© 2021 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
П.А. ГУЩИН, канд. техн. наук (guschin.p@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург),

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С ГАРАНТИЕЙ НАХОЖДЕНИЯ РЕГУЛИРУЕМОГО СИГНАЛА В ЗАДАННОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

Предложен метод управления динамическими системами, позволяющий гарантировать нахождение выходного сигнала объекта в заданном множестве в любой момент времени. Для решения задачи используется специальная замена координат, позволяющая свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной системы без ограничений. Приведены примеры замены координат и синтезированы алгоритмы управления линейными объектами и системами с секторной нелинейностью при наличии параметрической неопределенности и возмущений. Полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода и подтверждающим теоретические выводы.

Ключевые слова: динамическая система, замена координат, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S000523102104005X

1. Введение

Задача управления объектами с обеспечением желаемого качества переходных процессов по регулируемой переменной является одной из основных задач теории автоматического управления. В условиях определенности параметров модели объекта существует ряд классических методов: методы управления с заданным расположением собственных чисел замкнутой системы, методы управления с обеспечением желаемых частотных характеристик замкнутой системы, методы оптимального управления и т.д., см., например, [1–4]. Вопрос улучшения оценки сверху для отклонения регулируемой переменной в линейных параметрически определенных системах с ненулевыми начальными условиями до сих пор остается актуальным [5–7].

Для управления в условиях параметрической неопределенности и возмущений можно выделить методы адаптивного и робастного управления, где качество регулирования задается эталонным сигналом, см., например, [8–10].

[1] Результаты разделов 3–5 получены при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в Институте проблем машиноведения РАН. Результаты раздела 6 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (грант № МД-1054.2020.8) в Институте проблем машиноведения РАН.

Однако методы [8–10] не гарантируют заданного отклонения регулируемого сигнала от эталонного в переходном режиме. Если начальные условия объекта неизвестны, то в начальный момент времени данные отклонения могут быть произвольно большими. Методы [8–10] гарантируют только заданное отклонение регулируемой переменной от эталонного сигнала в установившемся режиме.

Метод [11] позволяет гарантировать нахождение фазовых траекторий системы в некотором наименьшем эллипсоиде в переходном и установившемся режимах. Однако данный эллипсоид остается одним и тем же в любой момент времени, что может давать грубое качество регулирования в переходном и в установившемся режимах.

В [12] рассмотрено применение адаптивного управления с обеспечением регулируемой переменной в заданных множествах, которые могут быть разными для переходного и установившегося режимов. Данные множества задаются последовательностью прямоугольников, где высота каждого прямоугольника соответствует желаемому максимальному отклонению выходной переменной объекта от положения равновесия, а длина прямоугольника — желаемому времени нахождения выходной переменной объекта в соответствующем прямоугольнике. Однако прямоугольные области в [12] достаточно грубые и алгоритм применим только для объектов со скалярными входными и выходными сигналами.

В отличие от [12] в [13] предложен метод управления с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном криволинейном множестве для объектов с векторными входными и выходными сигналами. Однако реализация данного метода требует знания знака и множества начальных условий объекта, а полученные верхние и нижние оценки переходных процессов достаточно грубые в том смысле, что определяются одной функцией с разными знаками. Причем верхние и нижние оценки должны асимптотически сходиться к некоторым константам. В настоящее время результат [13] имеет большое количество обобщений на разного рода системы, см. например, [14–16], но все вышеперечисленные особенности метода [13] остаются справедливыми и в [14–16].

