [18] и [19] инфинитезимальный оператор \mathcal{A} генерирует строго непрерывную экспоненциально устойчивую полугруппу (C_0 -полугруппу) $T(t)$. Тогда краевая задача (36) может быть сформулирована как краевая задача на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ и ее решения могут быть найдены как решения интегрального уравнения

$$(37) \quad z(t) = T(t)z(0) + \int_0^t T(t-s)F(s, z(s))ds.$$

Так как функция $F(t, z(t))$ класса \mathcal{C}^1 , то согласно теореме 3.1.3 из [19] существует единственное решение (36), которое удовлетворяет интегральному уравнению (37). Краевая задача при смешанных граничных условиях (3) решается аналогично.

6.2. Замкнутая система (28)

Теперь рассмотрим уравнение (28) с граничными условиями (2) или (3). Запишем сначала краевую задачу (28), (2) как абстрактную неоднородную задачу Коши в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$ в виде

$$(38) \quad \dot{\xi}(t) = \bar{\mathcal{A}}\xi(t) + \bar{F}(t, \xi(t)), \quad \xi_0 = \xi(0) \in \bar{\mathcal{A}},$$

где $\xi = \text{col}\{z, z_t\}$, оператор

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi & -b \end{bmatrix}$$

имеет область определения

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) = \{\xi \in H_2(0, l) : \xi(0) = \xi(l) = 0\},$$

$$\bar{F}(t, \xi(t)) = [0 \ 1]^T [f(t) + u(t)],$$

функция $u(t)$ задана в (6). Согласно теореме 1, [18] и [19] инфинитезимальный оператор $\bar{\mathcal{A}}$ генерирует строго непрерывную экспоненциально устойчивую полугруппу (C_0 -полугруппу) $T(t)$. Следовательно, дальнейшие рассуждения для уравнения (38) аналогичны рассуждениям для (36) в подразделе 6.1.

7. Численное исследование предложенной схемы управления

7.1. Моделирование системы управления

Пусть $l = 1$. Для моделирования систем (1) и (4) разделим отрезок $[0, 1]$ на 160 подынтервалов одинаковой длины. Тогда шаг дискретизации по пространственной переменной $D = 1/160$. Производные первого и второго порядков по пространственной переменной от функции $z(x, t)$ вычисляются в точках $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_l < \dots < x_{160}$ с помощью формул

$$z_x(x_k, t) = \frac{z(x_{k+1}, t) - z(x_k, t)}{D}$$

и

$$z_{xx}(x_k, t) = \frac{z(x_{k+1}, t) - 2z(x_k, t) + z(x_{k-1}, t))}{D^2}.$$

Для формирования закона управления (6) разделим отрезок $[0, 1]$ поочередно на $N = 2$ и на $N = 10$ равных подынтервалов (см. (5)).

Рассмотрим системы (1) и (4) при граничных условиях Дирихле (2) и $a_1 \geq 0,5$, $a_2 \in [-5, 5]$, $\phi \in [-5, 5]$, $b = [-5, -1]$, $|f(x, t)| \leq 20$ для любых x и t .

Матричные неравенства (10) и (29) разрешимы при $K \geq 100$.

7.2. Результаты моделирования для системы (1)

В (1) выберем $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $\phi = 5$, $f(x, t) = 0,2[\sin(30kt) + \sin(2kt)]$, $k = 0, \dots, 160$ и $z(x, 0) = \sin(\pi x_k)$. Для моделирования алгоритмов управления рассмотрим два разбиения: $N = 2$ и $N = 10$ (см. (5)). Пусть $\bar{x}_j = 0,5(x_j + x_{j+1})$. В законе управления (6) выберем функцию $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 3, где $\alpha = 10^3$, а также $\beta_j = 1/8$ при $N = 2$ и $\beta_j = 1/80$ при $N = 10$.

