

© 2021 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, канд. техн. наук (a.glushchenko@sf-misis.ru),
В.А. ПЕТРОВ, канд. техн. наук (petrov.va@misis.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Старооскольский технологический институт
им. А.А. Угарова (филиал) ФГАОУ ВО
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»,
Старый Оскол)

АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ УСИЛЕНИЯ ЗАКОНА НАСТРОЙКИ НА ОСНОВЕ РЕКУРСИВНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ¹

Целью работы является синтез адаптивной системы управления с переменным коэффициентом усиления контура адаптации для компенсации параметрической неопределенности объекта управления. Такая система в отличие от существующих одновременно 1) включает в себя алгоритм автоматического вычисления коэффициента усиления закона настройки параметров регулятора, который работает пропорционально текущей величине регрессора, позволяя получить регулируемую верхнюю оценку скорости сходимости рассогласований по выходу объекта и параметрам регулятора к нулю (при выполнении условия постоянного возбуждения регрессора), 2) не требует знания знака или значения элементов матрицы коэффициентов усиления объекта управления. Для синтеза такой системы управления использовались второй метод Ляпунова и рекурсивный метод наименьших квадратов. Для нее были доказаны свойства устойчивости, ограниченности значений упомянутых выше рассогласований и получены оценки скорости их сходимости к нулю. Демонстрация эффективности предлагаемого подхода была проведена путем математического моделирования на примере объекта управления, соответствующего постановке задачи исследования.

Ключевые слова: бесперебойное прямое адаптивное управление, эталонная модель, постоянное возбуждение регрессора, второй метод Ляпунова, коэффициент усиления закона настройки, рекурсивный метод наименьших квадратов, оценка устойчивости.

DOI: 10.31857/S0005231021040036

1. Введение

Основной целью функционирования адаптивных систем управления с эталонной моделью является поддержание требуемого качества регулирования

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-47-310003 p_a).

в условиях наличия существенной параметрической неопределенности объекта управления путем настройки параметров его регулятора. На сегодняшний день существует два классических подхода для построения подобных систем управления: не прямое и прямое адаптивное управление [1, 2]. В данной работе рассматривается исключительно проблематика прямого адаптивного управления по полному вектору координат состояния.

Алгоритм настройки параметров регулятора в схемах прямого адаптивного управления обычно получают с помощью метода оптимизации первого порядка — градиентного спуска (и его вариаций), а также второго метода Ляпунова [1, 3, 4]. Сегодня нерешенными проблемами большинства законов настройки остаются, во-первых, требование наличия постоянного возбуждения регрессора для экспоненциальной сходимости к нулю параметрической ошибки между настраиваемыми и идеальными параметрами регулятора, а во-вторых, наличие в законе адаптации экспериментально подбираемого параметра — коэффициента усиления процесса адаптации [4, 5]. С основными путями решения первой проблемы можно ознакомиться в [6]. В данной же работе остановимся на рассмотрении и решении второй проблемы.

Само наличие в законе настройки экспериментально подбираемого параметра вызывает сложности, поскольку эксперименты по его выбору на реальном объекте не всегда возможно произвести, а коэффициент усиления, подобранный на математической модели, чаще всего не подходит для реального объекта.

Чтобы проанализировать другие проблемы, возникающие при использовании постоянного значения коэффициента усиления, отдельно рассмотрим ситуации наличия и отсутствия постоянного возбуждения регрессора.

В случае отсутствия постоянного возбуждения известно [1], что использование больших значений коэффициента усиления контура адаптации на реальном объекте может многократно усиливать высокочастотные паразитные составляющие в его динамике и шумы измерений, что является недопустимым с точки зрения робастной устойчивости [7, 8]. В литературе выделяют три типа неустойчивости адаптивных систем управления, которые вызываются высоким коэффициентом усиления закона настройки и наличием в объекте паразитной высокочастотной динамики: неустойчивость из-за быстрой адаптации, высокочастотная неустойчивость и неустойчивость вследствие полученных в результате адаптации больших значений коэффициентов регулятора [1, 7–9]. Все эти эффекты приводят к необходимости компромиссного выбора коэффициента усиления: его значения должны быть достаточно большими для удовлетворительного качества процесса адаптации, но достаточно большими для усиления паразитной динамики объекта.

Кроме того, адаптивная система даже с правильно выбранным коэффициентом усиления и в условиях отсутствия паразитной динамики обеспечивает желаемое быстродействие алгоритма настройки и соответственно требуемое качество управления только для ограниченного числа значений задания для рассматриваемого объекта управления. Это происходит вследствие того, что адаптивная система управления даже с линейным объектом и линейной эталонной моделью образует нелинейный замкнутый контур регулирования,

принцип суперпозиции для которого, как известно, не соблюдается [10]. Для решения этой проблемы и обеспечения требуемого быстродействия для наиболее широкого диапазона заданий на систему в [11, 12] был предложен метод масштабирования коэффициента усиления. Подход, использующий сходную идею, можно найти в [13]. Эти методики позволяют масштабировать подобранную экспериментально оптимальную скорость к различным уставкам. Недостатком такого метода является необходимость экспериментального, ручного подбора начального значения коэффициента усиления, обеспечивающего требуемую скорость сходимости процесса адаптации, и фактора масштабирования. Таким образом, основными недостатками использования постоянного значения коэффициента усиления закона настройки при отсутствии постоянного возбуждения является возможность усиления высокочастотной динамики при слишком большом его значении, а также обеспечение требуемого быстродействия закона настройки коэффициентов регулятора только для ограниченного числа заданий.

В случае наличия постоянного возбуждения, кроме описанных недостатков, связанных с использованием больших значений коэффициента усиления, возникает еще одна проблема. В [6, 7, 14] было доказано существование оптимального значения коэффициента усиления для текущего регрессора в случае наличия постоянного возбуждения и проиллюстрировано, что с его увеличением выше оптимального скорость сходимости процесса адаптации не ускоряется, а замедляется. С одной стороны, это означает, что скорость сходимости настраиваемых параметров к идеальным значениям не может быть сделана произвольно большой, а с другой стороны, что для каждого нового значения регрессора существует свое новое оптимальное значение коэффициента усиления процесса адаптации.

Из проведенного анализа следует, что использование экспериментально выбираемого постоянного коэффициента усиления адаптации и в ситуации наличия, и в ситуации отсутствия постоянного возбуждения приводит к серьезным проблемам, которые существенно уменьшают вероятность успеха практической реализации адаптивных систем управления.