Настоящая статья сфокусирована на получении нового метода управления с обеспечением регулируемой переменной в заданном множестве. В отличие от [13] целевое множество не будет зависеть от знака значений начальных условий, а требуется только знание множества начальных значений объекта управления. По сравнению с [12, 13] конфигурация заданного множества может задаваться произвольными ограниченными непрерывно-дифференцируемыми функциями, для которых не требуется асимптотическая сходимость. В результате полученный метод позволит существенно расширить класс решаемых задач в смысле качества переходных процессов в отличие от [12, 13].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведен класс исследуемых объектов и поставлена цель управления в виде принадлежности выходного сигнала объекта заданному множеству. Раздел 3 содержит основной результат, где предложена специальная замена координат, которая позволяет свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной динамической системы без ограничений. Также в разделе 3 приведены примеры такой замены координат. Возможность использования предложенного метода продемонстрирована в дальнейших разделах для некоторых видов систем. Так, в разделе 4 предложен алгоритм управления по состоянию линейными объектами с известными параметрами и неизвестным внешним ограниченным возмущением. Раздел 5 содержит синтез закона управления, который не зависит от параметров объекта, где сам объект описывается динамической системой с секторной нелинейностью и возмущениями. Раздел 6 иллюстрирует применимость предложенной схемы для объекта управления с произвольной относительной степенью. Разделы 4–6 сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода, и анализом полученных результатов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ — сигнал управления, $y = \operatorname{col}\{y_1, \ldots, y_v\}$ — выходной сигнал, вектор-функция F определена для всех x, u и t, кусочно-непрерывна и ограничена по t, $h(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция по x. Объект управления (1) управляемый и наблюдаемый для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Требуется разработать закон управления, который обеспечит нахождение выходного сигнала объекта $y(t)$ в следующем множестве

$$\mathcal{Y} = \Big\{ y \in \mathbb{R}^v : \ \underline{g}_i(t) < y_i(t) < \overline{g}_i(t), \ i = 1, \ldots, v \Big\} \text{ для любых } t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $\underline{g}_i(t)$ и $\overline{g}_i(t)$ — ограниченные функции вместе со своими первыми производными по времени. Данные функции выбираются разработчиком исходя из требований работы системы. Например, при управлении электрическим генератором [17] требуется поддержание частоты $w(t)$ и выходного напряжения $V(t)$ в заданных пределах: $\underline{w} < w(t) < \overline{w}$ и $\underline{V} < V(t) < \overline{V}$.

3. Метод решения. Основной результат

Введем замену выходной переменной y в виде

$$y(t) = \Phi(\varepsilon(t), t), \tag{3}$$

где $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$ — непрерывно-дифференцируемая вектор-функция по t, функция $\Phi(\varepsilon, t) = \operatorname{col}\{\Phi_1(\varepsilon, t), \ldots, \Phi_v(\varepsilon, t)\}$ удовлетворяет следующим условиям:

(a) $\underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon, t) < \overline{g}_i(t)$, $i = 1, \ldots, v$ для любых $t \geqslant 0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$;

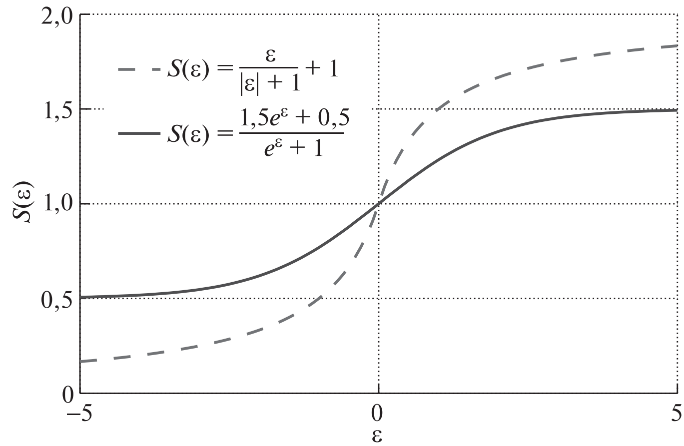

Рис. 1. Примеры функции $S(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{1+|\varepsilon|} + 1$ и $S(\varepsilon) = \dfrac{1{,}5e^{\varepsilon} + 0{,}5}{e^{\varepsilon} + 1}$.