На рис. 3–5 представлены решения (1) и графики $u(x, t)$ для:

- 1) закона управления $u(x, t) = -Kz(\bar{x}_j, t)$ из [14, 15] при $K = 100$;
- 2) предложенного закона управления (6) при $K = 100$;
- 3) предложенного закона управления (6) при $K = 500$.

Из рис. 3 и 4 видно, что качество управления по $z(x, t)$ для предложенного закона управления незначительно уступает качеству управления для алгоритма из [14, 15]. При этом предложенный алгоритм обеспечивает экспоненциальную устойчивость по $z(x, t)$ в условиях возмущений. Если же увеличить коэффициент K в предложенном законе управления в 5 раз, то амплитуда

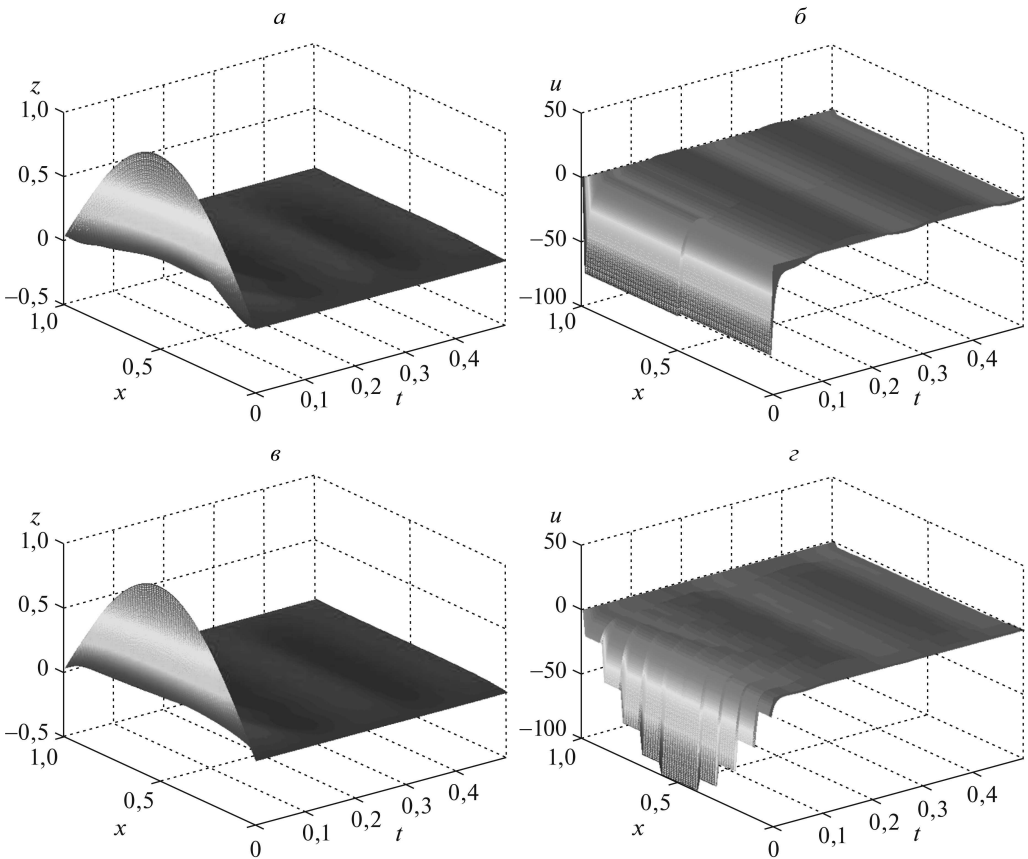


Рис. 3. Пространственно-временные графики по $z(x, t)$ и $u(x, t)$ для [14, 15] при $N = 2$ (а, б) и $N = 10$ (в, г) при $K = 100$.

