

© 2021 г. **А.П. КУРДЮКОВ**, д-р техн. наук,

О.Г. АНДРИАНОВА, канд. физ.-мат. наук (andrianovaog@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;  
Национальный исследовательский университет  
“Высшая школа экономики”, Москва),

А.А. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (a.a.belov@inbox.ru),  
Д.А. ГОЛЬДИН, канд. техн. наук (goldind@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## МЕЖДУ $LQG/H_2$ И $H_\infty$ ТЕОРИЯМИ УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

В обзоре обсуждаются различные подходы в теории управления, возникавшие на протяжении последних десятилетий, которые отражают желание найти компромисс между  $LQG/H_2$  теорией управления и  $H_\infty$  теорией управления. К таким теориям можно отнести теорию регуляторов, чувствительных к риску (risk sensitive), теорию субоптимального управления с ограничением на функционал  $H_\infty$  энтропии, теорию смешанного  $H_2/H_\infty$  управления, теорию минимаксного  $LQG$  управления, анизотропийную теорию и некоторые другие. Более подробно в обзоре обсуждается анизотропийная теория управления, которая в рамках одной постановки задачи включает в себя и  $LQG/H_2$  и  $H_\infty$  теории.

*Ключевые слова:* линейные системы, подавление влияния внешних возмущений, робастное управление, робастная фильтрация, робастная стабилизация, субоптимальное управление, оптимальное управление, теория информации, окрашенный шум, робастная устойчивость, системы с неопределенностями, дескрипторные системы, частотная теорема.

DOI: 10.31857/S0005231021040024

### 1. Введение

На разных этапах развития теории автоматического управления линейными стационарными системами разработчики предъявляли различные требования к функционированию систем управления. На начальном этапе базовой задачей, стоявшей перед разработчиками систем автоматического управления, являлась задача обеспечения устойчивости замкнутой системы. По мере усложнения целей функционирования систем управления к системам предъявлялись более сложные требования: обеспечение заданных характеристик переходных процессов, оптимизация некоторых параметров и характеристик замкнутой системы управления и т.д. Все это привело к появлению теории

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-18-50330).

оптимального управления, использующей традиционные и новые методы оптимизации.

Одной из важных характеристик систем управления является энергия, которую система затрачивает в процессе своего функционирования. Если система описывается с помощью дифференциальных уравнений, в которые управление входит как параметр, то энергия представляет собой интеграл от квадратичной формы, аргументами которой являются состояние объекта и управление, построенное для него. В случае дискретного описания управляемой системы энергией будет некоторая сумма, являющаяся аналогом интеграла в непрерывном случае. Задача минимизации энергии, потребляемой управляемой системой, является одной из важнейших задач теории оптимального управления, нашедшей свое применение при синтезе управления для многих технических систем. Энергия является некоей усредненной характеристикой системы управления. Математическая модель такого критерия качества может быть представлена в виде  $H_2$  нормы замкнутой системы. Среди множества других критериев качества можно выделить критерий подавления влияния наихудшего в заданном классе воздействия, действующего на систему. Обеспечение подавления влияния наихудшего возмущения является чрезвычайно важной задачей при проектировании систем автоматического управления объектами, к которым предъявляются требования работоспособности при экстремальных условиях: системы управления самолетами, ядерными реакторами, аварийными ситуациями и т.д. Системы управления с такими критериями качества относятся к минимаксным (игровым) системам. Математической моделью такого критерия качества является  $H_\infty$  норма замкнутой системы.

Оба этих критерия могут рассматриваться как разные способы подавления влияния внешних возмущений для линейной задачи при различных предположениях на входные сигналы, действующие на систему.

В процессе работы над этими задачами в их решении обнаружили общие моменты. Это навело исследователей на мысль, что должна существовать теория, которая в определенном смысле обобщает эти две задачи и при этом каждая из задач будет являться ее частным случаем. Данная работа посвящена обзору различных задач теории автоматического управления, которые в той или иной степени разрабатывали теорию, обобщающую  $H_2$  и  $H_\infty$  методы построения регуляторов для линейных систем.

Первая часть настоящего обзора посвящена различным теориям, построенным во второй половине прошлого века, которые в той или иной степени являются развитием классических постановок  $H_2$  и  $H_\infty$  теорий автоматического управления.

Вторая часть обзора в основном посвящена робастной стохастической теории управления с анизотропийным функционалом качества, которая была создана И.Г. Владимировым, решившей задачу построения теории управления, лежащей между  $H_2$  и  $H_\infty$  теориями. При этом обе эти теории являются частными (предельными) случаями анизотропийной теории управления.

В конце обзора рассматриваются задачи минимаксного  $LQG$  управления, по своей идеологии близкие к идеологии построения анизотропийного управ-

ления. В постановке задач минимаксного  $LQG$  управления также используется теоретико-информационная характеристика двух случайных сигналов — относительная энтропия. Однако в отличие от анизотропийной теории, где понятие относительной энтропии используется для формирования критерия качества системы управления, в минимаксном  $LQG$  управлении эта характеристика сигналов используется для описания ограничений в системе.

Несмотря на близость задач управления и фильтрации [147, 149, 150], авторы не включили в обзор работы по фильтрации с  $H_2$ ,  $H_\infty$  и анизотропийными критериями, так как это значительно увеличило бы объем этого обзора без изложения существенно новых идей. Постановки и решения задач анизотропийной фильтрации можно найти в [62, 63], идеи  $H_\infty$  фильтрации описаны, например, в [9, 10]. Задачи смешанной  $H_2/H_\infty$  фильтрации, подразумевающей  $H_2$  норму в качестве критерия минимизации и обеспечение заданного уровня подавления внешнего возмущения, были решены в [247].

В основе анизотропийной теории управления лежат теоретико-информационные идеи описания неопределенности сигналов в системах управления, основанные на понятии энтропии. В последнее время теоретико-информационному описанию неопределенности в различных работах уделено достаточно большое внимание. В частности, работа [46] посвящена минимизации и максимизации относительной энтропии в различных дисциплинах, однако в ней ни слова не говорится об описании неопределенностей сигналов в системах управления в терминах относительной энтропии. Данный обзор имеет своей целью закрыть этот пробел.

По образному выражению из введения к книге [108] “теория информации отвечает на два фундаментальных вопроса: каково предельное сжатие данных (ответ: энтропия) и какова предельная скорость передачи данных (ответ: пропускная способность канала)”. Теория управления также обеспечивает два основных требования к системам управления: построение устойчивых систем и гарантию выбранного качества систем. И теория информации, и теория управления имеют дело с моделями сигналов. В теории управления сигналы в основном рассматриваются в роли входов и выходов собственно систем управления (объект плюс регулятор), созданию которых и посвящена теория. В теории информации сигналы и их характеристики служат основным предметом исследования.

В теории информации в основном исследуются сигналы, имеющие стохастическую природу. Введение в теорию управления вероятностного описания приблизило модели систем управления к реальным техническим системам. В вероятностных терминах можно описывать как внешние сигналы, действующие на объект, так и сигналы внутри объекта управления. Соответственно, и неопределенности в системе следует описывать подобным способом.

Описание систем управления с помощью вероятностных характеристик уже подразумевает некую неопределенность. Как отмечал в своей работе А.А. Красовский [33], “статистическое рассмотрение позволяет построить некий мост от динамики систем к информационному описанию процессов в системах управления. Этот мост заключается в том, что переходные процессы получают описание в информационных терминах”. Однако можно ввести

неопределенности в описание характеристик случайного процесса, участвующего в описании управляемой системы. Известно, что наиболее полной характеристикой случайного процесса является плотность распределения вероятностей. Неизвестные характеристики плотности распределения вероятностей входного случайного сигнала или случайных начальных условий являются неопределенностью в вероятностном описании системы, а различные модели описания неизвестных характеристик плотности позволяют ставить и решать содержательные задачи теории управления в присутствии неопределенности [3]. Например, в книге Г.П. Тартаковского [60] рассматриваются задачи оценивания параметров и фильтрации случайных процессов, стохастического управления, в том числе при наличии априорной неопределенности.

Идеи применения теории информации стали появляться в 60-е годы XX в. В своей книге [66] А.А. Фельдбаум указывал на большие возможности применения теоретико-информационных методов в теории управления. Во введении к своей книге [57] А.В. Солодов отмечал важность привлечения информационных характеристик сигналов для постановки задач управления. В книге описано применение информационных характеристик к оценкам системы автоматического управления, рассмотрена пропускная способность систем при наличии помех. Однако никаких попыток ввести информационные характеристики в описание модели управления или в критерии качества в то время сделано не было.

Взаимосвязь теории информации и теории управления может рассматриваться в двух направлениях. Первое направление хорошо описано в обзоре [2]. Это введение объектов исследования теории информации в описание объекта управления (например, канала связи), что приводит к необходимости исследования традиционных задач теории управления с учетом изменившихся моделей. Второе направление влияния теории информации на теорию управления состоит в привлечении хорошо развитого аппарата теории информации для описания множества сигналов, циркулирующих в системе, и не только на ее входе и выходе, но и внутри объекта управления. Учет теоретико-вероятностных характеристик входных сигналов и сигналов внутри объекта управления является основой анизотропной теории управления, обзору работ по которой посвящена вторая часть настоящей статьи.

Авторы в основном придерживаются временной последовательности появления рассматриваемых в обзоре работ.

В работе использованы следующие обозначения:  $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел,  $\mathbb{R}$  — поле вещественных чисел,  $\mathbb{C}$  — поле комплексных чисел,  $\mathbf{E}$  — математическое ожидание,  $\mathbf{cov}$  — ковариационная матрица,  $\otimes$  — произведение Кронекера,  $\text{diag}(i_1, \dots, i_N)$  — диагональная матрица порядка  $N$ , на главной диагонали которой стоят числа  $i_1, \dots, i_N$ ,  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора,  $\mathbb{L}_2^m$  — класс  $m$ -мерных квадратично интегрируемых случайных последовательностей,  $l_2$  — класс квадратично суммируемых случайных последовательностей,  $\mathfrak{L}_2^m$  — класс  $\mathbb{R}^m$ -мерных случайных распределенных абсолютно непрерывно векторов с конечным вторым моментом,  $D(p \parallel q)$  — относительная энтропия или расстояние Кульбака–Лейблера [34] между двумя распределениями  $p$  и  $q$ ,  $\mathbf{A}(w)$  — анизотропия случайного вектора  $w$ ,  $\overline{\mathbf{A}}(W)$  — средняя анизотропия

случайной последовательности  $W$ ,  $\|F\|_a$  — анизотропийная норма системы  $F$  с уровнем средней анизотропии входной последовательности  $a$ .

$H_2^{m \times m}$  обозначает пространство Харди аналитических в открытом единичном круге  $\{z \in \mathbb{C}^1 : |z| < 1\}$  на комплексной плоскости матричных функций  $G$ , имеющих конечную  $H_2$ -норму

$$\|G\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \text{tr} \left( (\widehat{G}(\omega))^* \widehat{G}(\omega) \right) d\omega \right)^{1/2},$$

где через  $\widehat{G}(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} G(r e^{i\omega})$ ,  $\omega \in \Omega = [-\pi; \pi]$ , обозначено угловое граничное значение функции

$$(1.1) \quad G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k,$$

$g_k$  — импульсная переходная характеристика,  $(\cdot)^*$  обозначает комплексное сопряжение.

$H_{\infty}^{m \times m} (RH_{\infty}^{m \times m})$  обозначает пространство Харди (правильных) аналитических в открытом единичном круге передаточных функций  $H(z)$  дискретной системы, с нормой

$$(1.2) \quad \|H\|_{\infty} = \sup_{|z| < 1} \bar{\sigma}(H(z)),$$

где  $\bar{\sigma}(\cdot)$  обозначает максимальное сингулярное значение матрицы.

## 2. Обзор современных подходов к понижению влияния внешних возмущений в линейных системах

В 50-е гг. двадцатого века на основе фундаментальной работы [32] по теории линейной фильтрации в дискретном времени, опубликованной в 1941 г. академиком А.Н. Колмогоровым, и подобной теории, независимо разработанной крупным американским математиком Н. Винером, рассмотревшим задачи линейной фильтрации сигналов, а также их экстраполяции и интерполяции для непрерывного времени [233], появились исследования по применению вероятностных методов в теории фильтрации и позже в теории автоматического управления. Подробнее об этом можно узнать в [19].

Ранее, как правило, предполагалось, что сигналы, функционирующие в системе управления, имеют детерминированный характер. Основой теории Винера–Колмогорова была спектральная теория случайных процессов, развившаяся из фундаментальной работы А.Я. Хинчина [68], в которой было установлено, что корреляционная функция случайного процесса и его энергетический спектр мощности связаны преобразованием Фурье. Теория, изложенная в книге Н. Винера, была очень сложна для понимания инженерами, которые в те годы не имели для этого необходимой математической подготовки. Известные американские ученые Г.В. Боде и К. Шеннон в 1950 г.,

используя интуитивно понятные соображения, дали упрощенное изложение этой теории [98]. Совершенно другой подход к проблемам выделения сигнала на фоне шума, отличный от теории Колмогорова–Винера, применимый и к проблемам оптимальной линейной фильтрации сигналов, был предложен Р.Л. Стратоновичем в 1959 г. [58]. Теория Р.Л. Стратоновича основывалась на представлении случайных процессов, моделирующих как полезный сигнал, так и шум с помощью дифференциальных уравнений (уравнений состояния). Независимо от Р.Л. Стратоновича законченные результаты оптимальной линейной фильтрации как в дискретном, так и в непрерывном времени получили в 1961 г. американские ученые Р.Е. Калман и Р.С. Бьюси [149, 150]. Для гауссовских и марковских случайных процессов Р.Л. Стратоновичем, Р.Е. Калманом и Р.С. Бьюси были выведены дифференциальные уравнения, определяющие структуру оптимального фильтра, на вход которого поступает принимаемый сигнал, и матричное уравнение Риккати, определяющее точность его оценки. Наличие дифференциальных уравнений оценки вместо интегральных предоставляет определенные практические преимущества, так как дифференциальные уравнения решаются намного легче с помощью аналоговой или цифровой техники, чем интегральные.

Введение в теорию управления сигналами, имеющих вероятностные характеристики, позволило ставить и решать новый класс задач теории управления. Одним из ярких результатов того времени явилась теория построения регуляторов для линейных систем с квадратичным критерием качества, обеспечившая мощный инструмент для синтеза многомерных систем управления. Так называемая *LQG* задача (Р.Е. Калман [28, 148]) (аббревиатура *LQG* соответствует первым буквам английских слов в выражении “линейно-квадратичная гауссовская”) — это задача построения управления для объекта с линейной динамикой, возбужденной аддитивным гауссовским шумом, и критерием качества, который является математическим ожиданием положительно полуопределенной квадратичной формы и содержит интересную особенность. Линейный регулятор, являющийся решением этой задачи, оказывается линейной функцией состояния и идентичен регулятору в задаче, в которой отсутствует гауссовский шум. Такая задача называется задачей построения *LQR* регулятора (аббревиатура *LQR* соответствует первым буквам английских слов в выражении “линейно-квадратичный регулятор”). Эта задача была решена в работах А.М. Летова [41–44].

Напомним постановку и решение задачи *LQG* оптимизации для динамической линейной системы, заданной в непрерывном времени в следующем виде:

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t),$$

$$(2.2) \quad y(t) = C(t)x(t) + w(t),$$

где  $x$  — вектор состояния системы,  $u$  — вектор управления,  $y$  — измеряемый выход, используемый для построения управления. На систему также действуют аддитивные гауссовские белые шумы  $v(t)$  и  $w(t)$ <sup>2</sup>. Для заданной системы

<sup>2</sup> Формулы (2.1)–(2.2) являются символической (инженерной) записью случайных процессов, представленных в интегральной форме, которая включает стохастический интеграл Ито [143].

требуется найти такую последовательность  $u(t)$ , которая в каждый момент времени  $t$  линейно зависит только от предыдущих значений  $y(t')$ ,  $0 \leq t' < t$ , и минимизирует следующий критерий качества:

$$J = \mathbf{E} \left[ x^T(T)Fx(T) + \int_0^T (x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)) dt \right],$$

$$F \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad R(t) > 0.$$

Время (горизонт)  $T$  может быть как конечным, так и бесконечным. Если  $T \rightarrow \infty$ , то первым членом  $x^T(T)Fx(T)$  можно пренебречь. Для того чтобы функционал качества  $J$  не стремился в этом случае к бесконечности, имеет смысл рассмотреть новый функционал, равный  $\frac{J}{T}$ .

$LQG$  регулятор, который решает поставленную задачу, удовлетворяет уравнениям

$$(2.3) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = \mathbf{E}[x(0)],$$

$$(2.4) \quad u(t) = -K(t)\hat{x}(t).$$

Матрица  $L(t)$  называется коэффициентом усиления Калмана и ассоциируется с фильтром Калмана, представленным уравнением (2.3). В каждый момент времени фильтр генерирует оценку  $\hat{x}(t)$  состояния  $x(t)$ , используя измерения и входы. Коэффициент усиления  $L(t)$  определяется матрицами  $A(t)$ ,  $C(t)$ ,  $V(t)$ ,  $W(t)$ , две последние являются ковариационными матрицами  $v(t)$  и  $w(t)$ , а также  $\mathbf{E}(x(0)x^T(0))$ . Коэффициент усиления Калмана может быть найден из следующего матричного дифференциального уравнения Риккати:

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t) + V(t),$$

$$P(0) = \mathbf{E}(x(0)x^T(0)).$$

При известном решении  $P(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , коэффициент усиления Калмана равен

$$L(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t).$$

Матрица обратной связи  $K(t)$  определяется с помощью матриц  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $R(t)$  и  $F$  и может быть найдена из матричного дифференциального уравнения Риккати

$$-\dot{S}(t) = A^T(t)S(t) + S(t)A(t) - S(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S(t) + Q(t),$$

$$S(T) = F.$$

При найденном  $S(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , матрица  $K(t)$  равна  $R^{-1}(t)B^T(t)S(t)$ .

Полученные матричные уравнения Риккати очень похожи за исключением того, что первое решается в прямом времени, а второе — в обратном. Первое уравнение дает возможность найти решение задачи линейно-квадратичного



оценивания ( $LQE$ ), а второе — задачу поиска линейно-квадратичного регулятора ( $LQR$ ). Вместе эти две задачи представляют собой задачу линейно-квадратичного гауссовского управления ( $LQG$ ). Задачи оценивания ( $LQE$ ) и поиска регулятора ( $LQR$ ) могут быть решены отдельно, эта идея получила название принципа разделения.

Когда матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $R(t)$ ,  $V(t)$ ,  $W(t)$  не зависят от времени, а  $T \rightarrow \infty$ , закон управления становится стационарным, а динамические уравнения Риккати могут быть заменены алгебраическими [54, 55].

### 2.1. $LQG$ , $LEQG$ и регуляторы, чувствительные к риску

Приведем формулировку и схему решения  $LQG$  задачи для линейной нестационарной системы управления, описываемой следующими уравнениями:

$$(2.5) \quad x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k,$$

$$(2.6) \quad y_k = C_k x_k + v_k, \quad 0 \leq k < N,$$

с нулевым начальным условием  $x_0 = 0$ . Здесь  $k$  является индексом времени, а  $w_k$ ,  $v_k$  представляют собой независимые дискретные гауссовские случайные процессы с ковариационными матрицами  $W_k$ ,  $V_k$  соответственно.

Функционал качества задается следующим выражением:

$$(2.7) \quad J = \mathbf{E} \left( x_N^T F x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k) \right),$$

$F \geq 0$ ,  $Q_k \geq 0$ ,  $R_k > 0$ .

Требуется найти регулятор, стабилизирующий замкнутую систему и минимизирующий функционал качества (2.7).

Регулятор в  $LQG$  задаче задается равенством

$$(2.8) \quad u_k = -L_k \hat{x}_k,$$

где  $\hat{x}_k$  является оценкой  $x_k$ . Оценка  $\hat{x}_k$  состояния  $x_k$  вычисляется с помощью решения разностного уравнения Риккати. Матрица обратной связи  $L_k$  также находится с помощью решения разностного уравнения Риккати. Таким образом, для получения управления (2.8), минимизирующего функционал качества (2.7), надо решить два разностных уравнения Риккати. Если все матрицы в формулировке задачи стационарны и если горизонт  $N$  стремится к бесконечности, дискретный  $LQG$  регулятор становится стационарным. В этом случае разностные уравнения Риккати заменяются соответствующими алгебраическими уравнениями. Причем уравнения для определения  $\hat{x}_k$  и  $L_k$  можно решать независимо, т.е. раздельно. В теории  $LQG$  управления принцип разделения, не верный в детерминированных системах и более формально известный как принцип разделения оценки и контроля, утверждает, что задача создания оптимальных  $LQG$  регуляторов по принципу обратной



связи для стохастической системы может быть решена путем разработки оптимального наблюдателя состояния системы, который подставляется в оптимальный детерминированный регулятор. Таким образом, проблема может быть разбита на две отдельные части, что облегчает синтез. Этот важный в  $LQG$  дискретной задаче принцип разделения подробно описан, например, в [48, 67].

Критерий качества (2.7), используемый в постановке задачи поиска оптимального  $LQG$  регулятора, в стационарном случае идентичен  $H_2$  норме передаточной функции замкнутой системы. Таким образом, решение оптимальной  $LQG$  задачи подразумевает минимизацию  $H_2$  нормы замкнутой системы. В данной ситуации можно говорить о решении  $H_2$  оптимальной задачи управления.

Обратим внимание, что описанная выше задача не имеет неопределенностей ни в описании модели объекта, ни в описании входных возмущений, так как гауссовская входная последовательность полностью определена своей функцией плотности распределения вероятностей.

$LQG$  и  $LQR$  задачам посвящено огромное количество литературы во всем мире. Обширная библиография приведена в [80]. В России наиболее популярна была монография Х. Квакернаака и Р. Сивана [29], в которой изложены эти задачи как для непрерывных, так и для дискретных систем управления. Описание вычислительных процедур можно найти в [83, 220].

В июне 1971 г. вышел первый тематический выпуск журнала IEEE Transactions on Automatic Control. Этот выпуск был полностью посвящен различным аспектам  $LQG$  управления и, по словам его редактора, подводил итоги как теоретических и алгоритмических, так и возможных практических аспектов этой задачи [84]. Однако уже в этом номере появились работы [84, 194], ставившие под сомнение универсальность этой теории. По образному выражению Д.С. Бернштейна [96] “ $LQG$  теория и ее техника уравнений Риккати очень похожа на здание, состоящее из одних стальных рам, — очень жесткое и очень ограниченное”.

В реальных задачах  $LQG$  регулятор работал достаточно хорошо, если аддитивная помеха была гауссовским белым шумом. Однако если у входного возмущения была достаточно большая временная ковариация, т.е. шум не белый, то  $LQG$  регуляторы не удовлетворяли требованиям, предъявляемым к замкнутым этими регуляторами системам управления. Интуитивно было понятно, что в случае большой ковариации входного возмущения другие регуляторы должны работать лучше, чем  $LQG$ . Это соображение подводило разработчиков систем управления к мысли учитывать при построении регуляторов свойства случайных сигналов, циркулирующих в системе управления. Одним из подходов к учету отличия входного случайного сигнала от белого шума был подход, основанный на изменении критерия качества (оптимальности) для системы управления.

Этот подход впервые применил Д. Джекобсон в 1973 г. в [144]. В этой статье автор впервые предложил использовать экспоненциально-квадратичный функционал качества. Задачу с критерием качества, в который входит экс-

понента, стали называть  $LEQG$  задачей (линейной, экспоненциально-квадратичной, гауссовской).