(б) существует обратное отображение $\varepsilon = \Phi^{-1}(y,t)$ для любых $y \in \mathcal{Y}$ и $t \geqslant 0$;

(в) функция $\Phi(\varepsilon,t)$ непрерывно-дифференцируемая по ε и t, а также $\det\left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right) \neq 0$ для любых $y \in \mathcal{Y}$ и $t \geqslant 0$;

(г) функция $\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t}$ ограничена по $t \geqslant 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$.

Приведем четыре примера функции $\Phi(\varepsilon,t)$, где в примерах 1 и 2 верхняя и нижняя границы множества будут зависеть от одной функции $g(t)$, а в примерах 3 и 4 границы множества будут заданы независимыми функциями $\underline{g}(t)$ и $\overline{g}(t)$.

Пример 1. Пусть $\Phi(\varepsilon,t) = g(t)S(\varepsilon)$, где в данном случае функция $S(\varepsilon) \in \in \mathbb{R}$ определяет замену координат, а функция $g(t) \in \mathbb{R}$ задает качество переходных процессов. Дополнительно, $g(t) \neq 0$ и $\dot{g}(t)$ — ограниченные функции, $S(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+|\varepsilon|} + r$ (см. пример функции $S(\varepsilon)$ на рис. 1 для $r = 1$). Так как из (3) $y(t) = g(t)S(\varepsilon)$, то переменная $y(t)$ содержится в множестве $(r-1)g(t) < < y(t) < (r+1)g(t)$ при $g(t) > 0$ или в множестве $(r+1)g(t) < y(t) < (r-1)g(t)$ при $g(t) < 0$. Обратное отображение имеет вид $\varepsilon = \frac{y-rg}{g-(y-rg)\,\mathrm{sign}(\varepsilon)}$.

Пример 2. Зададим в примере 1 функцию $S(\varepsilon)$ в виде $S(\varepsilon) = \frac{\overline{r}e^{\varepsilon}+\underline{r}}{e^{\varepsilon}+1}$, где $0 < \underline{r} < \overline{r}$ (см. пример функции $S(\varepsilon)$ на рис. 1 для $\overline{r} = 1{,}5$ и $\underline{r} = 0{,}5$). Тогда из (3) обратное преобразование выглядит как $\varepsilon = \ln\frac{\underline{r}\,g-y}{y-\overline{r}g}$. Переменная $y(t)$ находится в множестве $\underline{r}g(t) < y(t) < \overline{r}g(t)$ при $g(t) > 0$ или в множестве $\overline{r}g(t) < y(t) < \underline{r}g(t)$ при $g(t) < 0$.

Пример 3. Выберем $\Phi(\varepsilon,t) = \frac{\overline{g}(t)e^{\varepsilon}+\underline{g}(t)}{e^{\varepsilon}+1}$, где $\Phi(\varepsilon,t) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, функции $\overline{g}(t)$, $\underline{g}(t)$, $\dot{\overline{g}}(t)$ и $\dot{\underline{g}}(t)$ ограниченные для любого t и $\underline{g}(t) < \overline{g}(t)$. С учетом (3) обратное преобразование $\varepsilon = \ln\frac{\underline{g}-y}{y-\overline{g}}$ будет выполнено при $\underline{g}(t) < y(t) < \overline{g}(t)$ для любых t.

Пример 4. Зададим $\Phi(\varepsilon, t)$ в виде

$$\Phi(\varepsilon, t) = \begin{cases} \overline{g}(t) + 0{,}5(\underline{g}(t) - \overline{g}(t))e^{-\varepsilon}, & \varepsilon \geqslant 0, \\ \underline{g}(t) + 0{,}5(\overline{g}(t) - \underline{g}(t))e^{\varepsilon}, & \varepsilon < 0, \end{cases}$$

где остальные функции, как и в примере 3. Принимая во внимание (3), обратное преобразование примет вид

$$\varepsilon = \begin{cases} \ln \dfrac{\overline{g} - \underline{g}}{2(\overline{g} - y)}, & 0 \leqslant y < \overline{g}, \\ \ln \dfrac{2(y - \underline{g}}{\overline{g} - \underline{g}}, & \underline{g} < y < 0. \end{cases}$$

Значит, $\underline{g}(t) < y(t) < \overline{g}(t)$ для любых t.