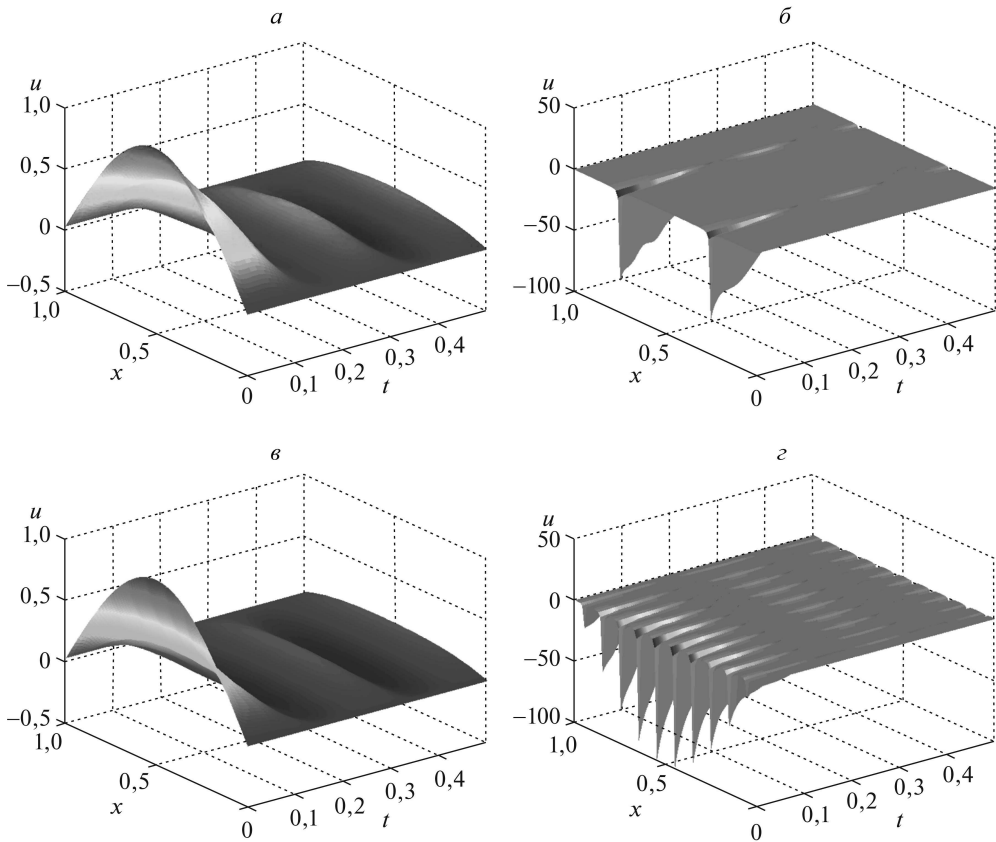


Рис. 4. Пространственно-временные графики по $z(x,t)$ и $u(x,t)$ для предложенного алгоритма при $N = 2$ (а, б) и $N = 10$ (в, з) при $K = 100$.

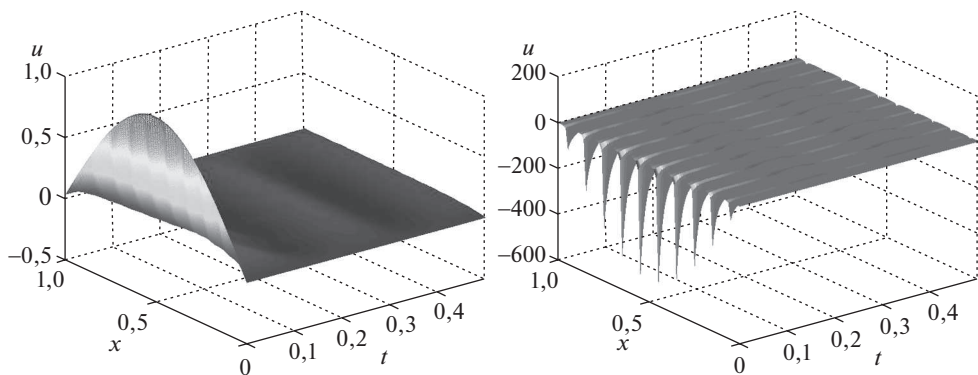


Рис. 5. Пространственно-временные графики по $z(x,t)$ и $u(x,t)$ для предложенного алгоритма при $N = 10$ при $K = 500$.

