*Автоматика и телемеханика, № 3, 2021*

# *Стохастические системы*

© 2021 г. **Е.С. ПАЛАМАРЧУК, канд. физ.-мат. наук (e.palamarchuck@gmail.com)**
**(Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва)**

## ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СУПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Рассматривается проблема асимптотической суперэкспоненциальной стабилизации траекторий линейного скалярного управляемого случайного процесса. Уравнение динамики процесса содержит аддитивные и мультипликативные шумовые воздействия. С целью достижения стабилизации решается задача оптимального управления на бесконечном интервале с квадратичным целевым функционалом, включающим суперэкспоненциально растущую функцию времени. Для процесса, полученного при применении оптимальной стратегии управления, проводится анализ его стремления к нулевому состоянию в среднем квадратичном, а также с вероятностью единица.

*Ключевые слова*: линейный регулятор; мультипликативный и аддитивный шум; суперэкспоненциальная стабилизация.

**DOI:** 10.31857/S0005231021030053

### 1. Введение

В данной статье рассматривается задача оптимальной асимптотической стабилизации траекторий линейного управляемого случайного процесса. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан скалярный случайный процесс $X_t$, $t \geqslant 0$, описываемый уравнением

$$dX_t = aX_t dt + bU_t dt + (G_t + g_t X_t + \sigma_t U_t) dw_t \tag{1}$$

с неслучайным начальным условием $X_0 = x$; $a$ и $b \neq 0$ — константы; $G_t$, $g_t$, $\sigma_t$ — известные кусочно-непрерывные функции времени; $w_t$, $t \geqslant 0$, — одномерный стандартный винеровский процесс; $U_t$ — допустимое управление, т.е. скалярный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t = \tilde{\sigma}\{w_s,\, s \leqslant t\}$ ($\tilde{\sigma}(\cdot)$ — знак $\sigma$-алгебры), такой что уравнение (1) имеет решение. Множество допустимых управлений обозначим $\mathcal{U}$.

Следует отметить, что уравнение (1) одновременно содержит как аддитивные ($G_t dw_t$), так и мультипликативные ($(g_t X_t + \sigma_t U_t) dw_t$) шумовые воздействия, что охватывает достаточно широкий спектр приложений. Так, процесс

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10097) в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН.

вида (1) при $g_t \equiv \sigma_t \equiv 0$ является стандартным в теории линейных регуляторов, см., например, [1, раздел 3.6]. Если $G_t \equiv g_t \equiv 0$, то $X_t$ описывает эволюцию стоимости инвестиционного портфеля, см. [2, гл. 6; 3, раздел 9.2]. Для $G_t \equiv \sigma_t \equiv 0$ уравнение (1) моделирует динамику накопленного объема химического вещества (например, углекислого газа, см. [4]), а при $G_t \neq 0$ используется для отражения изменений в размере популяции [5, раздел 2.4, с. 142] и в инженерных системах [6].

*Стабилизация* решений (1) означает нахождение такого управления $U \in \mathcal{U}$, что при возрастании параметра времени $t$ соответствующий этому управлению процесс $X_t$ стремится к нулю в том или ином вероятностном смысле. Управление $U$ при этом называется *стабилизирующим*. С целью уточнения скорости сходимости $X_t$ к нулевому состоянию далее вводится соответствующее определение, также см. [3, раздел 4.6; 7, 8].

Определение. *Пусть для функции $\bar{\delta}_t > 0$, $t \geqslant 0$, задана функция $h_t = \exp\left\{-2\int_0^t \bar{\delta}_v\,dv\right\}$. Тогда решение $X_t$ уравнения* (1) *асимптотически стремится к нулю:* а) *в среднем квадратичном с темпом $\bar{\delta}_t$, если $\limsup_{t\to\infty}(EX_t^2/h_t) < \infty$;* б) *с вероятностью единица и темпом $\bar{\delta}_t$, если существует неслучайная константа $\bar{c} > 0$, такая что неравенство $\limsup_{t\to\infty}(X_t^2/h_t) < \bar{c}$ выполняется с вероятностью единица.*

Указанные в определении соотношения означают, что существуют константы $c_m, c_M > 0$ и конечные моменты времени $t_0$, $\bar{t}_0(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, такие что $EX_t^2 \leqslant c_m \exp\left\{-2\int_0^t \bar{\delta}_v\,dv\right\}$ при $t > t_0$ и $X_t^2 \leqslant c_M \exp\{-2_0^t\bar{\delta}_v\,dv\}$, почти наверное (п.н.) для $t > \bar{t}_0(\omega)$. При этом нетрудно заметить, что экспоненциальная сходимость соответствует случаю $\bar{\delta}_t \equiv \delta > 0$. При $\bar{\delta}_t \to 0$, $t \to \infty$, будет субэкспоненциальное убывание верхней границы для решений, например полиномиальное, см. [3, с. 144]. В данной статье рассматривается ситуация, когда $\bar{\delta}_t \to \infty$, $t \to \infty$, т.е. достижение суперэкспоненциальной скорости сходимости решений (1). С этой целью будет решена задача оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации, постановка которой осуществляется далее.

Предполагается, что применение любого управления $U \in \mathcal{U}$ на интервале планирования $[0, T]$ порождает издержки, отражаемые в интегральном квадратичном целевом функционале вида

$$J_T(U) = \int_0^T \exp\left\{2\int_0^t \delta_v\,dv\right\}\left(qX_t^2 + U_t^2\right)\,dt, \tag{2}$$

где $U \in \mathcal{U}$ — допустимое управление на интервале $[0, T]$; $q > 0$ — константа; функция $\delta_t$ такая, что $\delta_t \to \infty$, $t \to \infty$. Подход с построением функционала вида (2) изначально возник в линейных детерминированных системах, см. [9], при проблеме их экспоненциальной стабилизации. Тогда было показано, что решение $\limsup_{T\to\infty} J_T(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ при $\delta_t \equiv \delta$ в (2) дает экспоненциально стабилизирующее управление. Также известно, см., например, [10, гл. 8], что в стохастических системах при наличии только мультипликативных шумов, т.е. для $G_t \equiv 0$ в (1), экспоненциальная стабилизация в среднем квадратичном может быть достигнута при оптимальном управлении, найденном из задачи $\limsup_{T\to\infty} EJ_T(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$, когда функция $\delta_t \equiv 0$ в (2). Следуя вышеизложенной логике, оптимальная суперэкспоненциальная стабилизация связана с решением задачи управления на бесконечном интервале времени, а точнее — с минимизацией подходящего критерия, построенного на основе (2).