Теперь определим динамику по переменной ε для исследования устойчивости замкнутой системы. Для этого найдем полную производную по времени от (3) в виде $\dot{y} = \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t}$. Так как $\det\left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right) \neq 0$ (см. условие (в)), то перепишем последнее равенство как

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\left(\dot{y} - \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}\right). \tag{4}$$

Выражение (4) содержит сигнал управления $u(t)$, так как $\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}F(x, u, t)$ из (1). Теперь сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. Пусть для преобразования (3) *выполнены условия* (а)–(г). *Если существует такой закон управления u, что решения* (4) *ограничены, то $y(t) \in \mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$. Если при выбранном законе управления решения* (4) *неограниченны, то $y(t) \in \mathcal{Y}$.*

Доказательство. Пусть выбран закон управления так, что решения уравнения (4) ограничены, т.е. $|\varepsilon(t)| < N$ при любом t, где $0 < N < \infty$. Тогда в силу преобразования (3) и условия (а) следует, что

$$y \in \mathcal{Y}_\alpha = \left\{y \in \mathbb{R}^v : \ \underline{M}_i(t) < y_i(t) < \overline{M}_i(t), \ i = 1, \ldots, v\right\},$$

где $\underline{M}_i(t) = \inf\limits_{|\varepsilon|<N}\{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$ и $\overline{M}_i(t) = \sup\limits_{|\varepsilon|<N}\{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$ для любых $t \geqslant 0$. Поскольку (3) является взаимно однозначным отображением, то $\overline{M}_i(t) < \overline{g}_i(t)$ и $\underline{M}_i(t) > \underline{g}_i(t)$, значит, $\mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$. Пусть теперь закон управления не обеспечивает ограниченность решения (4), т.е. $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$. Тогда в силу преобразования (3), а также условий (а) и (2) имеем, что $y \in \mathcal{Y}$, где $\underline{g}_i(t) = \inf\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^v}\{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$ и $\overline{g}_i(t) = \sup\limits_{\varepsilon\in\mathbb{R}^v}\{\Phi_i(\varepsilon, t)\}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 позволяет перейти от задачи управления (1) с ограничениями (2) к задаче управления (4) без ограничений. Следующие разделы демонстрируют возможность применения предложенного метода для некоторых типов задач.

4. Управление линейным объектом с известными параметрами и измеряемым вектором состояния в условиях возмущений

Пусть объект управления описывается следующим линейным дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ y &= Lx. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^l$ — неизвестное ограниченное возмущение, матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$ и $L \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ известны, а матрица $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ неизвестна. Пара (A, B) управляема и пара (L, A) наблюдаема. Объект (5) имеет относительную степень, равную единице ($LB \neq 0$ [10]).

Сформулируем результат, который содержит «простейший» закон управления в смысле «удобства» анализа замкнутой системы на устойчивость.

Теорема 2. Предположим, что для преобразования (3) *выполнены условия* (а)–(г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} > 0$ *для любых* ε *и* t, *а также существует вектор* $T \in \mathbb{R}^n$ *такой, что матрица* $A - B(LB)^{-1}LA - TL$ *гурвицева. Тогда для любого* $K > 0$ *закон управления*

$$u = -(LB)^{-1}\left[LAx + K\varepsilon\right] \tag{6}$$

обеспечивает выполнение целевого условия (2).

Замечание 1. Отметим, что модель (5) с гурвицевой матрицей $A - B(LB)^{-1}LA - TL$ может описывать ряд технических систем. Например, дистилляционная колонна [18], [4, с. 569], где сигнал управления — расход орошения, а регулируемый сигнал — состав легких фракций верха колонны; летательный аппарат [4, с. 565] на различных высотах и числах Маха, где u — управление рулями высоты, y — вертикальное ускорение; электрический двигатель постоянного тока [19], где сигнал управления — входное напряжение, выходной сигнал — угловая скорость, и т.д.