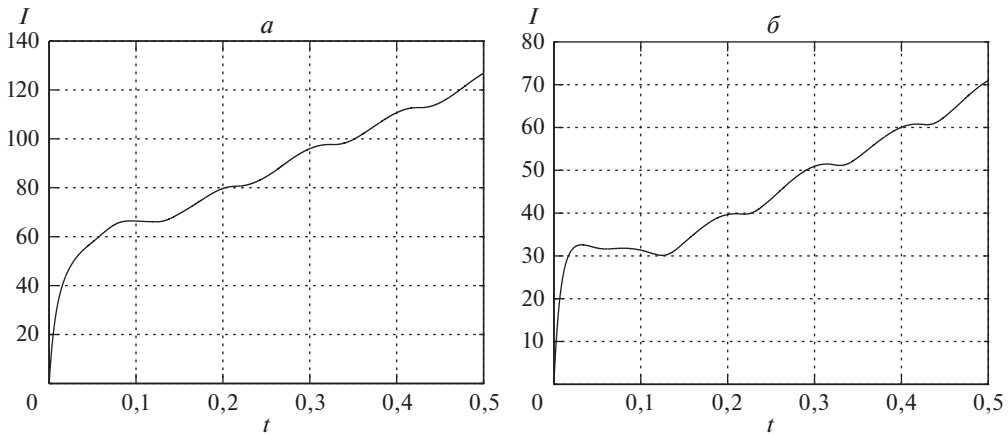


Рис. 6. Разница затрат на управление при $N = 2$ (а) и $N = 10$ (б) между использованием закона управления из [14, 15] и предложенным законом управления соответственно при $K = 100$.

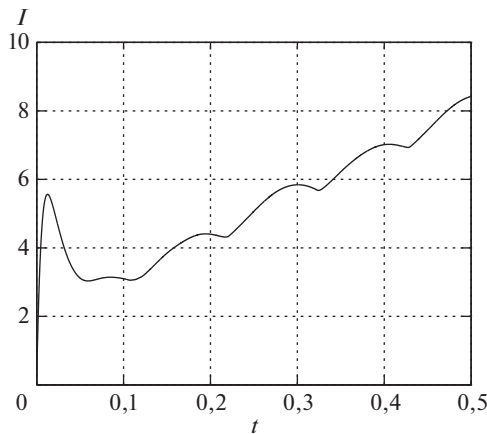


Рис. 7. Разница затрат на управление при $N = 10$ между использованием закона управления из [14, 15] при $K = 100$ и предложенным законом управления при $K = 500$.

управления также возрастет примерно в 5 раз, но при этом скорость экспоненциальной сходимости и качество подавления возмущения в установившемся режиме будет выше, чем у алгоритма из [14, 15] при $K = 100$.

Теперь проанализируем затраты на управление. На рис. 6 и 7 представлена интегральная разность вида

$$I = \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^t (|u_{F\&B}(\bar{x}_j, s)| - |u_{proposed}(\bar{x}_j, s)|) ds,$$

где $u_{F\&B}(\bar{x}_j, t)$ – закон управления [14], $u_{proposed}(\bar{x}_j, t)$ – предложенный закон управления. Из рис. 6 и 7 видно, что затраты на управление у предложенного

алгоритма меньше, чем у [14]. При этом предложенный закон управления принимает ненулевые значения лишь на части пространственной переменной, в то время как управление [14, 15] требует реализации на протяжении всей пространственной переменной, см. рис. 3–5.