Для уравнения (1) вводится следующее предположение относительно его коэффициентов (параметров шумовых воздействий $G_t, g_t$ и $\sigma_t$) и функции $\delta_t$ темпа суперэкспоненциальной стабилизации.

*Предположение* $\mathcal{GD}$. *Функция $\delta_t > 0$ — неубывающая дифференцируемая функция, $\delta_t \to \infty$, $t \to \infty$ и $\lim_{t\to\infty}(\dot{\delta}_t/\delta_t^2) = 0$ (знак $\dot{}$ — производная функции по времени). При этом для коэффициентов* (1) *выполняется:*

1) $G_t = \sqrt{\gamma_t}\exp\left\{-\int\limits_0^t \delta_v\,dv\right\}G$, *где $G \neq 0$ — константа, а функция $\gamma_t$ — положительная и удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to\infty}\gamma_t\exp\left\{-\int\limits_0^t 2\bar{\lambda}\delta_t\,dv\right\} = 0 \quad \textit{для любой константы} \quad \bar{\lambda} > 0; \tag{3}$$

2) *отношение $g_t^2/\delta_t$ — ограничено при $t \geqslant 0$;*

3) *произведение $\sigma_t^2\delta_t$ — ограничено, $t \geqslant 0$, и существуют положительные константы $k, k_0$, такие что*

$$\limsup_{t\to\infty}\left[\{2(1-kb)+k_0\}\int\limits_0^t \delta_s\,ds + \int\limits_0^t (g_s - k\sigma_s\delta_s)^2\,ds\right] \leqslant 0. \tag{4}$$

Приведенное условие (3), налагаемое на коэффициент диффузии $G_t$, означает, что в системе имеют место затухающие аддитивные возмущения ($G_t \to 0$, $t \to \infty$), изменение параметров которых оценивается суперэкспоненциально убывающей функцией. Такое предположение о характере шумовых воздействий, в частности, использовалось в [11] при моделировании биологических систем. При наличии в (1) только аддитивных шумов ($g_t \equiv 0$, $\sigma_t \equiv 0$) из 1)–3) следует суперэкспоненциальная стабилизация траекторий процесса $X_t = X_t^{(0)}$ при использовании управления $U_t^{(0)} = -k\delta_t X_t^{(0)}$, см. [12]. Если в (1) присутствуют мультипликативные возмущения и $G_t \equiv 0$, то при соблюдении условий 2) и 3) применение $U_t^{(0)} = -k\delta_t X_t^{(0)}$ гарантирует суперэкспоненциальную стабилизацию в среднем квадратичном. Далее будет показано, по аналогии со случаем системы с ограниченными коэффициентами, см. [13, раздел 4.4], что стабилизируемость влечет существование решения обобщенного уравнения Риккати при $t \geqslant 0$ и дает возможность переходить к рассмотрению задачи стохастического управления на бесконечном интервале времени. Обращаясь к 2) и 3) предположения $\mathcal{GD}$, можно отметить, что в 2) допустимо рассматривать неограниченные на бесконечности коэффициенты $g_t$

($g_t^2 \to \infty$, $t \to \infty$). В частности, $g_t = \sqrt{\delta_t}$ использовалось в [8] при анализе примера неэкспоненциальной стабилизации решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Условие в 3) предполагает асимптотическую сингулярность коэффициента $\sigma_t$ ($\sigma_t \to 0$, $t \to \infty$), например, когда $\sigma_t^2 \delta_t \to 0$, $t \to \infty$. При этом $\sigma_t$ (по абсолютной величине) не превышает $1/\sqrt{\delta_t}$ (с точностью до константы). Такая специфика в 3) порождается необходимостью в суперэкспоненциальной стабилизации и является более сильным требованием по сравнению со стандартным случаем ограниченных коэффициентов, когда экспоненциальная стабилизируемость достигается при достаточно малых $\sigma_t \equiv \sigma$, см. [14].

Переходя к формулировке задачи управления, отметим, что из-за возможной неограниченности значений $EJ_T(U)$ при $T \to \infty$, см., например, [15], при оптимальной стабилизации будет решаться задача с критерием, включающим нормировку величин $EJ_T(U)$:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T \gamma_t \delta_t \, dt} \to \inf_{U \in \mathcal{U}} . \tag{5}$$

В критерии (5) множитель $\left(\int_0^T \gamma_t \delta_t \, dt\right)^{-1}$ играет роль дисконтирования, т.е. уменьшения значений $EJ_T(U)$. Таким образом, задача оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации решений (1) состоит в следующем: определить оптимальное управление $U^*$ из решения (5) и показать, что $U^*$ является асимптотически суперэкспоненциально стабилизирующим для (1). Другими словами, процесс $X_t^*$ при возрастании $t$ должен стремиться к нулю (с вероятностью единица и в среднем квадратичном) с суперэкспоненциальным темпом. Для стохастических систем ранее подобный подход, сочетающий решение задачи управления и анализ сходимости процесса, был реализован в [16, 17]. В данной статье будет исследоваться оптимальность и стабилизирующие свойства управления вида $U_t^* = -(b + \sigma_t g_t)(1 + \sigma_t^2 \Pi_t)^{-1} \Pi_t X_t^*$, где $\Pi_t$ удовлетворяет обобщенному уравнению Риккати.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 проводится исследование решения обобщенного уравнения Риккати, входящего в структуру оптимального закона управления $U^*$, а также анализ решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Раздел 3 содержит основной результат об оптимальности управления $U^*$ и стремлении к нулю соответствующего процесса $X^*$. В разделе 4 проводится обсуждение критерия (5) с точки зрения использования дисконтирования. В заключении формулируются основные выводы статьи.