Доказательство. Принимая во внимание преобразование (3) и уравнение объекта (5), перепишем выражение (4) в виде

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}\left(LAx + LBu + \psi\right), \tag{7}$$

где $\psi = LDf - \frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial t}$ — ограниченная функция по ε и t. Подставив закон управления (6) в первое уравнение (5) и уравнение (7), а также добавив в полученном выражении слагаемое $T\Phi(\varepsilon,t) - TLx(t) = 0$ (которое справедливо в силу (3) и второго уравнения (5)), получим

$$\dot{x} = (A - B(LB)^{-1}LA - TL)x - KB(LB)^{-1}\varepsilon + Df + T\Phi(\varepsilon,t), \tag{8}$$

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}\left[-K\varepsilon + \psi\right]. \tag{9}$$

Введение вектора T позволяет рассматривать неустойчивые объекты (5). Исследуем уравнение (9) на устойчивость по вход-состоянию. Для этого выберем функцию Ляпунова вида $V = 0{,}5\varepsilon^2$. Подставив (9) в условие

$$\dot{V} + 2\alpha V \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} - \beta\psi^2 \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \leqslant 0, \quad \text{где} \quad \alpha > 0 \text{ и } \beta > 0,$$

получим $-(K-\alpha)\varepsilon^2 + \varepsilon\psi - \beta\psi^2 \leqslant 0$ или в виде $[\varepsilon\ \psi] \begin{bmatrix} -K+\alpha & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \psi \end{bmatrix} \leqslant 0.$ Последнее неравенство будет выполнено, если матрица $\begin{bmatrix} -K+\alpha & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -\beta \end{bmatrix}$ будет отрицательно определенной, что равносильно выполнению условий $K > \alpha$ и $(K-\alpha)\beta > 0{,}25$. Поскольку K заданное число, то для него всегда найдутся α и β такие, что данные условия будут выполнены. Значит, сигнал $\varepsilon(t)$ будет ограниченным. Если матрица $A - B(LB)^{-1}LA - TL$ гурвицева, то в силу ограниченности функций $\varepsilon(t)$, $\Phi(\varepsilon,t)$ и $f(t)$ сигнал $x(t)$ будет ограниченным. Значит, закон управления u, определенный в (6), будет ограничен. Тогда из теоремы 1 следует, что целевое условие (2) будет выполнено. Теорема 2 доказана.

Пример 5. Продемонстрируем теперь качество переходных процессов на примере управления объектом, параметры которого заданы в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$f(t) = 0{,}1 + \sin(3t) + \operatorname{sat}\left(\frac{d(t)}{0{,}3}\right), \tag{10}$$

где $\operatorname{sat}(\cdot)$ — функция насыщения, сигнал $d(t)$ смоделирован в Matlab Simulink с помощью блока “Band-Limited White Noise” с мощностью шума 0,1 и временем выборки 0,1. Требуется обеспечить принадлежность выходного сигнала $y(t)$ множеству $\underline{r}g(t) < y(t) < \overline{r}g(t)$, где $\underline{r} = 0{,}8$ и $\overline{r} = 1$, а функция $g(t)$ будет определена ниже.

Матрица $A - B(LB)^{-1}LA - TL$ гурвицева, например, при любом $T = [T_1\ T_2]^{\mathrm{T}}$, где $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$. Зададим $K = 1$ в (6). Определим функцию $\Phi(\varepsilon,t)$, как в примере 2, задав $g(t)$ в виде

$$g(t) = (g_0 - g_\infty)e^{-kt} + g_\infty. \tag{11}$$

Здесь $g_0 = y(0) + 0{,}01$, $g_\infty = 0{,}1$ и $k = 0{,}5$. На рис. 2 приведены результаты переходных процессов по $y(t)$, $u(t)$ и $f(t)$. Колебания сигнала управления на рис. 2 вызваны наличием возмущения f. Причем, как видно из рис. 2 (справа), после 3 с с начала работы системы амплитуда колебаний сигнала управления соизмерима с величиной возмущения. На рис. 3 представлены результаты моделирования при отсутствии возмущения ($f = 0$). Таким образом, для стабилизации объекта в заданном множестве не требуется большого значения управляющего сигнала.