Отметим, что результаты моделирования для функции $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 2 с $\alpha = 100$ сопоставимы с результатами, полученными для функции $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 3, поэтому они не приводятся.

7.3. Результаты моделирования для системы (4)

При моделировании (4) выберем $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b = -1$, $\phi = 5$ и $f(x, t) = 0,2[\sin(30kt) + \sin(2kt)]$, $k = 0, \dots, 160$, $z(x, 0) = \sin(\pi x_k)$ и $z_t(x, 0) = 0$. В законе управления (6) зададим параметры как в подразделе 7.2. На рис. 8 и 9 представлены решения (4) и графики $u(x, t)$ для предложенного закона управления (6) при $K = 100$ и $K = 500$, а также при $N = 2$ и $N = 10$. Из рис. 8 и 9 видно, что предложенный алгоритм обеспечивает экспоненциальную устойчивость по $z(x, t)$ в условиях возмущений. Результаты моделиро-

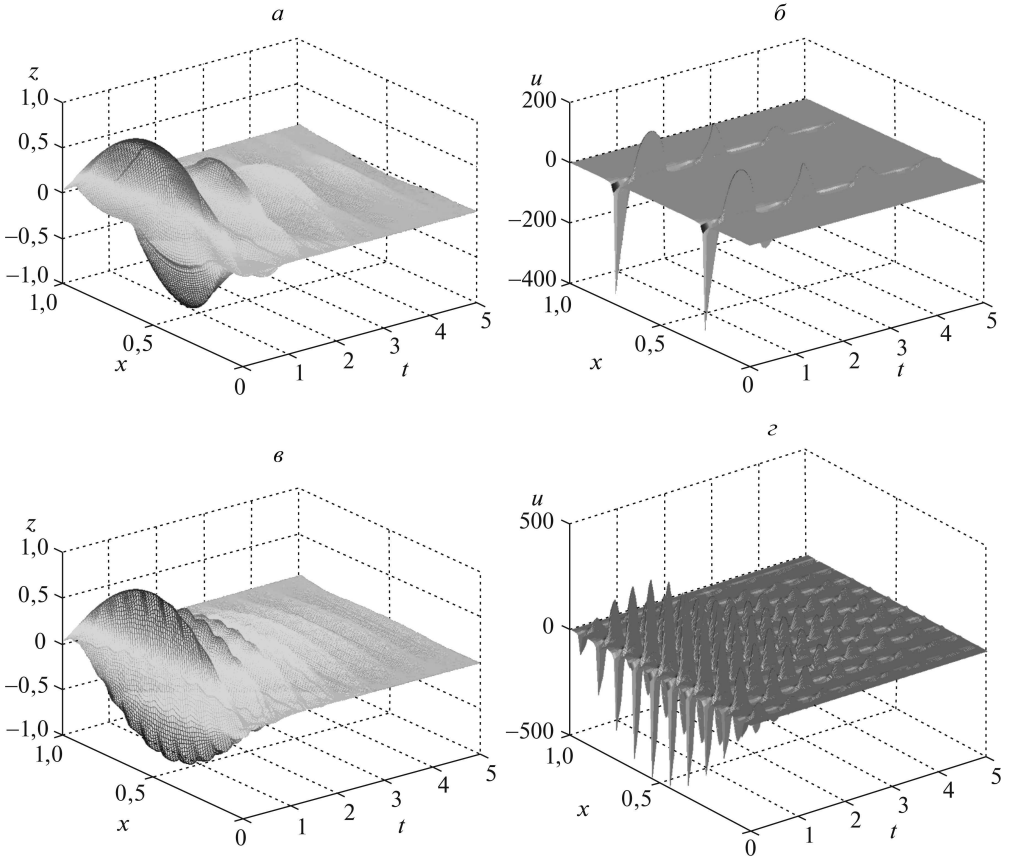


Рис. 8. Пространственно-временные графики по $z(x, t)$ и $u(x, t)$ для предложенного алгоритма при $N = 2$ (а, б), $N = 10$ (в, з) и $K = 100$.

