Нелинейные системы

© 2021 г. А.И. МАЛИКОВ, д-р физ.-мат. наук (a_i_malikov@mail.ru)
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева — КАИ)

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ[1]

Рассматриваются непрерывные системы с дискретным управлением с неопределенными нелинейностями, подверженные воздействию ограниченных внешних возмущений. На основе метода квадратичных функций Ляпунова, матричных систем сравнения и техники дифференциальных линейных матричных неравенств развивается подход к задачам оценивания состояния, подавления начальных отклонений и неопределенных возмущений с помощью обратной связи по состоянию, доступному в дискретные моменты времени. Предлагается способ синтеза периодического и апериодического дискретного управления, обеспечивающий на конечном интервале принадлежность заданному множеству траекторий исходной системы при любых возмущениях, ограниченных по L_∞ норме.

Ключевые слова: непрерывные системы с липшицевыми нелинейностями, неопределенные возмущения, оценивание состояния, дискретное управление, дифференциальные линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231021040048

1. Введение

В обширной литературе по синтезу управления область, которой уделяется мало внимания, — это управление системами с дискретными данными. В этой задаче объект с непрерывным временем обычно управляется алгоритмом обратной связи с дискретным временем. Устройство дискретизации и квантования обеспечивает согласование между непрерывным временем и дискретным временем. Одним из способов решения проблемы дискретного управления является реализация алгоритма непрерывного управления с достаточно малым периодом дискретизации. Однако аппаратное обеспечение, используемое для дискретизации и проведения измерений на объекте или вычисления управляющего воздействия с обратной связью, может сделать невозможным сокращение периода выборки до уровня, который гарантирует приемлемые характеристики замкнутой системы. В этом случае становится интересным исследовать применение алгоритмов дискретного управления, основанных на модели процесса с непрерывным временем.

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-01045а).

В последнее время дискретное управление широко применяется в цифровых и сетевых системах [1–6]. Большое внимание уделяется анализу их устойчивости [7–21]. Как отмечено в [1], существуют три основных подхода к анализу устойчивости и синтезу системы с дискретными данными, основанные на технике линейных матричных неравенств (ЛМН). Первый подход связан с представлением системы с дискретными данными в виде системы с запаздыванием [1, 2, 5–7]. Такой подход в основном применяется для линейных систем с дискретными данными при постоянной или изменяющейся во времени дискретизацией. Условия устойчивости таких систем получены с помощью функционалов Ляпунова–Красовского или функций типа Ляпунова–Разумихина [2].

Во втором подходе [8, 9, 13, 17 и др.] исходная система с дискретными данными представляется как система с импульсами. Выбирая кусочно-зависимый от времени функционал Ляпунова–Красовского или разрывный функционал Ляпунова–Красовского, можно получить менее консервативные условия устойчивости [14, 15, 18, 21, 22].

Следует отметить, что, хотя некоторые менее консервативные критерии устойчивости могут быть получены с использованием вышеупомянутых двух подходов, выбранные функционалы Ляпунова–Красовского обычно сложны. Так как полученные ЛМН требуют при решении большего количества скалярных и матричных переменных, общая вычислительная сложность критериев устойчивости определенно намного выше.

Третий подход – это подход с дискретным временем [1, 2, 10–12, 17, 19, 20], при котором система с дискретными данными эквивалентно преобразуется в конечномерную систему с дискретным временем, в которой сохраняется информация о состоянии системы между моментами дискретизации. Системы с апериодическими дискретными данными также изучались в дискретной временной области. В частности, линейные системы с постоянными коэффициентами с апериодической дискретизацией были проанализированы с использованием модели линейной системы с дискретным временем с переменным параметром. Эффект дискретизации может быть смоделирован с помощью оператора, а проблема устойчивости может быть решена в рамках подхода устойчивости входа/выхода [1, 2, 19]. В данной статье используется второй подход для решения задачи оценивания состояния и синтеза дискретного управления.

Как было отмечено в обзоре [1], несмотря на то что в публикациях были представлены значительные достижения в этой области, проблемы, связанные как с основами таких систем, так и с выводом конструктивных методов анализа устойчивости, остаются открытыми даже для случая линейной системы. Следует также отметить, что не все предлагаемые в литературе критерии устойчивости, представленные в виде ЛМН, могут быть применены для синтеза дискретного управления.

Обычно в основу способов синтеза дискретного управления полагается обеспечение устойчивости (асимптотической, экспоненциальной) [6–8, 10, 12, 17, 23] или оптимального качества по H_2 или H_∞ критериям исходной непрерывной системы [24–28]. При этом рассматриваются, как правило, линейные системы без учета возмущений. В [29] показатели H_2 и H_∞ качества определяются и выражаются через дифференциальные линейные матричные неравенства (ДЛМН). На основе принципа оптимальности Беллмана, выраженного в терминах уравнения динамического программирования, связанного с интервалом времени, соответствующим двум последовательным моментам выборки, предлагаются способы синтеза оптимальных H_2 и H_∞ регуляторов полного порядка с обратной связью по выходу периодических дискретных данных для линейных инвариантных систем с непрерывным временем. Задачи синтеза оптимальных регуляторов решаются путем преобразования всех ограничений в ЛМН и использования методов полуопределенного программирования. В [30] предложены способы синтеза стабилизирующих динамических регуляторов с обратной связью по выходу для класса линейных апериодических импульсных систем. Условия синтеза сформулированы в виде ЛМН, зависящих от времени, которые могут быть решены численно с использованием методов релаксации матричных сумм квадратов. Полученные результаты применены для синтеза динамических регуляторов с обратной связью по выходу для систем с апериодическими дискретными данными. В [31] подход с использованием векторной функции Ляпунова для 2D систем используется для получения условий устойчивости импульсной системы, а затем решается задача синтеза робастного управления на основе наблюдателя для линейных систем с дискретными данными.

Цель данной статьи — представить способы оценивания состояния и синтеза дискретного управления для класса непрерывных систем с липшицевыми нелинейностями и неопределенными ограниченными по норме возмущениями. При этом исходная непрерывная модель представляется в виде системы с импульсным изменением координат состояния. Предложенный в [32, 33] и развитый в [34, 35] подход с использованием функции Ляпунова с изменяющимися коэффициентами и ДЛМН применяется для решения задач оценивания состояния, анализа ограниченности на конечном интервале и синтеза дискретного управления одного класса нелинейных систем при учете неопределенных возмущений. В результате задачи оценивания состояния и синтеза дискретного управления сводятся к совокупности задач оптимизации с ЛМН, получающихся при кусочно-линейной аппроксимации решения ДЛМН [36]. Рассматриваются случаи периодического и апериодического дискретного управления. На примере линейной системы второго порядка проводится сопоставление предлагаемого подхода с другими известными методами. Результаты применяются для стабилизации однозвенного манипулятора с помощью как периодического, так и апериодического дискретного управления.

2. Непрерывная система с дискретным управлением

Рассматривается система с дискретным управлением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)w(t) + \Phi(t)\varphi(t, x(t)) + B(t)u(t), \tag{1}$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ — вектор состояния, $w(t) \in W \subset \mathrm{R}^r$ — вектор неопределенных внешних возмущений, $u \in \mathrm{R}^m$, $u(t) = K(t_k)x(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$ — вектор управления в форме обратной связи по состоянию, измеряемому в дискретные моменты времени $t_k \in \Theta = \{t_0,\ t_k = t_{k-1} + h_k, k = 1, \ldots, N-1\}$, h_k — шаг выборки измерений, $A \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $B \in \mathrm{R}^{n\times m}$, $D \in \mathrm{R}^{n\times r}$, $\Phi \in \mathrm{R}^{n\times q}$ — известные матрицы с постоянными или непрерывными и ограниченными элементами при всех $t \in T$, $T = [t_0, t_N]$, t_0, t_N — начальный и конечный моменты времени.

Нелинейная векторная функция $\varphi(t,x)$ является непрерывной и удовлетворяет ограничению

$$\|\varphi(t,x)\|^2 \leq \mu_0 + \mu_1 \|C_f(t)x\|^2 \quad \forall t \in T, \quad x \in \mathrm{R}^n, \tag{2}$$

где $C_f(t)x \in \mathrm{R}^{q\times n}$ — известная матрица с ограниченными элементами при всех $t \in T$. Здесь и далее $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\mu_0,\ \mu_1 \geq 0$ — заданные константы.

Предположим, что неопределенные возмущения являются непрерывными и ограниченными в каждый момент времени функциями:

$$W = \{w(t) \in \mathrm{R}^r : \|w(t)\| \leq 1 \ \ \forall t \in T\}. \tag{3}$$

3. Задача оценивания состояния

Пусть в начальный момент времени состояние системы $x(t_0) = x_0$ принадлежит заданному эллипсоиду

$$E(Q_0) = \left\{x \in \mathrm{R}^n : x^{\mathrm{T}} Q_0^{-1} x \leq 1\right\}, \tag{4}$$

где Q_0 — заданная положительно определенная матрица, индекс Т — знак транспонирования.

Требуется найти оценку в виде эллипсоида, ограничивающего множество состояний исходной системы (1) на рассматриваемом интервале $[t_0, t_N]$. В дальнейшем будет предложен способ синтеза дискретного управления, обеспечивающего минимизацию следа матрицы эллипсоида, ограничивающего состояние или выход рассматриваемой системы.

Задача оценивания состояния решается с использованием второго подхода, при котором исходная система с дискретным управлением представляется как импульсная система [1]. Определим переменные $u(t) = Kx(t_k)$ и $z(t) = (x^{\mathrm{T}}(t), u^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$. Тогда систему (1) можно представить как систему с импульсами

$$\dot{z}(t) = A_z(t)z(t) + D_z(t)w(t) + \Phi_z(t)\varphi(t, x(t)), \quad t \neq t_k, \tag{5}$$

$$z(t_k) = J_z(t_k)z(t_k - 0), \quad t = t_k \in \Theta, \tag{6}$$

где

$$A_z(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_z(t) = \begin{bmatrix} D(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_z(t) = \begin{bmatrix} \Phi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_z(t_k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K(t_k) & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом $z(t_0) = z_0 = (x_0^{\mathrm{T}}, u_0^{\mathrm{T}}) \in E(Q_{z0})$, где $Q_{z0} = \mathrm{diag}(Q_0, KQ_0K^{\mathrm{T}})$, $x(t) = Cz(t)$, $C = (\ I_n \ \ 0_m\ )$, I_n — единичная $(n\times n)$-матрица. Обозначим $C_{fz}(t) = [C_f(t), 0]$. В дальнейшем для краткости опускаем зависимость от t или t_k у матриц $A_z(t)$, $D_z(t)$, $\Phi_z(t)$, $C_{fz}(t)$, $J_z(t_k)$.