В [144] рассматривалась линейная стационарная система с наблюдаемым вектором состояния

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k, \\ y_k &= x_k,\end{aligned}$$

где  $x_k$  — вектор состояния,  $y_k$  — наблюдаемый вектор,  $u_k$  — вектор управления,  $w_k$  — гауссовский шум, постоянные матрицы  $A, B_1, B_2$  имеют соответствующие размерности. Вводилась квадратичная форма

$$(2.9) \quad G = x_N^T \Pi x_N + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k).$$

Задача состояла в построении регулятора, минимизирующего функционал, равный

$$\Upsilon_N = \sigma \mathbf{E} \left[ \exp \left\{ \sigma \frac{1}{2} G \right\} \right],$$

причем параметр  $\sigma$  принимал значения  $\pm 1$ . Значение  $-1$  соответствовало так называемой  $LE - G$  задаче, а  $+1$  —  $LE + G$  постановке. Когда интенсивность шума стремилась к бесконечности, оптимальные коэффициенты усиления для  $LE - G$  задачи стремились к нулю, т.е. при таком входном воздействии практически невозможно было уменьшить значение критерия качества за счет подачи управляющего сигнала. В задаче  $LE + G$  оптимальный регулятор переставал существовать, если интенсивность шума была достаточно большой (т.е. критерий качества стремился к бесконечности независимо от управляющего входа). Регулятор получался линейной функцией состояния

$$u_k = K(\Sigma_k) x_k,$$

причем коэффициент  $K(\Sigma_k)$  зависел от  $\Sigma_k$  — ковариационной матрицы  $w_k$ . Более того, прямыми вычислениями Джекобсон впервые показал, что структура соответствующего регулятора является той же, что и структура регулятора для задачи управления в динамической игре. Этот интересный результат впервые установил связь между задачами управления в динамических детерминированных играх и задачами управления, основанными на минимизации стохастических функций качества.

В отсутствие шума решение этой задачи совпадало с  $LQR$  задачей. Однако в присутствии шума оптимальные регуляторы в задаче Джекобсона с экспоненциальным критерием качества отличались от регуляторов в  $LQG$  задаче. И хотя, как и в случае  $LQG$  задачи, эти регуляторы являлись линейными функциями переменных состояния, они определенно зависели от ковариационной матрицы аддитивного гауссовского шума. Для малых ковариаций решения этих задач были близки, но для больших — заметно различались.

Подчеркнем, что в задаче Джекобсона отсутствуют неопределенности в описании объекта и входных возмущений.

Вплоть до работы П. Уиттла [229] общий случай (случай наблюдения неполного вектора состояний) не был решен. Уиттл рассматривал модель объекта в виде

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + \varepsilon_k, \\y_k &= Cx_k + \eta_k,\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_k$  и  $\eta_k$  являются входным возмущением и шумом измерений соответственно. Предполагалось, что последовательность векторов  $\{[\varepsilon_k^T, \eta_k^T]^T\}$  являлась гауссовским белым шумом с совместной ковариационной матрицей

$$\mathbf{cov}[\varepsilon_k^T, \eta_k^T] = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}.$$

Вводилась следующая квадратичная форма:

$$G = x_T^T P x_T + \sum_{k=0}^{T-1} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k).$$

Функционал качества выбирался в виде

$$(2.10) \quad \gamma(\theta) = -2\theta^{-1} \log \mathbf{E} \left( e^{-1/2\theta G} \right).$$

Матрицы  $N, M, R, Q, P$  положительно определенные,  $\theta$  — действительный скаляр.

Если величина  $\theta \text{Var}(G)$  мала (здесь  $\text{Var}(G)$  — дисперсия), то  $\gamma(\theta) \sim \mathbf{E}(G) - 1/4\theta \text{Var}(G)$ . Это иллюстрирует тот факт, что случаи  $\theta = 0$ ,  $\theta > 0$  и  $\theta < 0$  соответствуют поведению, нейтральному к риску, предпочитающему риск и не охотно относящемуся к риску соответственно в задачах оптимизации [97]. Параметр  $\theta$  Уиттл назвал параметром чувствительности к риску и продемонстрировал, что, выбирая этот параметр слишком большим, можно прийти к ситуации, в которой критерий качества может принимать бесконечные значения. Из приведенных выше рассуждений следует, что  $\gamma(0)$  является традиционным критерием и  $\mathbf{E}(G)$  является предельным значением для  $\gamma(\theta)$  при стремлении  $\theta$  к 0 с обеих сторон.

Уиттл показал, что оптимальный регулятор является линейной функцией оценки состояния, получаемой с помощью модифицированного фильтра Калмана.

Задача построения управления путем минимизации экспоненциально-квадратичного функционала — задача построения управления, чувствительного к риску (risk-sensitive problem), — изучалась в различных интерпретациях в [93, 103, 104, 145, 229, 230, 232].

Однако *LQG* и *LEQG* теории были весьма ограничены в своих приложениях к синтезу реальных технических систем управления. В конце 70-х годов

была указана причина ограниченных возможностей  $LQG$  теории [114]. Эта причина состояла в том, что регуляторы, построенные в рамках этой теории, плохо работали в присутствии неучтенных при синтезе неопределенностей объекта, даже если эти неопределенности были малы. Говоря современным языком, системы управления, замкнутые  $LQG$  регулятором, были не робастны относительно некоторых неточностей в описании объекта. Необходимо подчеркнуть, что с понятием неточности в описании модели объекта или входных сигналов в рассмотрение специалистов по теории управления входит и описание класса тех неопределенностей, которые так или иначе должны быть определены. Под неопределенностью описания объекта управления будем понимать параметрическую неопределенность в описании коэффициентов математической модели, неструктурированную (структурированную) неопределенность в описании модели объекта, а также неопределенность в виде так называемой  $M-\Delta$  конфигурации в соответствии с современной классификацией неопределенностей. Более подробно об описании моделей неопределенностей можно прочитать в [6, 52, 53, 174, 191]. Неопределенность в описании сигналов в системе управления определим в теоретико-информационных терминах несколько позже.

## 2.2. $H_\infty$ оптимальные и субоптимальные регуляторы

Попытки обойти изъяны теории построения регуляторов для линейных систем с квадратичным критерием качества [115] привели к возрождению частотного подхода в форме теории  $H_\infty$  оптимизации [250].

В своей пионерской работе [250] для построения регуляторов Д. Зейм предложил использовать другой критерий качества —  $H_\infty$  норму замкнутой системы. Использование этой нормы в известном смысле обеспечивало робастную устойчивость системы. Идея этого способа обеспечения робастной устойчивости основана на известном круговом свойстве индуцированной нормы оператора (см., например, [25]) и на связи между устойчивостью системы управления и условием обеспечения сжимаемости оператора системы (его норма должна быть меньше 1). Если  $\|A\|_{\text{ind}}$  является индуцированной нормой оператора  $A$ , то

$$(2.11) \quad \|AB\|_{\text{ind}} \leq \|A\|_{\text{ind}} \|B\|_{\text{ind}}.$$

Если в качестве  $A$  понимать оператор системы, а в качестве  $B$  — оператор неопределенности  $\Delta$ , тогда требование выполнения условия

$$\|A\|_{\text{ind}} \|\Delta\|_{\text{ind}} < 1$$

обеспечивает устойчивость последовательно соединенных операторов системы и неопределенности. Причем “размер” неопределенности, при которой совокупная система остается устойчивой, определяется “размером” системы

$$\|\Delta\|_{\text{ind}} < 1/\|A\|_{\text{ind}}.$$

Если в качестве индуцированной нормы оператора взять индуцированную  $l_2$  норму оператора (т.е.  $H_\infty$  норму), тогда неравенство (2.11) переписется в

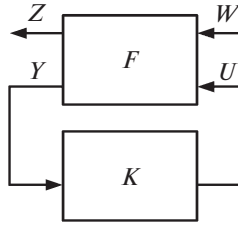


Рис. 1. Нижнее дробно-линейное преобразование  $\mathcal{L}(F, K)$ .

виде

$$(2.12) \quad \|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

Последнее неравенство тесно связано с так называемой теоремой о малом усилении (small gain theorem), опубликованной Зеймсом в 1966 г. [248, 249].

Приведем формальную постановку задачи построения управления по критерию минимума  $H_\infty$  нормы замкнутой системы.

Пусть разомкнутая система  $F$  имеет  $n$ -мерное внутреннее состояние  $x_k$ , связанное с  $m_1$ -мерным возмущением  $w_k$ ,  $m_2$ -мерным управлением  $u_k$ ,  $p_1$ -мерным управляемым сигналом  $z_k$  и  $p_2$ -мерным наблюдением  $y_k$  уравнениями

$$(2.13) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k, \\ z_k &= C_1 x_k + D_{11} w_k + D_{12} u_k, \\ y_k &= C_2 x_k + D_{21} w_k, \quad -\infty < k < +\infty, \end{aligned}$$

где  $A$ ,  $C_i$ ,  $B_j$  и  $D_{ij}$  — постоянные матрицы соответствующих размеров. Система  $F$  имеет блочную структуру

$$(2.14) \quad F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}.$$

Система  $F$ , а также ее подсистемы  $F_{ij}$  в (2.14) имеют следующие реализации в пространстве состояний:

$$(2.15) \quad F \sim \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right].$$

Если управляющий сигнал  $U$  формируется по наблюдению  $Y$  регулятором  $K$ , являющимся физически реализуемой линейной стационарной (не обязательно устойчивой) системой, т.е.  $U = K \otimes Y$ , то передаточная функция от  $W$  к  $Z$  получающейся замкнутой системы представляет собой нижнее дробно-линейное преобразование пары  $(F, K)$  (см. рис. 1):

$$(2.16) \quad \mathcal{L}(F, K) = F_{11} + F_{12} K (I_{p_2} - F_{22} K)^{-1} F_{21}.$$

Задача построения оптимального  $H_\infty$  управления состоит в построении регулятора, обеспечивающего минимум  $H_\infty$  нормы, замкнутой этим регулятором системы, от  $W$  к  $Z$ . Другими словами, оптимальный  $H_\infty$  регулятор должен обеспечивать условие

$$\|\mathcal{L}(F, K)\|_\infty \rightarrow \inf_K.$$

В частотной области  $H_\infty$  норма линейной системы может быть интерпретирована как максимальное значение АЧХ системы. Хорошо известно, что решение задачи синтеза  $H_\infty$  регулятора в частотной области сводится к поиску матричных передаточных функций замкнутой системы с более равномерной АЧХ на всем диапазоне частот [121]. В отечественной литературе подобная интерпретация  $H_\infty$  нормы носит название равномерно-частотного показателя [11].

Решение оптимальной  $H_\infty$  задачи управления сводится к решению достаточно известной в теории управления задачи слежения за моделью (model matching problem) в  $H_\infty$  метрике (метрике пространства Харди). Для систем с одним входом и одним выходом (SISO) это решение описано в монографии [118] путем сведения задачи слежения за моделью к интерполяционной задаче Неванлинны–Пика. Для систем с многими входами и выходами (MIMO) решение задачи слежения за моделью и, следовательно,  $H_\infty$  оптимальной задачи сводится к известной задаче Нехари. Построение  $H_\infty$  оптимальных регуляторов методом сведения этой задачи к задаче Нехари изложено в [121], а также в [192]. В России решение задачи  $H_\infty$  оптимизации посредством решения задачи Нехари было описано в [51].

Несмотря на привлекательность  $H_\infty$  регуляторов, алгоритмы построения оптимального  $H_\infty$  управления были достаточно сложны для восприятия инженерами-разработчиками систем управления на рубеже 80-х годов прошлого века. Кроме того, эти алгоритмы обладали в глазах инженеров большим недостатком: оптимальный регулятор мог иметь порядок значительно больше порядка самой системы.

Существенным моментом в построении  $H_\infty$  теории управления явился переход от оптимальной  $H_\infty$  задачи к субоптимальной. Решение субоптимальной  $H_\infty$  задачи в наиболее полном виде в пространстве состояний для случая непрерывного времени опубликовано в знаменитой “работе четырех авторов” [117] и для дискретного случая в [139]. Решения задачи  $H_\infty$  субоптимального управления напоминают решения классической  $LQG$  задачи. За счет сведения решения задачи  $H_\infty$  субоптимального управления к решению двух уравнений Риккати вычислительная сложность решения субоптимальной задачи получилась значительно меньше, чем решение оптимальной задачи. Решение  $H_\infty$  субоптимальной задачи с помощью двух уравнений Риккати стали называть “2–Риккати подходом”.

Решение дискретной задачи  $H_\infty$  субоптимального управления всегда может быть получено с использованием хорошо известного преобразования

$$z = \frac{1+s}{1-s}.$$

Это преобразование переводит функции, аналитические в полуплоскости, в функции, аналитические в единичном круге. Более того, Ганкелева норма и  $H_\infty$  норма передаточной функции являются инвариантными относительно этого преобразования. По этой причине субоптимальный  $H_\infty$  регулятор может быть получен с использованием следующей процедуры. Преобразуем дискретный объект  $G(z)$  в соответствующий непрерывный объект  $\tilde{G}(s) = G\left(\frac{1+s}{1-s}\right)$ . Построим регулятор в задаче с непрерывным временем  $\tilde{K}(s)$ , который преобразуется в регулятор с дискретным временем с использованием обратного преобразования. Описанная процедура теоретически корректна. Однако сложность ее выполнения сравнима с получением необходимых уравнений напрямую. Более того, использование преобразования невозможно для систем, имеющих полюса в точке  $-1$ . Для таких систем требуется другое билинейное преобразование.

Как было сказано выше, решение субоптимальной  $H_\infty$  задачи управления сводится к решению двух связанных уравнений Риккати, в которые входит параметр  $\gamma$ , задающий ограничение на верхнюю границу критерия качества —  $H_\infty$  норму замкнутой системы, т.е.

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma,$$

где  $T_{zw}$  — передаточная функция замкнутой системы от возмущающего входа к управляемому выходу.

Заметим, что для  $H_\infty$  субоптимальных регуляторов справедливо утверждение, аналогичное принципу разделения при синтезе  $H_2$  оптимального регулятора.  *$H_\infty$  субоптимальный регулятор с обратной связью по выходу является оценщиком по выходу в случае закона управления по вектору состояния в присутствии “наихудшего случая” возмущения.* Этот принцип не означает возможность автономно решать задачу оценивания и управления, как в случае  $H_2$  задачи, однако в случае наилучшего возмущения, равного нулю, принцип разделения в  $H_\infty$  задаче становится принципом разделения в  $H_2$  задаче.

Решение  $H_\infty$  субоптимальной задачи входит в различные компьютерные пакеты для разработки систем управления, например в известный MATLAB Robust Control Toolbox [254].

### 2.3. Робастная устойчивость (в $H_\infty$ теории управления)

Важнейшей целью в синтезе систем управления является обеспечение устойчивости замкнутых систем. Это — минимальное требование к любому регулятору. В реальности же поведение объекта управления может отличаться от поведения его математической модели (называемой номинальным объектом). Эти отличия могут быть вызваны округлением или недостаточной точностью приборов для измерения параметров системы, технологическим разбросом характеристик компонент объекта управления, нелинейной или неучтенной динамикой и т.д. Отличие между реальным объектом и его номинальной моделью называется ошибкой моделирования или неопределенностью системы. Из-за наличия неопределенностей в системе синтезируемый



регулятор должен не только стабилизировать номинальный объект управления, но должен также стабилизировать семейство систем, которое состоит из области неопределенности вокруг номинальной модели в предположении, что реальный объект входит в это семейство.

Необходимость стабилизировать систему с неопределенностью определила концепцию робастной устойчивости: замкнутая система остается устойчивой при наличии неопределенностей из некоторого известного наперед множества. Методы  $H_\infty$  теории управления способствовали получению значительных результатов в области робастной стабилизации объектов с неопределенными параметрами.

Существует много способов описания неопределенности в системах управления. Для знакомства с большинством описаний этих неопределенностей авторы рекомендуют работу [191], в которой перечислены и определены основные способы описания неопределенностей. Достаточно распространенным способом описания меры неопределенности является  $L_\infty$  норма.

В  $H_\infty$  теории управления принято моделировать неопределенность передаточной функцией, отдельной от передаточной функции номинального объекта. Такой подход впервые для аддитивных и мультипликативных неопределенностей был применен в [106, 116] и для неопределенностей в виде взаимно простых множителей (факторов) в [222, 223].

Используя нижнее дробно-линейное преобразование пары  $(F, \Delta)$ , задаваемое формулой (2.16), определим вид матрицы  $F$  для основных типов неструктурированных неопределенностей, следуя монографии [132]:

- 1) аддитивной неопределенности соответствует матрица  $F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G_O \end{bmatrix}$ , где  $G_O$  — передаточная функция номинального объекта;
- 2) обратной аддитивной неопределенности —  $F = \begin{bmatrix} -G_O & G_O \\ -G_O & G_O \end{bmatrix}$ ;
- 3) входной мультипликативной неопределенности —  $F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ G_O & G_O \end{bmatrix}$ ;
- 4) выходной мультипликативной неопределенности —  $F = \begin{bmatrix} 0 & G_O \\ I & G_O \end{bmatrix}$ ;
- 5) обратной входной мультипликативной неопределенности —

$$F = \begin{bmatrix} -I & I \\ -G_O & G_O \end{bmatrix};$$

- 6) обратной выходной мультипликативной неопределенности —

$$F = \begin{bmatrix} -I & G_O \\ -I & G_O \end{bmatrix};$$

- 7) левой неопределенности в виде взаимно простых факторов —

$$F = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\widetilde{M}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G_O \\ I \end{bmatrix} \\ \widetilde{M}^{-1} & G_O \end{bmatrix},$$

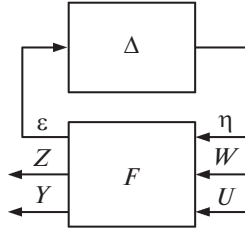


Рис. 2. Верхнее дробно-линейное преобразование  $\mathcal{U}(F, \Delta)$ .

где  $G_O = \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$  — левая взаимно простая факторизация номинального объекта,  $F = (\widetilde{M} + \widetilde{\Delta}_M)^{-1}(\widetilde{N} + \widetilde{\Delta}_N)$  — передаточная функция возмущенного объекта,  $\Delta = \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta}_M & \widetilde{\Delta}_N \end{bmatrix}$ ;

8) правой неопределенности в виде взаимно простых факторов —

$$F = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\widetilde{M}^{-1} & 0 \end{bmatrix} & \widetilde{M}^{-1} \\ \begin{bmatrix} -G_O & I \end{bmatrix} & G_O \end{bmatrix},$$

где  $G_O = \widetilde{N}\widetilde{M}^{-1}$ ,  $F = (\widetilde{N} + \widetilde{\Delta}_N)(\widetilde{M} + \widetilde{\Delta}_M)^{-1}$ ,  $\Delta = \begin{bmatrix} \widetilde{\Delta}_M \\ \widetilde{\Delta}_N \end{bmatrix}$ .

На рис. 2 схематично представлено так называемое верхнее дробно-линейное преобразование. Оно задается следующей формулой:

$$(2.17) \quad \mathcal{U}(F, \Delta) = F_{22} + F_{21}\Delta(I_n - F_{11}\Delta)^{-1}F_{12}.$$

При обратимой  $(I_n - F_{11}\Delta)$  систему с тремя неопределенностями (аддитивной, мультипликативной и неопределенностью в виде взаимно простых факторов) можно представить в виде верхнего дробно-линейного преобразования так называемого стандартного объекта  $F$  [174], представленного в блочном виде (2.14), и неопределенности  $\Delta$ .

Во всех описанных выше типах неопределенностей предполагается, что  $\Delta$  не имеет определенной структуры. Рассмотрим теперь *структурированную неопределенность*, включающую в себя немоделируемую динамику (неструктурированную неопределенность) и параметрическую неопределенность. В этом случае система с неопределенностью может быть представлена верхним дробно-линейным преобразованием (2.17), где

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f),$$

$\delta_i \in \mathbb{C}$ ,  $\Delta_i \in \mathbb{C}^{h_j \times h_j}$ ,  $\sum_{i=1}^s r_i + \sum_{j=1}^f h_j = n$ , где  $n$  — порядок  $\Delta$ .

В [174] приведены необходимые и достаточные условия робастной стабилизируемости номинального объекта при наличии неопределенностей. Это условие подразумевает выполнение теста на  $H_\infty$  норму передаточной функции системы. Математической основой для этого теста для разных классов неопределенностей является уже упоминаемая теорема о малом усилении [248, 249] и круговое свойство индуцированных норм (2.11) [25].

Робастные регуляторы могут быть найдены с помощью процедуры решения задачи  $H_\infty$  оптимизации, поставленной в [250].

Целью данной работы не является подробное изложение задач робастного анализа и синтеза, так как этому вопросу посвящено много литературы [120, 130, 205, 252]. Здесь необходимо было сформулировать основные понятия робастного анализа, чтобы далее была возможность при изложении этих вопросов в рамках анизотропийной теории управления сослаться на результаты, полученные, в частности, в  $H_\infty$  теории управления. Более подробно о задачах робастного анализа и синтеза можно прочесть в недавно вышедшем обзоре [191].

В конце 80-х годов была создана теория робастного управления ( $H_\infty$  оптимального и  $H_\infty$  субоптимального управления) для систем в пространстве состояний. В рамках этой теории был четко определен класс неопределенностей, которые надо учитывать при построении систем управления.

Необходимость описания классов неопределенностей была давно понята специалистами по теории управления. Существует много работ, в которых так или иначе определяются неопределенности в теории управления, но здесь представляют интерес неопределенности в описании системы, которая фигурирует в задаче  $H_\infty$  оптимизации [100, 157, 228, 236, 240, 243].

В рамках этих теорий можно было, используя теорему о малом усилении, гарантированно обеспечивать робастность замкнутой системы.

Теориям  $H_\infty$  оптимального и  $H_\infty$  субоптимального управления посвящено огромное количество монографий, вышедших как за рубежом, так и в России. Из них стоит упомянуть книги [118, 121, 130, 205, 252], вышедшие на Западе. На русском языке выходили обзоры [51, 76, 77], которые сейчас стали библиографической редкостью.  $H_\infty$  оптимальное и  $H_\infty$  субоптимальное управление упомянуто в монографиях [8, 35, 52, 78].

#### *2.4. $H_2$ субоптимальные и робастные регуляторы*

Естественно предположить, что постановка задач синтеза  $H_2$  субоптимального управления должна была возникнуть в начале 60-х годов вслед за постановками и решениями  $H_2$  оптимальных задач [41, 148]. Однако исторически активное исследование субоптимальных и робастных  $H_2$  регуляторов началось значительно позже, в 90-х годах прошлого века. По мнению авторов, на это повлияли два фактора. Первый — появившиеся численные методы решения линейных матричных неравенств [101, 184] и задач выпуклой оптимизации [102], второй — развитие методологии и методики решения задач робастного и субоптимального  $H_\infty$  управления [101]. Поэтому раздел, посвященный  $H_2$  субоптимальным робастным регуляторам, помещен после раздела, посвященного  $H_\infty$  регуляторам.

Как указывается во введении к статье [170], “в практической задаче может оказаться, что оптимальный  $H_2$  регулятор для заданного конкретного объекта может не существовать. То есть данный объект не может удовлетворять необходимым и достаточным условиям для существования оптимального  $H_2$  управления” (для более детальной информации см., например, [195]). Тогда разработчик вынужден искать неоптимальный регулятор. При отсут-

ствии формального определения субоптимального регулятора любой регулятор, который обеспечивает внутреннюю устойчивость системы, замкнутой контуром, может быть истолкован как субоптимальный регулятор. Однако определение субоптимальности естественно дать через достижение  $H_2$  нормы (или любой указанной нормы) выбранной передаточной функции ограничения

$$\|T_{zw}\|_2 \leq \gamma,$$

где  $T_{zw}$  — матрица передаточных функций замкнутой системы от  $W$  к  $Z$ ,  $\gamma$  — допустимая мера усиления возмущения.

В [195] дается краткое описание субоптимальной задачи  $H_2$  управления. Эта работа решает задачу синтеза регулятора, такого что  $H_2$  норма замкнутой системы сколь угодно близка к оптимальному значению. Теоретическое решение этой проблемы обеспечивается с помощью теории возмущений.