## 2. Анализ обобщенного уравнения Риккати и сходимости решений линейных СДУ

Как отмечено, в формировании оптимального управления $U^*$ будет задействовано решение обобщенного уравнения Риккати, результаты анализа которого сформулированы в лемме 1.

Л е м м а 1. *Пусть выполнено предположение $\mathcal{GD}$. Тогда существует неотрицательная абсолютно непрерывная функция $\Pi_t$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющая обобщенному уравнению Риккати*

$$\dot{\Pi}_t + 2(a + \delta_t)\Pi_t + g_t^2\Pi_t - \frac{(b + \sigma_t g_t)^2}{1 + \sigma_t^2\Pi_t}\Pi_t^2 + q = 0. \tag{6}$$

*При этом*

$$0 < \liminf_{t\to\infty}(\Pi_t/\delta_t) \leqslant \limsup_{t\to\infty}(\Pi_t/\delta_t) < \infty.$$

Таким образом, на основании утверждения леммы 1 можно сделать вывод о существовании закона управления $U_t^* = -(b + \sigma_t g_t)(1 + \sigma_t^2\Pi_t)^{-1}\Pi_t X_t^*$. Доказательство леммы 1 и последующих утверждений вынесено в Приложение.

В следующей лемме 2 приводится результат о суперэкспоненциальной верхней оценке для интегрального функционала, содержащего $\Pi_t$. Эта оценка в дальнейшем будет использоваться при исследовании асимптотического поведения решений линейных СДУ.

Л е м м а 2. *Пусть выполнено предположение $\mathcal{GD}$. Тогда существуют положительные константы $\kappa, \lambda$, такие что для функции*

$$\Phi(t,s) = \exp\left\{\int_s^t \left(a + \delta_v - \frac{b(b + \sigma_v g_v)\Pi_v}{1 + \sigma_v^2\Pi_v} + \frac{(g_v^*)^2}{2}\,dv\right)\right\},$$

*где*

$$g_t^* = g_t - \frac{(b + \sigma_t g_t)}{1 + \sigma_t^2\Pi_t}\sigma_t\Pi_t,$$

*справедлива оценка*

$$\Phi^2(t,s) \leqslant \kappa \exp\left\{-\int_s^t 2\lambda\delta_v\,dv\right\} \quad \textit{при} \quad s \leqslant t. \tag{7}$$

Отметим, что результат леммы 2, в частности, позволяет утверждать, что при отсутствии аддитивных возмущений применение закона управления $U^*$ приводит к суперэкспоненциальной стабилизации в среднем квадратичном с темпом $\bar{\delta}_t > \delta_t$. Если аддитивные шумовые воздействия также имеют место, то для анализа траекторий соответствующего процесса потребуется рассмотреть класс уравнений, описываемый далее.

Рассматривается линейное СДУ с аддитивными и мультипликативными возмущениями

$$dZ_t = a_t Z_t\,dt + G_t dw_t + G_t^* Z_t dw_t \tag{8}$$

и неслучайным начальным условием $Z_0 = z$; $a_t, G_t, G_t^*$ — кусочно-непрерывные функциях времени. Пусть для коэффициента $a_t$ и некоторой функции

$\delta_t^* > 0$ выполняется $\limsup_{t\to\infty}(|a_t|/\delta_t^*) < \infty$, при этом функция $\delta_t = \delta^*$ удовлетворяет предположению $\mathcal{GD}$ и отношение $(G_t^*)^2/\delta_t^*$ ограничено ($|\cdot|$ — знак модуля). Для функции $G_t$ предположим, что при некоторой константе $\hat{\lambda} > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{t\to\infty} G_t^2 \exp\left\{2\hat{\lambda}\int\limits_0^t \delta_v^*\,dv\right\} = 0. \tag{9}$$

В приводимой далее лемме 3 содержится результат анализа асимптотической сходимости к нулю процесса $Z_t$ при сформулированных условиях на коэффициенты (8).

*Лемма 3. Если для* $\Phi^*(t,s) = \exp\left\{\int_s^t \left(a_v + (G_v^*)^2/2\right)\,dv\right\}$ *справедлива оценка*

$$\Phi^*(t,s) \leqslant \kappa^* \exp\left\{-\int\limits_s^t \delta_v^*\,dv\right\}, \quad s \leqslant t,$$

*где* $\kappa^*$ *— некоторая положительная константа, то решение* $Z_t$ *линейного СДУ* (8) *асимптотически стремится к нулю с вероятностью единица и в среднем квадратичном с темпом* $\bar{\delta}_t = \alpha\delta_t^*$. *При этом положительная константа* $\alpha$ *такая, что* $\lambda^* - \epsilon < \alpha < \lambda^*$ *при сходимости с вероятностью единица и* $\alpha = \lambda^*$ *для сходимости в среднем квадратичном, здесь* $\lambda^* = \min(1, \hat{\lambda})$, *константа* $\hat{\lambda}$ *взята из условия* (9), $\epsilon > 0$ *— сколь угодно малое число.*

## 3. Основной результат

При условии выполнения предположения $\mathcal{GD}$ справедливо утверждение леммы 1 и существует закон управления

$$U_t^* = -\frac{b + \sigma_t g_t}{1 + \sigma_t^2\Pi_t}\Pi_t X_t^*, \tag{10}$$

где процесс $X_t^*$, $t \geqslant 0$, задается уравнением

$$dX_t^* = \left(a - \frac{b(b + \sigma_t g_t)}{1 + \sigma_t^2\Pi_t}\Pi_t\right)X_t^*\,dt + G_t dw_t + g_t^* X_t^* dw_t \tag{11}$$

с начальным условием $X_0^* = x$; функция $g_t^* = g_t - \frac{(b+\sigma_t g_t)}{1+\sigma_t^2\Pi_t}\sigma_t\Pi_t$; функция $\Pi_t$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет (6).