На интервалах непрерывности $[t_k, t_{k+1})$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ для оценивания состояния будут использоваться теоремы 1 и 2 из [34], которые здесь приводятся для указанных интервалов.

Т е о р е м а 1 [34]. *Если существует решение* $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$ *дифференциального матричного уравнения*

$$\begin{aligned} dQ(t)/dt = A_z(t)Q(t) + Q(t)A_z^{\mathrm{T}} + \alpha Q(t) + \frac{1}{\alpha - \mu_0/\beta} D_z D_z^{\mathrm{T}} + \\ + \beta \Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}} + \frac{\mu_1}{\beta} Q(t) C_{fz}^{\mathrm{T}} C_{fz} Q(t) \end{aligned} \tag{7}$$

при $t \in [t_k, t_{k+1})$ *и* $\beta > 0$, $\alpha > \mu_0/\beta$, *то эллипсоид* $E(Q(t))$ *является ограничивающим для траекторий системы* (5), *стартующих из начального эллипсоида* $E(Q_k)$, *т.е.*

$$z(t, t_k, z(t_k)) \in E(Q(t)) \quad \textit{при всех} \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Здесь $Q(t_0) = Q_{z0}$, β, α — свободные параметры, которые в общем случае могут зависеть от времени.

Доказательство теоремы 1 представлено в [34]. Там же были доказаны утверждения о существовании и ограниченности положительно определенных решений уравнения (7) при фиксированных значениях параметров α и β. Вопрос же выбора значений α и β не был рассмотрен. Однако ими можно распорядиться для получения оценки, оптимальной в каждый момент времени по критерию следа матрицы $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k)$, определяющего сумму длин полуосей ограничивающего эллипсоида $E(Q(t))$. Это обеспечивается минимизацией следа матрицы правой части (7) по β, α при всех $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Л е м м а. *Пусть матрицы* Φ_z, D_z *имеют хотя бы по одному ненулевому элементу при всех* $t \in [t_k, t_{k+1})$. *Тогда если существует на* $[t_k, t_{k+1})$ *решение* $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$ *уравнения* (7), *где*

$$\begin{aligned} \beta(Q(t)) = \sqrt{\frac{\mu_0 \mathrm{trace}(Q(t)) + \mu_1 \mathrm{trace}(Q(t) C_{fz}^{\mathrm{T}} C_{fz} Q(t))}{\mathrm{trace}(\Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}})}}, \\ \alpha(Q(t)) = \frac{\mu_0}{\beta(Q(t))} + \sqrt{\frac{\mathrm{trace}(D_z D_z^{\mathrm{T}})}{\mathrm{trace}(Q(t))}}, \end{aligned} \tag{8}$$

то эллипсоид $E(Q(t))$, *ограничивающий состояния системы* (5), *будет оптимальным по критерию* $\mathrm{trace}(Q(t)) \to \min\limits_{Q(t),\beta(t)}$ *при каждом* $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Доказательство леммы дано в Приложении.

Замечание 1. При подстановке выражений (8) уравнение (7) становится существенно нелинейным. При практических применениях оно может быть решено численно. Исследование же вопросов существования и свойств решений этого уравнения выходит за рамки данной статьи. Здесь предлагается ограничиться заданием на каждом интервале $[t_k, t_{k+1})$ фиксированных значений параметров $\beta(Q(t_k))$, $\alpha(Q(t_k))$, определяемых по формулам (8) в моменты t_k, $k = 0, \ldots, N-1$. В этом случае согласно леммам 1 и 2 из [34] (7) будет являться матричной системой сравнения (МСС) для (5), а ее решение $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k)$ при условии $Q(t_k) = Q_k > 0$ будет положительно определенным. Ясно, что такое решение будет определять эллипсоид $E(Q(t))$, ограничивающий траектории системы (5), стартующие из эллипсоида $E(Q(t_k))$, который, однако, не будет оптимальным при всех $t \in [t_k, t_{k+1})$. Поэтому для оценивания состояния здесь будет использоваться подход, основанный на численном решении задачи оптимизации с ДЛМН.

Теорема 2 [34]. *Если при некотором заданном $\alpha > 0$ существует решение $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$, $\beta(t) > \alpha/\mu_0$ дифференциального матричного неравенства*

$$
\begin{bmatrix}
-dQ(t)/dt + A_z Q(t) + Q(t) A_z^{\mathrm{T}} + \alpha Q(t) + \beta \Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}} & D_z & Q(t) C_{fz}^{\mathrm{T}} & 0 \\
D_z^{\mathrm{T}} & -\alpha I & 0 & I \\
C_{fz} Q(t) & 0 & -\dfrac{\beta(t)}{\mu_1} I & 0 \\
0 & I & 0 & -\dfrac{\beta(t)}{\mu_0} I
\end{bmatrix} \le 0 \qquad (9)
$$

при $t \in [t_k, t_{k+1})$, то эллипсоид $E(Q(t))$ является ограничивающим для траекторий системы (5), стартующих из начального эллипсоида $E(Q_k)$.

Доказательство теоремы 2 представлено в [34].

Как отмечено в [34], положительно определенное решение уравнения (7) при некоторых $\alpha > 0$, $\beta(t) \ge \mu_0/\alpha$ на рассматриваемом интервале времени (в данном случае $[t_k, t_{k+1})$) будет являться решением дифференциального матричного неравенства (9) при тех же значениях β, α. При тех же β, α могут существовать и другие решения (9), которые будут определять эллипсоид, ограничивающий траектории системы (5). При фиксированном $\alpha > 0$ неравенство (9) становится линейным по переменным $Q(t)$ и $\beta(t)$ и оптимальный ограничивающий эллипсоид будет определяться из решения следующей задачи оптимизации $\mathrm{trace}(Q(t)) \to \min\limits_{Q(t), \beta(t)}$ при ограничениях $Q(t) > 0$, $\beta(t) > \mu_0/\alpha$ и ДЛМН (9). Такое оптимальное решение будет зависеть от параметра α. Чтобы решение было оптимальным и по α, следовало бы добавить еще одномерную оптимизацию по α из заданного диапазона. Однако это еще более усложняет задачу нахождения оптимального ограничивающего эллипсоида. Поэтому значение параметра α предлагается вычислять только в дискретные моменты t_k из (8) по известной в этот момент матрице $Q(t_k)$, а затем при $\alpha_k = \alpha(Q(t_k))$ решать задачу оптимизации $\mathrm{trace}(Q(t)) \to \min\limits_{Q(t), \beta(t)}$ при ограничениях $Q(t) > 0$, $\beta(t) > \mu_0/\alpha_k$ и ДЛМН (9). Далее будет показано, каким образом эта задача оптимизации сводится в результате дискретизации к совокупности задач оптимизации с ограничениями в виде ЛМН.

В моменты t_k, $k = 1, \dots, N$, поведение системы представлено линейным разностным уравнением (6). В этом случае для оценивания состояния будет использоваться теорема 1 из [35], которая здесь приводится применительно к линейному разностному уравнению (6).

Теорема 3. *Чтобы эллипсоид $E(Q(t_{k+1}))$ ограничивал состояния системы в момент t_{k+1} при условии, что $z(t_{k+1}-0) \in E(Q(t_{k+1}-0))$, достаточно, чтобы существовало решение $Q(t_{k+1}) > 0$ разностного линейного матричного неравенства (РЛМН)*

$$\begin{pmatrix} Q(t_{k+1}) & J_z Q(t_{k+1}-0) \\ Q(t_{k+1}-0) J_z^{\mathrm{T}} & Q(t_{k+1}-0) \end{pmatrix} \geq 0. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 3 для более общего случая дискретной системы с неопределенными возмущениями представлено в [35].

Рассмотрим теперь ряд случаев относительно параметра выборки h_k:

1. Все значения h_k равны $h_k = h > 0$, $k = 1, \dots, N$, h — постоянный период выборки;

2. Все значения $h_k > 0$, $k = 1, \dots, N$, известны (переменный период выборки);

3. Значения $h_k > 0$, $k = 1, \dots, N$, неизвестны и могут изменяться в интервале $[h_{\min}, h_{\max}]$, где $0 < h_{\min} < h_{\max}$, $h_{\min}, h_{\max}$ известны.

Рассмотрим сначала случай 1 с периодическими выборками (импульсами), т.е. $t_{k+1} - t_k = h = \mathrm{const}$. Случай 2 при переменных, но известных h_k рассматривается аналогично.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Эллипсоид $E(Q(t))$, где $Q(t) = Q(t, t_0, Q_{z0})$ — решение матричной системы дифференциальных уравнений* (7) *с РЛМН* (10) *или задачи оптимизации* $\mathrm{trace}(Q(t, t_0, Q_{z0})) \to \min$ *с ограничениями ДЛМН* (9) *и РЛМН* (10) *будет ограничивающим для состояний системы* (5), (6)*, а эллипсоид с матрицей $CQ(t, t_0, Q_{z0})C^{\mathrm{T}}$ будет ограничивающим для состояний исходной системы* (1) *с дискретным управлением при всех нелинейностях из* (2) *и возмущениях из* (3).