Перечислим результаты лишь некоторых работ, посвященных синтезу  $H_2$  управления. В [170] построено субоптимальное управление по состоянию и с использованием трех различных дифференциальных оценщиков (прогнозирования, оценивания текущего состояния и оценщика пониженного порядка) для дискретных стационарных систем. Динамический компенсатор для дискретных систем, обеспечивающий устойчивость и желаемое поведение системы, разработан в [154]. Вопросы робастного  $H_2$  оценивания для систем с ограниченными по норме и политопическими неопределенностями были рассмотрены в [235]. Управление по выходу для систем с неопределенностями предложено в [197].

Предлагаемый читателю обзор ни в коей мере не может рассматриваться как изложение  $LQG$ ,  $H_2$ ,  $H_\infty$ , а также связанных с этими задачами других теорий, поскольку имеет целью только изложить фактические работы, которые появились в этом направлении. Тем не менее сформулировать вышеупомянутые задачи следовало.

## 2.5. Редуция моделей в $H_2$ и $H_\infty$ теориях управления

Решение описанных выше задач сводится к нахождению оптимального (субоптимального) регулятора полного порядка, равного порядку модели объекта управления. В технических приложениях очень часто возникает необходимость построения регулятора пониженного (заданного) порядка меньшего, чем порядок модели. Стоит отметить, что задача синтеза такого регулятора является достаточно трудной, так как зачастую при ее решении нарушается выпуклость полученных условий относительно параметров регулятора. Методы синтеза регуляторов пониженного порядка разделяют на прямые и косвенные. При использовании прямых методов параметры регулятора пониженного порядка сразу вычисляются с помощью процедуры оптимизации или какой-либо другой процедуры. В косвенных подходах либо сначала строится регулятор полного порядка, который впоследствии редуцируется, либо сначала редуцируется модель объекта управления, для редуцированной модели строится регулятор полного порядка, а потом этот регулятор используется для управления исходной моделью. Остановимся подробнее на косвенных методах.

Редукция модели объекта управления является одной из классических задач теории управления, вопросам редукции посвящено большое количество литературы, например, [86, 125, 128, 134, 136, 137, 146, 169, 175, 177, 182, 234, 242, 251].

Существующие методы редукции можно сгруппировать по трем основным направлениям. К первому направлению относятся методы, основанные на отсечении или отбрасывании некоторых уравнений, описывающих систему [146, 175, 177, 182]. Работы [146, 182] посвящены понижению порядка с помощью отсечения  $LQG$  и  $H_\infty$  регуляторов соответственно. Редукция применяется к замкнутым оптимальным системам, а к диагональному виду приводятся решения алгебраических уравнений Риккати фильтрации и управления, соответствующие  $LQG$  и  $H_\infty$  задачам. Несмотря на то что методы в [146, 175, 177, 182] разработаны для непрерывных систем, они могут быть легко модифицированы на случай дискретных [252]. Следует отметить, что техника отсечения приводит к некоторой потере качества замкнутой системы и накладывает ограничения на пониженный порядок регулятора. Эти ограничения связаны с возможной неустойчивостью замкнутой регулятором пониженного порядка системы полного порядка.

Второе направление составляют методы оптимальной аппроксимации линейной системы моделью пониженного порядка с использованием различных критериев качества [86, 134, 136, 137, 169, 182, 234, 242]. В качестве критериев могут быть использованы, например, квадратичный критерий ошибки аппроксимации [134, 137, 234],  $H_2$  норма модели ошибки аппроксимации [136, 242],  $H_\infty$  норма [86] и другие критерии [169].

Наконец, третье направление включает в себя комбинированные методы редукции и оптимальной аппроксимации. К их числу относятся, например, оптимальная аппроксимация линейных стационарных систем по норме Ганкеля, предложенная в [125] и развитая для аппроксимации на определенных диапазонах частот в [134]. В [128] рассматриваются методы редукции  $H_\infty$  регуляторов, позволяющие сохранить неизменное значение  $H_\infty$  нормы замкнутой системы с регулятором пониженного порядка и обеспечивающие устойчивость этой системы. Эти методы основаны на усечении взаимно простых факторов передаточной функции регулятора с последующей аппроксимацией редуцированных факторов дробно-рациональными функциями.

### 3. Общая парадигма $H_2$ и $H_\infty$ теорий управления

Для линейных стационарных систем наиболее известными методами подавления влияния внешних возмущений являются  $H_2$  и  $H_\infty$  подходы, в которых критерием качества замкнутой системы является норма передаточной функции от возмущения к управляемому выходу. Стоит отметить, что  $H_\infty$  норма является индуцированной, в то время как  $H_2$  таковой не является. В  $H_2$  задаче возмущение всегда определенного вида — гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, в то время как в  $H_\infty$  оно наихудшее. В случае  $H_\infty$  управления минимизируется максимальная (по всему диапазону частот) норма передаточной матрицы (как коэффициент усиления внешнего возмущающего воздействия).

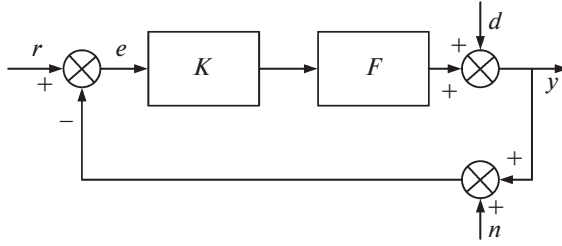


Рис. 3. Система  $F$ , замкнутая регулятором  $K$ .

Вследствие того, что  $H_\infty$  теория работает с широким классом возмущений, в рамках этой теории можно ставить и решать различные задачи управления. Рассмотрим их формулировки для замкнутой системы, изображенной на рис. 3. Здесь  $F$  — объект управления,  $K$  — закон управления, который требуется построить,  $r$  — задающее воздействие,  $y$  — выход системы,  $u$  — управление,  $e$  — сигнал ошибки между задающим воздействием и выходом системы,  $d$  — возмущение и  $n$  — шум измерений. Сигналы выхода, управления и ошибки генерируются следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= (I + FK)^{-1}FKr + (I + FK)^{-1}d - (I + FK)^{-1}GKn, \\ u &= K(I + FK)^{-1}r - K(I + FK)^{-1}d - K(I + FK)^{-1}n, \\ e &= (I + FK)^{-1}r - (I + FK)^{-1}d - (I + FK)^{-1}n. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что сигналы  $r$ ,  $d$ ,  $n$  обладают ограниченной энергией и были нормализованы, т.е. лежат в единичном шаре пространства  $\mathbb{L}_2$ . Однако точно не известна природа этих сигналов. При указанных допущениях можно синтезировать стабилизирующие регуляторы  $K$  для решения следующих задач с минимизацией  $H_\infty$  норм соответствующих систем:

- задача слежения,  $\|(I + FK)^{-1}FK\|_\infty$ ;
- ослабление влияния внешних возмущений,  $\|(I + FK)^{-1}\|_\infty$ ;
- подавление шумов,  $\|-(I + FK)^{-1}FK\|_\infty$ ;
- снижение энергии управления,  $\|K(I + FK)^{-1}\|_\infty$ .

Ниже будут использованы обозначение  $LQG/H_2$  или просто  $H_2$  для обозначения более общей, чем  $LQG$  задачи, —  $H_2$  задачи. О вложении  $LQG$  задачи в  $H_2$  задачу можно прочесть в разных работах, например в [99].

Общая парадигма задач  $LQG/H_2$  и  $H_\infty$  управления представлена на рис. 1.

Здесь  $F$  — объект управления,  $K$  — регулятор,  $W$  и  $Z$  — соответственно внешний вход и управляемый выход системы,  $Y$  и  $U$  — наблюдаемый выход и управление,  $T_{zw}$  — передаточная функция (матрица передаточных функций) замкнутой системы от  $W$  к  $Z$ . В обеих задачах надо построить управление, которое минимизирует соответствующий задаче критерий качества.

В дальнейшем будут рассмотрены дискретные модели систем управления.

Общий взгляд на  $H_2$  и  $H_\infty$  задачи теории управления в свете представленной на рис. 1 парадигмы удобно изложить как различные интерпретации задачи понижения влияния внешних возмущений.

Стандартная задача  $H_2$  оптимизации состоит в нахождении регулятора  $K$  (см. рис. 1), который

- стабилизирует замкнутую систему;
- минимизирует  $H_2$  норму передаточной функции (матрицы передаточных функций)  $T_{zw}$  замкнутой системы от  $W$  к  $Z$ , т.е.

$$(3.1) \quad \|T_{zw}\|_2 \rightarrow \min.$$

Стандартная задача  $H_\infty$  оптимизации состоит в нахождении регулятора  $K$  (см. рис. 1), который

- стабилизирует замкнутую систему;
- минимизирует  $H_\infty$  норму передаточной функции (матрицы передаточных функций)  $T_{zw}$  замкнутой системы от  $W$  к  $Z$ , т.е.

$$(3.2) \quad \|T_{zw}\|_\infty = \sup_{|z|<1} \bar{\sigma}(T_{zw}(z)) \rightarrow \min.$$

Сформулированную задачу (как и всякую минимаксную задачу) можно рассматривать как антагонистическую игру двух игроков, в качестве первого из которых выступает разработчик системы управления, выбирающий регулятор  $K$ , а в качестве второго — природа (которая максимизирует влияние помехи на коэффициент усиления системы) [87].

Обычно рассматривают субоптимальную  $H_\infty$  задачу, которая отличается от сформулированной выше оптимальной требованием, чтобы

$$(3.3) \quad \|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma,$$

где  $\gamma \geq \gamma_{opt}$ . Если величина  $\gamma$  задана наперед и окажется, что  $\gamma \leq \gamma_{opt}$ , то задача субоптимального синтеза не будет иметь решения.

Прозрачна частотная интерпретация задач  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимизации для систем с одним входом и одним выходом.  $H_\infty$  регуляторы синтезируются, чтобы минимизировать максимальное значение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы, в то время как  $H_2$  управление минимизирует среднюю величину амплитуды по всем частотам.

Теории оптимального и субоптимального управления по критерию минимума  $H_\infty$  нормы замкнутой системы обеспечивали выполнение ограничений на понижение влияния внешних возмущений [188] в числе прочих целей. Замечательно, что теория  $H_\infty$  субоптимального управления базировалась на решении уравнений Риккати, содержащих некоторый параметр, и была очень похожа на теорию синтеза линейных регуляторов для линейных систем с квадратичным критерием качества [117]. В случае, когда значение этого параметра стремилось к бесконечности, уравнения для синтеза  $H_\infty$  субоптимального регулятора стремились к уравнениям Риккати для  $LQG$  задачи. Однако  $H_\infty$  оптимальные регуляторы, являясь минимаксными, т.е. рассчитанными на наихудший случай входных возмущений, имеют свои естественные недостатки — для реализации минимума критерия качества величина управления порой становится очень большой и такие системы трудно реализуемы. Вдобавок системы с  $H_\infty$  критерием качества являются очень консервативными.



Субоптимальные  $H_\infty$  регуляторы, которые гарантируют то, что индуцированная норма оператора замкнутой системы ниже фиксированной границы  $\gamma$ , не единственны. Действительно, все регуляторы, достигающие заданной границы на норму передаточной функции замкнутой системы, могут быть выражены в терминах дробно-линейного преобразования [193] регулятора  $K_c$  (известного, как “центральный” [117]) и свободного параметра  $Q \in H_\infty$ ,  $\|Q\|_\infty < 1$ . Хотя каждый выбор параметра  $Q$  гарантирует ограничение на норму, интересно выяснить, когда существует такой параметр  $Q$ , при котором полученный регулятор будет минимизировать дополнительный функционал качества для замкнутой системы. Естественный выбор вспомогательного функционала —  $H_2$  норма передаточной функции замкнутой системы. Одним из недостатков  $H_\infty$  управления является тот факт, что качество замкнутой системы, обычно ассоциированное с  $H_2$  нормой передаточной функции замкнутой системы, приносится в жертву свойству робастности замкнутой системы, гарантированному  $H_\infty$  регуляторами. Обе концепции, рассматриваемые в отдельности ( $H_2$  и  $H_\infty$  управление), не являются удовлетворительными с инженерной точки зрения. Разработчики предпочитают компромиссы.

Эти компромиссы между достоинствами и недостатками  $LQG$  и  $H_\infty$  теорий можно разделить на два направления. Первое направление — минимизация  $H_2$  нормы замкнутой системы с ограничениями на  $H_\infty$  норму, второе — минимизация  $H_\infty$  нормы замкнутой системы с одновременной минимизацией верхней границы функционала качества, используемого в  $H_2$  задаче оптимального управления.

#### 4. Компромиссы между $LQG$ и $H_\infty$

Одной из первых работ, которая относится к первому из вышеперечисленных компромиссов, была работа Бернштейна и Хаддада [95], ставившая задачу построения  $LQG$  регулятора, обеспечившего вместе с тем и ограничения на  $H_\infty$  норму передаточной функции замкнутой системы. Метод синтеза таких регуляторов приводил к решению трех связанных модифицированных уравнений Риккати. Связность этих уравнений иллюстрирует разрыв принципа разделения для  $LQG$  задачи с  $H_\infty$  ограничением. Важно отметить, что два из указанных трех уравнений Риккати, через решение которых строятся матрицы оптимальных регуляторов, являются уже известными, так как они идентичны уравнениям для решения  $LEQG$  задачи, исследованной в [93]. Тем самым прослеживается явная связь между  $LQG$  задачей с ограничением на  $H_\infty$  норму передаточной функции замкнутой системы и  $LEQG$  задачей.

Опишем круг вопросов, относящихся ко второму направлению описанных выше компромиссов. Как хорошо известно,  $H_\infty$  субоптимальное управление не единственно и может быть неким способом параметризовано [126]. Однако если на множестве субоптимальных регуляторов поставить задачу максимизации так называемого функционала  $H_\infty$  энтропии

$$(4.1) \quad J(\gamma, F) = -\frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \ln \left| \det (I_m - \gamma^{-2} (F(j\omega))^* F(j\omega)) \right| d\omega,$$

здесь  $\gamma$  — величина, ограничивающая  $H_\infty$  норму передаточной функции замкнутой системы  $F(s)$ , аналогичного введенному Аровым и Крейном функ-

ционала энтропии в задачах продолжения [4, 5], то получаемый регулятор (являющийся решением субоптимальной задачи и максимизирующий функционал  $H_\infty$  энтропии) оказывается единственным [178]. Этот регулятор является так называемым центральным регулятором. Более того, в [126] было показано, что задача синтеза регулятора, предполагающего минимизацию  $H_\infty$  энтропии, в определенном смысле эквивалентна задаче синтеза регулятора по критерию минимизации функционала чувствительности к риску (2.10). Тот же результат был получен другим методом в [231].

Известно [180], что  $H_\infty$  энтропия является некой мерой рассогласования между  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимальностью. Так,  $H_\infty$  энтропия является верхней гранью  $H_2$  нормы замкнутой системы, таким образом минимизация интеграла  $H_\infty$  энтропии приводит к достижению максимального значения в функционале качества в  $H_2(LQG)$  задаче. Заметим, что можно выбрать  $H_\infty$  субоптимальный регулятор в непрерывном времени, который приводит к неограниченной  $H_2$  норме замкнутой системы. Факт важности задачи минимизации  $H_\infty$  энтропийного функционала привлек большое внимание специалистов по  $H_2$  и  $H_\infty$  управлению, так как появилась надежда, что, минимизируя функционал  $H_\infty$ , разработчик в то же время минимизирует  $H_2$  критерий качества. Насколько известно авторам, этот факт еще не доказан, хотя и не опровергнут.

После появления работ [127, 178, 179] был опубликован целый ряд исследований, посвященных построению регуляторов, имеющих ограничение на  $H_\infty$  норму замкнутой системы и максимизирующих функционал  $H_\infty$  энтропии. Так, в [138] для дискретного времени в пространстве состояний получены формулы для регулятора, обеспечивающего ограниченность  $H_\infty$  нормы замкнутой системы параметром  $\gamma$  и минимизирующего функционал  $H_\infty$  энтропии. Решение получено переформулировкой задачи в непрерывном времени и применением билинейного преобразования, конформно переводящего единичный диск в левую полуплоскость. В [181] дано альтернативное [126] решение задачи минимизации функционала энтропии с требованием ограниченности  $H_\infty$  нормы и устойчивости замкнутой системы, которое получено сведением первоначальной задачи с помощью параметризации Юлы–Кучеры (см., например, [130]) к задаче слежения за моделью [121] и затем к так называемой задаче расстояния. В [140] задача поиска регулятора, минимизирующего энтропийный интеграл и при ограничении на  $H_\infty$  норму замкнутой системы сводится к решению двух вспомогательных задач (так называемых задач полной информации и оценки выхода) и далее применению принципа разделения. В [239] рассматривалась задача синтеза статического регулятора по выходу, минимизирующего функционал  $H_\infty$  энтропии и обеспечивающего заданное ограничение на  $H_\infty$  норму замкнутой системы. Решение задачи сводится к решению связанных уравнений Риккати и Ляпунова. Подход близок к подходу работы [95].

В [122] для непрерывных сингулярно-возмущенных систем рассматривалось статическое робастное управление по выходу, минимизирующее функционал  $H_\infty$  энтропии замкнутой системы. Требовалось, чтобы регулятор обеспечивал ограничения на  $H_\infty$  норму замкнутой системы и минимизировал  $H_\infty$  энтропию замкнутой системы для достаточно малых значений син-

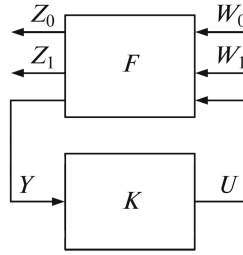


Рис. 4. Смешанная задача  $H_2/H_\infty$  управления.

гулярного возмущения  $\varepsilon$ . Оптимальный коэффициент усиления регулятора синтезируется на базе обобщенных уравнений Риккати и Ляпунова с симметричными  $2 \times 2$  блоками, которые связаны между собой. Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то оптимальный регулятор — один из тех, которые минимизируют  $H_\infty$  энтропию замкнутой непрерывной системы.

Понятие энтропии, использовавшееся в  $H_\infty$  оптимизации, для дискретных систем было распространено на нестационарный случай [141]. Это обобщение не тривиально, так как  $H_\infty$  энтропия для стационарной системы определяется в терминах передаточной функции замкнутой системы, которых не существует для нестационарных систем. Энтропия для нестационарных дискретных систем была определена в терминах теории операторов с привлечением фундаментальных теорем о факторизациях. В [186] была решена задача построения управления, минимизирующего энтропийный функционал для нестационарных дискретных систем, а в [187] получена взаимосвязь между задачей минимизации энтропии для нестационарных систем и задачей минимизации функции чувствительности к риску для таких систем.

Уже упомянутая работа Бернштейна и Хаддада [95], ставшая первой попыткой найти компромисс между робастной устойчивостью (хорошо известный факт, что величина  $H_\infty$  нормы отвечает за робастную устойчивость замкнутой системы — теорема о малых приращениях) и подавлением случайного возмущения в виде белого шума в соответствии с квадратичным критерием качества (величиной  $H_2$  нормы), породила целое направление в теории робастного управления, которое называется смешанным  $H_2/H_\infty$  управлением. Как отмечалось в книге [107], такие регуляторы представляют собой желаемый компромисс между  $H_2$  и  $H_\infty$  теориями управления.

Изложим кратко парадигму смешанного  $H_2/H_\infty$  управления, следуя [155] (см. рис. 4).

Здесь, как и на предыдущем рисунке,  $F$  — объект управления,  $K$  — регулятор,  $T_{z_i w_i}$ ,  $i = 0, 1$  — передаточная матрица замкнутой системы от  $W_i$  к  $Z_i$ . Задача смешанного  $H_2/H_\infty$  управления — найти внутренне стабилизирующий регулятор  $K$ , минимизирующий  $\|T_{z_0 w_0}\|_2$  и обеспечивающий  $\|T_{z_1 w_1}\|_\infty < \gamma$ .

Задача управления, рассмотренная в [95], получается из задачи смешанного  $H_2/H_\infty$  управления при  $W_0 = W_1 = W$ . Вместо минимизации  $\|T_{z_0 w}\|_2$  в [95] решается задача синтеза LQG регулятора с ограничением на  $H_\infty$  норму замкнутой системы, которую называют смешанным  $H_2/H_\infty$  критерием качества.

В [179] показано, что в случае  $W_0 = W_1 = W$  и  $Z_0 = Z_1 = Z$  задача в [95] эквивалентна задаче минимизации энтропии [127].

Дальнейшее развитие теории смешанного  $H_2/H_\infty$  управления нашла в работах [119, 253]. В предисловиях к этим работам говорится, что одной из мотивировок написания работ является желание получить общую постановку для задач  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимизации аналогично тому, как решения этих задач проводятся по близкой схеме (см. [117]). Забегая вперед, отметим, что в рамках анизотропийной теории управления, описанной ниже, общая постановка задач  $H_2(LQG)$  и  $H_\infty$  оптимизации была получена. Задачи, поставленные и решенные в [253] и [119], являются в определенной степени дуальными результатами работы [95]. В [176] было получено решение стохастической смешанной  $H_2/H_\infty$  задачи для дискретного случая.

Недавно была опубликована работа [30], в которой предложен один из подходов к созданию общей теории  $H_2/H_\infty$  управления для систем с детерминированными входами. В работе вводится характеристика оператора из пространств входов в пространство выходов, названная  $H_\infty/\gamma_0$  нормой. Эта новая норма существенным образом зависит от входящей в ее определение матрицы  $R$ . В крайних случаях при отсутствии одного из входов введенная норма превращается в одну из оставшихся норм. Подход напоминает ранее предложенный подход с введением коэффициента усиления в виде суммы взвешенных норм  $\lambda \|\cdot\|_2 + (1 - \lambda) \|\cdot\|_\infty$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . В указанной работе также синтезирован оптимальный закон управления по состоянию, минимизирующий введенную  $H_\infty/\gamma_0$  норму.

Необходимо отметить работы [85, 185], в которых показана связь между задачами минимизации  $H_\infty$  энтропии и смешанным  $H_2/H_\infty$  управлением для стационарных и нестационарных систем управления соответственно. Авторам бы не хотелось в этом обзоре углубляться в строгое определение смешанной задачи  $H_2/H_\infty$  управления в нестационарном случае, читатель может найти необходимые сведения в процитированных выше работах.

## 5. Анизотропийная теория управления — начальный период

В этом разделе будут кратко приведены некоторые понятия теории информации, необходимые для изложения основ анизотропийной теории управления; введены основные понятия анизотропийной теории управления: понятия анизотропии вектора, средней анизотропии последовательности, анизотропийной нормы системы; сформулирована задача синтеза оптимального анизотропийного регулятора и описано ее решение.

### 5.1. Необходимые (некоторые) сведения из теории информации

Пусть  $X$  будет дискретной случайной величиной с алфавитом  $\mathcal{X}$ , и пусть задана функция вероятностной меры  $p(x) = \text{Pr}\{X = x\}$ ,  $x \in \mathcal{X}$ .

Энтропия  $H(X)$  случайной переменной  $X$  определяется как

$$(5.1) \quad H(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x) = -\mathbf{E}(\log p(x)).$$

Энтропия представляет собой характеристику одной случайной величины. Пусть теперь на одном множестве заданы два вероятностных распределения  $p(x)$  и  $q(x)$ .

*Относительная энтропия* или *расстояние Кульбака–Лейблера между двумя распределениями*  $p(x)$  и  $q(x)$  определяется как

$$(5.2) \quad D(p \parallel q) = \mathbf{E}_p \left( \log \frac{p(x)}{q(x)} \right),$$

где  $\mathbf{E}_p(\Phi)$  — математическое ожидание функции  $\Phi$ , определенное по правилу

$$\mathbf{E}_p(\Phi) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \Phi(x).$$

### Свойства относительной энтропии

- Пусть  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $x \in \mathcal{X}$  будут два распределения вероятностей (две меры). Тогда

$$D(p \parallel q) \geq 0.$$

Равенство нулю выполняется, если  $p(x) = q(x)$  для всех  $x$ .