В следующей теореме формулируется результат об оптимальной асимптотической суперэкспоненциальной стабилизации решений (1).

*Теорема. Пусть для фиксированного темпа стабилизации* $\delta_t > 0$ *и коэффициентов уравнения* (1) *выполнено предположение* $\mathcal{GD}$ *и*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\gamma_T\delta_T^2}{\int\limits_0^T \gamma_t\delta_t\,dt} = 0. \tag{12}$$

*Тогда стратегия управления $U^*$, определяемая по* (10)–(11)*, будет обеспечивать оптимальную суперэкспоненциальную стабилизацию решений* (1)*. Точнее, решение $X^*_t$ уравнения* (1) *при $U_t = U^*_t$ (см.* (11)*) асимптотически суперэкспоненциально стремится к нулю в среднем квадратичном и с вероятностью единица. Темп сходимости $\bar{\delta}_t = \lambda\delta_t$, где множитель $\lambda$ — некоторая положительная константа, такая что $\lambda^* - \epsilon < \lambda < \lambda^*$; величина $\lambda^* = 1 + |\bar{\lambda}|$, если* (3) *справедливо при некотором числе $\bar{\lambda} < 0$, и $\lambda^* = 1$ в противном случае, $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число. При этом $U^*_t$ является решением задачи оптимального управления* (5)*.*

Также полезно отметить, каким образом приведенные в разделе 2 леммы 1–3 участвуют в доказательстве основного результата. Во-первых, благодаря лемме 1 устанавливается существование управления $U^*$. Соотношение (7) леммы 2 используется при построении верхней оценки для разности целевых функционалов $EJ_T(U^*) - EJ_T(U)$, $U \in \mathcal{U}$, а также определении конечности критерия в (5) на управлении $U^*$. Наконец, из-за того что уравнение (11) представляет собой частный случай (8), для нахождения темпа сходимости процесса $X^*_t$ к нулю применяется лемма 3.

*Замечание.* Для ситуации включения в уравнение (1) только мультипликативных возмущений ($G_t \equiv 0$) соответствующая задача оптимизации имеет вид $\limsup_{T\to\infty} EJ_T(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ и ее решение (10)–(11) существует при выполнении условий 2), 3) предположения $\mathcal{GD}$. В этом случае темп сходимости $\bar{\delta}_t$ процесса $X^*_t$ к нулевому состоянию равен $\bar{\delta}_t = \lambda\delta_t$, где $\lambda > 1$ — некоторая константа.

## 4. Критерий оптимальности и дисконтирование

Дисконтирование является часто применяемой процедурой при постановке задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, см., например, [18, гл. 6]. Критерий в (5) далее можно преобразовать, соответствующим образом выделив *дисконтирующий множитель* $f_T = \exp\Big\{-\int_0^T r_t\,dt\Big\}$, при этом $r_t \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, называется *ставкой дисконтирования*. Если $f_T = \Big(\int_0^T \gamma_t\delta_t\,dt\Big)^{-1}$, то ставка $r_t = \gamma_t\delta_t\Big(\int_0^t \gamma_s\delta_s\,ds\Big)^{-1} = \beta_t\delta_t$, где $\beta_t = \gamma_t\Big(\int_0^t \gamma_s\delta_s\Big)^{-1} ds$, и из (12) следует, что функция $\beta_t$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Точнее, имеют место соотношения $\lim_{t\to\infty} \beta_t\delta_t^2 = 0$ и $\lim_{t\to\infty} r_t\delta_t = 0$. Тогда задача (5) принимает вид

$$\limsup_{T\to\infty} \left( \exp\left\{ -\int_0^T r_t\,dt \right\} EJ_T(U) \right) \to \inf_{U\in\mathcal{U}},$$

т.е. рассматривается минимизация долгосрочных дисконтированных ожидаемых совокупных потерь. Сравнивая определенную выше ставку дисконтирования $r_t$ и темп роста $\delta_t$ подынтегрального множителя в (2), можно отметить, что величина $r_t$ оказывается намного меньше, чем $\delta_t$, что нагляднее будет продемонстрировать на примере.

*Пример*. Пусть $\gamma_t \equiv \gamma > 0$, тогда ставка $r_t = \left(\int_0^t \delta_s\,ds\right)^{-1} \delta_t$ соответствует дисконтированию с функцией $f_t$, стремящейся к нулю при $t \to \infty$. В частности, темп стабилизации $\delta_t \sim t^m$, $0 < m < 1$, или $\delta_t \sim \ln^l t$, $l > 0$, приводит к дисконтированию по ставке $r_t \sim 1/(t+1)$, известному как "гиперболическое", см. [19] ($g_t \sim \hat{g}_t$ — обозначение того, что для двух положительных функций $g_t$, $\hat{g}_t$ имеет место $\lim_{t\to\infty}(g_t/\hat{g}_t) > 0$).

Следует отметить, что для общего случая пары функций $(\gamma_t, \delta_t)$, удовлетворяющих предположению $\mathcal{GD}$ и условию (12), справедливо следующее наблюдение: если $\int_0^t \gamma_s\delta_s\,ds \to \infty$, $t \to \infty$, то будет иметь место "положительное" дисконтирование, т.е. дисконтирование по положительной ставке $r_t > 0$ и функция $f_t$ стремится к нулю при $t \to \infty$. При $\int_0^\infty \gamma_s\delta_s\,ds < \infty$ возникает так называемое "нулевое" дисконтирование, когда функция $f_t$ стремится к константе $\bar{f} > 0$, что выражается в отсутствии неограниченной по времени нормировки функционала для задачи (5), а величина $\bar{f}$ соответствует нулевой ставке $\bar{r} \equiv 0$.