Доказательство основывается на последовательном применении теорем 1 и 2 на интервалах непрерывности $[t_k, t_{k+1})$ $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ для получения матрицы $Q(t, t_k, Q(t_k)) > 0$ эллипсоида, ограничивающего состояние $z(t, t_k, x(t_k))$ системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида с матрицей $Q(t_k)$ при всех нелинейностях из (2) и возмущениях из (3), и применении теоремы 3 в точках t_{k+1}, $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ для получения матрицы $Q(t_{k+1}) > 0$, ограничивающей состояние $z(t_{k+1}, t_k, x(t_k))$ системы (5), (6) после импульса при условии $z(t_{k+1}-0, t_k, x(t_k)) \in E(Q(t_{k+1}-0))$. Здесь $Q(t_{k+1}-0) = Q(t_k + h, t_k, Q_k)$ — матрица эллипсоида, ограничивающего состояние системы (5), (6) непосредственно перед импульсом в момент t_{k+1}. Она определяется как решение дифференциального матричного уравнения (7) или задачи оптимизации $\mathrm{trace}(Q(t,t_k,Q_k)) \to \min$ с ДЛМН (9) на $[t_k, t_{k+1})$.

Таким образом, в случае периодического дискретного управления состояние системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида $E(Q_{z0})$ будет ограничено эллипсоидом с матричной функцией $Q(t, t_0, Q_{z0})$, являющейся решением МСС (7) с РЛМН (10) или задачи оптимизации $\mathrm{trace}(Q(t,t_0,Q_{z0})) \to \min$ с ограничениями ДЛМН (9) и РЛМН (10) при $t \in T$.

При численном решении задачи оптимизации проводится дискретизация ДЛМН (9) на рассматриваемом интервале $[t_0, t_N]$. Производная $dQ(t)/dt$ на интервале $[t_k, t_{k+1})$ считается постоянной и представляется как $dQ(t)/dt = Z(t_k)$, где $t_k = t_0 + kh$, $k = 1, \ldots, N$, и N есть целая часть отношения $(t_N - t_0)/h$. Тогда для $t \in [t_k, t_{k+1})$ матрица $Q(t)$ определится как

$$Q(t) = Q(t_k) + (t - t_k)Z(t_k), \tag{11}$$

причем $Q(t_0) = Q_{z0}$. Для того чтобы матрица $Q(t)$ удовлетворяла неравенству $Q(t) > 0$ и ДЛМН (9) при всех $t \in [t_k, t_{k+1})$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла им в двух крайних точках $t \in \{t_k, t_k + h\}$, т.е. при каждом $k = 0, \ldots, N-1$ одновременно должны выполняться неравенства [36]:

$$Q(t_k) > 0, \quad Q(t_k + h) > 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} -Z(t_k) + A_z Q(t_k) + Q(t_k)A_z^{\mathrm{T}} + \alpha_k Q(t_k) + \beta \Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}} & D_z & Q(t_k)C_{fz}^{\mathrm{T}} & 0 \\ D_z^{\mathrm{T}} & -\alpha_k I & 0 & I \\ C_{fz}Q(t_k) & 0 & -\dfrac{\beta(t_k)}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & I & 0 & -\dfrac{\beta(t_k)}{\mu_0} I \end{bmatrix} \le 0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} -Z(t_k) + A_z Q(t_k+h) + Q(t_k+h)A_z^{\mathrm{T}} + \\ + \alpha Q(t_k+h) + \beta \Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}} \end{matrix} & D_z & Q(t_k+h)C_{fz}^{\mathrm{T}} & 0 \\ D_z^{\mathrm{T}} & -\alpha_k I & 0 & I \\ C_{fz}Q(t_k+h) & 0 & -\dfrac{\beta(t_k)}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & I & 0 & -\dfrac{\beta(t_k)}{\mu_0} I \end{bmatrix} \le 0, \tag{14}$$

где $Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ(t_k) = Q(t_{k+1} - 0)$, $\alpha_k = \alpha(Q(t_k))$ из (8) и матрицы A_z, D_z, Φ_z, C_{fz} берутся в момент t_k.

В результате линейной аппроксимации (11) решения ДЛМН (9) нахождение матрицы $Q(t) > 0$ эллипсоида, ограничивающего состояния системы, сводится к последовательному решению совокупности задач оптимизации: $\mathrm{trace}(Q(t_{k+1})) \to \min\limits_{Q(t_{k+1})>0, \beta(t_{k+1}) \ge \mu_0/\alpha_k}$ при ЛМН ограничениях (10), (12)–(14) для $k = 0, \ldots, N-1$. На первой итерации при $k = 0$ по заданной матрице $Q(t_0) = Q_0$ и α_0 в результате решения указанной задачи оптимизации с

ЛМН вычисляются матрицы $Q(t_0 + h)$ и $Q(t_1)$ с минимальным следом, которые определяют матрицу эллипсоида, ограничивающего состояния системы (5), (6) на интервале $[t_0, t_1]$. Затем при $k = 1, 2, \dots, N-1$ по матрице $Q(t_k)$ вычисляются α_k и матрицы $Q(t_k + h)$ и $Q(t_{k+1})$, которые определяют матрицу эллипсоида, ограничивающего состояния системы (5), (6) на последующих интервалах $[t_k, t_{k+1}]$.

Для численного решения на каждой итерации задач оптимизации с ЛМН используются программные средства полуопределенного программирования (CVX, Sedumi, Yalmip и др.). Они позволяют решать такую задачу для системы размерности порядка 20 за доли секунды. Общее время, требуемое для численного решения всей совокупности задач и получения эллипсоидальных оценок, будет зависеть от длительности рассматриваемого интервала времени и шага дискретизации ДЛМН.

Замечание 2. С целью более точной аппроксимации решения задачи оптимизации с ДЛМН на интервалах $[t_k, t_{k+1})$ рекомендуется решать задачу с шагом $h_{ki} = h/M$, где $M > 1$ — количество промежуточных точек дискретизации интервала $[t_k, t_{k+1})$. В этом случае значение матрицы $Q(t_k + h) = Q(t_{k+1} - 0)$ определится как $Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ_{ks}$, где $Z_{ks} = \sum\limits_{i=0}^{M-1} Z(t_{ki})/M$ среднее значение производной на интервале $[t_k, t_{k+1})$, $t_{ki} = t_k + ih_{ki}$.

Рассмотрим теперь случай 3, когда система (5), (6) является апериодической, т.е. импульсы происходят в нерегулярные моменты времени. Пусть выполнено ограничение в виде интервала времени для последовательности моментов импульсов, т.е. $t_{k+1} - t_k = h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$. Пусть $t \in [t_k, t_{k+1}]$ и $\theta \in \in [0, h_{\max} - h_{\min}]$.

Так же как в случае 1, при $t \in [t_k, t_{k+1}) = [t_k, t_k + h_{\min} + \theta)$ может быть получена оценка в виде эллипсоида $E(t) = \left\{x : x^{\mathrm{T}} Q^{-1}(t) x \le 1\right)$, если при некоторых $\beta(t_k) > 0$, $\alpha(t_k) \ge \mu_0/\beta(t_k)$ найдется положительно определенное решение $Q(t) > 0$ матричной системы сравнения (7) или дифференциального линейного матричного неравенства (9) при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Однако момент возникновения каждого следующего импульса t_{k+1} является неопределенным и может изменяться в интервале $[t_k + h_{\min}, t_k + h_{\max}]$. В данном случае эллипсоид, ограничивающий состояние системы в момент t_{k+1}, должен гарантированно содержать все эллипсоиды, которые будут получены при импульсном воздействии из эллипсоидов, ограничивающих состояния до момента t_{k+1} при всех $t_{k+1} = t_k + h_k \in [t_k + h_{\min}, t_k + h_{\max}]$. Поэтому (10) заменяется неравенством

$$Q(t_{k+1}) \ge JQ(t_k + h_{\min} + \theta)J^{\mathrm{T}}, \tag{15}$$

которое должно быть выполнено при любом $\theta \in [0, h_{\max} - h_{\min}]$. Проверка этого неравенства затруднена, однако при использовании линейной аппроксимации решения задачи оптимизации $\mathrm{trace}(Q(t)) \to \min$ при ДЛМН ограничениях (9) в виде $Q(t_k + h_{\min} + \theta) = Q(t_k) + (h_{\min} + \theta)Z(t_k)$ матричное неравенство (15) будет линейным по переменной $\theta \in [0, h_{\max} - h_{\min}]$. Поэтому оно будет выполнено при любых $\theta \in [0, h_{\max} - h_{\min}]$ тогда и только тогда, когда выполняется одновременно в двух крайних точках рассматриваемого интервала, т.е. при $\theta \in \{0, h_{\max} - h_{\min}\}$:

$$Q(t_{k+1}) \geq JQ(t_k + h_{\min})J^{\mathrm{T}}, \quad Q(t_{k+1}) \geq JQ(t_k + h_{\max})J^{\mathrm{T}}. \tag{16}$$

Здесь матрицы $Q(t_k + h_{\min})$, $Q(t_k + h_{\max})$ определяются из (11), вычисленных при $t = t_k + h_{\min}$ и $t = t_k + h_{\max}$ соответственно.

Таким образом, в случае апериодического дискретного управления состояние системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида $E(Q_{z0})$ будет ограничено эллипсоидом с матричной функцией $Q(t, t_k, Q_k)$ на интервалах непрерывности $[t_k, t_{k+1})$ и эллипсоидом с матрицей Q_{k+1} при $t = t_{k+1}$. Матрица $Q(t, t_k, Q_k)$ определяется из (11), где $Z(t_k)$, а также матрицы $Q(t_k + h_k)$ и Q_{k+1} вычисляются в задаче оптимизации $\operatorname{trace}(Q(t_{k+1})) \to \min\limits_{Q(t_{k+1})>0, \beta_k>\mu_0/\alpha_k}$ с ЛМН ограничениями (12)–(14) и (16).

Отметим, что оценку для вектора состояния $x(t)$ исходной системы (1) с дискретным управлением, с нелинейностями из (2) и возмущениями из (3) при $x(t_0)$ из (4) будет определять эллипсоид с матрицей $CQ(t, t_0, Q_{z0})C^{\mathrm{T}}$.