Таким образом, задача разработки метода настройки коэффициента усиления контура адаптации является актуальной для теории адаптивных систем и особенно актуальной для практики их применения.

Поэтому в данном исследовании предлагается разработать контур адаптации, включающий алгоритм расчета коэффициента усиления и, следовательно, свободный от описанных недостатков, связанных с его экспериментальным выбором. В качестве основы для разработки такого контура предлагается использовать рекурсивный метод наименьших квадратов с коэффициентом экспоненциального забывания [1, 8]. Достоинствами этого метода являются, собственно, наличие закона настройки коэффициента усиления и экспоненциальная сходимость параметрической ошибки к нулю с регулируемой скоростью сходимости при выполнении условия постоянного возбуждения [1]. Данный подход широко известен в теории идентификации, однако эффективных его применений в схемах прямого адаптивного управления обнаружить не удалось.

В данной работе при разработке контура адаптации параметров регулятора с переменной скоростью настройки ограничимся рассмотрением случая выполнения условия постоянного возбуждения регрессора.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача адаптивного управления классом линейных объектов, которые в пространстве координат состояния могут быть записаны в фробениусовой форме:

$$(2.1) \quad \dot{x} = Ax + Bu,$$

где $x \in R^n$ — вектор координат состояния объекта, $u \in R$ — управляющее воздействие, $A \in R^{n \times n}$ — фробениусова матрица состояний системы, и $B = [0, 0, \dots, b] \in R^{n \times 1}$ — матрица коэффициентов усиления. Значения элементов A и B неизвестны, но составляют управляемую пару (A, B) . Доступными для прямого измерения считаются вектор координат состояния x и вектор его первых производных \dot{x} . На практике получить оценку производной вектора координат состояния представляется возможным, в частности, используя методы, описанные в [15, 16]. Эталонная модель, определяющая требуемое качество управления объектом с неизвестными параметрами (2.1), также выбирается в фробениусовой форме:

$$(2.2) \quad \dot{x}_{ref} = A_{ref}x_{ref} + B_{ref}r,$$

где $x_{ref} \in R^n$ — вектор координат состояния эталонной модели, $r \in R$ — ограниченный сигнал задания, $B_{ref} = [0, 0, \dots, b_{ref}] \in R^{n \times 1}$. Матрица состояний эталонной модели $A_{ref} \in R^{n \times n}$ является гурвицевой и записана в фробениусовой форме.

Уравнение в отклонениях между уравнениями объекта управления (2.1) и уравнениями эталонной модели (2.2) может быть найдено в виде

$$(2.3) \quad \dot{e}_{ref} = A_{ref}e_{ref} + Bu - (A_{ref} - A)x - B_{ref}r.$$

Поскольку и объект управления, и его эталонная модель записаны в форме фробениуса, то условие адаптируемости [4] естественным образом выполняется:

$$(2.4) \quad \text{rank} \{B, B_{ref}\} = \text{rank} \{B, A - A_{ref}\} = 1.$$

Утверждение. Если выполняется условие адаптируемости (2.4), то выполняются и равенства:

$$(2.5) \quad BB^\dagger = \begin{bmatrix} Z_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

$$BB^\dagger(A_{ref} - A) = A_{ref} - A; \quad BB^\dagger B_{ref} = B_{ref},$$

где $Z_{n-1,n}$ — нулевая матрица. Справедливость утверждения может быть проверена, например, непосредственной подстановкой в формулы (2.5) любых матриц, соответствующих постановке задачи.

Выполнение условия (2.4) и равенств (2.5) позволяет переписать уравнение (2.3) в виде

$$(2.6) \quad \dot{e}_{ref} = A_{ref}e_{ref} + B \left[u - B^\dagger (A_{ref} - A)x - B^\dagger B_{ref}r \right],$$

где B^\dagger — псевдообратная по отношению к B матрица.

Тогда закон управления, доставляющий объекту управления (2.1) желаемое качество управления, может быть определен из уравнения в отклонениях (2.6):

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u^* &= B^\dagger [(A_{ref} - A)x + B_{ref}r] = k_r k_x x + k_r r, \\ k_r k_x &= B^\dagger (A_{ref} - A); \quad k_r = B^\dagger B_{ref}, \end{aligned}$$

где $k_x \in R^{1 \times n}$ и $k_r \in R$ — идеальные коэффициенты закона управления.

В случае известных, например номинальных, значений элементов матриц A и B по формулам (2.7) может быть рассчитан идеальный регулятор для объекта (2.1).

Для случая неизвестных (квазистационарных) параметров матриц A и B введем закон управления с текущими параметрами

$$(2.8) \quad u = \hat{k}_r \hat{k}_x x + \hat{k}_r r.$$

Из определения коэффициентов k_x и k_r в выражении (2.7) можно получить аналитические выражения для вычисления матрицы B и разницы $(A_{ref} - A)$:

$$(2.9) \quad A_{ref} - A = B_{ref} k_x; \quad B = k_r^{-1} B_{ref}.$$

С учетом выражений (2.9) при подстановке закона управления (2.8) в уравнение в отклонениях (2.6) получаем запись

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref} &= A_{ref}e_{ref} + B \left[\hat{k}_r \hat{k}_x x + \hat{k}_r r \right] - (A_{ref} - A)x - B_{ref}r = \\ &= A_{ref}e_{ref} + k_r^{-1} B_{ref} \left[\hat{k}_r \hat{k}_x x + \hat{k}_r r \right] - B_{ref} k_x x - \\ &\quad - B_{ref} r + \left(B_{ref} \hat{k}_x x - B_{ref} \hat{k}_x x \right) = \\ &= A_{ref}e_{ref} + B_{ref} \left[\left(\hat{k}_x - k_x \right) x + \hat{k}_x x \left(k_r^{-1} \hat{k}_r - I \right) + r \left(k_r^{-1} \hat{k}_r - I \right) \right] = \\ &= A_{ref}e_{ref} + B_{ref} \left[\tilde{k}_x x + \left(k_r^{-1} \hat{k}_r - I \right) \left(\hat{k}_x x + r \right) \right] = \\ &= A_{ref}e_{ref} + B_{ref} \left[\tilde{k}_x x - \tilde{k}_r^{-1} \hat{k}_r \left(\hat{k}_x x + r \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{k}_x = \hat{k}_x - k_x$, $\tilde{k}_r^{-1} = \hat{k}_r^{-1} - k_r^{-1}$. В уравнении (2.10) введем понятие функции обобщенной параметрической ошибки ε :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= B_{ref} \tilde{\theta}^T \omega, \\ \omega &= \left[x^T \quad -\hat{k}_r \left(\hat{k}_x x + r \right) \right]^T; \quad \tilde{\theta}^T = \left[\tilde{k}_x \quad \tilde{k}_r^{-1} \right] = \hat{\theta}^T - \theta^T. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\theta}^T \in R^{n+1}$ — настраиваемые параметры, через которые возможно вычислить (обращая оценку \hat{k}_r^{-1}) текущие параметры регулятора (2.8), $\theta^T \in R^{n+1}$ — идеальные параметры, через которые возможно вычислить (обращая k_r^{-1}) параметры идеального регулятора (2.7), $\tilde{\theta}^T \in R^{n+1}$ — разница между $\hat{\theta}^T$ и θ^T . Тогда уравнение (2.10) с учетом (2.11) может быть переписано в следующем виде:

$$(2.12) \quad \dot{e}_{ref} = A_{ref}e_{ref} + B_{ref}\tilde{\theta}^T\omega.$$

На основе уравнения (2.12) возможно получить закон адаптации регулятора (2.8). Поскольку от $\hat{\theta}$ можно перейти к текущим \hat{k}_x , \hat{k}_r параметрам регулятора (2.8), то под законом его адаптации будем понимать закон настройки $\hat{\theta}$. Впервые параметризация (2.12) была предложена в [17] с целью построения закона адаптации, не требующего знания матрицы коэффициентов усиления B объекта управления.

Для системы (2.12) необходимо построить закон настройки коэффициентов $\hat{\theta}$, который не требует экспериментального, ручного подбора коэффициента усиления закона адаптации и обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки $\xi = \begin{bmatrix} e_{ref}^T & \tilde{\theta}^T \end{bmatrix}^T$ к нулю при выполнении условия постоянного возбуждения для регрессора ω .

Определение. Для ограниченного сигнала ω выполняется условие постоянного возбуждения, если $\forall t \geq 0 \exists T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что верно неравенство

$$(2.13) \quad \int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I,$$

где I — единичная матрица, а α — степень возбуждения.

3. Идентификатор идеальных параметров регулятора с переменным коэффициентом усиления контура адаптации

Для достижения поставленной цели сначала построим закон оценки $\hat{\theta}$, обеспечивающий экспоненциальную сходимость к нулю из всего вектора ξ только ошибки $\tilde{\theta}^T$ и не требующий ручного подбора коэффициента усиления.

Для этого введем понятие желаемого поведения уравнения в отклонениях (2.12), которое зададим дифференциальным уравнением

$$(3.1) \quad \dot{e}_d = A_{ref}e_{ref}.$$

Обобщенная параметрическая ошибка (2.11) тогда может быть вычислена через рассогласование между уравнением в отклонениях (2.12) и его желаемым поведением (3.1):

$$(3.2) \quad \varepsilon = \dot{e}_{ref} - \dot{e}_d = B_{ref}\tilde{\theta}^T\omega = B_{ref}(\hat{\theta}^T - \theta^T)\omega = B_{ref}(\hat{\theta}^T\omega - y),$$

где y — идеальное значение параметрического возмущения на систему (2.12).

Из уравнения (3.2) следует справедливость записи

$$(3.3) \quad B_{ref}^\dagger \varepsilon = \tilde{\theta}^T \omega = (\hat{\theta}^T - \theta^T) \omega = \hat{\theta}^T \omega - y.$$

На этом этапе, следуя процедуре рекурсивного метода наименьших квадратов, чтобы построить контур идентификации $\hat{\theta}(t)$ идеальных параметров θ в момент времени t , введем в рассмотрение измерения $y(\tau)$ и $\omega(\tau)$ для $0 \leq \tau < t$. С учетом нового времени перепишем уравнение (3.3):

$$(3.4) \quad B_{ref}^\dagger \varepsilon = \hat{\theta}^T(t) \omega(\tau) - y(\tau).$$

В этом случае целевой критерий минимизации выражения (3.4) согласно рекурсивному методу наименьших квадратов с экспоненциальным забыванием записывается в интегральном виде

$$(3.5) \quad Q(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} (B_{ref}^\dagger \varepsilon)^T B_{ref}^\dagger \varepsilon d\tau,$$

где λ — коэффициент экспоненциального забывания.

Условием минимума целевого критерия (3.5) является равенство нулю его градиента по настраиваемым параметрам:

$$(3.6) \quad \nabla_{\hat{\theta}^T} Q^T(\hat{\theta}) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) [\omega^T(\tau) \hat{\theta}(t) - y^T(\tau)] d\tau = 0.$$

В выражении (3.6), пользуясь свойством суммы интегралов, раскроем скобки и перенесем слагаемое, содержащее идеальное значение параметрического возмущения, в правую часть равенства

$$(3.7) \quad \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) \hat{\theta}(t) d\tau = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) y^T(\tau) d\tau.$$

Из (3.7) по методу наименьших квадратов может быть получена оценка $\hat{\theta}$ идеальных параметров регулятора θ :

$$(3.8) \quad \hat{\theta}(t) = \underbrace{\left[\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \right]^{-1}}_{\Gamma(t)} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) y^T(\tau) d\tau.$$

Здесь $\Gamma(t)$ — матрица коэффициентов усиления закона настройки параметров аппроксимирующей линейной регрессии.