## 5. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации решения линейного СДУ (1), содержащего аддитивные и мультипликативные шумовые воздействия. Показано, что при выполнении условий на параметры возмущений и функцию темпа стабилизации (см. предположение $\mathcal{GD}$) закон управления (10)–(11) в виде линейной обратной связи по состоянию является суперэкспоненциально стабилизирующим (см. теорему). Множитель в (10), задающий коэффициент усиления, зависит от решения обобщенного уравнения Риккати (6), существование которого гарантируется при соблюдении требований 2) и 3) предположения $\mathcal{GD}$ (см. лемму 1). Условие, касающееся суперэкспоненциального характера убывания коэффициента диффузии для аддитивных возмущений (см. 1) предположения $\mathcal{GD}$ и (9)), играет ключевую роль при определении асимптотической суперэкспоненциальной сходимости к нулю решения линейного СДУ (см. лемму 3). Введение ограничений на коэффициент диффузии также необходимо для выполнения (12), чтобы стабилизирующее управление $U^*$ оказалось оптимальным в смысле решения задачи управления (5) на бесконечном интервале времени.

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

*Доказательство леммы 1.* Доказательство существования решения (6) основано на предельном переходе при $T \to \infty$ для решений обобщенных уравнений Риккати, рассматриваемых на $[0, T]$, с нулевым граничным условием на правом конце. Пусть $\tilde{\Pi}_t = \delta_t^{-1}\Pi_t$, тогда $\tilde{\Pi}_t$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\dot{\tilde{\Pi}}_t + 2\left(a + \delta_t + \dot{\delta}_t\delta_t^{-1}\right)\tilde{\Pi}_t + g_t^2\tilde{\Pi}_t - \\ - (b + \sigma_t g_t)^2 \left(1/\delta_t + \sigma_t^2\tilde{\Pi}_t\right)^{-1} \tilde{\Pi}_t^2 + q\delta_t^{-1} = 0.\end{gathered} \tag{П.1}$$

Возникновение функции $\tilde{\Pi}_t$ связано с решением задачи стохастического управления для уравнения вида

$$(\Pi.2) \qquad dx_t = \left(a + \delta_t + \dot{\delta}_t\delta_t^{-1}\right) x_t dt + bu_t dt + (g_t x_t + \sigma_t u_t)\, dw_t$$

с начальным условием $x_{t_0} = x$ и целевым функционалом $\tilde{J}_{T,t_0}(u) = \int_{t_0}^{T} \delta_t^{-1}(qx_t^2 + u_t^2)\, dt$, где $t_0 \geqslant 0$ — произвольный начальный момент времени. Закон управления вида $u_t^{*T} = -(b+\sigma_t g_t)(1/\delta_t + \sigma_t^2 \tilde{\Pi}_t^T)^{-1}\tilde{\Pi}_t^T x_t^{*T}$ является решением задачи $E\tilde{J}_{T,t_0}(u) \to \min$, где функция $\tilde{\Pi}_t^T$ удовлетворяет (П.1) с граничным условием $\tilde{\Pi}_T^T = 0$ см. [2, теорема 7.10, раздел 6.7, с. 334] (индекс ${}^T$ обозначает решения, определенные на конечных интервалах $[0, T]$). При этом $E\tilde{J}_{T,t_0}(u^{*T}) = \tilde{\Pi}_{t_0}^T x^2$. Так как $\dot{\delta}_t/\delta_t^2 \to 0$, $t \to \infty$, то в силу (4) предположения $\mathcal{GD}$ конкурирующий закон управления $u_t^{(0)} = -k\delta_t x_t^{(0)}$ будет суперэкспоненциально стабилизировать решение уравнения (П.2) в среднем квадратичном. Также при этом имеет место соотношение $\tilde{\Pi}_{t_0}^T x^2 = E\tilde{J}_{T,t_0}(u^{*T}) \leqslant E\tilde{J}_{T,t_0}(u^{(0)}) \leqslant cx^2$, здесь и далее $c > 0$ — некоторая константа, конкретное значение которой не является важным и может меняться от формулы к формуле. Таким образом, функция $\tilde{\Pi}_t^T$ ограничена при $t \geqslant 0$ и не убывает (по $T$). Тогда стандартная аргументация (см. [1, с. 268]) приводит к тому, что существует предел $\lim_{T\to\infty} \tilde{\Pi}_t^T = \tilde{\Pi}_t$, функция $\tilde{\Pi}_t$ удовлетворяет (П.1) и обладает свойствами неотрицательности и ограниченности сверху. Кроме того, показывается, что при сформулированных условиях имеет место оценка $\liminf_{t\to\infty} \tilde{\Pi}_t > 0$. Действительно, рассмотрим функцию $\bar{\Pi}_t = \tilde{\Pi}_t^{-1}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{\bar{\Pi}}_t - 2\left(a + \delta_t + \frac{\dot{\delta}_t}{\delta_t}\right)\bar{\Pi}_t - g_t^2\bar{\Pi}_t - \frac{q}{\delta_t}\bar{\Pi}_t^2 + \bar{q}_t = 0,$$

где $\bar{q}_t = (b + \sigma_t g_t)^2(1/\delta_t + \sigma_t^2\tilde{\Pi}_t)^{-1}$ и $\limsup_{t\to\infty}(\bar{q}_t/\delta_t) < \infty$. Как можно заметить, функция $\bar{\Pi}_t \geqslant 0$ появляется в результате оптимального управления в системе

$$d\bar{x}_t = -\left(a + \delta_t + \dot{\delta}_t\delta_t^{-1} + g_t^2/2\right)\bar{x}_t dt + \sqrt{q}\bar{u}_t dt$$

с начальным состоянием $\bar{x}_{t_0} = \bar{x}$ и функционалом $\bar{J}_{\infty,t_0}(\bar{u}) = \int_{t_0}^{\infty}(\bar{q}_t\bar{x}_t^2 + \delta_t\bar{u}_t^2)dt$ ($\bar{x}$ — некоторая константа). Свойства функций из предположения $\mathcal{GD}$ дают возможность суперэкспоненциальной стабилизации траектории $\bar{x}_t^{(0)}$ управлением $\bar{u}_t^{(0)} \equiv 0$. При этом $\bar{J}_\infty(\bar{u}^{(0)}) \leqslant c\bar{x}^2$, откуда следует, что $\bar{\Pi}_t = \tilde{\Pi}_t^{-1}$ также ограничена сверху. Таким образом, для функции $\Pi_t = \delta_t\tilde{\Pi}_t$, удовлетворяющей (6), имеет место оценка $0 < \liminf_{t\to\infty}(\Pi_t/\delta_t) \leqslant \limsup_{t\to\infty}(\Pi_t/\delta_t) < \infty$. Лемма 1 доказана.