4. Задача об ограниченности относительно заданных множеств

Обозначим множество начальных состояний $E(R_0) = \left\{x \in \mathrm{R}^n \colon x^{\mathrm{T}} R_0^{-1} x \leq 1\right\}$ и множество допустимых траекторий $E(R(t)) = \left\{x \in \mathrm{R}^n : x^{\mathrm{T}} R^{-1}(t) x \leq 1\right\}$, $R_0, R(t)$ — известные симметрические положительно определенные матрицы, $t \in T$. Так же как в [32], вводится определение.

Определение. *Будем говорить, что система с дискретными данными* (5), (6) *обладает на $t \in T$ свойством ограниченности относительно заданных множеств $\{E(R_0), E(R(t))\}$, если для всех $z_0 \in E(R_0)$ существуют на $t \in T$ решения $z(t) = z(t, t_0, x_0)$ системы* (5), (6) *с начальными данными $z(t_0) = z_0$, для которых имеет место $z(t, t_0, z_0) \in E(R(t))$ при всех $t \in T$, всех нелинейностях из* (2) *и возмущениях из* (3).

Отметим, что аналогичное определение было введено в [32] для линейных неавтономных систем, где были получены необходимые и достаточные условия в терминах разрешимости дифференциальных линейных матричных неравенств. Такое же динамическое свойство изучалось применительно к непрерывным в [34] и дискретным в [35] нелинейным липшицевым системам с неопределенными возмущениями. Особенностью данного динамического свойства является то, что оно определяет как качественное поведение, так и дает количественные оценки, поскольку в его определении указываются конкретные множества начальных данных и множества, которым должны принадлежать траектории системы с этими начальными данными.

С учетом полученных выше эллипсоидальных оценок состояния для системы с дискретными данными (5), (6), приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. *Система* (5), (6) *с периодическими* (*апериодическими*) *импульсами обладает на $[t_0, t_N]$ свойством ограниченности относительно заданных множеств $\{E(R_0), E(R(t))\}$, если существует решение $Q(t) =$*

$= Q(t, t_0, Q_{z0})$ *МСС* (7) *с РЛМН* (10) *или ДЛМН* (9) *с РЛМН* (10) (*соответственно задачи оптимизации* $\mathrm{trace}(Q(t_{k+1})) \to \min\limits_{Q(t_{k+1})>0, \beta \geq \mu_0/\alpha_k}$ *с ЛМН ограничениями* (12)–(14) *и* (16)) *с начальными данными* $Q_0 \geq R_0$, *удовлетворяющее неравенству* $Q(t) \leq R(t)$ *для всех* $t \in T$.

При выполнении условий теоремы 5 исходная система (1) с дискретным управлением будет обладать ограниченностью относительно заданных множеств $\{E(CR_0C^{\mathrm{T}}), E(CR(t)C^{\mathrm{T}})\}$.

5. Задача синтеза дискретного управления, обеспечивающего ограниченность непрерывной системы

Рассмотрим систему (1) с управлением, которое должно удовлетворять ограничению

$$u(t) \in \left\{u : u^{\mathrm{T}}U^{-1}u \leq 1\right\}, \quad t \in T, \tag{17}$$

где U — заданная симметрическая положительно определенная $(m \times m)$-матрица.

Задача состоит в нахождении управления в виде обратной связи по состоянию, доступному в дискретные моменты времени t_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$u(t) = K(t_k)x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{18}$$

стабилизирующего замкнутую систему и подавляющего начальные отклонения и воздействие внешних возмущений в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для состояний или обеспечивающего ограниченность замкнутой системы. Здесь K — матрица коэффициентов усиления дискретного регулятора.

Задача синтеза с учетом рассмотренного в разделе 3 способа численного решения ДЛМН (9) сводится к задаче оптимизации критерия при ограничениях в виде разностных линейных матричных неравенств. В качестве критерия берется след матрицы, определяющий размер ограничивающего состояния эллипсоида в дискретные моменты времени t_k, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Представим исходную систему с дискретным управлением (18) в виде (5) с импульсами (6). Искомая матрица коэффициентов усиления регулятора входит только в разностное уравнение для импульсов (6). Представим его в виде

$$z(t_k) = J_z z(t_k - 0) = \left(\tilde{J} + \tilde{B}K(t_k)C\right) z(t_k - 0), \quad t_k \in \Theta, \tag{19}$$

где

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}, \quad z(t_0 - 0) = z(t_0) \in E(Q_{z0}),$$

$Q_{z0} > 0$ — заданная матрица эллипсоида, ограничивающего начальные состояния.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть при $Q(t_0-0) = Q_{z0}$, $\alpha_k = \alpha(Q(t_k-0))$ *из* (8) *и всех* t_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, *найдутся решения* $Q(t_k)$, $Q(t_{k+1}-0) = Q(t_k+h) = Q(t_k)+ + hZ(t_k)$, $Y(t_k)$ *задачи*

$$\mathrm{trace}[Q(t_{k+1}-0)] \to \min$$

при ограничениях (12)–(14) *и*

$$\begin{pmatrix} Q(t_k) & \tilde{J}Q(t_k-0)C^{\mathrm{T}} + \tilde{B}Y_k) \\ CQ(t_k-0)\tilde{J}^{\mathrm{T}} + Y_k^{\mathrm{T}}\tilde{B}^{\mathrm{T}} & CQ(t_k-0)C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \geq 0 \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} U & Y_k \\ Y_k^{\mathrm{T}} & CQ(t_k-0)C^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \geq 0, \tag{21}$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q(t_k)$, $Y_k \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $Z(t_k) \in \mathrm{R}^{n\times n}$, *скалярной переменной* $\beta(t_k) > \mu_0/\alpha_k$, *определяет согласно* (11) *матрицу* $Q(t)$ *ограничивающего эллипсоида для вектора состояния* $z(t)$ *и зависимую от времени матрицу коэффициентов дискретного управления по состоянию* $K(t_k) = Y_k(CQ(t_k-0)C^{\mathrm{T}})^{-1}$. *Если, кроме того, матрица* $Q(t)$ *удовлетворяет дополнительно ограничениям* $Q_{z0} \geq R_0$ *и* $Q(t) \leq R(t)$ *для всех* $t \in [t_0, t_0+Nh]$, *где* R_0 *и* $R(t)$ — *заданные положительно определенные симметрические матрицы, то искомое управление* (18) *обеспечивает ограниченность замкнутой системы относительно множеств* $\{E(R_0), E(R(t))\}$.

Доказательство теоремы 6 дано в Приложении.

В случае апериодического дискретного управления ($t_{k+1} - t_k = h_k \in \in [h_{\min}, h_{\max}]$) с учетом полученных в разделе 3 оценок состояния задача синтеза сводится к подобной задаче оптимизации $\mathrm{trace}[Q(t_{k+1}-0)] \to \min$ при ЛМН ограничениях (12)–(14) и (20), (21) с той лишь разницей, что добавляются дополнительные ограничения на матрицу $Q(t_{k+1}-0)$:

$$Q(t_{k+1}-0) \geq Q(t_k) + h_{\min}Z(t_k), \quad Q(t_{k+1}-0) \geq Q(t_k) + h_{\max}Z(t_k). \tag{22}$$

Замечание 3. С целью уменьшения погрешности при линейной аппроксимации решения задачи оптимизации с шагом, равным периоду дискретного управления, предлагается аппроксимировать решение задачи оптимизации на каждом дискретном интервале $[t_k, t_{k+1})$ с более мелким шагом, чем период дискретного управления, т.е. $h_i = (t_{k+1} - t_k)/M = h/M$, где M — количество промежуточных точек интервала $[t_k, t_{k+1})$. В результате исходная задача оптимизации заменяется следующей:

$$\mathrm{trace}\left(Q\left(t_{k+1}-0\right)\right) \to \min \quad \text{с ЛМН ограничениями}$$
$$Q\left(t_{kj}\right) = Q\left(t_{k(j-1)}\right) + (j-1)\,h_i Z\left(t_{k(j-1)}\right) > 0,$$

$$
\begin{bmatrix}
\begin{matrix} -Z(t_{k(j-1)}) + A_z Q(t_{k(j-1)}) + Q(t_{k(j-1)}) A_z^{\mathrm{T}} + \\ + \alpha_{kj} Q(t_{k(j-1)}) + \beta \Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}} \end{matrix} & D_z & Q(t_{k(j-1)}) C_{fz}^{\mathrm{T}} & 0 \\
D_z^{\mathrm{T}} & -\alpha_{kj} I & 0 & I \\
C_{fz} Q(t_{k(j-1)}) & 0 & -\dfrac{\beta_{kj}}{\mu_1} I & 0 \\
0 & I & 0 & -\dfrac{\beta_{kj}}{\mu_0} I
\end{bmatrix} \leq 0,
$$

$$
\begin{bmatrix}
\begin{matrix} -Z(t_{k(j-1)}) + A_z Q(t_{kj}) + Q(t_{kj}) A_z^{\mathrm{T}} + \\ + \alpha_{kj} Q(t_{kj}) + \beta \Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}} \end{matrix} & D_z & Q(t_{kj}) C_{fz}^{\mathrm{T}} & 0 \\
D_z^{\mathrm{T}} & -\alpha_{kj} I & 0 & I \\
C_{fz} Q(t_{kj}) & 0 & -\dfrac{\beta_{kj}}{\mu_1} I & 0 \\
0 & I & 0 & -\dfrac{\beta_{kj}}{\mu_0} I
\end{bmatrix} \leq 0,
$$

при всех $j = 1, 2, \ldots, M$ и ЛМН

$$
\begin{pmatrix}
Q(t_k) & \tilde{J} Q(t_k - 0) \tilde{C}^{\mathrm{T}} + \tilde{B} Y_k) \\
\tilde{C} Q(t_k - 0) \tilde{J}^{\mathrm{T}} + Y_k^{\mathrm{T}} \tilde{B}^{\mathrm{T}} & \tilde{C} Q(t_k - 0) \tilde{C}^{\mathrm{T}}
\end{pmatrix} \geq 0,
$$

где $t_{kj} = t_{k(j-1)} + (j-1) h_i$, $\alpha_{kj} = \alpha(Q(t_{kj}))$ и матрицы A_z, D_z, Φ_z, C_{fz} берутся в момент t_{kj}.