Закон изменения во времени матрицы $\Gamma^{-1}(t)$ может быть найден с помощью теоремы о производной интеграла по его верхнему пределу:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \frac{d\Gamma^{-1}}{dt} &= \omega(t)\omega^T(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)\omega^T(\tau)d\tau = \\ &= \omega(t)\omega^T(t) - \lambda\Gamma^{-1}(t). \end{aligned}$$

На этом этапе введем вспомогательное равенство

$$(3.10) \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} [\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t)] = \frac{d\Gamma(t)}{dt}\Gamma^{-1}(t) + \frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt}\Gamma(t) = 0.$$

С учетом выражения (3.10) и введенных ранее определений матриц $\Gamma(t)$ и $\Gamma^{-1}(t)$ может быть получен закон изменения во времени матрицы $\Gamma(t)$:

$$(3.11) \quad \frac{d\Gamma(t)}{dt} = -\Gamma(t) \frac{d\Gamma^{-1}(t)}{dt} \Gamma(t) = \lambda\Gamma(t) - \Gamma(t)\omega(t)\omega^T(t)\Gamma(t).$$

Формулу оценки параметров идеального закона управления (2.7) с учетом выражения (3.11) найдем, дифференцируя по времени оценку (3.8):

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} &= \frac{d\Gamma(t)}{dt} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)y^T(\tau)d\tau + \\ &+ \Gamma(t) \frac{d}{dt} \left[\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\omega(\tau)y^T(\tau)d\tau \right] = \\ &= (\lambda - \Gamma(t)\omega(t)\omega^T(t))\hat{\theta}(t) - \lambda\hat{\theta}(t) + \Gamma(t)\omega(t)y^T(t) = \\ &= \Gamma(t)\omega(t) \left[y^T(t) - \omega^T(t)\hat{\theta}(t) \right]. \end{aligned}$$

С учетом (3.4) уравнение (3.12) может быть приведено к виду

$$(3.13) \quad \frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = -\Gamma(t)\omega(t) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon \right)^T.$$

Таким образом, контур идентификации идеальных параметров регулятора (2.7) описывается законом изменения во времени матрицы коэффициентов усиления (3.11) и непосредственно законом оценки (3.13):

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\Gamma\omega \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon \right)^T, \\ \dot{\Gamma} &= \lambda\Gamma - \Gamma\omega\omega^T\Gamma. \end{aligned}$$

Свойства контура оценки (3.14) сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Контуром оценки (3.14) для ошибки $\tilde{\theta}$ обеспечиваются следующие свойства:

- 1) *ошибка $\tilde{\theta}$ является ограниченной величиной $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$;*
- 2) *если выполняется условие постоянного возбуждения (2.13) и первая производная регрессора ограничена $\dot{\omega} \in L_\infty$, то обеспечивается экспоненциальная сходимость ошибки $\tilde{\theta}$ к нулю со скоростью быстрее, чем к (ее значение определено в Приложении).*

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

4. Синтез адаптивного управления с переменным коэффициентом усиления в контуре настройки

В работе ранее была доказана сходимость к нулю параметрической ошибки $\tilde{\theta}$, а значит, идентифицирующие свойства контура оценки (3.14) идеальных параметров регулятора. Но сходимость к нулю всего вектора ξ , а значит, устойчивость замкнутого контура регулирования (2.12) при использовании полученных оценок коэффициентов рассмотрена не была. Поэтому примем формулы (3.14) в качестве базовых и проведем их модификацию с целью обеспечения сходимости к нулю не только параметрической ошибки $\tilde{\theta}$, но и ошибки слежения e_{ref} . Результаты выполненной модификации представим в виде теоремы 2.

Теорема 2. Пусть контур адаптации для замкнутого контура управления (2.12) описывается выражениями:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= -\Gamma\omega \left[B_{ref}^\dagger \varepsilon + B_{ref}^T P e_{ref} \right]^T, \\ \dot{\Gamma} &= \lambda\Gamma - 2\Gamma\omega\omega^T\Gamma, \end{aligned}$$

где P – матрица, полученная путем решения уравнения Ляпунова

$$A_{ref}^T P + P A_{ref} = -Q,$$

Q – экспериментально подбираемая матрица.

Тогда:

- 1) *ошибка ξ является ограниченной величиной $\xi \in L_2 \cap L_\infty$;*
- 2) *если выполняется условие (2.13), то обеспечивается экспоненциальная сходимость ошибки ξ к нулю со скоростью быстрее, чем η_{\min} ;*
- 3) *если выполняется условие (2.13), то максимальная скорость сходимости η_{\max} ошибки ξ к нулю может быть сделана произвольно большой путем увеличения коэффициента λ .*

Доказательство теоремы 2, значения η_{\min} и η_{\max} приведены в Приложении.

5. Пример

Демонстрация эффективности предлагаемого подхода была проведена путем математического моделирования замкнутой системы (2.12) при адаптации параметров закона управления (2.8) по формулам (4.1). Моделирование

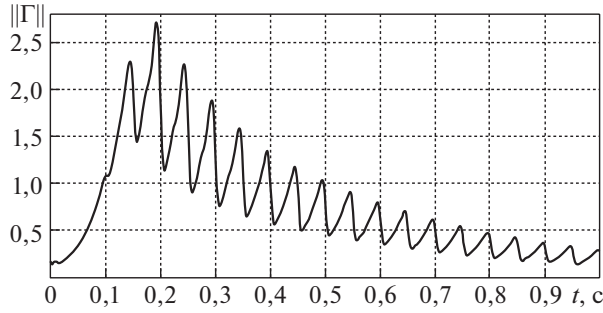


Рис. 1. Значение нормы матрицы коэффициентов усиления процесса адаптации.

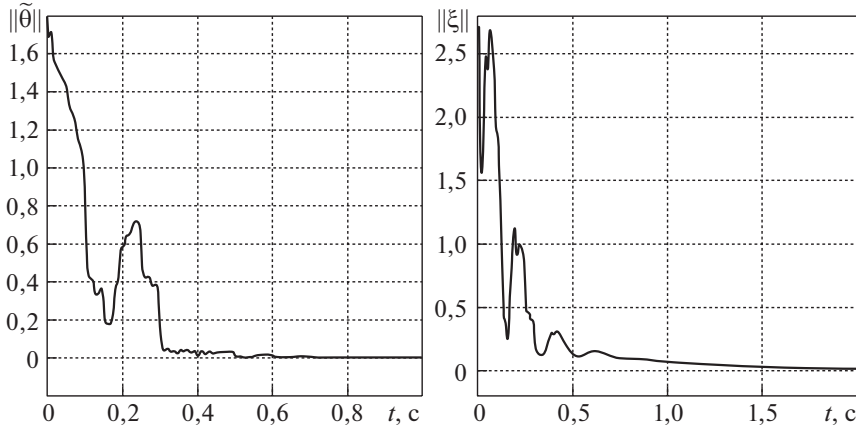


Рис. 2. Переходные процессы по нормам параметрической ошибки $\tilde{\theta}$ и ошибки ξ .