- В общем случае

$$D(p \parallel q) \neq D(q \parallel p).$$

Рассмотрим две случайных величины  $X$  и  $Y$  с совместной функцией вероятностей  $p(x, y)$  и функциями вероятностей  $p(x)$  и  $p(y)$ .

*Взаимной информацией*  $I(X; Y)$  называется относительная энтропия между совместным распределением и произведением распределений  $p(x)p(y)$ , т.е.

$$(5.3) \quad I(X; Y) = D(p(x, y) \parallel p(x)p(y)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(x, y) \log \left( \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right).$$

Определим важную для дальнейшего изложения дифференциальную энтропию случайной величины. Пусть  $X$  — непрерывная  $m$ -мерная случайная величина,  $f(x)$  — плотность распределения вероятностей для  $X$ . Множество, где  $f(x) > 0$ , называется опорным множеством на  $X$ .

*Дифференциальная энтропия*  $h(X)$  для  $X$  с плотностью распределения  $f(X)$  определяется как

$$h(X) = -\mathbf{E}(\log f(X)) = - \int_S f(X) \log f(X) dX,$$

где  $S$  — опорное множество случайной переменной.

По аналогии с дискретным случаем определим относительную энтропию.

Относительная энтропия или расстояние Кульбака–Лейблера  $D(f \parallel g)$  между плотностями  $f(x)$  и  $g(x)$  определяется как

$$(5.4) \quad D(f \parallel g) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \log \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) dx_1 \cdots dx_m.$$

### Свойства относительной энтропии

- 1)  $D(f \parallel g)$  конечна, если опорное множество функции  $f(x)$  содержится в опорном множестве  $g(x)$ .
- 2)  $D(f \parallel g) \geq 0$ , причем равенство достигается, если  $f = g$ .
- 3) Справедливо соотношение  $0 \log \frac{0}{0} = 0$ .

Для непрерывных случайных величин определим взаимную информацию. Пусть  $X$  и  $Y$  — две случайные  $m$ -мерные величины с совместной функцией распределения плотности вероятностей  $f(x, y)$  и функциями плотностей вероятностей  $f(x)$  и  $f(y)$ .

Взаимная информация  $I(X; Y)$  определяется как

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= D(f(x, y) \parallel f(x)f(y)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(x, y) \log \left( \frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} \right) dx_1 \cdots dx_m dy_1 \cdots dy_m. \end{aligned}$$

Понятие относительной энтропии играет большую роль не только в теории информации (сжатие данных), но и в различных других научных дисциплинах, таких как статистическая физика, теория вероятностей, финансовая математика [46]. В следующем разделе покажем, какую роль это понятие играет в теории управления. Более подробно о введенных определениях и их свойствах можно прочесть в [59, 108, 129].

Пожалуй, первой работой, которая строго использовала теоретико-информационные понятия в постановках задач управления, была работа 1988 г. [198]. В ней предлагалось искать оптимальное управление из условия максимизации дифференциальной энтропии, связанной с функцией распределения вероятностей, построенной на множестве управлений. В этой работе было показано, что оптимизация среднего функции потерь эквивалентна минимизации энтропии управления при условии наилучшей функции плотности энтропии.

В [151] в роли критерия качества для построения управления была предложена относительная энтропия. Это направление в теории управления развивается достаточно успешно [152, 153]. Заметим, что концепция анизотропийного управления, также основанная на понятии относительной энтропии (расстоянии Кульбака–Лейблера), была предложена И.Г. Владимировым двумя годами ранее в [201].

### 5.2. Ключевые определения анизотропийной теории

Понятия анизотропии случайного вектора, средней анизотропии последовательности случайных векторов, а также анизотропийной нормы линей-

ной стационарной системы впервые появились в 1994 г. в [201]. *Анизотропия случайного вектора* определяется как минимальная относительная энтропия (расстояние Кульбака–Лейблера) между плотностью распределения случайного вектора и плотностью распределения гауссовского сигнала с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей [24]. Средняя анизотропия бесконечной последовательности случайных векторов определяется через анизотропию элемента последовательности аналогично тому, как определяется энтропия на степень свободы (термин заимствован из [60]). *Энтропия на степень свободы* есть предел отношения энтропии  $n$  случайных величин к числу  $n$  при стремлении числа  $n$  к бесконечности. Энтропия на степень свободы также называется *энтропией стационарного источника на сообщение* [31]. Аналогом этого понятия в английском языке служит термин «entropy rate» [108]. *Средняя анизотропия* определяется как предел отношения анизотропии вектора, составленного из  $n$  случайных векторов, к числу  $n$  при стремлении числа  $n$  к бесконечности.

### Определение анизотропии случайного вектора.

Напомним, что  $\mathfrak{L}_2^m$  — это класс  $\mathbb{R}^m$ -мерных случайных распределенных абсолютно непрерывно векторов с конечным вторым моментом.

Для любого  $\lambda > 0$  обозначим через  $p_{m,\lambda}$  функцию плотности распределения вероятностей на  $\mathbb{R}^m$  гауссовского сигнала с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей  $\lambda I_m$

$$(5.5) \quad p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\lambda}\right), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Для любого  $w \in \mathfrak{L}_2^m$  с функцией плотности распределения вероятностей  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$  его относительная энтропия относительно (5.5) принимает вид [49]

$$(5.6) \quad D(f \parallel p_{m,\lambda}) = \mathbf{E} \ln \frac{f(w)}{p_{m,\lambda}(x)} = -h(w) + \frac{m}{2} \ln(2\pi\lambda) + \frac{\mathbf{E}|w|^2}{2\lambda},$$

где

$$(5.7) \quad h(w) = -\mathbf{E} \ln f(w) = - \int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$$

— дифференциальная энтропия случайного вектора  $w$ .

*Определение 1.* *Анизотропия  $\mathbf{A}(w)$  случайного вектора  $w \in \mathfrak{L}_2^m$  определяется как минимальное информационное уклонение его распределения от гауссовских распределений на  $\mathbb{R}^m$  с нулевым средним и скалярными ковариационными матрицами*

$$(5.8) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} D(f \parallel p_{m,\lambda}).$$

Непосредственное вычисление показывает, что минимум в (5.6) по всевозможным  $\lambda > 0$  достигается при  $\lambda = \mathbf{E}|w|^2/m$  и, следовательно,

$$(5.9) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} D(f \parallel p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left( \frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}|w|^2 \right) - h(w).$$



### Свойства анизотропии

Пусть  $\mathbb{G}^m(\Sigma)$  — класс  $\mathbb{R}^m$ -мерных гауссовских случайных векторов  $w$  с  $\mathbf{E}w = 0$  и  $\mathbf{cov}(w) = \Sigma$ ,  $\det \Sigma \neq 0$ , соответствующая функция плотности распределения вероятности

$$p(w) = (2\pi)^{-m/2} (\det \Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\|w\|_{\Sigma^{-1}}^2\right),$$

$\|x\|_Q = \sqrt{x^\top Q x}$  — (полу-) норма вектора  $x$ , индуцированная положительно (полу-) определенной симметричной матрицей  $Q > 0$ . Тогда

(а) для любой положительно определенной матрицы  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$(5.10) \quad \min_w \left\{ \mathbf{A}(w) : w \in \mathfrak{L}_2^m, \mathbf{E}(ww^\top) = \Sigma \right\} = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}\Sigma},$$

причем минимум достигается лишь на  $w \in \mathbb{G}^m(\Sigma)$ ;

(б) для любого  $w \in \mathfrak{L}_2^m$  имеем  $\mathbf{A}(w) \geq 0$ , причем  $\mathbf{A}(w) = 0$  тогда и только тогда, когда  $w \in \mathbb{G}^m(\lambda I_m)$ ;

(с) анизотропия  $\mathbf{A}(w)$  инвариантна относительно вращения и центральной гомотетии вектора  $w$ , т.е.  $\mathbf{A}(\lambda U w) = \mathbf{A}(w)$  для любого скаляра  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и любой ортогональной матрицы  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

### Средняя анизотропия гауссовского сигнала

Пусть  $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — дискретный  $m$ -мерный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей:

$$\mathbf{E} v_k = 0, \quad \mathbf{E} (v_k v_k^\top) = I_m, \quad -\infty < k < +\infty.$$

Рассмотрим  $m$ -мерную стационарную гауссовскую последовательность

$$W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = G \otimes V,$$

получаемую из белого шума  $V$  посредством формирующего фильтра  $G$  с импульсной переходной характеристикой  $g_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $k \geq 0$ :

$$w_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k v_{j-k}, \quad -\infty < j < +\infty.$$

Такой фильтр отождествляется со своей передаточной функцией

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^k,$$

которая предполагается лежащей в пространстве Харди  $H_2^{m \times m}$ .

Последовательность  $W$  имеет нулевое математическое ожидание и спектральную плотность

$$(5.11) \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{G}(\omega) \left( \widehat{G}(\omega) \right)^*, \quad \omega \in \Omega = [-\pi; \pi].$$

Выделим из последовательности  $W$  подпоследовательность размерности  $N \times m$

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix},$$

каждый вектор  $w_i$  принадлежит  $\mathbb{R}^m$  при  $i = \overline{0, (N-1)}$ .

*Определение 2.* Средняя анизотропия последовательности  $W$  определяется следующим образом [20]:

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}.$$

В [20] также доказано, что средняя анизотропия последовательности  $W = G \otimes V$  может быть определена как

$$(5.12) \quad \overline{\mathbf{A}}(G) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \ln \det \left( \frac{m}{\|G\|_2^2} \widehat{G}(\omega) \left( \widehat{G}(\omega) \right)^* \right) d\omega.$$

Функционал (5.12) принимает неотрицательные конечные значения, как только формирующий фильтр  $G \in H_2^{m \times m}$  имеет максимальный (точнее, полный строчный) ранг, т.е.

$$\text{rank } \widehat{G}(\omega) = m \quad \text{для почти всех } \omega \in \Omega.$$

Если же фильтр  $G$  не максимального ранга, то  $\overline{\mathbf{A}}(G) = +\infty$ . Отметим,  $\overline{\mathbf{A}}(G) = 0$  в том и только в том случае, если формирующий фильтр  $G$  является с точностью до ненулевого постоянного множителя системой полного пропускания, т.е. если последовательность  $W$  — гауссовский белый шум со скалярной ковариационной матрицей.

Как видно, средняя анизотропия (5.12) является характеристикой вероятностного распределения гауссовской последовательности  $W = G \otimes V$ , а не ее индивидуальных траекторий.

Заметим также, что функционал средней анизотропии  $\overline{\mathbf{A}}(G)$  инвариантен относительно преобразования  $G \mapsto \alpha U_1 G U_2$  с произвольными ненулевым постоянным множителем  $\alpha \in \mathbb{R}$  и системами полного пропускания  $U_1, U_2 \in H_2^{m \times m}$  (для которых матрицы  $\widehat{U}_1(\omega), \widehat{U}_2(\omega)$  унитарны при почти всех  $\omega \in \Omega$ ). В частности, это означает, что  $\overline{\mathbf{A}}(G)$  полностью определяется функциями собственных значений спектральной плотности (5.11), которые с точностью до постоянного множителя  $\frac{1}{2\pi}$  совпадают с квадратами функций сингулярных значений  $\widehat{G}$ .

Имеются глубокие связи функционала средней анизотропии (5.12) с теоретико-информационным подходом к количественному описанию хаоса, основанным на колмогоровской  $\epsilon$ -энтропии вероятностных распределений [26, 65], с одной стороны, и с принципом изотропности конечномерного евклидова

пространства — с другой. Читатель, интересующийся подробностями этих связей, отсылается к работам И.Г. Владимирова [20, 56]. Упомянутые связи позволяют интерпретировать среднюю анизотропию (5.12) различными (но генетически едиными) способами.

Здесь заметим лишь, что (5.12) можно рассматривать как количественный показатель трудности генерации гауссовских последовательностей  $W = G \otimes V$  в природных условиях.

С использованием многомерной версии формулы Колмогорова–Сеге [27] в [113] получена формула для вычисления средней анизотропии случайной последовательности, сгенерированной с помощью формирующего фильтра из гауссовского белого шума. Фильтр задается своим  $(A, B, C, D)$  представлением. Для вычисления средней анизотропии необходимо получить решения алгебраического уравнения Риккати и уравнения Ляпунова, в которые входят матрицы  $A, B, C, D$  формирующего фильтра.

На базе результатов, полученных в [69], в [207] вычисление средней анизотропии сведено к решению линейных матричных неравенств. Задача изменения средней анизотропии в различных соединениях линейных фильтров была рассмотрена в [163].

В рамках теории анизотропного управления решена и обратная задача: имея заданный уровень средней анизотропии (цветности) на выходе формирующего фильтра построить характеристики фильтра. Алгоритмы решения обратной задачи изложены в [38, 166].

### **Анизотропная норма системы**

Рассмотрим устойчивую линейную дискретную систему  $F$ , заданную в пространстве состояний в следующем виде:

$$(5.13) \quad x_{k+1} = Ax_k + Bw_k,$$

$$(5.14) \quad y_k = Cx_k + Dw_k,$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния системы,  $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  — стационарная гауссовская последовательность  $m$ -мерных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии  $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$  ( $a \geq 0$ ) и нулевым средним,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  — выход системы.

Обозначим через  $Y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  выходную последовательность системы (5.13)–(5.14). Определим мощностную норму последовательности  $Y$  формулой

$$\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}|y_k|^2}.$$

Предполагая, что  $\|Y\|_{\mathcal{P}}$  и  $\|W\|_{\mathcal{P}}$  конечные, определим для заданной системы  $F$  с входным сигналом  $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  *среднеквадратичный коэффициент усиления (СККУ)* в виде

$$Q(F, W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

*Определение 3.* Для заданной величины  $a \geq 0$  анизотропийной нормой системы  $F$  называют

$$(5.15) \quad \|F\|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a} Q(F, W).$$

Таким образом, анизотропийная норма системы  $\|F\|_a$  задает стохастический коэффициент усиления системой  $F$  входного сигнала  $W$ .

### Свойства анизотропийной нормы системы

Для  $F \in H_\infty^{p \times m}$  ее  $a$ -анизотропийная норма является неубывающей функцией параметра  $a \geq 0$ , удовлетворяющей неравенствам

$$(5.16) \quad \|F\|_2 / \sqrt{m} = \|F\|_0 \leq \|F\|_a \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|F\|_a = \|F\|_\infty.$$

Вычисление нормы  $\|F\|_a$  для  $a > 0$  представляет интерес, лишь если

$$(5.17) \quad \|F\|_2 < \sqrt{m} \|F\|_\infty.$$

$\|F\|_2 = \sqrt{m} \|F\|_\infty$  тогда и только тогда, когда  $F^\top F = \lambda I_m$  для некоторого  $\lambda \geq 0$ . В частности, (5.17) выполнено, если  $F \neq 0$  и  $p < m$ .

Анизотропийная норма не обладает круговым свойством (2.11), однако в [113] доказано следующее свойство псевдомультимпликативности анизотропийной нормы:

для любого  $a \geq 0$  и любых систем  $F \in H_\infty^{p \times m}$  и  $G \in H_\infty^{m \times m}$

$$(5.18) \quad \|FG\|_a \leq \|F\|_b \|G\|_a,$$

где

$$(5.19) \quad b = a + \overline{\mathbf{A}}(G) + m \ln(\sqrt{m} \|G\|_a / \|G\|_2).$$

В [22] представлена асимптотика поведения анизотропийной нормы при уровне средней анизотропии  $a$ , стремящемся к нулю и к бесконечности (при стремлении анизотропийной нормы к  $H_2$  и  $H_\infty$  норме соответственно).

В [113, 224] представлены формулы и приведен численный алгоритм для вычисления анизотропийной нормы в частотной области и в пространстве состояний. Для вычисления анизотропийной нормы системы  $F$  в пространстве состояний необходимо решить матричные алгебраические уравнения Риккати и Ляпунова, а также алгебраическое уравнение специального вида. В первые два уравнения входят параметры матриц  $(A, B, C, D)$  представления системы, во второе входят матрицы, являющиеся решениями вышеназванных алгебраических уравнений Риккати и Ляпунова, а также параметр уровня средней анизотропии сигнала на входе системы  $F$ .

Численный алгоритм для вычисления анизотропийной нормы системы основан на методе ньютоновских итераций и имеет достаточно высокую вычислительную сложность. Для преодоления этого недостатка в более поздних работах [70, 207] предложены новые способы оценки анизотропийной нормы методами выпуклой оптимизации. Результат, сформулированный в [70], позволяет оценивать анизотропийную норму системы с применением современных вычислительных пакетов, решающих задачи полуопределенного программирования.

### 5.3. Оптимальная анизотропийная задача и ее решение

В [21] и [201] для стационарных систем была поставлена задача синтеза регулятора, минимизирующего анизотропийную норму замкнутой системы, которая была решена в [225].

Пусть задана система  $F$ , изображенная на рис. 5 и имеющая описание в пространстве состояний (2.13). Внешнее возмущение является последовательностью случайных векторов с уровнем средней анизотропии  $a$ .

Сформулируем анизотропийную задачу оптимизации.

*Задача 1.* Для заданных системы (2.13) и уровня  $a \geq 0$  средней анизотропии входного возмущения  $W$  найти регулятор  $K$ , минимизирующий  $a$ -анизотропийную норму передаточной функции замкнутой системы (2.16):

$$(5.20) \quad \|\mathcal{L}(F, K)\|_a \equiv \sup \left\{ \frac{\|\mathcal{L}(F, K)G\|_2}{\|G\|_2} : G \in \mathbb{G}_a \right\} \rightarrow \inf_{K \in \mathbb{K}}.$$

Здесь  $\mathbb{G}_a$  обозначает множество фильтров, на выходе которых сигнал с уровнем средней анизотропии, меньшим или равным  $a$ ,  $\mathbb{K}$  — множество стабилизирующих регуляторов.

По аналогии с задачами  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимизации (3.1) и (3.2) задача анизотропийной оптимизации может быть переформулирована как

$$\|T_{zw}\|_a \rightarrow \min_K.$$

Сформулированную проблему (как и задачу  $H_\infty$  оптимизации) можно рассматривать как антагонистическую игру двух игроков, в качестве первого из которых выступает управление (регулятор  $K$ ), а в качестве второго — формирующий фильтр  $G$ , генерирующий входное возмущение  $W$ . Рассмотрим множества

$$\mathbb{K}_a^\diamond(G) \doteq \text{Arg} \min_{K \in \mathbb{K}(F)} \|\mathcal{L}(F, K)\|_2, \quad G \in \mathbb{G}_a,$$

$$\mathbb{G}_a^\diamond(K) \doteq \text{Arg} \max_{G \in \mathbb{G}_a} \frac{\|\mathcal{L}(F, K)\|_2}{\|G\|_2}, \quad K \in \mathbb{K}(F).$$

План решения сформулированной задачи состоит в следующем. Если для системы  $F$  и заданного уровня средней анизотропии  $a$  научиться строить «наихудший» фильтр  $G \in \mathbb{G}_a^\diamond(K)$ , который максимизирует  $\frac{\|\mathcal{L}(F, K)G\|_2}{\|G\|_2}$ , то задача

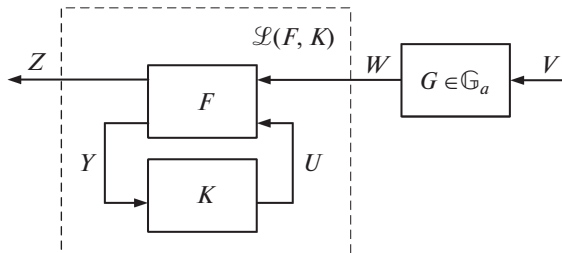


Рис. 5. Иллюстрация задачи стохастической  $H_\infty$ -оптимизации.

сводится к задаче построения оптимального регулятора  $K$ , который при этом наихудшем фильтре минимизирует  $\|\mathcal{L}(F, K)G\|_2$ .

Алгоритм синтеза приводит к необходимости решения системы уравнений, состоящей из трех алгебраических уравнений Риккати, уравнения Ляпунова и алгебраического уравнения специального вида. Одно алгебраическое матричное уравнение Риккати, матричное уравнение Ляпунова и уравнение специального вида необходимы для построения наихудшего фильтра, оставшиеся два алгебраических уравнения Риккати выполняют ту же роль, что и два алгебраических уравнения в  $LQG/H_2$  или  $H_\infty$  теориях. Одно из уравнений необходимо для решения задачи построения оценки вектора состояния системы  $\hat{x}$ , а второе — собственно для построения управления. Причем все эти уравнения являются связанными. В [172] описан метод гомотопий для решения связанных уравнений Риккати.

В [112] разработан метод гомотопий для решения системы уравнений, необходимых для синтеза анизотропийного регулятора. Описание применения метода гомотопий в анизотропийной теории управления, в частности, использование метода гомотопий с ньютоновскими итерациями изложено в [23].

Как было установлено выше, и  $H_\infty$  оптимальная задача, и анизотропийная оптимальная задача являются игровыми. В силу неравенства (5.16) анизотропийный регулятор занимает промежуточное место между  $LQG/H_2$  и  $H_\infty$  регуляторами. Это наводит на мысль, что и  $LQG$  регулятор является минимаксным. Это действительно так, потому что гауссовский белый шум (сигнал на входе системы в  $LQG$  задаче) является наихудшим возмущением по критерию максимума энтропии входного сигнала (см. [108]).

#### 5.4. Некоторые свойства анизотропийных регуляторов

Как и следовало ожидать, системы управления, замкнутые анизотропийными регуляторами, являются более робастными, чем системы, замкнутые  $H_2$  регуляторами, и менее консервативными, чем системы, замкнутые  $H_\infty$  регуляторами. В [23, 35, 159] рассматривались сравнения возможностей  $H_2$ ,  $H_\infty$  и анизотропийных регуляторов в задаче подавления внешнего возмущения типа “сдвига ветра” при посадке самолета. Анизотропийные регуляторы показали значительные преимущества по сравнению с  $H_\infty$  регуляторами в вопросах энергозатрат на управление. Одновременно с этим анизотропийные регуляторы оказались более робастными относительно  $H_2$  регуляторов.

Напомним, что  $LQG/H_2$  оптимальная задача имеет единственное решение, решение  $H_\infty$  оптимальной задачи не единственно. Решение оптимальной анизотропийной задачи также является единственным.

Отметим очень важное свойство анизотропийных регуляторов. По аналогии с рассмотренной выше задачей построения  $H_\infty$  регуляторов, минимизирующих энтропийный функционал (4.1), между энтропийным функционалом и анизотропией также существует связь. В [45] было установлено, как можно трактовать энтропийный функционал с точки зрения теоретико-информационного подхода. В этой работе было показано, что анизотропийный регулятор также минимизирует  $H_\infty$  энтропию замкнутой системы для некоторого фиксированного значения параметра  $\gamma$ .

Выше были рассмотрены хорошо известные из литературы принципы разделения в  $LQG/H_2$  теории оптимального управления (см., например, [47, 48]) и в  $H_\infty$  теории субоптимального управления (см., например, [117, 130]). Замечательно то, что и в анизотропийной теории тоже можно сформулировать принцип разделения. Этот принцип в анизотропийной теории может выглядеть так: “Оптимальный анизотропийный регулятор полного порядка является оптимальным оценщиком оптимального закона управления в задаче с полной информацией о векторе состояния системы для случая наилучшего входа.”

Заметим, что принцип разделения не означает независимости уравнений Риккати. Он скорее близок к принципу разделения в задаче  $H_\infty$  субоптимального управления. Здесь задача синтеза оценщика и задача синтеза статического регулятора в виде обратной связи не могут быть решены независимо друг от друга. Более подробно об этом написано в [225].

## 6. Развитие анизотропийной теории

В данном разделе речь пойдет о развитии робастной анизотропийной теории управления, взявшей за основу определения и концепции предыдущего раздела, с начала 2000-х годов. Будут приведены постановки и решения следующих задач: робастная устойчивость, синтез анизотропийных регуляторов для систем с параметрическими неопределенностями, построение субоптимального управления методами выпуклой оптимизации, построение анизотропийной теории анализа и синтеза для дескрипторных систем, систем с нецентрированными входными сигналами и нестационарных систем, решение задач анизотропийной фильтрации.