6. Численные примеры

Для сравнения рассмотрим часто встречающийся пример из [6] линейной системы с дискретным управлением со значениями параметров:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0{,}1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -3{,}75 & -11{,}5 \end{bmatrix}.
$$

Среди разрабатываемых подходов [6, 7, 9, 14, 16, 17] наибольшая верхняя оценка $h = 1{,}7294$ периода дискретного управления с постоянными коэффициентами K была получена в [18] с использованием так называемого петлевого функционала с граничными условиями. Применение предложенного здесь подхода при численном решении МСС (7), принимающей вид $dQ(t)/dt = A_z Q + Q A_z^{\mathrm{T}}$ для линейной системы без возмущений, с РЛМН (10), получена такая же верхняя граница рассматриваемого дискретного управления, при котором эллипсоидальные оценки множества решений с начальными данными из заданного эллипсоида через некоторый промежуток времени стягиваются к началу координат, что соответствует поведению асимптотически устойчивой системы.

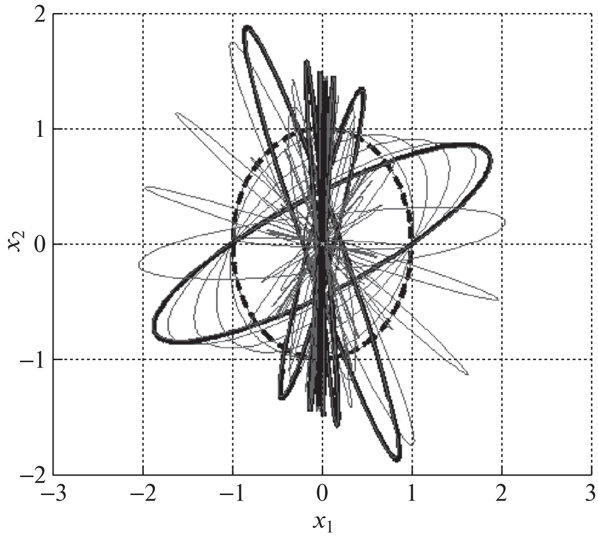

Рис. 1. Эллипсоидальные оценки множества состояний системы с периодическим ($h = 1{,}7294$) дискретным управлением.

Следует отметить, что в [18] с помощью достаточно сложного, так называемого петлевого функционала анализ асимптотической устойчивости линейной автономной системы без возмущений сводился к разрешимости задачи оптимизации с ЛМН, в которой наряду с обычными переменными появляется большое количество вспомогательных матричных переменных. При этом существенно возрастает размерность ЛМН. В отличие от [18] предлагаемый подход применительно к линейным системам без возмущений позволяет свести задачу оценивания состояния (а также анализа асимптотической устойчивости) к совокупности задач оптимизации с ЛМН, в которых отсутствуют какие-либо вспомогательные переменные, что приводит к сокращению вычислений.

На рис. 1 толстыми сплошными линиями показаны эллипсы, ограничивающие состояния рассматриваемой системы в дискретные моменты времени $t_k = kh$, $k = 1, \ldots, N$, при $h = 1{,}7294$, а тонкими сплошными линиями — в промежуточные моменты времени. Начальный эллипс с матрицей $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ показан штриховой линией.

Пусть теперь период дискретного управления задан как $h = 5\,\text{с}$. В результате решения задачи оптимизации $\operatorname{trace}(Q(t_{k+1})) \to \min$ с ЛМН ограничениями (12)–(14) и (22) при каждом $k = 0, 1, \ldots, 19$ были получены коэффициенты усиления $K(t_k)$ дискретного управления, которое обеспечивает ограниченность на интервале $[0,\ 70\,\text{с}]$ траекторий рассматриваемой системы, с начальными данными из эллипса с матрицей Q_0 (показан на рис. 2,a толстой штриховой линией). Тонкими сплошными линиями показаны эллипсы, ограничивающие состояния в точках дискретизации t_k указанного интервала времени. При этом эллипсы сначала при каждом $t_k \in [0,\ 25\,\text{с})$ расширяются (по критерию $\operatorname{trace}(Q(t_k))$, а во второй части интервала $[0,\ 70\,\text{с}]$ медленно сжимаются.

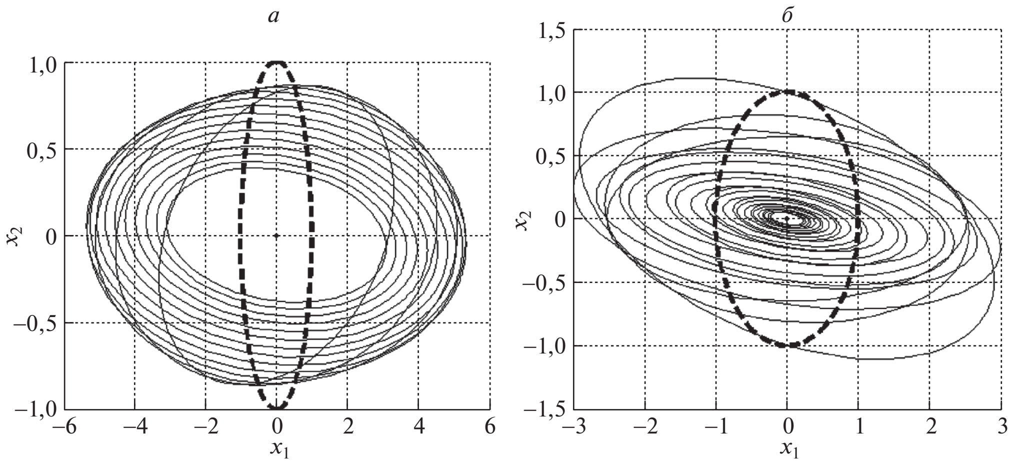

Рис. 2. Эллипсоидальные оценки множества состояний системы с периодическим ($h = 5$ с) дискретным управлением.

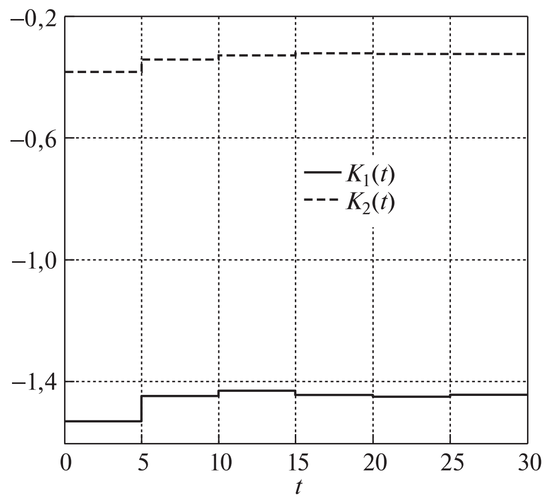

Рис. 3. Изменения коэффициентов усиления периодического ($h = 5$ с) дискретного управления.

С использованием замечания 2 при $h_i = h/5 = 1$ с были получены коэффициенты дискретного управления и эллипсоидальные оценки состояния, которые представлены на рис. 2,*б*. Штриховой линией показан начальный эллипс, а тонкими сплошными линиями — эллипсы, ограничивающие состояния в дискретные t_k и промежуточные t_{ki} моменты времени рассматриваемого интервала [0, 70 с].

Сравнивая рис. 2,*а* и 2,*б*, можно отметить, что полученное периодическое дискретное управление обеспечивает после $t = 5$ с постепенное сжатие эллипсоидальных оценок, причем более эффективное (по критерию следа матрицы эллипса) при использовании замечания 2. На рис. 3 изображены графики изменения коэффициентов усиления дискретного управления.

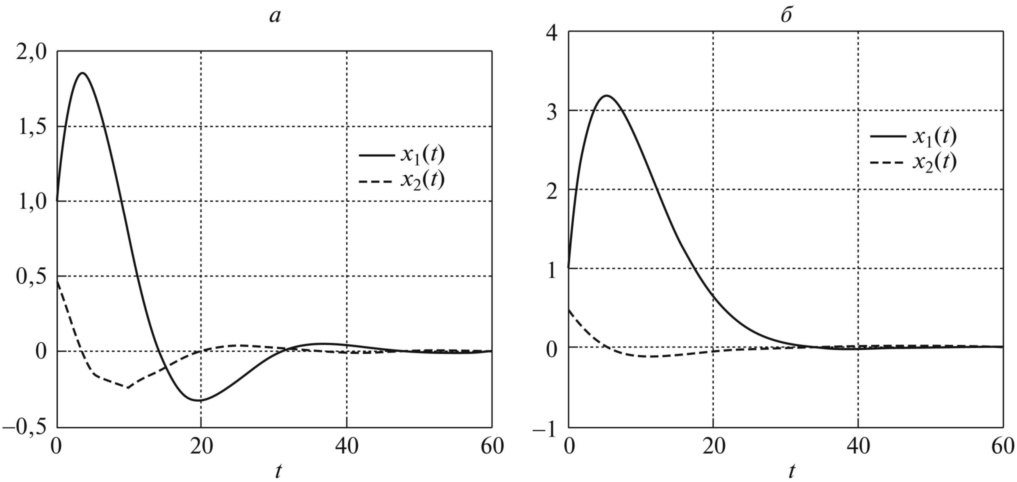

Рис. 4. Изменения координат состояния рассматриваемой системы (*а*) с периодическим, (*б*) с апериодическим дискретным управлением.

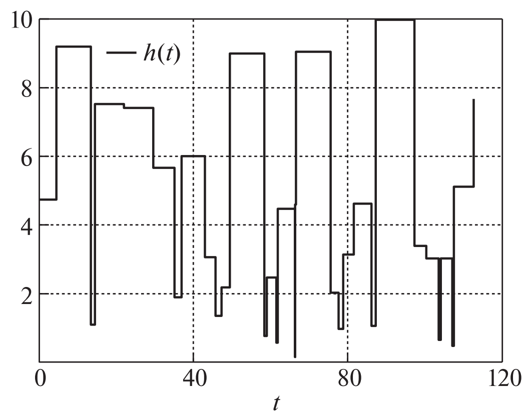

Рис. 5. Изменение шага дискретизации в системе с апериодическим дискретным управлением.