*Доказательство леммы 2.* Рассматривается линейное СДУ с мультипликативным шумом

$$dZ_t = \left(a + \delta_t - \frac{b(b + \sigma_t g_t)\Pi_t}{1 + \sigma_t^2\Pi_t}\right) Z_t dt + g_t^* Z_t dw_t$$

и неслучайным начальным условием $Z_{t_0} = z$, $z \neq 0$, $t_0 \geqslant 0$. Нетрудно заметить, что $EZ_t^2 = \Phi^2(t, t_0) z^2$. Далее, по формуле Ито и из (6) определяется выражение для дифференциала $d(\Pi_t EZ_t^2)$:

$$d(\Pi_t EZ_t^2) = -q(EZ_t^2) - \frac{(b + \sigma_t g_t)^2 \Pi_t^2}{(1 + \sigma_t^2 \Pi_t)^2} (EZ_t^2).$$

В силу выявленных свойств функции $\Pi_t$ (см. лемму 1) и предположения $\mathcal{GD}$ $d(\Pi_t EZ_t^2) \leqslant -2\lambda\delta_t(\Pi_t EZ_t^2)$ при некоторой константе $\lambda > 0$, откуда $\Pi_t EZ_t^2 \leqslant$ $\leqslant (\Pi_{t_0} z^2) \exp\left\{-\int_{t_0}^t 2\lambda\delta_v\, dv\right\}$, и $EZ_t^2 \leqslant \kappa \exp\left\{-\int_{t_0}^t 2\lambda\delta_v\, dv\right\} z^2$ при некоторой константе $\kappa > 0$. По отмеченному ранее $EZ_t^2 = \Phi^2(t, t_0) z^2$. Лемма 2 доказана.

*Доказательство леммы 3.* Решение (8) представимо в виде, см. [2, теорема 6.14, с. 47],

$$Z_t = I_t^{(1)} + I_t^{(2)} + I_t^{(3)}, \tag{П.3}$$

где слагаемые $I_t^{(1)} = Y_t z$, $I_t^{(2)} = -Y_t \int_0^t Y_s^{-1} G_s G_s^* \, ds$, $I_t^{(3)} = Y_t \int_0^t Y_s^{-1} G_s \, dw_s$, со случайной функцией $Y_t = \exp\left\{\int_0^t (a_v - (G_v^*)^2/2)\, dv + \int_0^t G_v^* dw_v\right\}$.

Из предположения о коэффициенте $G_t^*$ и применения закона повторного логарифма для стохастических интегралов, см. [20], следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} \left\{|\tilde{I}_t|/h_t\right\} < \infty, \quad \text{где} \quad \tilde{I}_t = \int_0^t G_s^* dw_s,$$

при функции

$$h_t = \left(\int_0^t \delta_v^* \, dv \ln\ln \left(\int_0^t \delta_v^* \, dv\right)\right)^{1/2}.$$

Тогда в представлении (П.3) слагаемое $I_t^{(1)}$ можно оценить как $|I_t^{(1)}| \leqslant$ $\leqslant c_1 \exp\left\{-\alpha_1 \int_0^t \delta_v^* \, dv\right\}$ при $t > t_0(\omega)$ и $1 - \epsilon < \alpha_1 < 1$, здесь и далее $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $c_i > 0$ — некоторая константа, $i$ — индекс. Для второго слагаемого $I_t^{(2)}$ выражение $Y_t Y_s^{-1} \leqslant \exp\left\{-\int_s^t \delta_v^* \, dv + \tilde{c}(h_t + h_s)\right\}$ п.н. для $t \geqslant s \geqslant t_0(\omega)$ и некоторой константы $\tilde{c} > 0$. Следовательно, с учетом (9), $|I_t^{(2)}| \leqslant c_2 \exp\left\{-\alpha_2 \int_0^t \delta_v^* \, dv\right\}$, где $\hat{\lambda}^* - \epsilon < \alpha_2 < \hat{\lambda}^*$, $\hat{\lambda}^* = \min(1, \hat{\lambda})$. Для слагаемого $I_t^{(3)}$ из (П.3) определим квадратическую характеристику $\langle M_t \rangle$ мартингала $M_t = \int_0^t G_s Y_s^{-1} \, dw_s$, равную $\langle M_t \rangle = \int_0^t G_s^2 Y_s^{-2} \, ds$. При этом для некоторой константы $m > 0$ и функции $\tilde{h}_t = \exp\left\{m \int_s^t \delta_v^* \, dv\right\}$ выполнено $\limsup_{t\to\infty} \{\langle M_t \rangle / \tilde{h}_t\} < \infty$. В случае когда $\langle M_t \rangle \to \infty$, из закона повторного логарифма следует, что $\limsup_{t\to\infty} \left\{|M_t| (\langle M_t \rangle \ln\ln \langle M_t \rangle)^{-1/2}\right\} < \infty$, и тогда имеет место оценка $(I_t^{(3)})^2 \leqslant c_3 \exp\left\{-2\alpha_3 \int_0^t \delta_v^* \, dv\right\}$, где $\hat{\lambda}^* - \epsilon < \alpha_3 < \hat{\lambda}^*$, константа $\hat{\lambda}^* = \min(1, \hat{\lambda})$. В ситуации когда $\langle M_\infty \rangle < \infty$, неравенство $\limsup_{t\to\infty}\{|M_t|/\tilde{h}_t\} < \infty$ будет справедливо для любой монотонной функции $\tilde{h}_t > 0$, такой что $\tilde{h}_t \to \infty$, $t \to \infty$, и поэтому $|I_t^{(3)}| \leqslant \tilde{c}_3 \exp\left\{-\tilde{\alpha}_3 \int_0^t \delta_v^* \, dv\right\}$ при $1 - \epsilon < \tilde{\alpha}_3 < 1$ и некоторой константе $\tilde{c}_3 > 0$. Объединяя полученные выше оценки для трех слагаемых (П.3), приходим к соотношению $\limsup_{t\to\infty}\{Z_t^2/h_t\} < \bar{c} < \infty$ при $h_t = \exp\left\{-2\alpha \int_s^t \delta_v^* \, dv\right\}$ и константе $\alpha > 0$, такой что $\lambda^* - \epsilon < \alpha < \lambda^*$, где $\lambda^* = \min(1, \hat{\lambda})$, $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Таким образом, решение $Z_t$ асимптотически стремится к нулю с вероятностью единица суперэкспоненциальным образом. Для анализа сходимости $Z_t$ в среднем квадратичном выписывается представление