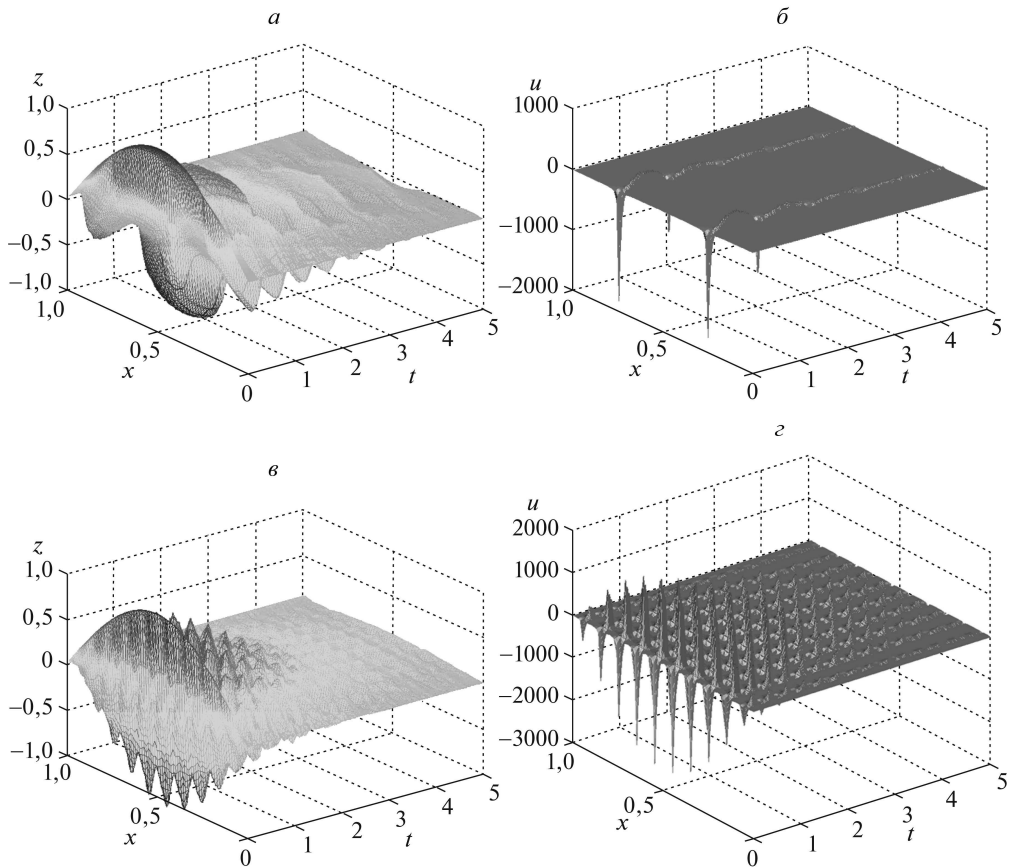


Рис. 9. Пространственно-временные графики по $z(x, t)$ и $u(x, t)$ для предложенного алгоритма при $N = 2$ (а, б), $N = 10$ (в, г) и $K = 500$.

вания для функции $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 3 с $\alpha = 100$ сопоставимы с результатами, полученными для функции $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 2, поэтому они не приводятся.

8. Заключение

Предложен дискретный по пространственной переменной закон управления скалярными линейными дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов с интервально неопределенными параметрами и внешними ограниченными возмущениями. Для синтеза закона управления используется конечный набор измерений выходного сигнала. Закон управления зависит от функции, зависящей от пространственной координаты и текущего измерения. Данная функция позволяет достигать разных свойств, например обеспечивать пониженные затратами на управление или реализовывать управление, близкое к граничному. Доказана экспоненциальная устойчивость замкнутых систем и робастность по отношению к параметрам и внешним возмущениям.