В результате решения задачи оптимизации из теоремы 6 для системы с апериодическим дискретным управлением ($h_{\min} = 0{,}01\,\text{с}$; $h_{\max} = 10\,\text{с}$) получены коэффициенты усиления $K = [\ -0{,}0617 \quad -0{,}4326\ ]$, при которых обеспечивается сначала расширение, а после 10 с — медленное сжатие эллипсоидальных оценок. На рис. 4,*а* показаны изменения координат состояния рассматриваемой системы с полученным периодическим ($h = 5\,\text{с}$) дискретным управлением, а на рис. 4,*б* — с апериодическим дискретным управлением при изменении шага дискретизации $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$, задаваемого с помощью датчика случайных чисел (показано на рис. 5).

7. Приложение к однозвенному манипулятору

Рассматривается манипулятор с одним звеном, который через редуктор соединен с выходным валом двигателя постоянного тока [37]. Предполагается, что движение манипулятора происходит в вертикальной плоскости (рис. 6).

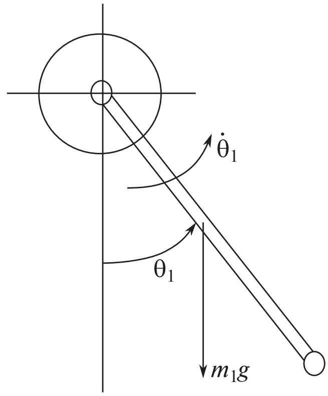

Рис. 6. Кинематическая схема однозвенного манипулятора.

Обозначим θ_1 — угол отклонения от вертикальной оси, $\dot{\theta}_1 = d\theta_1/dt$ — угловая скорость звена манипулятора. Предполагается, что известны значения θ_1, $\dot{\theta}_1$ только в дискретные моменты времени $t_k \in \Theta$.

Уравнение динамики манипулятора имеет вид

$$(m_1 l_1^2 + I_{p1})\ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \sin\theta_1 + T_1 - B_{\theta 1}\dot{\theta}_1 - w_1. \tag{23}$$

Здесь m_1, l_1, I_{p1} — масса, расстояние до центра масс и момент инерции звена, $B_{\theta 1}$ — коэффициент пропорциональности момента вязкого трения, w_1 — неопределенное возмущение, вызванное моментами сопротивления, сухого трения и других неучтенных моментов, T_1 — момент, создаваемый двигателем постоянного тока.

Пренебрегая электромагнитными переходными процессами в якорной обмотке двигателя и полагая, что момент двигателя пропорционален напряжению якорной обмотки, выражение для момента представляется в виде

$$T_1 = \frac{K_g K_m}{R} V_1 - \frac{(K_g K_m)^2}{R}\dot{\theta}_1, \tag{24}$$

где K_g, K_m, R — коэффициенты редукции, пропорциональности и активное сопротивление обмотки двигателя, V_1 — управляющее напряжение. Таким образом, момент, приложенный к звену, является функцией входного напряжения якорной обмотки двигателя. Второй член пропорционален угловой скорости со знаком минус потому, что ЭДС вращения вызывает противодействующий момент по сравнению с моментом, создаваемым входным напряжением.

Положение равновесия для манипулятора определяется из уравнения

$$-m_1 g l_1 \sin\theta_1 + T_1 = 0.$$

Если требуется стабилизировать манипулятор в заданном положении θ_{10}, то необходимо приложить управляющий момент $T_0 = m_1 g l_1 \sin\theta_{10}$. Тогда из (24) получаем выражение для установочного значения напряжения для выбранного положения:

$$V_0 = m_1 g l_1 \sin\theta_{10} \frac{R}{K_g K_m}.$$

Введем обозначения для отклонений от невозмущенного движения θ_{10} и от установочных значений момента и напряжения:

$$\theta = \theta_1 - \theta_{10}, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_1, \quad \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_1, \quad T = T_1 - T_0, \quad V = V_1 - V_0.$$

После подстановки (24) в (23) с учетом обозначения $\beta = K_g K_m$ получаем уравнение движения манипулятора в отклонениях от требуемого положения равновесия θ_{10}:

$$\ddot{\theta} = \frac{-m_1 g l_1[\sin(\theta + \theta_{10}) - \sin(\theta_{10})] - \left(B_{\theta 1} + \frac{\beta^2}{R}\right)\dot{\theta} + \frac{\beta}{R}V - w}{m_1 l_1^2 + I_{p1}}.$$

Определим вектор состояния $x = (\theta, \dot{\theta})^{\mathrm{T}}$ и управление $u(t_k) = V(t_k) = K(t_k)x(t_k)$. Тогда исходное уравнение представляется в виде (1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{m_1 g l_1}{m_1 l_1^2 + I_{p1}} & -\dfrac{B_{\theta 1} + \frac{\beta^2}{R}}{m_1 l_1^2 + I_{p1}} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\beta}{R(m_1 l_1^2 + I_{p1})} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-1}{m_1 l_1^2 + I_{p1}} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-m_1 g l_1}{m_1 l_1^2 + I_{p1}} \end{pmatrix},$$

$$C_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\theta) = \sin(\theta + \theta_{10}) - \sin(\theta_{10}) - \theta.$$

Моделирование системы с регуляторами проводилось при значениях параметров: $l = 0{,}5$; $I_P = 0{,}05$; $g = 9{,}8$; $R = 2{,}6$; $K_g = 3{,}7$; $K_m = 3{,}835$; $B_\theta = 0{,}025$.

Пусть требуется стабилизировать звено манипулятора в вертикальном положении $\theta_{10} = \pi$. При таком θ_{10} нелинейность $\varphi(\theta)$ удовлетворяет условию (2) при $\mu_0 = 0$, $\mu_1 \le 1$.

С использованием теоремы 6 в результате решения совокупности задач оптимизации с ЛМН при $\alpha = 0{,}0043$, $\beta = 1{,}0296$ было получено периодическое с $h = 2\,\text{с}$ дискретное управление с постоянными коэффициентами усиления $K = [\,-3{,}2518 \quad -0{,}0025]$, которое обеспечивает на конечном интервале $[0\ 100\,\text{с}]$ стабилизацию манипулятора с начальными данными из эллипса с матрицей $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. На рис. 7 представлены эллипсоидальные оценки состояния однозвенного манипулятора с периодическим дискретным управлением. Начальный эллипс с матрицей Q_0 обозначен толстой штриховой линией. Тонкими сплошными линиями показаны эллипсы, ограничивающие состояние в дискретные моменты времени t_k, $k = 1, 2, \ldots, 50$. Предельный эллипс с матрицей $Q_0 = \begin{bmatrix} 0{,}1193 & -0{,}0159 \\ -0{,}0159 & 0{,}5904 \end{bmatrix}$, к которому стягиваются оценки состояния при $t \ge 90\,\text{с}$, обозначен толстой сплошной линией.

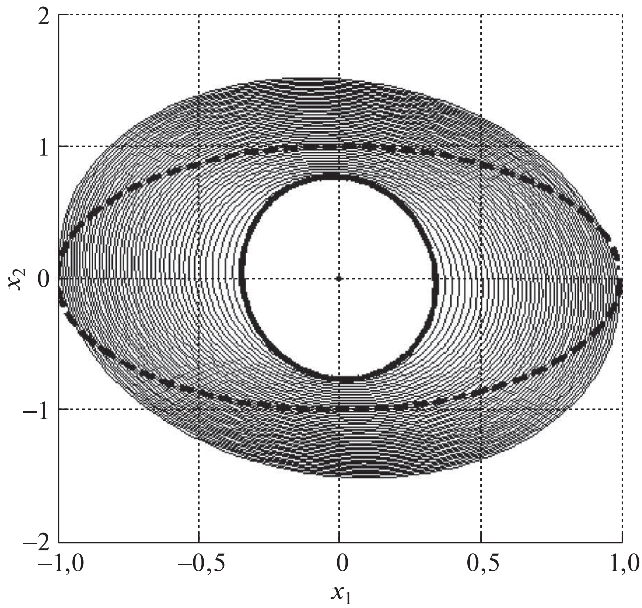

Рис. 7. Оценки множества состояний однозвенного манипулятора с периодическим дискретным управлением при действии возмущений.

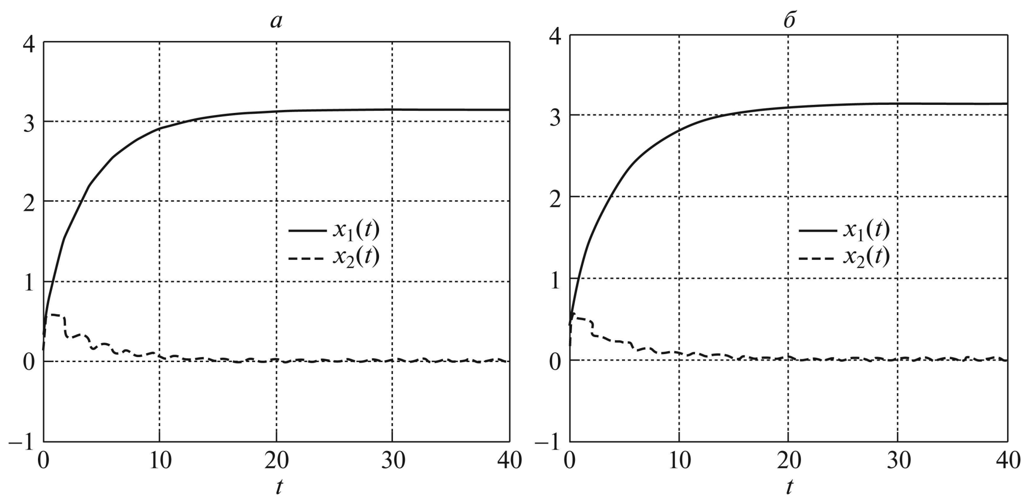

Рис. 8. Изменения координат состояния однозвенного манипулятора (a) с периодическим дискретным управлением, ($б$) с апериодическим дискретным управлением при действии возмущений.