$$EZ_t^2 = 2\int_0^t (\Phi^*(t,s))^2 G_s G_s^* EZ_s \, ds + \int_0^t (\Phi^*(t,s))^2 G_s^2 \, ds + (\Phi^*(t,0))^2 z^2.$$

Так как $EZ_t = \Phi^*(t,0)z$, то из приведенных в условии леммы 3 предположений относительно функции $\Phi^*(t,s)$, а также требований к коэффициентам $G_t, G_t^*$ будет следовать, что $EZ_t^2 \leqslant \hat{c} \exp\left\{-2\alpha \int_s^t \delta_v^* \, dv\right\}$, $t \to \infty$, при некоторой константе $\hat{c} > 0$ и множителе $\alpha = \lambda^*$, где $\lambda^* = \min(1, \hat{\lambda})$. Лемма 3 доказана.

*Доказательство теоремы.* Сначала доказывается оптимальность $U^*$. При фиксированном допустимом управлении $U \in \mathcal{U}$ рассматривается представление для разности ожидаемых значений целевых функционалов

$$\begin{aligned} EJ_T(U^*) - EJ_T(U) &= 2\exp\left\{\int_0^T 2\delta_v \, dv\right\} E\left(x_T \Pi_T X_T^*\right) - \\ &\quad - E\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2\delta_v \, dv\right\}\left(qx_t^2 + u_t^2\right) dt, \end{aligned} \tag{П.4}$$

где переменные $x_t = X_t - X_t^*$ и $u_t = U_t - U_t^*$ связаны соотношением

$$dx_t = ax_t dt + bu_t dt + (g_t x_t + \sigma_t u_t) dw_t, \quad x_0 = 0. \tag{П.5}$$

На основании (П.5) с учетом условий в предположении $\mathcal{GD}$ можно выписать оценку

$$\frac{c_0}{\delta_T} \exp\left\{\int_0^T 2\delta_v \, dv\right\} Ex_T^2 \leqslant E\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2\delta_v \, dv\right\}\left(qx_t^2 + u_t^2\right) dt \tag{П.6}$$

для любого $T \geqslant 0$, $c_0 > 0$ — некоторая константа. Тогда, используя (П.6) и свойства функции $\Pi_t$ (см. лемму 1), после применения элементарного неравенства $2AB \leqslant A^2/c + cB^2$, справедливого при произвольном $c > 0$ для любых чисел $A, B$, представление (П.7) оценивается как

$$
(\text{П.7}) \qquad EJ_T(U^*) - EJ_T(U) \leqslant \tilde{c}_1 \delta_T^3 \exp\left\{ \int_0^T 2\delta_v\, dv \right\} E[(X_T^*)^2]
$$

при некоторой константе $\tilde{c}_1 > 0$.

Далее исследуется процесс $\tilde{Z}_t = \delta_t^{3/2} \exp\left\{\int_0^T \delta_v\, dv\right\} X_t^*$ с уравнением динамики $d\tilde{Z}_t = \tilde{a}_t \tilde{Z}_t dt + \tilde{G}_t dw_t + g_t^* \tilde{Z}_t dw_t$ при $\tilde{Z}_0 = \delta_0^{3/2} x$, где коэффициенты $\tilde{a}_t = a + \delta_t + (3/2)\dot{\delta}_t \delta_t^{-1} - b(b + \sigma_t g_t)(1 + \sigma_t^2 \Pi_t)^{-1}\Pi_t$, $\tilde{G}_t = \delta_t^{3/2}\sqrt{\gamma_t} G$. При этом в силу условия $\dot{\delta}_t/\delta_t^2 \to 0$, $t \to \infty$, для $\Phi(t,s) = \exp\left\{\int_s^t (\tilde{a}_v + (g_v^*)^2/2)\, dv\right\}$ справедлива оценка вида (7) с $\tilde{\delta}_t = \tilde{\lambda}\delta_t$, где $0 < \tilde{\lambda} < 1$ — некоторая константа. Тогда $E\tilde{Z}_T^2 \leqslant cL_T$, где функция

$$
L_T = \exp\left\{ -\int_0^T \tilde{\delta}_v\, dv \right\} \left( 1 + \int_0^T \exp\left\{ \int_0^t \tilde{\delta}_v\, dv \right\} \delta_t^3 \gamma_t \right) dt.
$$

Применяя правило Лопиталя, можно показать, что выполнение (12) влечет за собой сходимость $L_T / \int_0^T \delta_t \gamma_t\, dt$ к нулю при $T \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу в (П.7) при $T \to \infty$ и соответствующей нормировке, имеем

$$
\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U^*)}{\int_0^T \delta_t \gamma_t\, dt} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int_0^T \delta_t \gamma_t\, dt},
$$