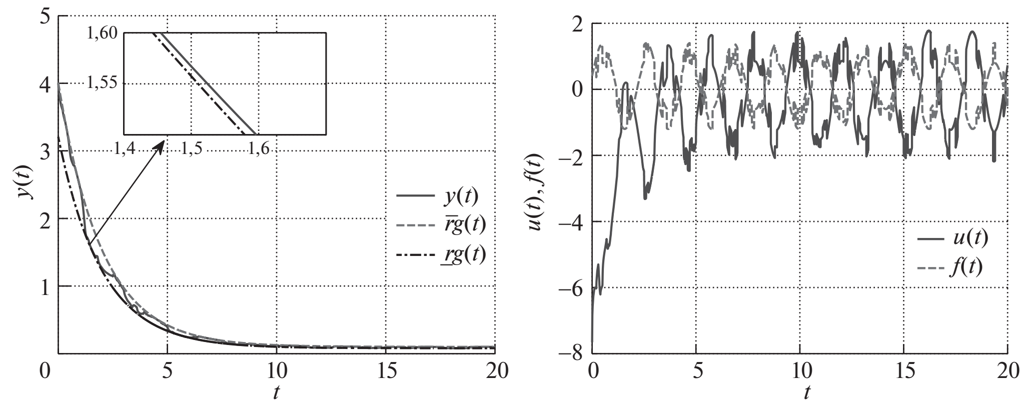

Рис. 2. Переходные процессы по $y(t)$ (слева), $u(t)$ и $f(t)$ (справа) при $g(t)$ вида (11).

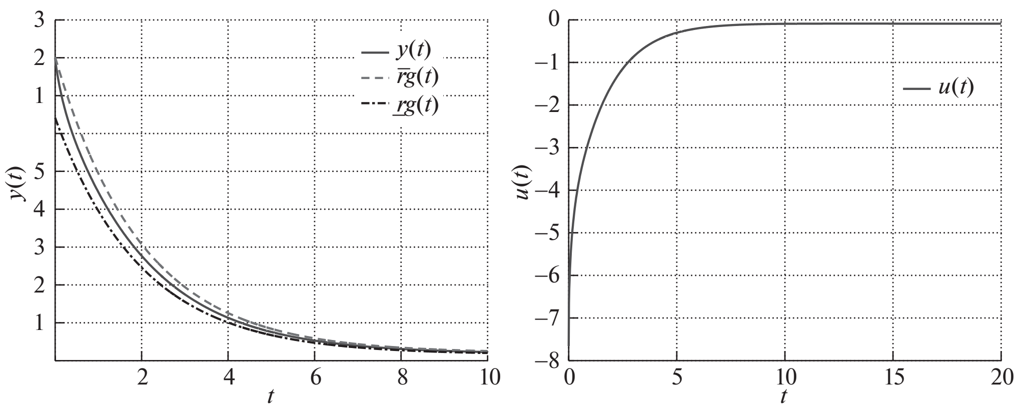

Рис. 3. Переходные процессы по $y(t)$ (слева) и $u(t)$ (справа) для $g(t)$ вида (12) при отсутствии возмущения ($f = 0$).