На рис. 8,a и 8,$б$ показаны изменения координат состояния однозвенного манипулятора соответственно с периодическим и апериодическим дискретным управлением при действии возмущения, заданного в виде $w(t) = \sin(2\cos(3t))$.

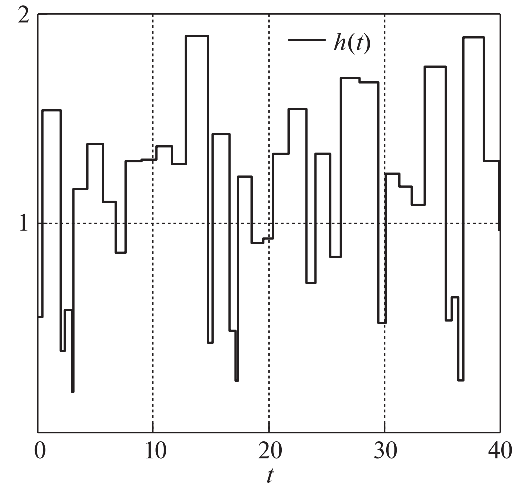

Рис. 9. Изменение шага дискретизации в системе с апериодическим дискретным управлением.

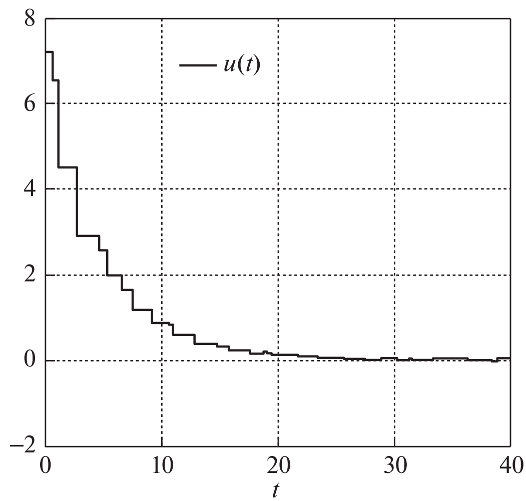

Рис. 10. Изменение апериодического дискретного управляющего сигнала.

На рис. 9 и 10 представлены соответственно изменения шага дискретизации и управляющего сигнала в системе с апериодическим дискретным управлением при действии возмущений.

8. Заключение

Для непрерывных систем с липшицевыми нелинейностями, неопределенными возмущениями и дискретным управлением предложены способы оценивания состояния в виде эллипсоидов, ограничивающих состояния для процессов с начальными данными из заданного эллипсоида. Исходная система с дискретным управлением представлена как импульсная система. С использованием квадратичной функции Ляпунова с изменяющимися параметрами получены условия ограниченности на конечном интервале в виде разрешимости дифференциального матричного уравнения и задачи оптимизации с дифференциально-разностными линейными матричными неравенствами. При кусочно-линейной аппроксимации решения ДЛМН задачи оценивания состояния и синтеза как периодического, так и апериодического дискретного управления сведены к совокупности задач оптимизации с ЛМН, для численного решения которых применены методы полуопределенного программирования. Для сравнения рассмотрен пример линейной системы второго порядка без возмущений. Для него известными методами была ранее получена верхняя граница периода дискретного управления с постоянными коэффициентами, при которых обеспечивается асимптотическая устойчивость. Такая же верхняя граница получена с применением предложенного подхода при сокращении количества варьируемых переменных в задаче оптимизации. Кроме того, данный подход позволяет получать на конечном интервале времени эллипсоидальные оценки множества состояний исходной нелинейной системы с дискретным управлением и неопределенными возмущениями, синтезировать дискретное управление, обеспечивающее свойство ограниченности относительно заданных множеств. Результаты применены для оценивания состояния и синтеза периодического и апериодического дискретного управления, обеспечивающего стабилизацию на конечном интервале времени однозвенного манипулятора, представленного нелинейной моделью с неопределенными возмущениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Чтобы скалярная переменная $\mathrm{trace}(Q(t))$, зависящая от времени и параметров, принимала наименьшее значение при каждом $t \in [t_k, t_{k+1})$, достаточно, чтобы ее производная $d(\mathrm{trace}(Q(t)))/dt$ была минимальной по параметрам $\beta > 0$, $\alpha > \mu_0/\beta$ при всех $t \in [t_k, t_{k+1})$. Поскольку $d(\mathrm{trace}(Q(t)))/dt = \mathrm{trace}(dQ(t)/dt)$, то приходим к следующей задаче оптимизации:

$$\text{(П.1)} \quad \mathrm{trace}\left(A_z Q + Q A_z^{\mathrm{T}} + \alpha Q + \frac{\beta}{\alpha\beta - \mu_0} D_z D_z^{\mathrm{T}} + \beta \Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}} + \frac{\mu_1}{\beta} Q C_{fz}^{\mathrm{T}} C_{fz} Q\right) \to \\ \to \min_{\alpha,\beta}.$$

Так как $\mathrm{trace}(A_z Q + Q A_z^{\mathrm{T}})$ не зависит от α и β, то минимум для (П.1) (если существует) будет отличаться от минимума функции $F(\alpha,\beta) = \alpha \mathrm{trace}(Q) + \frac{\beta}{\alpha\beta-\mu_0}\mathrm{trace}(D_z D_z^{\mathrm{T}}) + \beta \mathrm{trace}(\Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}}) + \frac{\mu_1}{\beta}\mathrm{trace}(Q C_{fz}^{\mathrm{T}} C_{fz} Q)$ на постоянную при каждом t величину $\mathrm{trace}(A_z Q + Q A_z^{\mathrm{T}})$. По условиям леммы матрицы Φ_z и D_z имеют хотя бы по одному ненулевому элементу при каждом $t \in [t_k, t_{k+1})$. Величины $\mathrm{trace}(D_z D_z^{\mathrm{T}})$ и $\mathrm{trace}(\Phi_z \Phi_z^{\mathrm{T}})$ будут положительными при всех $t \in [t_k, t_{k+1})$, так как они представляют собой квадрат нормы Фробениуса для матриц D_z^{T} и Φ_z^{T} соответственно. Матрица $Q(t)$ является положительно определенной при всех $t \in [t_k, t_{k+1})$, так что $\mathrm{trace}(Q(t)) > 0$ и $\mathrm{trace}(Q C_{fz}^{\mathrm{T}} C_{fz} Q) \geq 0$. Функция $F(\alpha,\beta)$ определена, непрерывна, непрерывно дифференцируема, ограничена снизу $F(\alpha,\beta)>0$ в открытой выпуклой области $\beta>0$, $\alpha>\mu_0/\beta$. Проверим условие выпуклости функции $F(\alpha,\beta)$ по α,β. Для этого вычислим частные производные второго порядка для $F(\alpha,\beta)$ по параметрам β, α:

$$\partial \mathrm{trace}(dQ(t)/dt)/\partial\alpha = \mathrm{trace}(Q(t)) - \frac{\beta^2}{(\alpha\beta-\mu_0)^2}\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}}), \tag{П.2}$$

$$\partial \mathrm{trace}(dQ(t)/dt)/\partial\beta = -\frac{\mu_1}{\beta^2}\mathrm{trace}(QC_{fz}^{\mathrm{T}}C_{fz}Q) - \\ -\frac{\mu_0}{(\alpha\beta-\mu_0)^2}\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}}) + \mathrm{trace}(\Phi_z\Phi_z^{\mathrm{T}}), \tag{П.3}$$

$$\partial^2 \mathrm{trace}(dQ(t)/dt)/\partial\alpha^2 = \frac{2\beta^3}{(\alpha\beta-\mu_0)^3}\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}}),$$

$$\partial^2 \mathrm{trace}(dQ(t)/dt)/\partial\alpha\partial\beta = \partial^2 \mathrm{trace}(dQ(t)/dt)/\partial\beta\partial\alpha = \frac{2\beta\mu_0}{(\alpha\beta-\mu_0)^3}\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}}),$$

$$\partial^2 \mathrm{trace}(dQ(t)/dt))/\partial\beta^2 = \frac{2\mu_1}{\beta^3}\mathrm{trace}(QC_{fz}^{\mathrm{T}}C_{fz}Q) + \frac{2\mu_0\alpha}{(\alpha\beta-\mu_0)^3}\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}}).$$

Легко видеть, что матрица вторых производных (гессиан)

$$\nabla^2 F(\alpha,\beta) = \frac{2}{(\alpha\beta-\mu_0)^3}\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix} \beta^3 & \mu_0\beta \\ \mu_0\beta & \mu_0\alpha \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_1\mathrm{trace}(QC_{fz}^{\mathrm{T}}C_{fz}Q)/\beta^3 \end{bmatrix}$$

является положительно определенной при всех $\beta>0$, $\alpha>\mu_0/\beta$. Согласно теореме 5 из [38, с. 163], функция $F(\alpha,\beta)$ является выпуклой по параметрам β, α из области определения. Известно, что если выпуклая функция имеет минимум внутри открытой выпуклой области, то этот минимум будет глобальным. Для нахождения минимума определим стационарные точки, используя необходимые условия экстремума функции [38]. Приравнивая производные (П.2), (П.3) нулю, получаем:

$$\mathrm{trace}(Q(t)) = \frac{\beta^2}{(\alpha\beta-\mu_0)^2}\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}}), \tag{П.4}$$

$$\mathrm{trace}(\Phi_z\Phi_z^{\mathrm{T}}) = \frac{\mu_1}{\beta^2}\mathrm{trace}(QC_{fz}^{\mathrm{T}}C_{fz}Q) + \frac{\mu_0}{(\alpha\beta-\mu_0)^2}\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}}). \tag{П.5}$$

Уравнение (П.5) с учетом (П.4) принимает вид

$$\mathrm{trace}(\Phi_z\Phi_z^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{\beta^2}\left[\mu_0\mathrm{trace}(Q(t)) + \mu_1\mathrm{trace}(QC_{fz}^{\mathrm{T}}C_{fz}Q)\right].$$

Отсюда находится $\beta(Q(t))$ как в (8). Далее из первого уравнения находим $(\alpha\beta-\mu_0)^2 = \frac{\beta^2\mathrm{trace}(D_zD_z^{\mathrm{T}})}{\mathrm{trace}(Q(t))}$ и, извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем второе в (8) выражение для $\alpha(Q(t))$. Так что (8) является единственным решением уравнений (П.2), (П.3) при $\beta > 0$, $\alpha > \mu_0/\beta$.