проводилось в Matlab/Simulink на основе численного интегрирования методом Эйлера. Во всех экспериментах использовался постоянный шаг дискретизации $\tau_s = 10^{-6}$ секунды. Объект управления в экспериментах описывался уравнением

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u.$$

Эталонная модель для него была выбрана в соответствии с уравнением

$$\dot{x}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} x_{ref} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} r.$$

Согласно результатам, представленным, например, в [7], для обеспечения условия постоянного возбуждения для объекта второго порядка необходимо использовать в качестве задающего воздействия гармонического сигнала не менее чем с двумя частотами. Поэтому в экспериментах условие постоянного возбуждения (2.13) регрессора ω выполнялось путем использования в качестве задания r гармонического сигнала

$$r = 125 \sin(t) + 250 \sin(125t) + 500 \sin(250t).$$

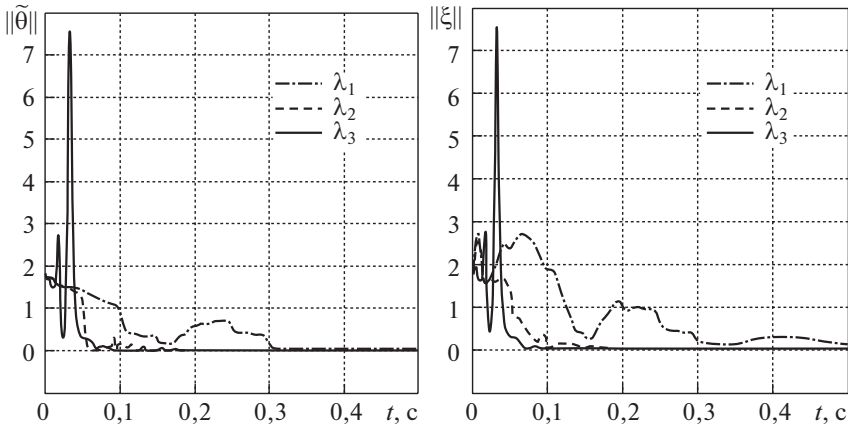


Рис. 3. Переходные процессы по нормам параметрической ошибки $\tilde{\theta}$ и ошибки ξ при различных λ .

Всего было проведено два эксперимента. В первом эксперименте (см. рис. 1 и рис. 2) начальное значение матрицы $\Gamma(0)$, начальные значения коэффициентов закона управления (2.8), а также значение коэффициента забывания λ были выбраны в соответствии со следующими значениями

$$\Gamma(0) = 0,1I; \quad \hat{\theta}^T(0) = [0 \ 0 \ 1]; \quad \lambda = 25.$$

Из результатов моделирования (рис. 1 и рис. 2) следует, что предложенный контур адаптации (4.1) обеспечивает экспоненциальную сходимость параметрической ошибки $\tilde{\theta}$ и ошибки ξ к нулю, при этом в процессе адаптации используется переменное значение коэффициента усиления контура адаптации.

Во втором эксперименте в контуре адаптации использовались различные значения коэффициента забывания λ :

$$\lambda_1 = 25; \quad \lambda_2 = 100; \quad \lambda_3 = 1000.$$

Но начальное значение матрицы $\Gamma(0)$ и начальные значения коэффициентов закона управления (2.8) совпадали со значениями, используемыми в первом эксперименте.

Из результатов моделирования (рис. 3) следует, что с увеличением значения коэффициента забывания скорость сходимости параметрической ошибки и ошибки ξ также увеличивается. Данный факт подтверждает результаты, полученные в процессе доказательства теоремы 2.

Из рис. 3 также видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ возникают существенные колебания; и это подтверждает выводы, сделанные в замечании к теореме 2. Для устранения данного недостатка в дальнейших исследованиях планируется модификация разработанного контура адаптации (4.1) путем применения методов расширения и фильтрации регрессора [6] с целью минимизации значения T (максимизации допустимого значения λ).

6. Заключение

В работе была предложена адаптивная система управления, которая при выполнении условия постоянного возбуждения не требует экспериментального, ручного подбора матрицы коэффициентов усиления процесса адаптации и при этом обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки слежения и параметрической ошибки к нулю с регулируемой верхней оценкой скорости сходимости.

В отличие от классической градиентной схемы, у которой существует предельная для текущего регрессора скорость сходимости [6, 13, 14], в разработанной схеме согласно доказательствам теоремы 2, проведенному анализу и результатам экспериментов верхняя оценка скорости сходимости может быть сделана произвольно большой путем увеличения фактора забывания λ .

В дальнейших исследованиях планируется модификация разработанного контура адаптации с целью ослабления использованных допущений (выполнение условия постоянного возбуждения, доступность первой производной вектора координат состояния) и улучшения его свойств (устранения колебаний при больших λ и обеспечения монотонной экспоненциальной сходимости).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы подставим в уравнение (3.13) выражение (3.3). Тогда при условии $\theta = \text{const}$ имеем уравнение

$$(П.1) \quad \dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma\omega\omega^T\tilde{\theta}.$$

Кандидата в функции Ляпунова выберем в виде квадратичной формы

$$(П.2) \quad V = \tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta},$$

$$\lambda_{\min}(\Gamma^{-1})\|\tilde{\theta}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(\Gamma^{-1})\|\tilde{\theta}\|^2,$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ — минимальное и максимальное собственные числа матрицы.

Производная квадратичной формы (П.2) в силу действия уравнения (П.1) и уравнений (3.9) и (3.13) имеет вид

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= 2\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}^T\dot{\Gamma}^{-1}\tilde{\theta} = \\ &= -2\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\left[\Gamma\omega\omega^T\tilde{\theta}\right] + \tilde{\theta}^T\left[\omega\omega^T - \lambda\Gamma^{-1}\right]\tilde{\theta} = \\ &= -\tilde{\theta}^T\omega\omega^T\tilde{\theta} - \lambda\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} = \\ &= -\left(B_{ref}^\dagger\varepsilon\right)\left(B_{ref}^\dagger\varepsilon\right)^T - \lambda\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\left\|B_{ref}^\dagger\right\|^2\|\varepsilon\|^2 - \lambda\lambda_{\min}(\Gamma^{-1})\|\tilde{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