Численные примеры моделирования подтвердили результаты расчетов и показали эффективность предложенного алгоритма по сравнению с результатом [14, 15] в том смысле, что при меньших затратах на управление можно повысить скорость сходимости решений и повысить качество регулирования в установившемся режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Candogan U.O., Ozbay H., Ozaktas H.M.* Controller Implementation for a Class of Spatially-varying Distributed Parameter Systems // IFAC Proceedings Volumes (Proc. 17th IFAC World Congr.). 2008. V. 41. No. 2. P. 7755–7760.
2. *Hagen G., Mezić I.* Spillover Stabilization in Finite-dimensional Control Observer Design for Dissipative Evolution Equations // SIAM J. Control Optim. 2003. V. 42. No. 2. P. 746–768.
3. *Smagina E., Sheintuch M.* Using Lyapunov’s Direct Method for Wave Suppression in Reactive Systems // Syst. Control Lett. 2006. V. 55. No. 7. P. 566–572.
4. *Demetriou M.A.* Guidance of Mobile Actuator-plus-sensor Networks for Improved Control and Estimation of Distributed Parameter Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2010. V. 55. P. 1570–1584.
5. *Smyshlyaev A., Krstic M.* On Control Design for PDEs with Spacedependent Diffusivity or Time-dependent Reactivity // Automatica. 2005. V. 41. P. 1601–1608.
6. *Krstic M., Smyshlyaev A.* Adaptive Boundary Control for Unstable Parabolic PDEs-part I: Lyapunov Design // IEEE Trans. Automat. Control. 2008. V. 53. P. 1575–1591.
7. *Delchamps D.F.* Extracting State Information from a Quantized Output Record // Syst. Control Lett. 1989. V. 13. P. 365–372.
8. *Brockett R.W., Liberzon D.* Quantized Feedback Stabilization of Linear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. P. 1279–1289.
9. *Baillieul J.* Feedback Coding for Information-Based Control: Operating near the Data Rate Limit // Proc. 41st IEEE Conf. Decision Control, Las Vegas, Nevada, USA, 2002. P. 3229–3236.
10. *Zheng B.-C., Yang G.-H.* Quantized Output Feedback Stabilization of Uncertain Systems with Input Nonlinearities via Sliding Mode Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2012. V. 24. No. 2. P. 228–246.
11. *Khapalov A.Y.* Continuous Observability for Parabolic System under Observations of Discrete Type // IEEE Trans. Automat. Control. 1993. V. 38. No. 9. P. 1388–1391.
12. *Cheng M.B., Radisavljevic V., Chang C.C., Lin C.F., Su W.C.* A Sampled Data Singularly Perturbed Boundary Control for a Diffusion Conduction System with Noncollocated Observation // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54. No. 6. P. 1305–1310.
13. *Logemann H., Rebarber R., Townley S.* Generalized Sampled-data Stabilization of Well-posed Linear Infinite-dimensional Systems // SIAM J. Control Optim. 2005. V. 44. No. 4. P. 1345–1369.
14. *Fridman E., Blighovsky A.* Robust Sampled-data Control of a Class of Semilinear Parabolic Systems // Automatica. 2012. V. 48. P. 826–836.
15. *Liu K., Fridman E., Xia Y.* Networked Control under Communication Constraints: A Time-Delay Approach. Springer International Publishing, Advances in Delays and Dynamics, 2020.

16. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G.* Inequalities. Cambridge: Cambridge: University Press, 1988.
17. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control. Birkhauser, 2014.
18. *Henry D.* Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1993.
19. *Curtain R., Zwart H.* An Introduction to Infinite-dimensional Linear Systems Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.

Статъа представена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 18.08.2020

После доработки 20.10.2020

Принята к публикации 28.10.2020