### 6.1. Робастная устойчивость в анизотропийной теории

Как было указано в свойствах анизотропийной нормы, она не обладает круговым свойством (2.11). Однако существует аналог этого свойства. На базе соотношений (5.18), (5.19) в [36, 37] проведено исследование робастной устойчивости в анизотропийной теории.

Рассмотрим оператор  $F$ , задающий вход-выходные соотношения в виде

$$(6.1) \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $w_1 \in \mathbb{R}^m$ ,  $w_2 \in \mathbb{R}^p$  — входы системы,  $z_1 \in \mathbb{R}^m$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^q$  — выходы системы, причем  $z_1$  не обязательно является измеряемым.

Система (6.1) называется *внутренне устойчивой*, если матричная передаточная функция от входа  $(w_1, w_2)^T \in \mathbb{R}^{m+p}$  к выходу  $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^{m+q}$  асимптотически устойчива [130], что эквивалентно тому, что передаточные функции  $F_{z_1 w_1}$ ,  $F_{z_1 w_2}$ ,  $F_{z_2 w_1}$ ,  $F_{z_2 w_2}$  аналитичны вне единичного круга.  $F_{z_i w_j}$  — передаточная функция от входа  $w_i$  к выходу  $z_j$ ,  $i, j = 1, 2$ .

**Задача 2.** Для заданного номинального объекта  $F$  найти диапазон изменения неопределенности его параметров  $\Delta$ , количественно измеряемый анизо-



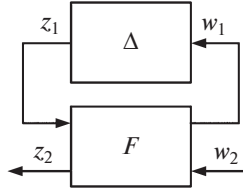


Рис. 6.  $F$ - $\Delta$  конфигурация.

тропийной нормой, при котором система с неопределенностью будет являться внутренне устойчивой.

Последнее будет означать *робастность* объекта  $F$  по отношению к неопределенности  $\Delta$ .

Введем класс допустимых неопределенностей

$$D_a(\epsilon) = \{ \Delta : \Delta \in RH_\infty^{m \times m} : \|\Delta\|_a < \epsilon \}.$$

Далее всюду  $\Delta(j\omega)$  означает предел

$$\Delta(j\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \Delta(r e^{j\omega}), \quad \omega \in [-\pi; \pi].$$

Будем говорить, что неопределенность  $\Delta$  является *допустимой для объекта*  $F$ , если  $\Delta \in RH_\infty^{m \times m}$  и система  $\mathcal{U}(F, \Delta)$  вида (2.17) внутренне устойчива.

*Теорема 1.* Рассмотрим систему  $\mathcal{U}(F, \Delta)$  представленную на рис. 6, где  $\Delta : \mathfrak{L}_2^m \rightarrow \mathfrak{L}_2^m$  и  $F : \mathfrak{L}_2^{m+p} \rightarrow \mathfrak{L}_2^{m+q}$  — каузальные линейные системы и вход-выходные соотношения — задаются посредством (6.1).

Пусть

- $F$  устойчива и

$$(6.2) \quad \|F_{11}\|_c < \epsilon^{-1},$$

где  $c = a + m \ln \frac{\epsilon}{\text{ess inf}_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \underline{\sigma}(\Delta(j\omega))}$ ,  $\underline{\sigma}(\Delta) = \sqrt{\lambda_{\min}(\Delta^* \Delta)}$  — минимальное сингулярное значение оператора  $\Delta$ ,  $\epsilon$  — некоторая положительная константа.

- Уровень анизотропии  $a$  определяется по формуле

$$(6.3) \quad a = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}\Sigma} - m \ln \frac{\epsilon}{\text{ess sup}_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \underline{\sigma}(\Delta(j\omega))},$$

где  $\Sigma = (I_m - qF_{11}^* F_{11})^{-1}$ , а параметр  $q \in [0, \|F_{11}\|_\infty^{-2})$  является решением неравенства

$$(6.4) \quad \text{tr} \left[ (I_m - \epsilon^2 F_{11}^* F_{11}) (I_m - qF_{11}^* F_{11})^{-1} \right] \leq 0.$$

Тогда для всех  $\Delta \in D_a(\epsilon)$  замкнутая система  $\mathcal{U}(F, \Delta)$  внутренне устойчива.

Теорема 1 дает достаточные условия робастности объектов, неопределенность которых ограничена по анизотропийной норме. Данная теорема позволяет ослабить консервативное условие  $\|F_{11}\|_\infty < 1/\epsilon$  теоремы о малом усилении, заменив его на условие (6.2). Уровень анизотропии  $a$  в данном случае показывает, насколько можно понизить требования теоремы о малом усилении, не потеряв при этом робастную устойчивость.

Можно указать, как находить граничный уровень анизотропии  $a$ , обеспечивающий внутреннюю устойчивость при выполнении (6.2), по заданной реализации номинального объекта. Нахождение подходящего уровня анизотропии сводится к задаче оптимизации  $\max q$  при нелинейных ограничениях. Подробно об этом можно прочесть в [37].

На базе предыдущей теоремы можно для заданной системы с различными типами неопределенности (аддитивной, мультипликативной, неопределенности в виде взаимно простых факторов) [130] находить возможный разброс параметров, точное значение которых неизвестно. Приведем аналог теоремы Гловера–МакФарлейна [174] о робастной стабилизируемости [51] системы с аддитивной неопределенностью.

*Теорема 2. Рассмотрим систему  $\mathcal{L}(F + \Delta, K)$ , с номинальным объектом  $F$ , аддитивной неопределенностью  $\Delta$  и регулятором  $K$ , где  $\Delta: l_2 \rightarrow l_2$  — аддитивные возмущения,  $F: l_2 \rightarrow l_2$  — номинальный объект,  $K: l_2 \rightarrow l_2$  — регулятор и  $\Delta, F, K$  — линейные каузальные системы. Пусть также относительно неопределенности известно ее максимальное сингулярное число обусловленности  $\psi = \operatorname{ess\,sup}_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \operatorname{cond}(\Delta^* \Delta)$ . Регулятор  $K$  стабилизирует  $F + \Delta$ , если:*

- 1) регулятор  $K$  стабилизирует номинальный объект, т.е. система  $\mathcal{L}(F, K)$  устойчива,
- 2)  $\Delta \in D_a \left( \frac{1}{\|K(I - FK)^{-1}\|_{a+m \ln \psi}} \right)$  для некоторого  $a \in [0, \infty)$ .

Аналогичные результаты получены в анизотропийной теории с ненулевым матожиданием входного возмущения [167].

### 6.2. Субоптимальное анизотропийное управление, построение регуляторов пониженного и заданного порядков

Аналогично тому, как в  $H_2$  и  $H_\infty$  теориях управления вслед за оптимальными постановками появились постановки, а затем и решения субоптимальных задач, а также задач построения регуляторов пониженного и заданного порядков, такая же ситуация сложилась и в анизотропийной теории. Субоптимальные регуляторы стабилизируют замкнутую систему и обеспечивают ограниченность ее анизотропийной нормы заданным значением, т.е. гарантируют подавление случайных внешних возмущений, средняя анизотропия которых не превосходит некоторого заданного уровня. В отличие от синтеза оптимального анизотропийного регулятора решение субоптимальных задач приводит к множеству регуляторов, оставляя дополнительные степени сво-

боды для определения некоторых дополнительных требований к замкнутой системе с целью достижения желаемого качества управления.

### 6.2.1. Частотная теорема в анизотропной теории

Ключевым шагом в теории построения субоптимальных анизотропных регуляторов является частотная теорема, сформулированная как в терминах уравнения Риккати [164], так и в терминах матричных неравенств [70].

Кратко изложим анизотропную частотную теорему, следуя [70].

Модель дискретной линейной стационарной системы  $F \in H_\infty^{p \times m}$  с  $m$ -мерным входом  $W$ ,  $n$ -мерным состоянием  $X$  и  $p$ -мерным выходом  $Z$  имеет вид

$$(6.5) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix},$$

где размерности вещественных матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  согласованы и матрица  $A$  является Шуровой ( $\rho(A) < 1$ ). Предполагается, что входная последовательность  $W$  есть стационарная последовательность гауссовских случайных векторов с ограниченной средней анизотропией  $a \geq 0$ . Задача состоит в следующем.

*Задача 3.* Для заданной системы  $F$ , уровня средней анизотропии входного возмущения  $a \geq 0$  и числа  $\gamma > 0$  проверить выполнение условия  $\|F\|_a < \gamma$ , где  $\|F\|_a$  — анизотропная норма системы  $F$ , определяемая (5.15).

*Теорема 3.* Пусть  $F \in H_\infty^{p \times m}$  — система с реализацией в пространстве состояний (6.5),  $a$ -анизотропная норма (5.15) системы  $F$  строго ограничена заданным пороговым значением  $\gamma > 0$ , т.е.

$$\|F\|_a < \gamma,$$

если существует  $\eta > \gamma^2$ , такое что неравенство

$$(6.6) \quad \eta - \left( e^{-2a} \det(\eta I_m - B^T \Phi B - D^T D) \right)^{1/m} < \gamma^2$$

выполняется для вещественной  $(n \times n)$ -матрицы  $\Phi = \Phi^T \succ 0$ , удовлетворяющей ЛМН

$$(6.7) \quad \begin{bmatrix} A^T \Phi A - \Phi + C^T C & A^T \Phi B + C^T D \\ B^T \Phi A + D^T C & B^T \Phi B + D^T D - \eta I_m \end{bmatrix} < 0.$$

Систему неравенств (6.6) и (6.7) можно решить с помощью свободно расширяемых программных пакетов, например [171] с программой-решателем [206] для системы *Matlab* и *Scilab*. Этот метод вычисления  $a$ -анизотропной нормы не использует решения сложной системы перекрестно связанных уравнений с помощью вычислительного алгоритма на основе метода гомотопий.

В случае  $a \rightarrow +\infty$  ЛМН (6.7) можно привести к виду

$$(6.8) \quad \begin{bmatrix} A^T \bar{\Phi} A - \bar{\Phi} & A^T \bar{\Phi} B & C^T \\ B^T \bar{\Phi} A & B^T \bar{\Phi} B - \gamma I_m & D^T \\ C & D & -\gamma I_p \end{bmatrix} < 0,$$

хорошо известному в контексте  $H_\infty$  управления для дискретных систем (см., например, [111, 123]). Этот факт тесно связан со сходимостью  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \|F\|_a = \|F\|_\infty$ , благодаря чему неравенство  $\|F\|_a < \gamma$  “аппроксимирует”

$$(6.9) \quad \|F\|_\infty < \gamma$$

для достаточно больших значений  $a$ . Таким образом, при  $a \rightarrow +\infty$  теорема 3 становится частотной теоремой для  $H_\infty$  нормы, устанавливающей эквивалентность между выполнением (6.9) и существованием положительно определенного решения ЛМН (6.8).

Частотная теорема для анизотропной нормы в терминах неравенств является ключевым результатом, который применяется для решения задач синтеза анизотропных субоптимальных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования, описанных в следующем разделе.

### 6.2.2. Построение субоптимальных анизотропных регуляторов

Объект управления представлен дискретной линейной стационарной моделью  $F$  с  $n_x$ -мерным состоянием  $X$ ,  $m_w$ -мерным входом возмущения  $W$ ,  $m_u$ -мерным входом управления  $U$ ,  $p_z$ -мерным управляемым выходом  $Z$  и  $p_y$ -мерным измеряемым выходом  $Y$ :

$$(6.10) \quad F : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где размерности всех матриц согласованы,  $p_z \leq m_w$ , пара матриц  $(A, B_u)$  является стабилизируемой, а пара  $(A, C_y)$  — детектируемой.

Предполагается, что средняя анизотропия (5.12) последовательности  $W$  не превосходит известного неотрицательного уровня  $a$ .

Регулятор заданного порядка по измеряемому выходу в форме динамического компенсатора имеет следующий вид:

$$(6.11) \quad K : \begin{bmatrix} \xi_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k \\ y_k \end{bmatrix},$$

где  $\xi_k$  —  $n_\xi$ -мерный вектор состояния, стабилизирующий замкнутую систему и гарантирующий некоторый заданный уровень качества подавления внешних возмущений. Предполагается, что для объекта управления (6.10) и регулятора (6.11) выполняется условие Кимур [158] порядка  $n_\xi$ :

$$n_\xi > n_x - m_u - p_y.$$

Выполнение этого условия гарантирует существование стабилизирующего регулятора заданного порядка  $n_\xi$ .

Общая постановка задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора заданного порядка следующая.

**Задача 4.** Для заданных объекта управления  $F$  с моделью в пространстве состояний (6.10), уровня средней анизотропии  $a \geq 0$  входного возмущения  $W$  и некоторого желаемого порогового значения  $\gamma > 0$  найти дискретный линейный стационарный регулятор по выходу  $K$  с моделью в пространстве состояний (6.11), стабилизирующий замкнутую систему и гарантирующий, что ее  $a$ -анизотропийная норма не превосходит порогового значения  $\gamma$ , т.е.

$$\|T_{zw}\|_a < \gamma.$$

В рамках анизотропийной теории управления получено решение общей задачи синтеза регулятора заданного порядка и рассмотрены три важных частных случая структуры объекта и регулятора [72]: регулятор в виде статической обратной связи по состоянию для объекта, состояние которого измеряется точно [212]; динамический регулятор полного порядка по измеряемому выходу; регулятор в виде статической обратной связи по измеряемому выходу объекта управления. Для решения задачи синтеза применяется критерий проверки условия ограниченности анизотропийной нормы системы заданным пороговым значением для модели в пространстве состояний. Этот критерий — частотная теорема для анизотропийной нормы — сформулирован в предыдущем разделе обзора. В [208, 209] предложена техника редукции оптимального анизотропийного регулятора, являющегося решением задачи анизотропийной стохастической  $H_\infty$  оптимизации полного порядка [210]. На основе методов выпуклой оптимизации в [71] решена задача синтеза субоптимального анизотропийного регулятора заданного порядка в виде динамического компенсатора.

### 6.2.3. Многоканальная задача анизотропийного управления

В рамках концепции построения субоптимальных регуляторов в [73] рассматривается задача синтеза анизотропийного управления для дискретной линейной стационарной системы, в которой определенные вход-выходные каналы сгруппированы вместе с учетом технических особенностей системы или близости свойств сигналов.

Предположим, что в векторе управляемого выхода  $Z$  объекта управления (6.10) с учетом требований технического проектирования выделены  $N$  групп каналов управляемых выходов  $Z_j$  (состоящих в минимальном случае из одного канала). Пусть в векторе внешнего входа  $W$  также выделены  $N$  групп каналов внешних входов  $W_j$ . Одинаковые группы каналов управляемых выходов  $Z_j = Z_i$  или внешних входов  $W_j = W_i$  считаются различными при  $j \neq i$ . Аналогичное разбиение входа и выхода объекта управления на группы каналов предлагается в [199, 200] в гораздо более широкой постановке задачи многоканального управления. Разбиение каналов по группам может осуществляться с учетом технических особенностей системы (например, эталонные сигналы/внешние возмущения/шумы измерений) или близости свойств сигналов

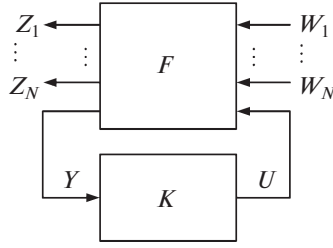


Рис. 7. Замкнутая система в многоканальной задаче.

(например, слабо/сильно коррелированные сигналы). Для каждой из групп каналов внешних входов  $W_j$  предполагается, что средняя анизотропия (5.12) последовательности  $W_j$  не превосходит известного неотрицательного уровня  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Синтезируемый анизотропийный регулятор одновременно обеспечивает заданные уровни подавления возмущений для определенных групп каналов. Такие задачи будем называть *многоканальными*.

Пусть  $T_{zw}(z)$  обозначает матричную передаточную функцию от внешнего входа  $W$  к управляемому выходу  $Z$  замкнутой системы с регулятором заданного порядка  $K$  в форме динамического компенсатора (6.11) с  $n_\xi$ -мерным состоянием  $\Xi = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , стабилизирующим замкнутую систему (рис. 7) и обеспечивающим некоторый заданный уровень подавления внешних возмущений или заданное качество отслеживания эталонных сигналов. Матричная передаточная функция замкнутой системы  $T_{zw}(z)$  задана нижним дробно-линейным преобразованием вида (2.16) для пары  $(F, K)$ . Тогда  $T_{z_j w_j}(z) := \mathcal{L}_j T_{zw}(z) \mathcal{R}_j$  — матричная передаточная функция от группы внешних входов  $W_j$  к группе управляемых выходов  $Z_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $\mathcal{L}_j$ ,  $\mathcal{R}_j$  — вещественные матрицы выбора групп входов и выходов соответственно. Предполагается, что для объекта управления (6.10) и регулятора (6.11) выполняется условие Кимуры  $n_\xi > n_x - m_u - p_y$ , что гарантирует существование стабилизирующего регулятора заданного порядка  $n_\xi$ .

Постановка многоканальной задачи синтеза анизотропийного субоптимального регулятора заданного порядка следующая.

**Задача 5.** Для заданных объекта управления  $F$  с моделью в пространстве состояний (6.10), уровней средней анизотропии  $a_j \geq 0$  групп внешних входов  $W_j$  и некоторого набора желаемых пороговых значений  $\gamma_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , найти дискретный линейный стационарный регулятор по выходу  $K$  с моделью в пространстве состояний (6.11), стабилизирующий замкнутую систему и обеспечивающий одновременное выполнение условий

$$(6.12) \quad \|T_{z_j w_j}\|_{a_j} < \gamma_j.$$

Решение многоканальных задач имеет достаточно важное прикладное значение. Разработанная методика построения анизотропийных регуляторов для многоканальных задач была применена к решению многоканальной задачи анизотропийного управления угловым положением гиросtabilизированной платформы с переменным кинетическим моментом гироблока под воздействием внешних возмущений в условиях шумов измерений [211].

### 6.3. Синтез анизотропийных регуляторов для объектов с параметрической неопределенностью

Естественно поставить задачу синтеза анизотропийных регуляторов для систем, в которых объект подвергается некоторым возмущениям, в частности параметрическим, т.е. поставить задачу синтеза, аналогичную задаче построения  $H_2$  регуляторов для возмущенных объектов, упомянутую выше в разделе 2.4.

Подробно содержание этого раздела опубликовано в [37]. Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему  $F$ , описываемую уравнениями

$$(6.13) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + F_1 \Omega_k E_1) x_k + (B_1 + F_2 \Phi_k E_2) w_k + (B_2 + F_3 \Psi_k E_3) u_k, \\ z_k &= C_1 x_k + D_{12} u_k, \\ y_k &= C_2 x_k + D_{21} w_k, \end{aligned}$$

где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{E} |x_{-\infty}|^2 < +\infty$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — состояние,  $z_k \in \mathbb{R}^{p_1}$  — управляемый выход,  $u_k \in \mathbb{R}^{m_2}$  — вектор управления,  $w_k \in \mathbb{R}^{m_1}$  — возмущение,  $y_k \in \mathbb{R}^{p_2}$  — наблюдаемый выход. Все входящие в систему (6.13) матрицы известны за исключением матриц  $\Omega_k$ ,  $\Phi_k$ ,  $\Psi_k$ , отвечающих неизвестным параметрам, о которых известно только то, что они удовлетворяют следующим ограничениям:

$$(6.14) \quad \Omega_k^T \Omega_k \leq I, \quad \Phi_k^T \Phi_k \leq I, \quad \Psi_k^T \Psi_k \leq I, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где  $I$  обозначает единичную матрицу подходящей размерности.

Передаточная функция замкнутой системы от входа  $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  к выходу  $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  задается согласно (2.16) нижним дробно-линейным преобразованием пары  $(F, K)$

$$\mathcal{L}(F, K) = F_{11} + F_{12} K (I - F_{22} K)^{-1} F_{21}.$$

Априорная информация о вероятностном распределении последовательности  $W$  состоит в следующем:  $W$  является стационарной гауссовской случайной последовательностью, средняя анизотропия которой ограничена сверху неотрицательным параметром  $a$ . Обозначим множество таких последовательностей через  $\mathcal{W}_a$ .

Введем  $\Delta_k = \text{diag} \{ \Omega_k, \Phi_k, \Psi_k \}$  матрицу всех неопределенностей в системе, тогда совокупность неравенств (6.14) может быть записана в виде

$$(6.15) \quad \Delta_k^T \Delta_k \leq I, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Неопределенность  $\Delta_k$ , удовлетворяющую (6.15), будем называть *допустимой*. Множество всех допустимых неопределенностей для системы  $F$  обозначим через  $\mathcal{D}$ :

$$(6.16) \quad \mathcal{D} = \{ \Delta_k = \text{diag} \{ \Omega_k, \Phi_k, \Psi_k \} : \Delta_k^T \Delta_k \leq I, \quad k \in \mathbb{Z} \}.$$

Перед постановкой задачи введем понятия неупреждающего и допустимого регулятора.



Линейный регулятор  $K$  называется *строго неупреждающим*, если для любого  $k$  управление  $u_k$  зависит только от предшествующих наблюдений  $y_j$ ,  $j \leq k$ . Регулятор  $K$  называется *допустимым*, если он строго неупреждающий и внутренне стабилизирует замкнутую систему  $\mathcal{L}(F, K)$ . Множество всех допустимых регуляторов для данной системы  $F$  обозначим через  $\mathbb{K}$ .

Сформулируем теперь робастную стохастическую задачу  $H_\infty$ -оптимизации для системы с параметрической неопределенностью.

**Задача 6.** Для заданной системы (6.13) и верхней границы  $a \geq 0$  уровня анизотропии входа найти допустимый регулятор  $K \in \mathbb{K}$ , который минимизирует максимальное значение  $a$ -анизотропийной нормы замкнутой системы  $\mathcal{L}(F, K)$  по всем неопределенностям  $\Delta_k \in \mathcal{D}$ , т.е. доставляет минимум функционалу качества

$$(6.17) \quad J_0(K) = \sup_{\Delta_k \in \mathcal{D}} \|\mathcal{L}(F, K)\|_a.$$

Оптимальная задача (6.17) эквивалентна оптимальной задаче

$$(6.18) \quad \sup_{\Delta_k \in \mathcal{D}} \sup_{W \in \mathcal{BW}_a} \|Z\|_{\mathcal{P}}^2 \rightarrow \inf_{K \in \mathbb{K}}.$$

Здесь  $\mathcal{BW}_a$  — множество нормированных входных сигналов с ограниченной средней анизотропией:

$$\mathcal{BW}_a = \{W \in \mathcal{W}_a : \|W\|_{\mathcal{P}} = 1\}.$$

Решение сформулированной задачи производится путем погружения ее в более общую задачу  $H_\infty$  оптимизации. У новой задачи объектом является невозмущенный объект из задачи 6, влияние параметрической неопределенности заменяется новым дополнительным входом в объект.

Показано, что значение функционала качества новой задачи мажорирует значение функционала качества первоначальной задачи.

Решение новой более общей задачи сводится к решению четырех связанных алгебраических уравнений Риккати, уравнению Ляпунова и уравнению специального вида. Для их решения представлен модифицированный метод гомотопий [162].