Производная (П.3) положительно определенной квадратичной формы (П.2) является отрицательной полуопределенной функцией, поэтому параметрическая ошибка есть $\tilde{\theta} \in L_\infty$ и обобщенная ошибка есть $\varepsilon \in L_\infty$, а уравнение (П.2) является функцией Ляпунова для системы (П.1). Вместе с этим функция Ляпунова (П.2) имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
V\left(\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)\right) &= V\left(\tilde{\theta}(t_0)\right) + \int_{t_0}^{\infty} \dot{V} dt = \\
&= V\left(\tilde{\theta}(t_0)\right) - \int_{t_0}^{\infty} \left[\left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T + \lambda \left(\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}\right) \right] dt \Rightarrow \\
&\Rightarrow \int_{t_0}^{\infty} \left[\left\| B_{ref}^\dagger \varepsilon \right\|^2 + \lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \left\| \tilde{\theta} \right\|^2 \right] dt = \\
&= V\left(\tilde{\theta}(t_0)\right) - V\left(\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)\right) < \infty,
\end{aligned}$$

а тогда $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$, и $\omega \in L_\infty$ (как результат того, что $\varepsilon \in L_2 \cap L_\infty$).

Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана. Для доказательства второй части теоремы 1 найдем вторую производную функции Ляпунова (П.2):

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -2 \left(B_{ref}^\dagger \dot{\varepsilon}\right) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T - \lambda \left(2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}^T \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\theta}\right) = \\
(П.4) \quad &= -2 \left(B_{ref}^\dagger \dot{\varepsilon}\right) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T - \lambda \left(2\tilde{\theta}^T \left[-\omega \omega^T \tilde{\theta}\right] + \tilde{\theta}^T \left[\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}\right] \tilde{\theta}\right) = \\
&= -2 \left(B_{ref}^\dagger \dot{\varepsilon}\right) \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T + \lambda \left(2\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \left[\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}\right] \tilde{\theta}\right).
\end{aligned}$$

По выражению (П.4) об ограниченности второй производной функции (П.2) сделать вывод довольно трудно, поэтому с учетом $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\tilde{\theta}}$ найдем производную обобщенной параметрической ошибки (3.2):

$$(П.5) \quad \dot{\varepsilon} = B_{ref} \left[\dot{\tilde{\theta}}^T \omega + \tilde{\theta}^T \dot{\omega} \right] = B_{ref} \left[-\Gamma \omega \omega^T \tilde{\theta} \omega + \tilde{\theta}^T \dot{\omega} \right].$$

С учетом выражения (П.5) для вычисления перепишем уравнение (П.4):

$$\dot{V} = -2 \left[-\Gamma \omega \omega^T \tilde{\theta} \omega + \tilde{\theta}^T \dot{\omega} \right] \left(B_{ref}^\dagger \varepsilon\right)^T + \lambda \left(2\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \left[\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}\right] \tilde{\theta}\right).$$

По доказанному имеем $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$, $\varepsilon \in L_2 \cap L_\infty$ и $\omega \in L_\infty$, а по формулировке теоремы 1 — $\dot{\omega} \in L_\infty$. Тогда чтобы заключить, что $\dot{V} \in L_\infty$, остается доказать L_∞ ограниченность матриц Γ и Γ^{-1} . Для этого получим решение дифференциального уравнения (3.9):

$$\Gamma^{-1}(t) = \Gamma^{-1}(0) e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau.$$

В случае выполнения условия постоянного возбуждения (2.13) нетрудно показать, что $\forall t \geq T$ величина Γ^{-1} ограничена снизу выражением

$$(II.6) \quad \begin{aligned} \Gamma^{-1}(t) &\geq \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau = \\ &= \int_{t-T}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau + \int_0^{t-T} e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Теперь по теореме о среднем получим оценки снизу для каждого из двух интегралов в правой части выражения (II.6). Для этого перепишем условие постоянного возбуждения (2.13) в эквивалентном виде

$$(II.7) \quad \int_{t-T}^t \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I.$$

Тогда с учетом выражения (II.7) оценка снизу для первого интеграла имеет вид

$$(II.8) \quad \int_{t-T}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq e^{-\lambda T} \int_{t-T}^t \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq e^{-\lambda T} \alpha I.$$

Аналогично получим оценку снизу для второго интеграла:

$$(II.9) \quad \int_0^{t-T} e^{-\lambda(t-\tau)} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq e^{-\lambda T} \int_0^{t-T} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq 0.$$

Складывая (II.8) и (II.9), получаем оценку снизу для всей матрицы Γ^{-1} :

$$(II.10) \quad \Gamma^{-1}(t) \geq e^{-\lambda T} \alpha I.$$

Теперь получим оценку снизу для матрицы $\Gamma^{-1} \forall t \leq T$:

$$(II.11) \quad \Gamma^{-1}(t) \geq \Gamma^{-1}(0) e^{-\lambda T} \geq \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)) e^{-\lambda T} I.$$

Тогда с учетом оценок (II.10) и (II.11), нижняя граница матрицы $\Gamma^{-1} \forall t \geq 0$ имеет вид

$$(II.12) \quad \Gamma^{-1}(t) \geq \min \{ \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha \} e^{-\lambda T} I.$$

Так как $\omega \in L_\infty$ по доказанному, то для выражения $\omega \omega^T$ выполняется неравенство

$$(II.13) \quad \lambda_{\min}(\omega \omega^T) \leq \omega \omega^T \leq \lambda_{\max}(\omega \omega^T).$$

С учетом неравенства (П.13) получим верхнюю оценку для матрицы Γ^{-1}

$$(П.14) \quad \begin{aligned} \Gamma^{-1}(t) &\leq \Gamma^{-1}(0) + \lambda_{\max}(\omega\omega^T) \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau I \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) I + \frac{\lambda_{\max}(\omega\omega^T)}{\lambda} I. \end{aligned}$$

Объединяя выражения (П.12) и (П.14), получим неравенства для Γ и Γ^{-1} :

$$(П.15) \quad \begin{aligned} \min\left\{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha\right\} e^{-\lambda T} I &\leq \Gamma^{-1}(t) \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) I + \frac{\lambda_{\max}(\omega\omega^T)}{\lambda} I, \\ \left(\lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + \frac{\lambda_{\max}(\omega\omega^T)}{\lambda}\right)^{-1} I &\leq \Gamma(t) \leq \\ &\leq \max\left\{\lambda_{\min}^{-1}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha^{-1}\right\} e^{\lambda T} I. \end{aligned}$$