что доказывает оптимальность управления $U^*$ в (5). При этом по формуле Ито $EJ_T(U^*) = \Pi_0 x^2 - \exp\left\{\int_0^T 2\delta_v\, dv\right\} E[(X_T^*)]^2 \Pi_T + G^2 \int_0^T \Pi_t \gamma_t\, dt$. Тогда величина критерия в (5) на управлении $U^*$ оценивается как

$$
0 < \limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U^*)}{\int_0^T \delta_t \gamma_t\, dt} = \frac{\Pi_0 x^2}{\int_0^\infty \delta_t \gamma_t\, dt} + \limsup_{T\to\infty} \frac{\int_0^T \Pi_t \gamma_t G_t^2\, dt}{\int_0^T \delta_t \gamma_t\, dt} < \infty.
$$

Теперь можно перейти к анализу сходимости процесса $X_t^*$ при $t \to \infty$. Для этого используется утверждение леммы 3 с $Z_t = X_t^*$. Тогда в уравнении (8) коэффициенты $a_t = a - b\Pi_t(b + \sigma_t g_t)(1 + \sigma_t^2 \Pi_t)^{-1}$, $G_t^* = g_t^*$, $G_t = G_t$. При этом отношения $a_t/\delta_t$, $g_t^*/\delta_t$, $t \geqslant 0$, ограничены в силу 2), 3) предположения $\mathcal{GD}$ и результатов лемм 1 и 2. Нетрудно заметить, что условия леммы 3 выполнены с $\delta_t^* = \tilde{\lambda}\delta_t$, где $\tilde{\lambda} > 1$ — некоторое число, а величина $\hat{\lambda}$ в условии (9) удовлетворяет неравенству $\hat{\lambda} < (1 - \bar{\lambda})/\tilde{\lambda}$, если значение константы $\bar{\lambda}$ из (3) взять таким, чтобы $1 - \bar{\lambda} > 0$. Соответственно в результате имеем асимптотическую суперэкспоненциальную сходимость $X_t^*$ в среднем квадратичном и с вероятностью единица к нулю при темпе $\bar{\delta}_t = \alpha\delta_t^* = \alpha\tilde{\lambda}\delta_t$, где $(1 - \bar{\lambda} - \epsilon) < \alpha\tilde{\lambda} < (1 - \bar{\lambda})$. Значение константы $\lambda = \alpha\tilde{\lambda} > 1$, если существует $\bar{\lambda} < 0$, при котором имеет место соотношение (3), и $\lambda < 1$ в противном случае. Полагая $\lambda^* = 1 + |\bar{\lambda}|$ и $\lambda^* = 1$ для каждой из указанных выше ситуаций, получаем, что $\lambda^* - \epsilon < \lambda < \lambda^*$ при сколь угодно малом числе $\epsilon > 0$. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.
2. *Yong J., Zhou X.Y.* Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. N.Y.: Springer, 1999.
3. *Mao X.* Stochastic Differential Equations and Applications. Second edition. Cambridge: Woodhead publishing, 2011.
4. *Xepapadeas A.* Stochastic Analysis: Tools for Environmental and Resource Economics Modeling / Research Tools in Natural Resource and Environmental Economics. Eds. A.A. Batabyal, P. Nijkamp. Singapore: World Scientific Publishing, 2011. P. 55–88.
5. *Ladde A.G., Ladde G.S.* An Introduction to Differential Equations: Stochastic Modeling, Methods and Analysis (V. 2). Singapore: World Scientific Publishing Company, 2013.
6. *Dong L., Wei X., Hu X., Zhang H., Han J.* Disturbance Observer-Based Elegant Anti-Disturbance Saturation Control for a Class of Stochastic Systems // Int. J. Control. 2019. P. 1–13.
7. *Caraballo T.* On the Decay Rate of Solutions of Non-autonomous Differential Systems // Electronic J. Differential Equations 2001. V. 2001. No. 5. P. 1–17.
8. *Caraballo T., Garrido-Atienza M.J., Real J.* Stochastic Stabilization of Differential Systems with General Decay Rate // Syst. Control Lett. 2003. V. 48. No. 5. P. 397–406.
9. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Linear System Optimisation with Prescribed Degree of Stability // Proc. IEEE. IET, 1969. V. 116. No. 12. P. 2083–2087.
10. *Khasminskii R.* Stochastic stability of differential equations. 2nd ed. N.Y.: Springer, 2012.
11. *Zhang D., Lin X., Raz J., Sowers M.* Semiparametric Stochastic Mixed Models for Longitudinal Data // JASA. 1998. V. 93. No. 442. P. 710–719.
12. *Паламарчук Е.С.* Об обобщении логарифмической верхней функции для решения линейного стохастического дифференциального уравнения с неэкспоненциально устойчивой матрицей // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 195–201.
13. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.M.* Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems. N.Y.: Springer, 2006.
14. *Willems J.L., Willems J.C.* Feedback Stabilizability for Stochastic Systems with State and Control Dependent Noise // Automatica. 1976. V. 12. No. 3. P. 277–283.

15. *Паламарчук Е.С.* Анализ критериев долговременного среднего в задаче стохастического линейного регулятора // АиТ. 2016. № 10. С. 78–92.

*Palamarchuk E.S.* Analysis of Criteria for Long-run Average in the Problem of Stochastic Linear Regulator // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1756–1767.

16. *Phillis Y.A.* Optimal Stabilization of Stochastic Systems // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 94. No. 2. P. 489–500.

17. *Тертычный-Даури В.Ю.* Оптимальная стохастическая стабилизация адаптивных механических систем // АиТ. 1993. № 1. С. 111–118.

*Tertychnyj V.Yu.* Stochastic Optimal Stabilization of Adaptive Mechanical Systems // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 1. P. 104–118.

18. *Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.* Infinite horizon optimal control: deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.

19. *Loewenstein G., Prelec D.* Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation // The Quarterly Journal of Economics. 1992. V. 107. No. 2. P. 573–597.

20. *Wang J.-g.* A Law of the Iterated Logarithm for Stochastic Integrals // Stoch. Proc. Appl. 1993. V. 47. No. 2. P. 215–228.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.*

Поступила в редакцию 19.07.2020

После доработки 28.09.2020

Принята к публикации 28.10.2020