Основным недостатком предложенной методики является высокая вычислительная сложность метода гомотопий. Данный недостаток был преодолен с применением матричных неравенств. Условия синтеза статических и динамических регуляторов на основе методов выпуклой оптимизации были сформулированы в [75] для системы с дробно-линейными неопределенностями вида

$$(6.19) \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \\ y_k \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\Delta \\ D_{z\Delta} \\ D_{y\Delta} \end{bmatrix} \Delta (I_{p_\Delta} - D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta w} & D_{\Delta u} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix},$$

где  $x_k$  —  $n_x$ -мерный вектор состояния,  $w_k$  —  $m_w$ -мерная случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии  $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ,  $u_k$  —  $m_u$ -мерное управление,  $z_k$  —  $p_z$ -мерный управляемый выход,  $y_k$  —  $p_y$ -мерный измеряемый выход. Отметим, что  $p_z \leq m_w$ , пара  $(A, B_u)$  стабилизируема, а пара  $(A, C_y)$  детектируема. Стационарная неопределенность  $\Delta \in \mathbb{R}^{m_\Delta \times p_\Delta}$  для заданного  $\gamma > 0$  удовлетворяет условию  $\Delta^T \Delta \leq \gamma^{-2} I_{p_\Delta}$ . Очевидно, что данная постановка обобщает задачу для объекта, записанного в форме (6.13).

Для решения задачи с использованием верхнего дробно-линейного преобразования были введены дополнительные  $m_\Delta$ -мерный вход неопределенности  $w_{\Delta_k}$  и  $p_\Delta$ -мерный выход неопределенности  $z_{\Delta_k}$  такие, что  $w_{\Delta_k} = \Delta z_{\Delta_k}$  и  $\mathbf{E} |w_{\Delta_k}|^2 \leq \gamma^{-2} \mathbf{E} |z_{\Delta_k}|^2$ .

В [213] для аналогичной системы была решена задача синтеза робастного субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию без увеличения размерности задачи.

Приведем теперь постановку задачи, следуя [17]. В качестве объекта управления рассматриваются дискретные системы, заданные в пространстве состояний в виде

$$(6.20) \quad x_{k+1} = A^\Delta x_k + B_w^\Delta w_k + B_u u_k,$$

$$(6.21) \quad y_k = C_y^\Delta x_k + D_{yw}^\Delta w_k,$$

$$(6.22) \quad z_k = C_z^\Delta x_k + D_{zw}^\Delta w_k + D_{zu} u_k,$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u_k \in \mathbb{R}^{m_1}$  — управление,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  — случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии  $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  — измеряемый выход,  $z_k \in \mathbb{R}^{p_1}$  — управляемый выход,  $A^\Delta = A + M_A \Delta N_A$ ,  $B_w^\Delta = B_w + M_B \Delta N_B$ ,  $C_z^\Delta = C_z + M_C \Delta N_C$ ,  $C_y^\Delta = C_y + M_{C_y} \Delta N_{C_y}$ ,  $D_{yw}^\Delta = D_{yw} + M_{D_y} \Delta N_{D_y}$ ,  $D_{zw}^\Delta = D_{zw} + M_D \Delta N_D$ . Матрицы  $A, B_w, B_u, C, D_w, C_z, D_{zw}, D_{zu}, M_A, N_A, M_B, N_B, M_C, N_C, M_D, N_D, M_{C_y}, N_{C_y}, M_{D_y}$  и  $N_{D_y}$  постоянные соответствующих размерностей.

Матрица  $\Delta \in \mathbb{R}^{q \times q}$  неизвестная, ограниченная по спектральной норме  $\overline{\sigma}(\Delta) \leq 1$ , т.е.  $\Delta^T \Delta \leq I_q$ .

Можно показать, что в определенных случаях параметрические неопределенности объекта управления (6.19) могут быть представлены также и в форме (6.20)–(6.22). Однако данные классы не тождественны. Так, если матрица  $D_{\Delta\Delta} = 0$  в выражении (6.19), то дробно-линейные неопределенности являются подмножеством множества неопределенностей из класса (6.20)–(6.22). В случае же, если  $D_{\Delta\Delta} \neq 0$ , неопределенности принадлежат разным множествам.

Для системы (6.20)–(6.22) были получены условия для синтеза статических робастных субоптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию ( $u_k = Fx_k$ ) и по выходу ( $u_k = Ky_k$ ).

#### 6.4. Анизотропийная теория дескрипторных систем

Как говорилось выше, системы управления, замкнутые анизотропийными регуляторами, лежат “между” системами, замкнутыми  $H_2$  регуляторами,

и системами, замкнутыми  $H_\infty$  регуляторами. Deskрипторные системы являются обобщением обыкновенных динамических систем, так как в своей модели содержат не только разностные или дифференциальные уравнения, но и алгебраические связи между переменными состояния. Термин “deskрипторный” пришел из зарубежной литературы, так как переменными состояния таких систем являются физические величины (отсюда термин “descriptor” — описатель). Deskрипторные системы имеют больше приложений, чем обыкновенные системы, поэтому обобщение известных для обыкновенных систем теорий явилось естественным развитием теории управления. Известны теории построения  $H_2$  и  $H_\infty$  регуляторов для линейных дискретных deskрипторных систем [92, 105, 109, 110, 142, 237, 238]. Естественно желание — построить анизотропийную теорию для дискретных deskрипторных систем.

В пространстве состояний модель линейного стационарного объекта управления в deskрипторной форме имеет вид

$$(6.23) \quad Ex_{k+1} = Ax_k + Bw_k,$$

$$(6.24) \quad y_k = Cx_k + Dw_k.$$

Основным отличием данной формы записи от обыкновенных систем является присутствие в левой части матричного сомножителя  $E$ . При этом матрица  $E$  предполагается вырожденной. Из-за вырожденности матрицы  $E$  отсутствует возможность записать уравнения (6.23)–(6.24) в форме (5.13)–(5.14). Это приводит к появлению у deskрипторных систем поведения, не характерного для систем обыкновенных, а именно (см. [92, 221]):

- передаточная функция deskрипторной системы может не являться строго правильной;
- для произвольных ограниченных начальных условий временная характеристика deskрипторных систем может проявлять импульсное или не причинное поведение вместе;
- deskрипторные системы обычно содержат три типа мод: ограниченные динамические моды, неограниченные динамические моды и нединамические моды; нежелательное импульсное поведение в deskрипторных системах может генерироваться неограниченными динамическими модами;
- даже если deskрипторная система является безымпурсной, она все равно может иметь разрывы первого рода из-за несогласованных начальных условий.

Подробнее о deskрипторных системах дискретного и непрерывного времени можно прочесть в [13, 15, 109].

Из-за вышеперечисленных особенностей построение анизотропийной теории для таких систем не является тривиальным обобщением анизотропийной теории для обыкновенных систем.

Первой задачей, которая была решена в рамках построения анизотропийной теории для дискретных deskрипторных систем, была задача вычисления анизотропийной нормы deskрипторной системы [12]. Для вычисления анизотропийной нормы необходимо решить алгебраическое матричное уравнение Риккати, уравнение Ляпунова и уравнение специального вида. В эти три

уравнения входили параметры обыкновенной системы, эквивалентной данной дескрипторной системе. В [90] предложен алгоритм вычисления анизотропийной нормы дискретной дескрипторной системы с помощью выпуклой оптимизации. Задачи анализа для дескрипторных систем, на вход которых поступает случайная гауссовская последовательность с ненулевым математическим ожиданием, рассмотрены в [81].

Первая работа по синтезу оптимального анизотропийного управления для дескрипторных систем [89] была посвящена построению управления при наличии информации обо всем векторе состояния и сводилась к решению двух алгебраических матричных уравнений Риккати, матричного уравнения Ляпунова и уравнения специального вида. В [14] поставлена и решена задача синтеза оптимального анизотропийного регулятора по выходу. Решение задачи свелось к двухшаговой процедуре синтеза управления: на первом шаге производились каузализация системы и ее приведение к форме эквивалентной обыкновенной системы, а на втором шаге применялась известная методика решения задачи синтеза для обыкновенной системы.

В [1] получены условия ограниченности анизотропийной нормы дескрипторной системы на основе решения обобщенного уравнения Риккати и проверки ряда неравенств. В [82] задача субоптимального управления по состоянию и вектору полной информации (состояние и возмущение) решена с помощью обобщенных алгебраических уравнений Риккати. В [16] предложена новая методика вычисления анизотропийной нормы и поиска субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию на основе строгих матричных неравенств.

Более подробно с поставленными и решенными задачами анизотропийного управления для дескрипторных систем можно ознакомиться в монографии [91].

### *6.5. Анизотропийный анализ систем с нецентрированными входными сигналами*

Как было сказано выше, в первоначальных постановках задач анизотропийного анализа и синтеза [20, 21, 24, 70, 164, 225] в качестве внешних входных возмущений рассматривались стационарные эргодические последовательности гауссовских случайных векторов с нулевыми математическими ожиданиями. Равенство нулю математических ожиданий означает, что средняя на бесконечном интервале ошибка, обусловленная наличием такого рода возмущений, зависит только от ковариационных матриц векторов последовательности. Однако в реальных ситуациях, при различных сбоях в оборудовании или наличии нетривиального внешнего возмущения, средние значения векторов возмущения отличны от нуля. В связи с этим в рамках анизотропийной теории имеет смысл в качестве внешнего возмущения рассматривать стационарные эргодические последовательности гауссовских случайных векторов с *ненулевыми* средними. Предположение о наличии у векторов последовательности постоянного (одного и того же) математического ожидания не нарушает свойств стационарности и эргодичности последовательности. Более того, при определенных условиях эти свойства сохраняются и при перемен-

ных во времени математических ожиданиях. Таким образом, при рассмотрении в анизотропной теории случая ненулевого математического ожидания у векторов входной последовательности фактически происходит расширение границ ее применения. Идея построения анизотропной теории с ненулевым матожиданием входного сигнала принадлежит М. Карни [165].

Для построения анизотропной теории управления с нецентрированными входными случайными сигналами необходимо скорректировать определения анизотропии, средней анизотропии и анизотропной нормы в случае, когда векторы входного возмущения имеют ненулевые математические ожидания. Далее нужно рассмотреть вопросы анализа и получить алгоритмы вычисления анизотропии, средней анизотропии и анизотропной нормы в частотной области и пространстве состояний. Окончательной целью является построение методов синтеза анизотропных регуляторов для систем, на вход которых поступает нецентрированная случайная последовательность. Рассмотрим два гауссовских  $m$ -мерных случайных вектора  $w$  и  $v$  с плотностями распределений

$$f(x) = \left( (2\pi)^m \det(\Sigma) \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\},$$

$$p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp \left\{ -\frac{x^T x}{2\lambda} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

соответственно. Случайный вектор  $w$  имеет ненулевое математическое ожидание  $\mathbf{E}[w] = \mu \neq 0$  и ковариационную матрицу  $\mathbf{cov}(w) = \Sigma = \Sigma^T \succ 0$ , в то время как математическое ожидание вектора  $v$  равно нулю, а его ковариационная матрица — скалярная:  $\mathbf{cov}(v) = \lambda I_m$ . В качестве меры отличия  $w$  от  $v$ , как и ранее, будет выступать относительная энтропия (5.4), равная в данном случае

$$(6.25) \quad D(f||p_\lambda) = -h(w) + \frac{m}{2} \ln(2\pi\lambda) + \frac{\text{tr}(\Sigma) + |\mu|^2}{2\lambda},$$

так как  $\mathbf{E}[|w|^2] = \text{tr}(\Sigma) + |\mu|^2$ .

*Анизотропия случайного вектора* определяется как минимальное в смысле параметра  $\lambda > 0$  значение относительной энтропии  $D(f||p_\lambda)$ :

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} D(f||p_\lambda),$$

что с учетом (6.25) приводит к

$$\mathbf{A}(w) = -\frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{m\Sigma}{\text{tr}(\Sigma) + |\mu|^2} \right).$$

Сравнение полученной формулы для анизотропии случайного вектора  $w$  с ненулевым математическим ожиданием  $\mu$  и выражения (5.10), определяющего анизотропию случайного вектора с нулевым математическим ожиданием, позволяет заключить, что

$$\mathbf{A}(w)|_{\mu \neq 0} = \mathbf{A}(w)|_{\mu=0} + \frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{\text{tr}(\Sigma) + |\mu|^2}{\text{tr}(\Sigma)} \right).$$

Иными словами, наличие математического ожидания всегда увеличивает меру отличия  $w$  от множества эталонных случайных векторов с плотностями  $\{p_\lambda(x) : \lambda > 0\}$ . Более того, для двух различных случайных векторов  $w_1$  и  $w_2$  с математическими ожиданиями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и равными ковариационными матрицами  $\mathbf{cov}(w_1) = \mathbf{cov}(w_2) = \Sigma$  анизотропия тем больше, чем больше евклидова норма математического ожидания:

$$\mathbf{A}(w_1) \geq \mathbf{A}(w_2) \quad \Leftrightarrow \quad |\mu_1| \geq |\mu_2|.$$

В случае ненулевого математического ожидания *средняя анизотропия* допускает представление

$$(6.26) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left( \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2} \right) d\omega,$$

где для вектора  $\mathcal{M}$  справедливо

$$(6.27) \quad \mathcal{M} = (D_g + C_g(I - A_g)^{-1}B_g) \mu,$$

а матрицы  $A_g$ ,  $B_g$ ,  $C_g$ ,  $D_g$  задают формирующий фильтр  $G$  в пространстве состояний следующим образом:

$$(6.28) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= A_g x_k + B_g(v_k + \mu), \\ w_k &= C_g x_k + D_g(v_k + \mu). \end{aligned}$$

Алгоритм вычисления средней анизотропии при ненулевом математическом ожидании аналогичен алгоритму вычисления средней анизотропии в случае центрированного возмущения [113, 207].

Следующая формула устанавливает связь между значением средней анизотропии последовательности с ненулевыми матожиданиями и средней анизотропии последовательности с нулевыми математическими ожиданиями:

$$(6.29) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = \overline{\mathbf{A}}_o(W) + \frac{m}{2} \ln \left( \frac{\|G\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}{\|G\|_2^2} \right),$$

где  $\|G\|_2^2 = \text{tr}(\Sigma) - H_2$  норма передаточной функции  $G(z)$ .

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему  $F \in H_\infty^{p \times m}$  с  $m$ -мерным входом  $W$ , с  $p$ -мерным выходом  $Z$  и постоянными матрицами  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ :

$$(6.30) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bw_k, \\ z_k &= Cx_k + Dw_k. \end{aligned}$$

Передаточная функция такой системы равна  $F(z) = D + C(z^{-1}I_n - A)^{-1}B$ . В качестве входа  $W$  будем рассматривать последовательность с ограниченной сверху числом  $a \geq 0$  средней анизотропией, т.е. последовательность, сгенерированную формирующим фильтром (6.28) из множества

$$\mathbb{G}_a = \left\{ G \in H_2^{m \times m} : \overline{\mathbf{A}}(G) \leq a \right\}.$$

Анизотропийная норма системы (6.30) равна

$$(6.31) \quad \|F\|_a = \sup_{W: \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a} Q(F, W) = \sup_{G \in \mathbb{G}_a} \sqrt{\frac{\|FG\|_2^2 + |\mathcal{F}|^2}{\|G\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}},$$

где  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{F}$  — математические ожидания соответственно векторов входной и выходной последовательностей  $W$  и  $Z$  на стационарном режиме:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[w_k] = (D_g + C_g(I - A_g)^{-1}B_g) \mu, \\ \mathcal{F} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[z_k] = (D + C(I - A)^{-1}B) \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Идеи построения анизотропийных регуляторов с нецентрированными входными возмущениями были опубликованы в [168].

### 6.6. Анизотропийная теория для нестационарных систем

В последние годы развивается подход к построению теории анизотропийного робастного управления и фильтрации в нестационарных системах. В [24] впервые была рассмотрена задача анизотропийного анализа робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале. В этой работе были даны определения анизотропии и анизотропийной нормы, которые соответствовали новым задачам нестационарной анизотропийной теории управления на конечном горизонте.

Следующей важной работой в построении анизотропийной теории для систем на конечном горизонте в субоптимальной постановке явилась работа [173]. Определения анизотропии случайного вектора и анизотропийной нормы дискретной линейной нестационарной системы, введенные в [24], являются основой для решения задач анизотропийного управления и фильтрации на конечном временном интервале. В [173] сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы с переменными параметрами, предполагающие решение разностного уравнения Риккати и неравенства относительно детерминанта положительно определенной матрицы. На основе этого критерия в [74] поставлена и решена задача синтеза анизотропийного регулятора для дискретной линейной нестационарной системы, гарантирующего ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы заданным пороговым значением на конечном временном интервале. Получены достаточные условия существования анизотропийного регулятора с переменными параметрами, гарантирующего ограниченность анизотропийной нормы замкнутой дискретной линейной нестационарной системы заданным пороговым значением на конечном временном отрезке. Эти условия определяют алгоритм вычисления матрицы параметров регулятора из рекуррентного решения систем матричных неравенств или последовательности оптимизационных задач.

Задача анализа нестационарной линейной системы на конечном интервале времени при нецентрированных входных возмущениях была решена в [40]. В этой работе было показано, что вычисление анизотропийной нормы указанного класса систем в пространстве состояний связано с решением систем разностных матричных уравнений и уравнения специального вида. Решение



задачи синтеза субоптимального управления для нестационарных систем на конечном горизонте было получено в [74].

### 6.7. Анизотропийная фильтрация

Как известно, вместе с  $H_2$  и  $H_\infty$  теориями управления развивались и  $H_2$  и  $H_\infty$  теории фильтрации [79, 147, 204]. Этим теориям фильтрации присущи все особенности, имеющиеся в соответствующих теориях управления. В калмановской фильтрации предполагается, что модель динамики процесса и статистические характеристики шумов модели и измерения точно известны. Дисперсия ошибки оценивания (фильтрации) является квадратичным критерием оптимальности. Фильтр Калмана, обеспечивающий минимальную дисперсию ошибки оценивания, является оценщиком состояния системы. Минимизация или ограничение дисперсии ошибки фильтрации эквивалентна минимизации или ограничению  $H_2$  нормы оператора ошибки фильтрации. Также известно, что фильтр Калмана (или  $H_2$  фильтр), синтезированный для заданной модели, не является робастным, т.е. может потерять устойчивость при малых изменениях математической модели объекта.

В случае, когда априорная информация о модели объекта и статистических свойствах шумов модели и измерения не известна точно, может использоваться  $H_\infty$  критерий. Фильтр, синтезированный по критерию ограниченности  $H_\infty$  нормы, гарантирует, что  $H_\infty$  норма оператора, связывающего входной сигнал возмущения и ошибку оценивания, не превышает заданного положительного числа. Алгоритмы  $H_\infty$  фильтрации принадлежат классу минимаксных алгоритмов, при которых минимизируется ошибка оценивания для наихудшего случая (см., например, [131, 135, 183, 203, 204]).

Стоит отметить, что алгоритмы фильтрации в этих теориях рассматриваются как на конечном, так и на бесконечном горизонтах [135].

Как и в случае управления, оптимальные  $H_2$  и  $H_\infty$  фильтры эффективно функционируют только в том случае, когда входные сигналы принадлежат тем классам, которые предполагались при создании этих теорий. Применение  $H_2$  оценщика в случае с сильно “окрашенным” входным возмущением обычно приводит к неудовлетворительным ошибкам оценивания, а  $H_\infty$  оценщик, рассчитанный на наихудший случай, при входном возмущении в виде белого или слабо “окрашенного” шума является излишне перестраховочным (консервативным) [214].

Одним из направлений по синтезу менее консервативных, чем  $H_\infty$  фильтры, и более робастных, чем  $H_2$  фильтры, являются так называемые “смешанные”  $H_2/H_\infty$  фильтры (см., например, [119, 133, 156, 253]). В данном подходе минимизируется  $H_2$  критерий при заданном ограничении на  $H_\infty$  критерий. Методы  $H_2$ ,  $H_\infty$  и смешанной  $H_2/H_\infty$  фильтрации основываются на решениях уравнений Риккати или линейных матричных неравенств (см., например, [8, 101]). Достижение компромисса между  $H_2$  оптимальными и  $H_\infty$  оптимальными фильтрами рассматривается в задаче обобщенной  $H_\infty$  фильтрации [9], в которой минимизируется совместное влияние неизвестных начальных условий и неизмеряемого внешнего возмущения на ошибку оценивания. Для линейных нестационарных систем предложены алгоритмы синтеза нестационарных фильтров, которые основываются на рекуррентном решении си-

стемы разностных линейных матричных неравенств [124]. При этом решение системы линейных матричных неравенств необходимо на каждом шаге.

Первой работой по анизотропийной оптимальной фильтрации для стационарных систем на бесконечном горизонте была [227].

Задача оптимальной анизотропийной фильтрации для линейных нестационарных дискретных систем на конечном горизонте решена в [226]. Она сводится к решению двух разностных уравнений Риккати в прямом и обратном времени.

В [61] решена задача анизотропийной субоптимальной фильтрации методами выпуклой оптимизации.

Работа [173] позволила решить задачу анизотропийной фильтрации для линейных нестационарных систем на конечном горизонте для частного случая равенства размерностей оцениваемого выхода и внешнего возмущения [241]. При решении последней задачи в [241] вводится скалярная вспомогательная матричная переменная, которая приводит к существенному увеличению консерватизма.

В [63] сняты ограничения на равенства размерностей оцениваемого выхода и внешнего возмущения [241], решена задача робастной фильтрации на конечном горизонте для линейной дискретной нестационарной системы с наблюдаемым и оцениваемым выходами с неточно известным вероятностным распределением входного возмущения. Величина ошибки оценивания количественно характеризуется анизотропийной нормой. Задача нахождения субоптимального анизотропийного оценщика сводится к задаче выпуклой оптимизации. Приведен алгоритм поиска субоптимального анизотропийного оценщика, который основывается на рекуррентном решении системы матричных неравенств.

В [215] рассматривалась задача стохастической анизотропийной робастной фильтрации на бесконечном горизонте для линейной дискретной стационарной системы, подверженной влиянию нецентрированного случайного возмущения с неточно известным вероятностным распределением. В терминах матричных неравенств доказано достаточное условие строгой ограниченности анизотропийной нормы линейной дискретной стационарной системы заданным пороговым значением (частотная теорема). Сформулировано достаточное условие существования оценщика, гарантирующего ограниченность анизотропийной нормы оператора ошибки оценивания заданным пороговым значением.

Решение задачи фильтрации для линейной дискретной нестационарной системы на конечном горизонте было получено в [64], где предполагалось, что внешнее возмущение имеет ограниченную сверху анизотропию и дополнительно удовлетворяет двум ограничениям на моменты. Решение задачи основывается на критерии ограниченности анизотропийной нормы системы и сводится к поиску решения задачи выпуклой оптимизации.

#### *6.8. Другие теории, имеющие отношение к относительной энтропии*

В теории минимаксного LQG управления относительная энтропия рассматривается для описания неопределенности объекта управления. Пара-

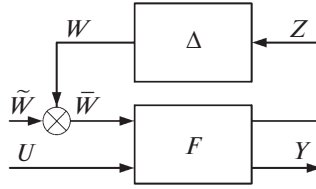


Рис. 8. К описанию неопределенностей в задаче минимаксного LQG.

метрические неопределенности, к которым можно отнести нелинейности, неучтенную и немоделируемую динамику, а также интервальные допуски на параметры системы, выделяются в структуру, показанную на рис. 8.

Математически неопределенность объекта управления описывается в виде:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + D\bar{w}_k, \\ z_k &= E_1x_k + E_2u_k, \\ y_k &= Cx_k + \bar{v}_k. \end{aligned}$$

Здесь начальные условия  $x_0$  и шумы  $\bar{w}_k$  и  $\bar{v}_k$  — случайные процессы, определяемые неизвестной функцией распределения вероятностей  $\nu(\cdot)$ . Данная задача рассматривается на конечном горизонте, т.е.  $k = \overline{0, N}$ . Относительная энтропия в данном случае определяет “расстояние” между гауссовскими функциями распределения  $\mu(\cdot)$  и  $\nu(\cdot)$ . Матрицы  $E_1$  и  $E_2$  являются известными и участвуют в формировании неопределенности. При этом функция распределения вероятностей  $\nu(\cdot)$  определяет допустимые возмущения, если справедливо неравенство:

$$(6.32) \quad D(\nu(\cdot) \parallel \mu(\cdot)) - \mathbf{E}_\nu \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \|z_k\|^2 + d \right] \leq 0,$$

где  $d > 0$  — постоянная скалярная величина,  $\mathbf{E}_\nu$  — условное математическое ожидание относительно  $\nu(\cdot)$ , а  $D(\nu(\cdot) \parallel \mu(\cdot))$  — относительная энтропия между функциями распределения вероятностей  $\mu(\cdot)$  и  $\nu(\cdot)$ , определяемая выражением

$$(6.33) \quad R(\nu(\cdot) \parallel \mu(\cdot)) = \begin{cases} \int_{\Omega} \nu(\eta) \log \frac{\nu(\eta)}{\mu(\eta)} d\eta, & \text{если } \nu(\eta) \ll \mu(\eta) \text{ и } \log \frac{\nu(\eta)}{\mu(\eta)} \in \mathbb{L}_1, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Запись  $\nu(\eta) \ll \mu(\eta)$  означает, что функция распределения вероятности  $\nu(\eta)$  абсолютно непрерывна относительно функции  $\mu(\eta)$ .