Из выражений (П.15) ясно следует $\Gamma \in L_\infty$, $\Gamma^{-1} \in L_\infty$, а значит, и $\ddot{V} \in L_\infty$. Тогда производная (П.3) функции Ляпунова (П.2) равномерно непрерывна и по лемме Барбалата $\dot{V} \rightarrow 0$. Соответственно достигается сходимость $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Чтобы определить оценку скорости сходимости ошибки $\tilde{\theta}$ к нулю, получим с учетом неравенства (П.13) верхнюю оценку производной (П.3):

$$(П.16) \quad \dot{V} = -\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \lambda \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \leq -\lambda_{\min}(\omega\omega^T) \|\tilde{\theta}\|^2 - \lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2.$$

Для дальнейшего определения минимальной скорости сходимости перейдем от полученной оценки матрицы Γ^{-1} снизу и сверху (П.15) к выражению для оценки снизу и сверху ее нормы

$$(П.17) \quad \begin{aligned} \|\Gamma^{-1}\| &\geq \underbrace{\sqrt{n+1} \left[\min\left\{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha\right\} e^{-\lambda T}\right]}_{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1})}, \\ \|\Gamma^{-1}\| &\leq \underbrace{\sqrt{n+1} \left[\lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + \frac{\lambda_{\max}(\omega\omega^T)}{\lambda} \right]}_{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})}. \end{aligned}$$

С учетом выражения (П.17) перепишем верхнюю оценку (П.16)

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\omega\omega^T) \|\tilde{\theta}\|^2 - \lambda \sqrt{n+1} \left[\min\left\{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha\right\} e^{-\lambda T}\right] \|\tilde{\theta}\|^2 \leq \\ &\leq - \left[\frac{\lambda \lambda_{\min}(\omega\omega^T) + \lambda^2 \sqrt{n+1} \left[\min\left\{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), \alpha\right\} e^{-\lambda T}\right]}{\sqrt{n+1} \left[\lambda \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + \lambda_{\max}(\omega\omega^T) \right]} \right] \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2 \leq \\ &\leq -\kappa V. \end{aligned}$$

Решим полученное дифференциальное неравенство, подставив при этом в левую часть решения нижнюю оценку функции Ляпунова:

$$(П.18) \quad \left\| \tilde{\theta} \right\| \leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(\Gamma^{-1}) e^{-\kappa \cdot t} V(0)}.$$

Из выражения (П.18) следует, что ошибка $\tilde{\theta}$ экспоненциально сходится к нулю со скоростью быстрее, чем κ , что и требовалось доказать во второй части теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Кандидат в функции Ляпунова для исследования устойчивости замкнутой системы (2.12) может быть выбран в виде суммы двух квадратичных форм:

$$(П.19) \quad \begin{aligned} V &= \xi^T H \xi = e_{ref}^T P e_{ref} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}, \\ H &= \text{blockdiag} \{ P \quad \Gamma^{-1} \}, \\ \lambda_{\min}(H) \|\xi\|^2 &\leq V \leq \lambda_{\max}(H) \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Производная квадратичной формы (П.19) в силу действия уравнения в отклонениях (2.12) и уравнений контура адаптации (4.1), а также при учете, что $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$ и уравнения (3.3), принимает вид

$$(П.20) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}_{ref}^T P e_{ref} + e_{ref}^T P \dot{e}_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}^T \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\theta} = \\ &= e_{ref}^T [A_{ref}^T P + P A_{ref}] e_{ref} + 2e_{ref}^T P B_{ref} \tilde{\theta}^T \omega - \\ &\quad - 2\tilde{\theta}^T \omega [B_{ref}^\dagger \varepsilon + B_{ref}^T P e_{ref}]^T + \tilde{\theta}^T \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\theta} = \\ &= -e_{ref}^T Q e_{ref} - 2\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T [2\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}] \tilde{\theta} = \\ &= -e_{ref}^T Q e_{ref} - \lambda \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e_{ref}\|^2 - \lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

Производная (П.20) положительно определенной квадратичной формы (П.19) является отрицательной полуопределенной функцией, поэтому ошибка есть $\xi \in L_\infty$, а уравнение (П.19) является функцией Ляпунова для системы (2.12). Вместе с этим функция Ляпунова (П.19) имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)) &= \\ &= V(\tilde{\theta}(t_0)) + \int_{t_0}^{\infty} \dot{V} dt = V(\tilde{\theta}(t_0)) - \int_{t_0}^{\infty} [e_{ref}^T Q e_{ref} + \lambda (\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta})] dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_0}^{\infty} [\lambda_{\min}(Q) \|e_{ref}\|^2 + \lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2] dt = \\ &= V(\tilde{\theta}(t_0)) - V(\tilde{\theta}(t \rightarrow \infty)) < \infty, \end{aligned}$$

а тогда $\xi \in L_2 \cap L_\infty$ и $\omega \in L_\infty$ (как результат того, что $e_{ref} \in L_2 \cap L_\infty$).

Таким образом, первая часть теоремы 2 доказана. Для доказательства второй части теоремы 2 определим при учете уравнения (3.3) вторую производную функции Ляпунова (П.19):

$$\begin{aligned} \ddot{V} &= -\dot{e}_{ref}^T Q e_{ref} - e_{ref}^T Q \dot{e}_{ref} - \lambda \left(\tilde{\theta}^T \dot{\Gamma}^{-1} \tilde{\theta} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \right) = \\ &= -2e_{ref}^T Q \left[A_{ref} e_{ref} + B_{ref} \tilde{\theta}^T \omega \right] + 2\lambda \tilde{\theta}^T \omega \left[B_{ref}^\dagger \varepsilon + B_{ref}^T P e_{ref} \right]^T - \\ &\quad - \lambda \left(\tilde{\theta}^T [2\omega \omega^T - \lambda \Gamma^{-1}] \tilde{\theta} \right) = -2e_{ref}^T Q \left[A_{ref} e_{ref} + B_{ref} \tilde{\theta}^T \omega \right] + \\ &\quad + 2\lambda \tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T P B_{ref} + \lambda^2 \left(\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \right). \end{aligned}$$