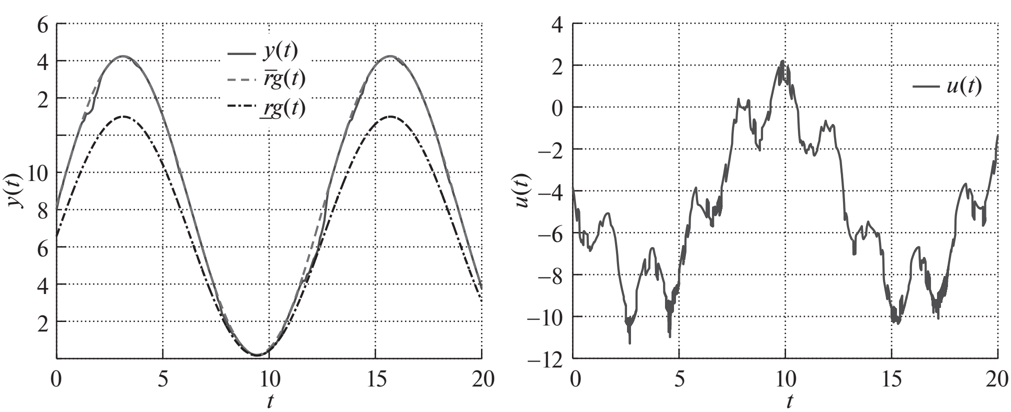

Рис. 4. Переходные процессы по $y(t)$ (слева) и $u(t)$ (справа) для $g(t)$ вида (12).

Отметим, что на рис. 2 (и в последующих примерах) выходные сигналы не достигают границ желаемого множества, что согласуется с теоретическими выводами и что читатель может легко проверить путем моделирования. Для иллюстрации сказанного на рис. 2 приведен фрагмент рисунка в увеличенном масштабе.

В отличие от [13] и рис. 2, 3, где границы целевого множества сходятся к некторым числам, теперь обеспечим принадлежность выходного сигнала $y(t)$ ранее заданному множеству $0{,}8g(t) < y(t) < g(t)$, где функция $g(t)$ не имеет предела:

$$g(t) = g_0 \sin(kt) + g_0 + g_\infty. \tag{12}$$

На рис. 4 приведены результаты моделирования по $y(t)$ и $u(t)$.

Из рис. 2–4 видно, что при $\underline{r} > 0$ и $\overline{r} > 0$ значение $y = 0$ недостижимо в силу преобразования координат из примера 2. Нулевое значение y может быть достигнуто только при $\underline{r} < 0$ и $\overline{r} > 0$ (с учетом $g(t) > 0$). Однако в таком случае заданное множество будет более грубым по сравнению с множествами из рис. 2–4, поскольку нижняя граница желаемого множества будет находиться в отрицательной области значений y. Данная проблема будет преодолена в последующих примерах при использовании замены координат из примера 3.

5. Управление объектом по выходу с секторной нелинейностью в условиях возмущений

Рассмотрим объект управления вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + G\varphi(x) + Bu + Df, \\ y &= Lx. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^v$ $(v \leqslant m)$, $f \in \mathbb{R}^l$ — неизвестная ограниченная функция, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times l}$ и $L \in \mathbb{R}^{v\times n}$ — известные матрицы, неизвестная нелинейность $\varphi(x) \in \mathbb{R}^k$ удовлетворяет условию $|\varphi(x)| \leqslant C|x|$, $C > 0$ — известная константа. Пара (A, B) управляема и пара (L, A) наблюдаема. Объект (13) имеет строгую относительную степень (от англ. «strict relative degree»), равную единице (т.е. $L_iB_j \neq 0$, где L_i — i-я строка матрицы L и B_j — i-я строка матрицы B, $i, j = 1, \ldots, n$ [20, 21]). Требуется разработать алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия (2).

Зададим закон управления в виде

$$u = K_1 y + K_2 \varepsilon, \tag{14}$$

где $K_1 \in \mathbb{R}^{m\times v}$ и $K_2 \in \mathbb{R}^{m\times v}$ выбираются разработчиком. В частности, K_1 и K_2 можно выбирать при условии, что матрицы $A + BK_1L$ и LBK_2 гурвицевы. Принимая во внимание (3) и (14), а также добавив в полученном выражении слагаемые $T_1Lx - T_1\Phi(\varepsilon, t) = 0$ и $T_2Lx - T_2\Phi(\varepsilon, t) = 0$ (которые справедливы в силу (3) и второго уравнения (13)), перепишем (4) и (13) в виде