Выше было показано, что матрица вторых частных производных является положительно определенной при всех $\beta > 0$, $\alpha > \mu_0/\beta$, а значит, и для β, α из (8). Таким образом, согласно достаточным условиям [38] полученные выражения (8) действительно доставляют глобальный минимум $d(\mathrm{trace}(Q(t)))/dt$ при каждом $t \in [t_k, t_{k+1})$, что завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 6. В случае периодического дискретного управления ($h_k = h = \mathrm{const} > 0$), как показано в разделе 3, задача построения оценки состояния сводится к совокупности задач оптимизации $\mathrm{trace}(Q(t_{k+1} - 0)) \to \min$ с ЛМН ограничениями (10), (12)–(14) для всех $k = 0, \ldots, N-1$. С учетом (19) матричное неравенство (10) здесь принимает вид

$$\begin{pmatrix} Q(t_k) & (\tilde{J} + \tilde{B}K(t_k)C)Q(t_k - 0) \\ Q(t_k - 0)(\tilde{J} + \tilde{B}K(t_k)C)^{\mathrm{T}} & Q(t_k - 0) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Далее, умножая последнее неравенство слева на матрицу $\mathrm{diag}(I, C)$, а справа — на $\mathrm{diag}(I, C^{\mathrm{T}})$ и вводя замену $Y_k = K(t_k)CQ(t_k - 0)C^{\mathrm{T}}$, приходим к РЛМН (20) относительно матричных переменных $Q(t_k)$, $Q(t_{k+1} - 0)$ и Y_k. Ограничение на управление (17) обеспечивается ЛМН (21). Отметим, что параметр α_k при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ определяется из (8) по известной после k-й итерации матрице $Q(t_k - 0)$, а матрица $CQ(t_k - 0)C^{\mathrm{T}}$ будет положительно определенной, так как является верхним левым блоком размерности $(n \times n)$-матрицы $Q(t_k - 0)$. Теорема 6 доказана.

Автор выражает благодарность А.И. Матасову за ряд ценных замечаний по статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hetel L., Fiter C., Omran H., Seuret A., Fridman E., Richard J.-P., Niculescu S.* Recent Developments on the Stability of Systems with Aperiodic Sampling: an Overview // Automatica. 2017. V. 76. P. 309–335.
2. *Seuret A.* Contributions to the Stability Analysis and Control of Networked Systems. Automatic Control Engineering. Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2017.
3. *Hespanha J.P., Naghshtabrizi P., Xu Y.* A Survey of Recent Results in Networked Control Systems // Proc. IEEE. 2007. V. 95 (1). P. 138–162.
4. *Zhang X.-M., Han Q.-L., Yu X.* Survey on Recent Advances in Networked Control Systems // IEEE Trans. Ind. Inf. 2016. V. 12. P. 1740–1752.
5. *Lee T., Wu Z.-G., Park J.* Synchronization of a Complex Dynamical Network with Coupling Time-Varying Delays via Sampled-Data Control // Appl. Math. Comput. 2012. V. 219 (3). P. 1354–1366.
6. *Fridman E., Seuret A., Richard J.-P.* Robust Sampled-Data Stabilization of Linear Systems: An Input Delay Approach // Automatica. 2004. V. 40. P. 1441–1446.
7. *Fridman E.* A Refined Input Delay Approach to Sampled-Data Control // Automatica. 2010. V. 46. P. 421–427.

8. *Naghshtabrizi P., Hespanha J., Teel A.* On the Robust Stability and Stabilization of Sampled-Data Systems: A Hybrid System Approach. // Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 13–15 December 2006. P. 4873–4878.
9. *Naghshtabrizi P., Hespanha J.P, Teel A.R.* Exponential Stability of Impulsive Systems with Application to Uncertain Sampled-Data Systems // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. P. 378–385.
10. *Suh Y.* Stability and Stabilization of Nonuniform Sampling Systems // Automatica. 2008. V. 44. P. 3222–3226.
11. *Fujioka H.* A Discrete-time Approach to Stability Analysis of Systems with Aperiodic Sample-and-hold Devices // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54 (10). P. 2440–2445.
12. *Oishi Y., Fujioka H.* Stability and Stabilization of Aperiodic Sampled-Data Control Systems Using Robust Linear Matrix Inequalities // Automatica. 2010. V. 46. P. 1327–1333.
13. *Chen W.-H., Zheng W.X.* Input-to-State Stability for Networked Control Systems via an Improved Impulsive System Approach // Automatica. 2011. V. 47. P. 789–796.
14. *Seuret A.* A Novel Stability Analysis of Linear Systems under Asynchronous Sampling // Automatica. 2012. V. 48. P. 177–182.
15. *Zhang C.-K., Jiang L., He Y., Wu H., Wu M.* Stability Analysis for Control Systems with Aperiodically Sampled Data Using an Augmented Lyapunov Functional Method // IET Control Theory Appl. 2012. No. 7. P. 1219–1226.
16. *Seuret A., Peet M.M.* Stability Analysis of Sampled-Data Systems Using Sum of Squares // IEEE Trans. Automat. Control. 2013. V. 58 (6). P. 1620–1625.
17. *Briat C.* Convex Conditions for Robust Stability Analysis and Stabilization of Linear Aperiodic Impulsive and Sampled-Data Systems under Dwell-Time Constraints // Automatica. 2013. V. 49. P. 3449–3457.
18. *Seuret A., Briat C.* Stability Analysis of Uncertain Sampled-Data Systems with Incremental Delay Using Looped Functionals // Automatica. 2015. V. 55. P. 274–278.
19. *Omran H., Hetel L., Petreczky M., Richard J.P., Lamnabhi-Lagarrigue F.* Stability Analysis of Some Classes of Input-Affine Nonlinear Systems with Aperiodic Sampled-Data Control // Automatica. 2016. V. 70. P. 266–274.
20. *Jiang X., Yin Z., Wu J.* Stability Analysis of Linear Systems Under Time-Varying Samplings by a Non-Standard Discretization Method. // Electronics. 2018. V. 7 (10). P. 1–11.
21. *Xiao S.-P., Lian H., Teo K., Zeng H.-B., Zhang X.-H.* A New Lyapunov Functional Approach to Sampled-Data Synchronization Control for Delayed Neural Networks // J. Franklin Inst. 2018. P. 8857–8873.
22. *Park J.M., Park P.G.* An Improved Stability Criterion for Linear Systems with Multi-Rate Sampled Data // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2020. V. 38. P. 100947.
23. *Sevim U., Goren-Sumer L.* Singular Value Assignment for Nonuniformly Sampled Systems: Stabilization and Control. arXiv:1706.00967v2 [math.DS] 29 Jun 2020.
24. *Khargonekar P.P., Sivashankar N.* H_2 optimal Control for Sampled-Data Systems // Syst. Control Lett. 1991. V. 17. No. 6. P. 425–436.
25. *Hu L.S., Lam J., Cao Y.Y., Shao H.H.* An LMI Approach to Robust H_2 Sampled-Data Control for Linear Uncertain Systems // IEEE Trans. Syst., Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics. 2003. V. 33. No. 1. P. 149–155.
26. *Kim J.H., Hagiwara T.* Extensive Theoretical/Numerical Comparative Studies on H_2 and Generalized H_2 Norms in Sampled-Data Systems // Int. J. Control. 2017. V. 90. No. 11. P. 2538–2553.

27. *Kim J.H., Hagiwara T.* Upper/Lower Bounds of Generalized H_2 Norms in Sampled-Data Systems with Convergence Rate Analysis and Discretization Viewpoint // Syst. Control Lett. 2017. V. 107. P. 28–35.

28. *Бирюков Р.С.* Обобщенное H_2-управление линейным непрерывно-дискретным объектом на конечном горизонте // АиТ. 2020. № 8. С. 40–53.

    Birukov R.S. Generalized H_2-optimal Control of Continuous-Discrete Linear Plant on a Finite Horizont // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 8. P. 1394–1404.

29. *Geromel J.C., Colaneri P., Bolzern P.* Differential Linear Matrix Inequality in Optimal Sampled-Data Control // Automatica. 2019. V. 100. P. 289–298.

30. *Holicki T., Carsten W., Scherer C.W.* Output Feedback Synthesis for a Class of Aperiodic Impulsive Systems. arXiv:1910.03486v3 [math.OC] 21 Jun 2020.

31. *Ríos H., Hetel L., Efimov D.* Robust Output-feedback Control for Uncertain Linear Sampled-Data Systems: A 2D Impulsive System Approach // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2019. P. 177–201.

32. *Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., De Tommasi G.* Finite Time Stability and Control. London: Springer-Verlag, 2014.

33. *Amato F., De Tommasi G., Pironti A.* Finite-time Stability: an Input-output Approach. N.Y.: Wiley, 2018.

34. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2016. № 5. С. 19–36.

    Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Continuous Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 764–778.

35. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2019. № 11. С. 59–82.

    Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Discrete-time Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1976–1995.

36. *Маликов А.И., Дубакина Д.И.* Численные способы решения задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами // Изв. ВУЗов. Математика. 2020. № 4. С. 74–86.

    Malikov A.I., Dubakina D.I. Numerical Methods for Solving Optimization Problems with Differential Linear Matrix Inequalities // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2020. No. 4. P. 74–86.

37. *Маликов А.И.* Синтез наблюдателей состояния по результатам измерений для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями //АиТ. 2017. № 5. С. 16–35.

    Malikov A.I. State Observer Synthesis by Measurement Results for Nonlinear Lipschitz Systems with Uncertain Disturbances // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 5. P. 782–797.

38. *Васильев В.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 11.09.2020

После доработки 21.11.2020

Принята к публикации 08.12.2020