По доказанному $\tilde{\theta} \in L_2 \cap L_\infty$, $e_{ref} \in L_2 \cap L_\infty$ и $\omega \in L_\infty$ при выполнении условия постоянного возбуждения имеем $\Gamma \in L_\infty$, $\Gamma^{-1} \in L_\infty$ (доказательство аналогично проведенному (П.6)–(П.15) при доказательстве теоремы 1), а значит, и $\dot{V} \in L_\infty$. В этом случае производная (П.20) функции Ляпунова (П.19) равномерно непрерывна и по лемме Барбалата $\dot{V} \rightarrow 0$, соответственно достигается сходимость $\xi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Чтобы определить оценку скорости сходимости ошибки ξ к нулю, перепишем верхнюю оценку производной (П.20):

$$(П.21) \quad \dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \lambda_{\max}(P) \|e_{ref}\|^2 - \frac{\lambda \lambda_{\min}(\Gamma^{-1})}{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})} \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2.$$

Для дальнейшего определения минимальной скорости сходимости, пользуясь результатами, полученными при доказательстве теоремы 1, запишем оценку снизу и сверху нормы Γ^{-1} для закона настройки Γ в контуре адаптации (4.1):

$$(П.22) \quad \begin{aligned} \|\Gamma^{-1}\| &\geq \underbrace{\sqrt{n+1} \left[\min \{ \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), 2\alpha \} e^{-\lambda T} \right]}_{\lambda_{\min}(\Gamma^{-1})}, \\ \|\Gamma^{-1}\| &\leq \underbrace{\sqrt{n+1} \left[\lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + \frac{2\lambda_{\max}(\omega \omega^T)}{\lambda} \right]}_{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})}. \end{aligned}$$

С учетом (П.22) перепишем верхнюю оценку производной (П.21)

$$(П.23) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \lambda_{\max}(P) \|e_{ref}\|^2 - \\ &\quad - \frac{\lambda^2 \min \{ \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), 2\alpha \} e^{-\lambda T}}{\lambda \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + 2\lambda_{\max}(\omega \omega^T)} \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2 \leq -\eta_{\min} V, \\ \eta_{\min} &= \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}; \frac{\lambda^2 \min \{ \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}(0)), 2\alpha \} e^{-\lambda T}}{\lambda \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}(0)) + 2\lambda_{\max}(\omega \omega^T)} \right\}. \end{aligned}$$

Решим полученное дифференциальное неравенство, подставив при этом в левую часть решения нижнюю оценку функции Ляпунова:

$$(П.24) \quad \|\xi\| \leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(H) e^{-\eta_{\min} \cdot t} V(0)}.$$

Из мажоранты (П.24) следует, что ошибка ξ экспоненциально сходится к нулю со скоростью быстрее, чем η_{\min} , что и требовалось доказать во второй части теоремы 2.

Для доказательства третьей части теоремы 2 запишем нижнюю оценку производной (П.20):

$$(П.25) \quad \dot{V} \geq -\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \lambda_{\max}(P) \|e_{ref}\|^2 - \lambda \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}) \|\tilde{\theta}\|^2 \geq -\eta_{\max} V,$$

$$\eta_{\max} = \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}; \lambda \right\}.$$

Решим дифференциальное неравенство (П.25), подставив при этом в левую часть решения верхнюю оценку функции Ляпунова:

$$(П.26) \quad \|\xi\| \geq \sqrt{\lambda_{\max}^{-1}(H) e^{-\eta_{\max} \cdot t} V(0)}.$$

Из определения η_{\max} в (П.25) и миноранты (П.26) следует, что при увеличении коэффициента λ возможно сделать максимальную скорость сходимости ошибки ξ произвольно большой, что и требовалось доказать в третьей части теоремы 2.

Замечание. При $\lambda \rightarrow \infty$ максимальная скорость сходимости $\eta_{\max} \rightarrow \infty$, но минимальная скорость сходимости $\eta_{\min} \rightarrow 0$ (поскольку $\lambda T \rightarrow \infty$ в (П.23), это ведет к существенному увеличению расстояния между мажорантой (П.24) и минорантой (П.26), что, в свою очередь, ведет к колебаниям по ξ . Поэтому на практике нецелесообразно использование значений λ , превышающих $\lambda_{\max} = T^{-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
2. *Narendra K.S., Valavani L.S.* Direct and indirect model reference adaptive control // Automatica. 1979. V. 15. No. 6. P. 653–664.
3. *Hang C., Parks P.C.* Comparative studies of model reference adaptive control systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. V. 18. No. 5. P. 419–428.
4. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.
5. *Wise K.A., Lavretsky E., Hovakimyan N.* Adaptive control of flight: theory, applications, and open problems // Proc. 2006 Amer. Control Conf. 2006. P. 1–6.
6. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // Annual Reviews in Control. 2020. P. 1–16.

7. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable adaptive systems. N.J.: Prentice Hall, 1989.
8. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control – Stability, Convergence, and Robustness. N.J.: Prentice Hall, 1989.
9. *Ioannou P., Kokotovic P.* Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control // *Automatica*. 1984. V. 20. No. 5. P. 583–594.
10. *Khalil H.K., Grizzle J. W.* Nonlinear systems. N.J.: Prentice-Hall, 2002.
11. *Schatz S.P., Yucelen T., Gruenwal B., Holzapfe F.* Application of a novel scalability notion in adaptive control to various adaptive control frameworks // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf.* 2015. P. 1–17.
12. *Jaramillo J., Yucelen T., Wilcher K.* Scalability In Model Reference Adaptive Control // *AIAA Scitech 2020 Forum*. 2020. P. 1–13.
13. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Development of Balancing Robot Control System on the Basis of the Second Lyapunov Method with Setpoint-Adaptive Step Size // *Proc. 21th Int. Conf. Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*. 2019. P. 1–6.
14. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Persistent excitation in adaptive systems // *Int. J. Control*. 1987. V. 45. No. 1. P. 127–160.
15. *Kumar K.A., Bhasin S.* Data driven MRAC with parameter convergence // *IEEE Conf. Control Applications (CCA)*. 2015. P. 1662–1667.
16. *Chowdhary G., Muhlegg M., Johnson E.* Exponential parameter and tracking error convergence guarantees for adaptive controllers without persistency of excitation // *Int. J. Control*. 2014. Vol. 87. No. 8. P. 1583–1603.
17. *Narendra K.S., Kudva P.* Stable adaptive schemes for system identification and control-Part I // *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*. 1974. Vol. 6. P. 542–551.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 23.07.2020

После доработки 09.10.2020

Принята к публикации 08.12.2020