Задача минимаксного управления в данной постановке заключается в поиске наихудшего значения математического ожидания квадратичного функционала качества при ограничениях (6.33) и выражается в виде

$$V_\tau = \inf_{K \in \Lambda} \sup_{\nu(\cdot)} \mathbf{E}_\nu [J_\tau],$$

где

$$J_\tau = \frac{1}{2} x_{N+1}^T Q_{N+1} x_{N+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left[ x_k^T Q_k + u_k^T R u_k \right] - \\ - \tau \left[ R(\nu(\cdot) \| \mu(\cdot)) - d - \mathbf{E}_\nu \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \|z_k\|^2 \right].$$

Относительная энтропия в данном случае используется, чтобы характеризовать неопределенность в объекте. Однако она, как и в описанных чуть выше работах по анизотропийной теории управления, относится к описанию неопределенности входного сигнала, действующего на систему и формируемого в том числе за счет неопределенности объекта управления. Таким образом, ставится задача поиска оптимального управления, минимизирующего некий функционал качества при ограничениях на относительную энтропию входного вероятностного сигнала. Эта задача сводится к построению управления при наихудшем в смысле относительной энтропии входном сигнале. Такое управление авторы называли *минимаксным*. В отличие от работ по анизотропийной теории управления в серии работ по минимаксному управлению рассматриваются как дискретные описания систем управления [189, 190, 202, 219, 245, 246], так и описания системы в виде стохастических дифференциальных уравнений [217, 218]. Аналогом описания неопределенности для систем, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями, является описание с помощью интегральных квадратичных ограничений. В рамках такого подхода были решены задачи минимаксного управления и фильтрации на конечном горизонте [217, 245].

Содержательные результаты в минимаксной теории управления получены, когда система является линейной, а распределение входного сигнала является гауссовским. В этом случае решение минимаксной линейно-квадратичной задачи сводится к задаче оптимального управления, чувствительного к риску [229]. С описанными выше работами сильно коррелируют работы [189]–[202], в которых также используется информационная характеристика — относительная энтропия.

## 7. Заключение

Основной целью данной работы было провести обзор того, как во второй половине XX века развивались и модифицировались классические постановки задач  $H_2$  и  $H_\infty$  управления, как появились минимаксные задачи, а также их связь со стохастической робастной теорией управления с анизотропийным критерием качества, созданной И.Г. Владимировым и развиваемой научной школой А.П. Курдюкова более 20 лет.

Авторы просят прощения за неполное освещение всех подходов, лежащих между задачами  $H_2$  и  $H_\infty$  оптимального и субоптимального управления. Робастные стохастические идеи и постановки задач приведены в обзоре в той степени, которая позволяет акцентировать особенность описываемого подхода и соотносить его с анизотропийной теорией.

В завершение обзора хотелось бы отменить дальнейшее направление развития анизотропной теории, основным объектом рассмотрения которой являются линейные системы дискретного времени. В недавних работах В.А. Бойченко и А.П. Курдюкова [18, 160] была сделана попытка расширить область применимости анизотропной теории на случай внешних возмущений в виде дискретных и непрерывных случайных процессов с конечной  $l_2/L_2$  или мощностной нормой. Для этого было введено понятие  $\sigma$ -энтропии случайного сигнала и определение  $\sigma$ -энтропийной нормы системы. Аксиоматика данной теории была построена на основе понятия корреляционной свертки случайного сигнала, которая позволяет работать как со стационарными, так и с нестационарными случайными процессами, используя матрицу спектральной плотности, которая инкапсулирует все различия, явившиеся следствием выбора  $l_2/L_2$  или мощностной нормы дискретного или непрерывного сигнала. Полученные результаты  $\sigma$ -энтропийного анализа верны для систем и непрерывного, и дискретного времени. В дальнейшем планируется развивать это направление, переходя к постановке и решению задач синтеза.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрианова О.Г., Белов А.А., Курдюков А.П. Условия ограниченности анизотропной нормы дескрипторной системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 29–40.
2. Андриевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л. Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // АиТ. 2010. № 4. С. 34–99.  
*Andrievsky B.R., Matveev A.S., Fradkov A.L. Control and Estimation Under Information Constraints: Toward a Unified Theory of Control, Computation and Communications // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. P. 572–633.*
3. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1971.
4. Аров Д.З., Крейн М.Г. Задача поиска минимума энтропии в проблеме продолжения // Функцион. анализ и его приложения. 1981. Т. 4. С. 73–75.
5. Аров Д.З., Крейн М.Г. О вычислении энтропийных интегралов и их минимумов в обобщенных проблемах продолжения // Acta Scienta Matematica. 1983. Т. 45. С. 33–50.
6. Афанасьев В.Н. Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.
7. Баландин Д.В., Коган М.М. Алгоритмы синтеза робастного управления динамическими системами. Нижний Новгород, 2007.
8. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
9. Баландин Д.В., Коган М.М. Обобщенная  $H_\infty$ -оптимальная фильтрация при внешнем и начальном возмущениях // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1507–1514.
10. Баландин Д.В., Коган М.М. Минимаксная фильтрация:  $\gamma_0$ -оптимальные наблюдатели и обобщенные  $H_\infty$ -оптимальные фильтры // АиТ. 2013. № 4. С. 43–58.  
*Balandin D.V., Kogan M.M. Minimax Filtering:  $\gamma_0$ -optimal Observers and Generalized  $H_\infty$ -optimal Filters // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. P. 575–587.*

11. *Барабанов А.Е., Первозванский А.А.* Оптимизация по равномерно-частотным показателям ( $H_\infty$ -теория) // *АиТ.* 1992. № 9. С. 3–32.  
*Barabanov A.E., Pervozvanskiĭ A.A.* Optimization with respect to uniform-frequency inducency ( $H_\infty$ -theory) // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53. No. 9. P. 1301–1327.
12. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Вычисление анизотропийной нормы дескрипторной системы // *АиТ.* 2010. № 6. С. 51–63.  
*Belov A.A., Kurdyukov A.P.* Calculation of the Anisotropic Norm of the Descriptor System // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. P. 1022–1033.
13. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Линейные дескрипторные системы дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2011.
14. *Белов А.А.* Синтез анизотропийных регуляторов для дескрипторных систем по выходной переменной // *АиТ.* 2013. № 11. С. 84–99.  
*Belov A.A.* Anisotropic Controller Design for Descriptor Systems with Respect to the Output Variable // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74, No. 11. P. 1838–1850.
15. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
16. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Синтез субоптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию для дескрипторных систем на основе линейных матричных неравенств // *АиТ.* 2016. № 10. С. 40–56.  
*Belov A.A., Andrianova O.G.* Anisotropy-Based Suboptimal State-Feedback Control Design Using Linear Matrix Inequalities // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 10. P. 1741–1754.
17. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Синтез робастного управления параметрически неопределенными линейными системами для подавления случайных внешних возмущений // *АиТ.* 2020. № 4. С. 94–109.  
*Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust Control Design for Suppressing Random Exogenous Disturbances in Parametrically Uncertain Linear Systems // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 4. P. 649–661.
18. *Бойченко В.А.* Анизотропийный анализ в случае ненулевых начальных условий // *Управление большими системами.* 2017. № 67. С. 32–51.
19. *Быховский М.А.* Пионеры информационного века. История развития теории связи. М.: Техносфера, 2006.
20. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // *ДАН.* 1995. Т. 342. № 5 С. 583–585.
21. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Стохастическая проблема  $H_\infty$ -оптимизации // *ДАН.* 1995. Т. 343. № 5. С. 607–609.
22. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем. // *АиТ.* 1999. № 3. С. 78–87.  
*Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V.* Asymptotics of the Anisotropic Norm of Linear Time-Independent Systems // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 3. P. 359–366.
23. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Максимов Е.А., Тимин В.Н.* Анизотропийная теория управления — новый подход к стохастическому робастному управлению // Труды IV конференции “Идентификация систем и задачи управления” Пленарный доклад. Москва, Январь 25–28, 2005. С. 9–32.
24. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // *АиТ.* 2006. № 8. С. 92–111.

- Vladimirov I.G., Diamond Ph., Kloeden P.E.* Anisotropy-Based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 8. P. 1265–1282.
25. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
  26. *Гельфанд И.М., Колмогоров А.Н., Яглом А.М.* Информация и энтропия для непрерывных распределений. Труды III Всесоюзного математического съезда, Москва, 1958. Т. 3. С. 300–320.
  27. *Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А.* Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970.
  28. *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления, Труды I Конгресса IFAC, Т. 2, Изд-во АН СССР, М.: 1961.
  29. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
  30. *Коган М.М.* Синтез оптимального и робастного управления с  $H_\infty/\gamma_0$  критерием // АиТ. 2016. № 8. С. 3–23.  
*Kogan M.M.* Design of Optimal and Robust Control with  $H_\infty/\gamma_0$  Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. P. 1317–1333.
  31. *Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш.* Курс теории информации. М.: Наука, 1982.
  32. *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. Акад. наук СССР, сер. Матем. 1941. Т. 5. № 1. С. 3–14.
  33. *Красовский А.А.* Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М.: Наука, 1968.
  34. *Кульбак С.* Теория информации и статистика М.: Мир, 1967.
  35. *Курдюков А.П., Владимиров И.Г., Тимин В.Н.* Элементы теории робастного и стохастического робастного управления. Том 3 “Синтез регуляторов систем автоматического управления” в учебнике “Методы классической и современной теории автоматического управления”, М.: Изд. ГТУ им. Н.Э. Баумана, С. 385–480, 2004.
  36. *Курдюков А.П., Максимов Е.А.* Робастная устойчивость линейных дискретных систем с неопределенностью, ограниченной по анизотропной норме // АиТ. 2004. № 12. С. 129–143.  
*Kurdyukov A.P., Maksimov E.A.* Robust Stability of Linear Discrete Stationary Systems with Uncertainty Bounded in the Anisotropic Norm // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. P. 1977–1990.
  37. *Курдюков А.П., Максимов Е.А.* Решение стохастической задачи  $H_\infty$ -оптимизации для линейных систем с параметрической неопределенностью // АиТ. 2006. № 8. С. 112–141.  
*Kurdyukov A.P., Maximov E.A.* Solution of the Stochastic  $H_\infty$ -optimization Problem for Discrete Time Linear Systems Under Parametric Uncertainty // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. P. 1283–1310.
  38. *Кустов А.Ю., Курдюков А.П.* Синтез формирующего фильтра, обеспечивающего на своем выходе заданный уровень средней анизотропии // АиТ. 2013. № 3. С. 51–66.  
*Kustov A.Yu., Kurdyukov A.P.* Shaping Filter Design with a Given Mean Anisotropy of Output Signals // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. P. 358–371.
  39. *Кустов А.Ю.* Анизотропный анализ в случае ненулевого математического ожидания входного возмущения // Управление большими системами: сборник трудов (электронный журнал). М.: ИПУ РАН, 2014. Вып. 50. С. 6–23.



40. *Кустов А.Ю., Тимин В.Н.* Анизотропный анализ нестационарных систем на конечном интервале времени при нецентрированном возмущении // *АиТ.* 2017. № 6. С. 18–35.  
*Kustov A.Yu., Timin V.N.* Anisotropy-Based Analysis for Finite Horizon Time-Varying Systems with Non-centered Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. P. 974–988.
41. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I // *АиТ.* 1960. Т. 21. № 4. С. 436–441.
42. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. II // *АиТ.* 1960. Т. 21. № 5. С. 561–568.
43. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. III // *АиТ.* 1960. Т. 21. № 6. С. 661–665.
44. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. IV // *АиТ.* 1961. Т. 22. № 4. С. 425–435.
45. *Максимов Е.А.* О связи задачи синтеза анизотропных регуляторов с классическими задачами оптимального управления // *АиТ.* 2007. № 9. С. 134–144.  
*Maksimov E.A.* On the Relationship Between the Problem of Anisotropy-Based Controller Synthesis and Classical Optimal Control Problems // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. P. 1594–1603.
46. *Маслов В.П., Черный А.С.* О минимизации и максимизации энтропии в различных дисциплинах // *Теория вероятностей и ее применения.* 2003. Т. 48. № 3. С. 467–486.
47. *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973.
48. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
49. *Пинскер М.С.* Количество информации о гауссовском случайном процессе, содержащейся во втором процессе, стационарно с ним связанном // *ДАН.* 1954. Т. 98. С. 213–216.
50. *Позняк А.С., Себряков Г.Г., Семенов А.В., Федосов Е.А.*  $H_\infty$ -теория управления: феномен, достижения, перспективы, открытые проблемы. М: ГосНИИАС, Институт проблем управления АН СССР, 1990.
51. *Позняк А.С.* Лекции по основам  $H_\infty$  оптимального управления. М.: Изд. МФТИ, 1991.
52. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
53. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. М.: ЛЕНАНД, 2014.
54. *Пугачёв В.С., Симицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Изд. 2-е, доп., М.: Наука, 1990.
55. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. Пер с англ. под ред. проф. Б. Р. Левина. М.: Связь, 1976.
56. *Семенов А.В., Владимиров И.Г., Фурлетов М.Ю., Мецерьяков О.Г.* Методы стохастической  $H_\infty$ -оптимизации в приложении к проблемам конструирования робастных регуляторов и фильтров. Технический отчет № 184 (1390)–94, М.: ГосНИИАС, 1994.
57. *Солодов А.В.* Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. М.: Наука, 1967.
58. *Стратонович Р.Л.* К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций // *Теория вероятностей и ее применение.* 1959. Т. 4. № 2. С. 239–242.

59. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. М.: Советское радио, 1975.
60. *Тартаковский Г.П.* Теория информационных систем. М.: Физматкнига, 2005.
61. *Тимин В.Н., Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Решение задачи анизотропной субоптимальной фильтрации методом выпуклой оптимизации // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 612–615.
62. *Тимин В.Н.* Субоптимальная анизотропная фильтрация линейных дискретных стационарных систем // АиТ. 2013. № 11. С. 3–19.  
*Timin V.N.* Anisotropy-Based Suboptimal Filtering for the Linear Discrete Time-Invariant Systems // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. P. 1773–1785.
63. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Субоптимальная анизотропная фильтрация на конечном горизонте // АиТ. 2016. № 1. С. 5–29.  
*Timin V.N., Kurdyukov A.P.* Suboptimal Anisotropic Filtering in a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. P. 1–20.
64. *Тимин В.Н., Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Гольдин Д.А., Вершинин Ю.А.* Субоптимальная анизотропная фильтрация для линейных дискретных нестационарных систем с нецентрированным внешним возмущением // АиТ. 2019. № 1. С. 3–20.  
*Timin V.N., Kustov A.Y., Kurdyukov A.P. et al.* Suboptimal Anisotropic Filtering for Linear Discrete Nonstationary Systems with Uncentered External Disturbance // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. P. 1–15.
65. *Тихомиров В.М.* Работы А.Н. Колмогорова по  $\epsilon$ -энтропии функциональных классов и суперпозициям функций // Успехи математических наук. 1963, Т. XVIII. № 5(113). С. 55–92.
66. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966.
67. *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: ЛГУ, 1985.
68. *Хинчин А.Я.* Теория корреляции стационарных стохастических процессов // Успехи мат. наук. 1938. № 5. С. 42–51.
69. *Чайковский М.М.* Нахождение сильно минимизирующего ранг решения линейного матричного неравенства // АиТ. 2007. № 9. С. 96–105.  
*Chaikovskiy M.M.* Finding the Strongly Rank-Minimizing Solution to the Linear Matrix Inequality // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. P. 1559–1567.
70. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Критерий строгой ограниченности анизотропной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств // ДАН. 2011. Т. 441. № 3. С. 318–321.
71. *Чайковский М.М.* Синтез анизотропных субоптимальных регуляторов заданного порядка на основе полуопределенного программирования и алгоритма поиска взаимобратных матриц // Управление большими системами. 2012. № 39. С. 95–137.
72. *Чайковский М.М.* Синтез анизотропных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования // Управление большими системами. 2013. № 42. С. 100–152.
73. *Чайковский М.М.* Многоканальные задачи синтеза анизотропных регуляторов // АиТ. 2016. № 8. С. 43–65.  
*Chaikovskiy M.M.* Multichannel Synthesis Problems for Anisotropic Control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 8. P. 1351–1369.
74. *Чайковский М.М., Тимин В.Н.* Синтез анизотропного субоптимального управления для линейных нестационарных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2017. № 7. С. 39–56.

- Tchaikovsky M.M., Timin V.N.* Synthesis of Anisotropic Suboptimal Control for Linear Time-Varying Systems on Finite Time Horizon // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1203–1217.
75. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Анизотропное субоптимальное управление для систем с дробно-линейной неопределенностью // АиТ. 2018. № 6. С. 172–190.
- Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Anisotropic Suboptimal Control for Systems with Linear-Fractional Uncertainty // Automation and Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1100–1116.
76. Новые перспективные методы проектирования многомерных динамических систем управления. Обзор. Под редакцией Е.А. Федосова, ГосНИИАС, 1989.
77. Конструирование робастных систем управления с использованием методов  $H_\infty$ -оптимизации. Обзор. Под редакцией Е.А. Федосова, ГосНИИАС, 1991.
78. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
79. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal filtering. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice Hall. 1979.
80. *Anderson B. and Moore J.B.* Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Prentice-Hall. 1990.
81. *Andrianova O.G., Kurdyukov A.P., Belov A.A., Kustov A.Y.* Anisotropy-Based Analysis for Descriptor Systems with Nonzero-Mean Input Signals // 2014 European Control Conference (ECC). Strasbourg. 2014. P. 430–435.
82. *Andrianova O.G., Belov A.A.* A Riccati Equation Approach to Anisotropy-Based Control Problem for Descriptor Systems: State Feedback and Full Information Cases // 2015 European Control Conference (ECC). Linz. 2015. P. 3226–3231.
83. *Arnold W.F., Laub A.J.* Generalised Eigenproblem Algorithms and Software for Algebraic Riccati Equations // Proc. IEEE. 1984. V. 72. No. 12. P. 1746–1754.
84. *Athans M.* Editorial on the LQG Problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. P. 528.
85. *Baeyens E., Khargonekar P.P.* Some Examples in Mixed  $H_2/H_\infty$  Control // Proc. 1994 American Control Conference — ACC '94. Baltimore. MD. USA. 1994. P. 1608–1612.
86. *Baratchart L., Leblond J., Partington J.R.* Hardy Approximation to  $L_\infty$  Functions on Subsets of the Circle // Constr. Approx. 1996. V. 12. P. 423–435.
87. *Basar T., Bernhard P.*  $H_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: a Dynamic Game Approach, Boston: Birkhauser, 1995.
88. *Bedioui N., Salhi S., Ksouri M.*  $H_2$  Performance via Static Output Feedback for a Class of Nonlinear Systems // Proc. IEEE International Conference on Signals, Circuits and Systems (SCS). 2008. P. 1–6.
89. *Belov A.A.* Anisotropy-Based Control for Discrete-Time Descriptor Systems via State Feedback // Proc. 14th International Student Olympiad on Automatic Control, Saint-Petersburg. 2011. P. 134–140.
90. *Belov A., Andrianova O.* Computation of Anisotropic Norm for Descriptor Systems Using Convex Optimization // 2013 International Conference on Process Control (PC), Strbske Pleso. P. 173–178.
91. *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Robust Anisotropy-Based Control: Control of Discrete-Time Descriptor Systems, Cham: Springer International Publishing, 2018.

92. *Bender D.J., Laub A.J.* The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32. P. 672–687.
93. *Bensoussan A., van Schuppen J.H.* Optimal Control of Partially Observable Stochastic Systems with an Exponential-of-Integral Performance Index // SIAM J. Control Optim. 1985. V. 23. No. 4. P. 599–613.
94. *Berkenkamp F., Schoellig A.P.* Derivation of a Linear, Robust  $H_2$  Controller for Systems with Parametric Uncertainty. ETH Zurich. Tech. Rep. 2015. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-010405770>.
95. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQG Control with an  $H_\infty$  Performance Bound: A Riccati Equation Approach // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. No. 3. P. 293–305.
96. *Bernstein D.S.* Review of Minimum Entropy  $H_\infty$  Control // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. V. 37. No. 8. P. 1276–1277.
97. *Bertsekas D.P.* Dynamic Programming and Stochastic Control. Academic Press, New York. 1976.
98. *Bode H.W., Shannon C.E.* A Simplified Derivation of Linear Least-Square Smoothing and Prediction Theory // Proc. IRE. 1950. No. 4. P. 417–425.
99. *Bosgra O.H., Kvakernaak H.* Design Methods for Control Systems, Course notes, Dutch Institute for Systems and Control. V. 67. 2001.
100. *Boukas H., Shi P.*  $H_\infty$  Control for Discrete-Time Linear Systems with Frobenius Norm-Bounded Uncertainties // Automatica. 1999. V. 35. No. 9. P. 1625–1631.
101. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., and Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory // 1994. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia. <http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611970777>.
102. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge University Press. 2004.
103. *Campi M.C., James M.R.* Risk-Sensitive Control: a Bridge Between  $H_2$  and  $H_\infty$  Control // Proc. 32nd IEEE Conference on Decision and Control. San Antonio. TX. USA. 1993. V. 3. P. 2179–2180.
104. *Campi M.C., James M.R.* Nonlinear Discrete-Time Risk-Sensitive Optimal Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1996. V. 6. P. 1–19.
105. *Yung C.-F., Wang C.-C., Wu P.-F., Wang H.-S.* Bounded Real Lemma for Discrete-Time Descriptor Systems // IFAC Proc. Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 9982–9986.
106. *Chen M., Desoer C.* Necessary and Sufficient for Robust Stability of Linear Distributed Feedback Systems // Int. J. Control. 1982. V. 35. No. 2. P. 255–267.
107. *Colaneri P., Geromel J.C., Locatelli A.* Control Theory and Design. A  $RH_2$  and  $RH_\infty$  Viewpoint. Academic press, 1997.
108. *Cover T.M., Thomas J.A.* Elements of Information Theory. Wiley & Sons, Inc. 1991.
109. *Dai L.* Singular Control Systems. Lecture notes in control and information sciences. New York: Springer-Verlag, 1989.
110. *Dai L.* Filtering and LQG Problems for Discrete-Time Stochastic Singular Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. No. 10. P. 1105–1108.
111. *De Souza C.E., and Xie L.* On the Discrete-Time Bounded Real Lemma with Application in the Characterization of Static State Feedback  $H_\infty$  Controllers // Systems & Control Lett. 1992. V. 18. P. 61–71.
112. *Diamond P., Kurdjukov A., Semyonov A. and Vladimirov I.* Homotopy Methods and Anisotropy-Based Stochastic  $H_\infty$ -optimization of Control Systems // CADSMAP Report 97–14, December 1997, The University of Queensland, Australia. P. 1–22.

113. *Diamond P., Vladimirov I., Kurdjukov A., Semyonov A.* Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time Invariant Control Systems // *Int. J. Control.* 2001. V.74. No. 1. P. 28–42.
114. *Doyle J.C.* Guaranteed Margins for LQG Regulators // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1978. V. 23. No. 4. P. 756–757.
115. *Doyle J.C., Stein G.* Robustness with Observers // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1979. V. 24. No. 4. P. 607–611.
116. *Doyle J.C., Stein G.* Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1981. V. 26. P. 4–16.
117. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
118. *Doyle J.C., Francis B.A., Tannenbaum A.R.* *Feedback Control Theory.* Maxwell MacMillan Internat, New York, 1992.
119. *Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B.* Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  Performance Objectives II: Optimal control // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1994. V. 39. No. 8. P. 1575–1586.
120. *Dullerud G.E., Paganini F.G.* *A Course in Robust Control Theory. A convex approach.* New York: Springer-Verlag, 2000.
121. *Francis B.A.* *A Course in  $H_\infty$ -Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences.* 1987. V. 88. Springer-Verlag, Berlin.
122. *Fridman E., Shaked U.* Robust  $H_\infty$  Minimum Entropy Static Output-Feedback Control of Singularly Perturbed Systems // *Automatica.* 2000. V. 36. P. 1181–1188.
123. *Gahinet P., Apkarian P.A.* Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 1994. V. 4. No. 4. P. 421–448.
124. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.*  *$H_\infty$  Control and Estimation of State-Multiplicative Linear Systems.* London: Springer, 2005.
125. *Glover K.* All-optimal Hankel Norm Approximations of Linear Multivariable Systems and Their  $L_\infty$ -error Bounds // *Int. J. Control.* 1984. V. 39. P. 1115–1193.
126. *Glover K., Doyle J.* State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers That Satisfy an  $H_\infty$ -norm Bound and Relations to Risk Sensitivity // *Systems & Control Lett.* 1988. V. 11. P. 167–172.
127. *Glover K., Mustafa D.* Derivation of the Maximum Entropy  $H_\infty$  Controller and a State-Space Formula for its Entropy // *Int. J. Control.* 1989. V. 50. P. 899–916.
128. *Goddard P.J., Glover K.* Controller Approximation: Approaches for Preserving  $H_\infty$  Performance // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1998. V. 43. No. 7. P. 858–871.
129. *Gray R.M.* *Entropy and Information Theory.* Springer US, 2011.
130. *Green M., Limebeer D.J.N.* *Linear Robust Control.* Pearson Education Inc., 1995.
131. *Grimble M.J., Elsayed A.* Solution of the  $H_\infty$  Optimal Linear Filtering Problem for Discrete-Time Systems // *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing.* 1990. V. 38. No. 7. P. 1092–1104.
132. *Gu Da-W, Petkov P.H., Konstantinov M.M.* *Robust Control Design with MATLAB* // *Advanced Textbooks in Control and Signal Processing.* 2005. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
133. *Haddad W.M., Bernstein D.S., Mustafa D.* Mixed-Norm  $H_2/H_\infty$  Regulation and Estimation: the Discrete-Time Case // *Systems & Control Lett.* 1991 V. 16. No. 4 P. 235–247.

134. *Halevi Y.* Frequency Weighted Model Reduction via Optimal Projection // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. V. 37. No. 10. P. 1537–1542.
135. *Hassibi B., Sayed A., Kailath T.* Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to  $H_2$  and  $H_\infty$  Theories. SIAM, 1999.
136. *Huang X.-X., Yan W.-Y., Teo K. L.*  $H_2$  Near-Optimal Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Contr. 2001. V. 46. No. 8. P. 1279–1284.
137. *Hyland D.C., Bernstein D.S.* The Optimal Projection Equations for Model Reduction and the Relationships Among the Methods of Wilson, Skelton, and Moore // IEEE Trans. Automat. Contr. 1985. V. 30. No. 12. P. 1201–1211.
138. *Iglesias P.A., Mustafa D., Glover K.* Discrete Time  $H_\infty$  Controllers Satisfying a Minimum Entropy Criterion // Systems & Control Lett. 1990. V. 14. P. 275–286.
139. *Iglesias P.A., Glover K.* State-Space Approach to Discrete-Time  $H_\infty$  Control // Int. J. Control. 1991. V. 54. No. 5. P. 1031–1073.
140. *Iglesias P.A., Mustafa D.* State-Space Solution of the Discrete-Time Minimum Entropy Control Problem Via Separation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1993. V. 38. No. 10. P. 1525–1530.
141. *Iglesias P.A.* An Entropy Formula for Time-Varying Discrete-Time Control System // SIAM J. Control Optim. 1996. V. 34. No. 5. P. 1691–1706.
142. *Ishihara J.Y., Terra M.H., Sales R.M.* The Full Information and State Feedback  $H_2$  Optimal Controllers for Descriptor Systems // Automatica. 2003. V. 39. No. 3. P. 391–402.
143. *Ito K.* Stochastic Integral // Proc. Imp. Acad. 1944. V. 20. No. 8. P. 519–524.
144. *Jacobson D.H.* Optimal Stochastic Linear Systems with Exponential Performance Criteria and Their Relation to Deterministic Differential Games // IEEE Trans. Automat. Contr. 1973. V. 18. No. 2. P. 124–131.
145. *Jacobson D.H.* Extensions of Linear-Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory. New York: Academic Press, 1977.
146. *Jonckheere E., Silverman L.* A New Set of Invariants for Linear Systems—Application to Reduced Order Compensator Design // IEEE Trans. Automat. Contr. 1983. V. 28. No. 10. P. 953–964.
147. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Trans. ASME. (J. Basic Eng.). 1960. V. 82. P. 34–45.
148. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // Bol. Soc. Mat. Mexicana. 1960. No. 5. P. 102–119.
149. *Kalman R.E.* New Methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory. Baltimore: RIAS Tech. Rep. 1961. P. 1–61.
150. *Kalman R.E., Bucy R.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // ASME J. Basis Eng. 1961. V. 83. P. 95–108.
151. *Karny M.* Towards Fully Probabilistic Control Design // Automatica. 1996. Vol. 32. P. 1719–1722.
152. *Karny M., Guy T.V.* Fully Probabilistic Control Design // Systems & Control Lett. 2006. V. 55. No. 4. P. 259–265.
153. *Karny M., Kroupa T.* Axiomatisation of Fully Probabilistic Design // Information Sciences. 2012. V. 186. No. 1. P. 105–113.
154. *Kapila V., Haddad W.M.*  $H_2$  Stable Stabilization for Discrete-Time Systems // Proc. 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans. LA. USA. 1995. V. 2. P. 1933–1934.



155. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed  $H_2/H_\infty$  Control: A Convex Optimization Approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 7. P. 824–837.
156. *Khargonekar P.P., Rotea M.A., Baeyens E.* Mixed  $H_2/H_\infty$  Filtering // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1996. V. 6. P. 313–330.
157. *Kim S.W., Seo C.J., Kim B.K.* Robust and Reliable  $H_\infty$  Controllers for Discrete-Time Systems with Parameter Uncertainty and Actuator Failure // Int. J. Syst. Sci. 1999. V. 30. No. 12. P. 1249–1258.
158. *Kimura H.* Pole Assignment by Gain Output Feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 1975. Vol. 20. No. 4. P. 509–516.
159. *Kurdyukov A.P., Pavlov B.V., Timin V.N., Vladimirov I.G.* Longitudinal Anisotropy-Based Flight Control in a Wind Shear // IFAC Proc. Volumes. 2004. V. 37. No. 6. P. 423–426.
160. *Kurdyukov A.P., Boichenko V.A.* A Spectral Method of the Analysis of Linear Control Systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2019. V. 29. No. 4. P. 667–679.
161. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M.* Homotopy-Based Algorithm for Computing Stochastic  $H_\infty$ -optimal Controller for LTI-System with Uncertainty // 7-th Int. Scientific-Technical Conf. Process Control 2006. Pardubice (Czech Republic), 2006. CD-ROM.
162. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M.* Homotopy Method for Solving Anisotropy-Based Stochastic  $H_\infty$ -optimization Problem with Uncertainty // IFAC Proc. Volumes. V. 39. No. 9. 2006. P. 327–332.
163. *Kurdyukov A.P., Vladimirov I.G.* Propagation of mean Anisotropy of Signals in Filter Connections // IFAC Proc. Volumes. V. 41. No. 2. P. 6313–6318.
164. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma // Proc. of the 19-th International Symposium MTNS. Budapest. Hungary. 2010. P. 2391–2397.
165. *Kurdyukov A.P., Kustov A.Yu., Tchaikovsky M.M., Karny M.* The Concept of Mean Anisotropy of Signals with Nonzero Mean // Proc. 2013 Int. Conf. on Process Control (PC). Strbske Pleso. 2013. P. 37–41.
166. *Kurdyukov A.P., Kustov A.Y.* Constructing Signals with Prescribed Mean Anisotropy Level // IFAC Proc. Volumes. V. 46. No. 11. 2013. P. 489–494.
167. *Kurdyukov A.P., Kustov A.Y., Yurchenkov A.V.* Robust Stability in Anisotropy-Based Theory with Non-Zero Mean of Input Sequence // Proc. 21st Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2014). Groningen. Netherlands. 2014. P. 208–214.
168. *Kustov A.* Anisotropy-Based Analysis and Synthesis Problems for Input Disturbances with Nonzero Mean // Proc. 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC). Velke Karlovice. 2014. P. 291–295.
169. *Li R.-C., Bai Z.* Structure-Preserving Model Reduction Using a Krylov Subspace Projection Formulation // Commun. Math. Sci. 2004. V. 3. No. 2. P. 179–199.
170. *Lin Z., Saberi A., Sannuti P., Shamash Y.A.* A Direct Method of Constructing  $H_2$  Suboptimal Controllers – Discrete-Time Systems // Proc. 36th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego. CA. USA. V. 2. 1997. P. 1008–1013.
171. *Löfberg J.* YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in Matlab // Proc. CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. Available from <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
172. *Mariton M., Bertrand R.* A Homotopy Algorithm for Solving Coupled Riccati Equations // Optimal. Contr. Appl. Meth. 1985. V. 6. No. 4. P. 351–357.

173. *Maximov E.A., Kurdyukov A.P., Vladimirov I.G.* Anisotropic Norm Bounded Real Lemma for Linear Time-Varying System // IFAC Proc. Volumes. 2011. V. 44. No. 1. P. 4701–4706.
174. *McFarlane G.C., Glover K.* Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin etc. 1990.
175. *Meyer D.G.* Fractional Balanced Reduction: Model Reduction via Fractional Representation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1990. V. 35. No. 12. P. 1341–1345.
176. *Miradore R., Ricci G.* Mixed  $H_2/H_\infty$  Control: the Discrete-Time Case // Systems & Control Lett. 2005. V. 54. No. 1. P. 1–13.
177. *Moore B.C.* Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Contr. 1981. V. 26. No. 1. P. 17–32.
178. *Mustafa D., Glover K.* Controllers which Satisfy a Closed-Loop  $H_\infty$ -norm Bound and Maximize an Entropy Integral // Proc. 27th IEEE Conference on Decision and Control. Austin. TX. USA. 1988. V. 2. P. 959–964.
179. *Mustafa D.* Relations Between Maximum Entropy/ $H_\infty$  Control and Combined  $H_\infty/LQG$  Control // Systems & Control Lett. 1989. V. 12. No. 3. P. 193–203.
180. *Mustafa D., Glover K.* Minimum Entropy  $H_\infty$ -Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin etc. 1991.
181. *Mustafa D., Glover K., Limebeer D.J.N.* Solutions to the  $H_\infty$  General Distance Problem which Minimize an Entropy Integral // Automatica. 1991. V. 27. P. 193–199.
182. *Mustafa D., Glover K.* Controller Reduction by  $H_\infty$ -Balanced Truncation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 6. P. 668–682.
183. *Nagpal K.M., Khargonekar P.P.* Filtering and Smoothing in an  $H_\infty$ -setting // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 2. P. 152–166.
184. *Nesterov Y., Nemirovski A.* Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming // Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA. 1994.
185. *Peters M.A., Iglesias P.A.* Connections Between Minimum Entropy Control and Mixed  $H_2/H_\infty$  Control for Time-Varying Systems // Systems & Control Lett. 1995. V. 26 P. 341–347.
186. *Peters M.A., Iglesias P.A.* Minimum Entropy Control For Discrete-time Time-Varying Systems // Automatica. 1997. V. 33. P. 591–605.
187. *Peters M.A., Iglesias P.A.* The Relationship Between Minimum Entropy Control and Risk-Sensitive Control for Time-Varying Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. V. 44. P. 1065–1069.
188. *Petersen I.R.* Disturbance Attenuation and  $H_\infty$  Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation // IEEE Trans. Automat. Contr. 1987. V. 32. No. 5. P. 427–429.
189. *Petersen I.R., James M.R., Dupuis P.* Minimax Optimal Control of Stochastic Uncertain Systems with Relative Entropy Constraints // IEEE Trans. Automat. Contr. 2000. V. 45. No. 3. P. 398–412.
190. *Petersen I.R.* Minimax LQG Control // Int. J. Math. Comput. Sci. 2006. V. 16. No. 3. P. 309–323.
191. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
192. *Poznyak A.S.* Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Deterministic Techniques. Elsevier, 2008.



193. *Redheffer R.* On a Certain Linear Fractional Transformation // J. Math. Phys. 1960. V. 39. P. 269–286.
194. *Rosenbrock H.H., McMorran P.D.* Good, Bad, or Optimal? // IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. V. 16. No. 6. P. 552–554.
195. *Saberi A., Sannuti P., Chen B.M.*  $H_2$  Optimal Control. London: Prentice Hall International, 1995.
196. *Saberi A., Stoorvogel A., Sannuti P.* Control of Linear Systems with Regulation and Input Constraints. London: Springer-Verlag, 2000.
197. *Sadabadi M.S., Alireza K.* An LMI Formulation of Fixed-Order  $H_\infty$  and  $H_2$  Controller Design for Discrete-Time Systems with Polytopic Uncertainty // 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. 2013. P. 2453–2458.
198. *Saridis G.N.* Entropy Formulation of Optimal and Adaptive Control // IEEE Trans. Automat. Control. 1988. V. 33. No. 8. P. 713–721.
199. *Scherer C.W., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. V. 42. No. 7. P. 896–911.
200. *Scherer C.W.* An Efficient Solution to Multi-Objective Control Problems with LMI Objectives // Systems & Control Lett. 2000. V. 40. No. 1. P. 43–57.
201. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P.* Stochastic Approach to  $H_\infty$ -optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control. Florida(USA), 1994. V. 3. P. 2249–2250.
202. *Shaiju A.J., Petersen I.R.* Formulas for Discrete Time LQR, LQG, LEQG and Minimax LQG Optimal Control Problems // IFAC Proc. Volumes. 2008. V. 41. No. 2. P. 8773–8778.
203. *Shaked U., Theodor Y.*  $H_\infty$ -optimal Estimation: A Tutorial // Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and Control. Tucson. AZ. USA. 1992. V. 2. P. 2278–2286.
204. *Simon D.* Optimal State Estimation: Kalman,  $H_\infty$ , and Nonlinear Approaches. New Jersey: John Wiley and Sons, 2006.
205. *Stoorvogel A.A.* The  $H_\infty$  Control Problem: a State Space Approach. 2000.
206. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones // Optimization Methods and Software. 1999. V. 11. P. 625–653.
207. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* On Computing Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant System via LMI-Based Approach // Archives of Control Sciences. 2006. V. 16. No. 3. P. 257–281.
208. *Tchaikovsky M., Kurdyukov A.* Stochastic Robust Controller Reduction by Anisotropic Balanced Truncation // 2009 IEEE Control Applications (CCA) & Intelligent Control (ISIC). St. Petersburg. 2009. P. 1772–1777.
209. *Tchaikovsky M.* Anisotropic Balanced Truncation — Application to Reduced-Order Controller Design // Proc. 17th Int. Conf. on Process Control'09. Strbske Pleso. Slovakia. 2009. P. 14–27.
210. *Tchaikovsky M., Kurdyukov A.* On Simplifying Solution to Normalized Anisotropy-Based Stochastic  $H_\infty$  Problem // IFAC Proc. Volumes. V. 42. No. 6. 2009. P. 161–166.
211. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P., Nikiforov V.M.* LMI-Based Design of Multichannel Anisotropic Suboptimal Controllers with Application to Control of Gyrostabilized Platform // Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications (CCA-2012, Dubrovnik). Dubrovnik: IEEE (Catalog Number: CFP12CCA-USB). 2012. P. 1455–1460.

212. *Tchaikovsky M.M.* Static Output Feedback Anisotropic Controller Design by LMI-Based Approach: General and Special Cases // Proc. 2012 American Control Conference (ACC). Montreal. QC. 2012. P. 5208–5213.
213. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* On Upper Estimate of Anisotropic Norm of Uncertain System with Application to Stochastic Robust Control // Int. J. Control. 2018. V. 91. No. 11. P. 2411–2421.
214. *Theodor Y., Shaked U., de Souza C.E.* A Game Theory Approach to Robust Discrete-Time  $H_\infty$  Estimation // IEEE Trans. Signal Proc. 1994. V. 42. P. 1486–1495.
215. *Timin V.N., Kustov A.Yu.* Suboptimal Anisotropy-Based/ $H_\infty$  Filtering for LDTI Systems with Nonzero-Mean Input // 2015 20th Int. Conf. on Process Control (PC). Strbske Pleso. 2015. P. 147–151.
216. *Trentelman H., Stoorvogel A.A., Hautus M.* Control Theory for Linear Systems. Communication and Control Engineering, Springer-Verlag London, 2001.
217. *Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Finite Horizon Minimax Optimal Control of Stochastic Partially Observed Time Varying Uncertain Systems // Math. Contr. Signals Syst. 1999. V. 12. No. 1. P. 1–23.
218. *Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Minimax LQG Control of Stochastic Partially Observed Uncertain Systems // SIAM J. Control Optim. 2002. V. 40. No. 4. P. 1189–1226.
219. *Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Robust Output Feedback Stabilization via Risk-Sensitive Control // Automatica. 2002. V. 38. No. 3. P. 945–955.
220. *Van Dooren P.V.* A generalized eigenvalue approach for solving Riccati equation // SIAM J. Sci. Stat. Comp. 1981. V. 2. P. 121–135.
221. *Verghese G.C., Levy B.C., Kailath T.* A Generalized State-Space for Singular Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1981. V. 26. P. 811–831.
222. *Vidyasagar M.* Control System Synthesis: a Factorization Approach. Cambridge, MA: MIT Press, 1985.
223. *Vidyasagar M., Kimura H.* Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems // Automatica. 1986. V. 22. No. 1. P. 85–94.
224. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant Systems // IFAC Proc. Volumes. 1996. V. 29. No. 1. P. 3057–3062.
225. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-Space Solution to Anisotropy-Based Stochastic  $H_\infty$ -optimization Problem // Proc. 13th IFAC World Congress. San-Francisco(USA). 1996. P. 427–432.
226. *Vladimirov I., Diamond P.* Robust Filtering in Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems by Minimum Anisotropic Norm Criterion // CADSMAP Res. Report 01–05. 2001.
227. *Vladimirov I.* Anisotropy-Based Optimal Filtering in Linear Discrete time Invariant Systems. Center for Applied Dynamical Systems // <http://arxiv.org/abs/1412.3010>, December 2014.
228. *Wang S.-Y., Gao Z.-F., Qiu J.-Q., He H.-K.* Observer-Based Robust  $H_\infty$  Control of a Class of Discrete Time Systems with State Uncertainties // Proc. 2009 Int. Conf. Machine Learning and Cybernetics. Hebei. 2009. P. 1949–1953.
229. *Whittle P.* Risk-Sensitive Linear/Quadratic/Gaussian Control // Adv. Appl. Prob. 1981. V. 13. No. 4. P. 764–777.
230. *Whittle P., Kuhn J.* A Hamiltonian Formulation of risk-sensitive Linear/Quadratic/Gaussian Control // Int. J. Control. 1986. V. 43. No. 1. P. 1–12.

231. *Whittle P.* Entropy-Minimising and Risk-Sensitive Control Rules // Systems & Control Lett. 1989. V. 13. No. 1. P. 1–7.
232. *Whittle P.* Risk-Sensitive Optimal Control. New York: John Wiley and Sons, 1990.
233. *Wiener N.* Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. New York: John Wiley and Sons, 1949.
234. *Wilson D. A.* Optimum Solution of Model-Reduction Problem // Proc. IEE. 1970. V. 117. No. 6. P. 1161–1165.
235. *Xie L.* On Robust  $H_2$  Estimation // ACTA Automatica Sinica. 2005. V. 31. No. 1. P. 1–12.
236. *Xu S., Chen T.* Robust  $H_\infty$  Control for Uncertain Discrete-Time Systems with Time-Varying Delays via Exponential Output Feedback Controllers // Systems & Control Lett. 2004. V. 51. No. 3–4. P. 171–183.
237. *Xu S., Lam J.* Robust Control and Filtering of Singular Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
238. *Yaesh I., Shaked U.* A Transfer Function Approach to the Problems of Discrete-Time Systems:  $H_\infty$ -optimal Linear Control and Filtering // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 11. P. 1264–1271.
239. *Yaesh I., Shaked U.* Minimum Entropy Static Output-Feedback Control with an  $H_\infty$ -norm Performance Bound // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. V. AC-42. No. 6. P. 853–858.
240. *Yaesh I., Shaked U.* Robust Reduced-Order Output-Feedback  $H_\infty$  Control // IFAC Proc. Volumes. V. 42. No. 6. 2009. P. 155–160.
241. *Yaesh I., Stoica A.-M.* Linear Time-Varying Anisotropic Filtering its Application to Nonlinear Systems State Estimation // 2014 European Control Conference (ECC). Strasbourg. 2014. P. 975–980.
242. *Yan W.-Y., Lam. J.* An Approximate Approach to  $H_2$  Optimal Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. V. 44. P. 1341–1358.
243. *Yang R., Lu L., Xie L.* Robust  $H_2$  and  $H_\infty$  Control of Discrete-Time Systems with Polytopic Uncertainties via Dynamic Output Feedback // Int. J. Control. 2005. V. 78. P. 1285–1294.
244. *Yoon M.G., Ugrinovskii V.A.* Robust Tracking Problem for Continuous Time Stochastic Uncertain Systems // 42nd IEEE Int. Conf. on Decision and Control (IEEE Cat. No.03CH37475). Maui. HI. 2003. V. 1. P. 282–287.
245. *Yoon M.G., Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* Robust Finite Horizon Minimax Filtering for Stochastic Discrete Time Uncertain Systems // Systems & Control Lett. 2004. V. 52. No. 2. P. 99–112.
246. *Yoon M.G., Ugrinovskii V.A., Petersen I.R.* On the Worst-Case Disturbance of Minimax Optimal Control // Automatica. 2005. V. 41. P. 847–855.
247. *Li Y., Xu J.-M., Xu Ch.*  $H_2/H_\infty$  Optimal Filter Design for Linear Discrete-Time Systems // Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation (IEEE Cat. No.04EX788). Hangzhou. China. 2004. V. 2. P. 1597–1600.
248. *Zames G.* On the Input-Output Stability of Nonlinear Time-Varying Feedback Systems, Part I: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity and Positivity // IEEE Trans. Automat. Contr. 1966. V. 11. No. 2. P. 228–238.
249. *Zames G.* On the Input-Output Stability of Nonlinear Time-Varying Feedback Systems, Part II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities // IEEE Trans. Automat. Contr. 1966. V. 11. No. 3. P. 465–476.

250. *Zames G.* Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses // IEEE Trans. Automat. Contr. 1981. V. 26. No. 2. P. 301–320.
251. *Zhou K.* Frequency Weighted  $L_\infty$  Norm Optimal Hankel Norm Model Reduction // IEEE Trans. Automat. Contr. 1995. V. 40. P. 1687–1699.
252. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1996.
253. *Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.* Mixed Performance Objectives Mixed  $H_2$  and  $H_\infty$  Performance Objectives. I. Robust Performance Analysis // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1564–1574.
254. Matlab Robust Control Toolbox, <http://www.mathworks.com/products/robust/?requestedDomain=de.mathworks.com>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 29.06.2020

После доработки 09.10.2020

Принята к публикации 08.12.2020