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = (A + BK_1L + T_1L)x + BK_2\varepsilon + G\varphi(x) + Df - T_1\Phi(\varepsilon, t),\\
&\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\Bigg[LBK_2\varepsilon + (LA + LBK_1L + T_2L)x +\\
&\qquad + LG\varphi(x) + LDf - \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t} - T_2\Phi(\varepsilon,t)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Здесь $T_1 \in \mathbb{R}^{n\times v}$, $T_2 \in \mathbb{R}^{v\times v}$, I — единичная матрица. Введение матриц T_1 и T_2 позволяет исследовать неустойчивые объекты (13).

Из второго уравнения (15) следует, что условие $v \leqslant m$ (т.е. $\dim\varepsilon \leqslant \dim u$) и единичная строгая относительная степень (13) позволит закону управления (14) обеспечить ограниченность $\varepsilon(t)$. Введем новые обозначения

$$
\begin{aligned}
&x_e = \mathrm{col}\,\{x,\ \varepsilon\},\quad f_e = \mathrm{col}\left\{f,\ \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t},\ \Phi(\varepsilon,t)\right\},\\
&A_e(\varepsilon,t) = \begin{bmatrix} A + BK_1L + T_1L & BK_2 \\ \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}(LA + LBK_1L + T_2L) & \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} LBK_2\end{bmatrix},\\
&G_e(\varepsilon,t) = \begin{bmatrix} G \\ \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} LG\end{bmatrix},\\
&D_e(\varepsilon,t) = \begin{bmatrix} D & 0 & -T_1 \\ \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} LD & -\left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} & -\left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} T_2\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

и перепишем (15) в виде

$$
\dot{x}_e = A_e(\varepsilon,t)x_e + G_e(\varepsilon,t)\varphi(x) + D_e(\varepsilon,t)f_e. \tag{17}
$$

Т е о р е м а 3. *Предположим, что для преобразования* (3) *выполнены условия* (а)–(г), $\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon} > 0$ *для любых* ε *и* t. *Пусть для заданных* $\alpha > 0$, K_1, K_2, T_1 *и* T_2 *существует коэффициент* $\beta > 0$ *и матрица* $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ *такие, что выполнено матричное неравенство*

$$
\begin{bmatrix} A_e(\varepsilon,t)^{\mathrm{T}}P + PA_e(\varepsilon,t) + \alpha P + C^2E^{\mathrm{T}}E & PG_e(\varepsilon,t) & PD_e(\varepsilon,t) \\ * & -1 & 0 \\ * & * & -\beta I\end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{18}
$$

Здесь "$*$" определяет симметричный блок симметричной матрицы, $E = [I\ 0]$. *Тогда закон управления* (14) *обеспечивает выполнение целевого условия* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для анализа устойчивости (17) зададим функцию Ляпунова в виде $V = x_e^{\mathrm{T}} P x_e$, где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$. С учетом (17), подставив выражение для V в неравенство

$$\dot{V} + \alpha V - \beta f_e^{\mathrm{T}} f_e \leqslant 0, \tag{19}$$

получим

$$\begin{gathered} x_e^{\mathrm{T}} \left[A_e(\varepsilon,t)^{\mathrm{T}} P + P A_e(\varepsilon,t) + \alpha P\right] x_e + \\ + 2 x_e^{\mathrm{T}} P G_e(\varepsilon,t) \varphi(x) + 2 x_e^{\mathrm{T}} P D_e(\varepsilon,t) f_e - \beta f_e^{\mathrm{T}} f_e \leqslant 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Введем новый вектор $z = \mathrm{col}\,\{x_e, \varphi(x), f_e\}$ и перепишем неравенство (20) в виде

$$z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A_e(\varepsilon,t)^{\mathrm{T}} P + P A_e(\varepsilon,t) + \alpha P & P G_e(\varepsilon,t) & P D_e(\varepsilon,t) \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} z \leqslant 0. \tag{21}$$

По условию задачи $\varphi^2(x) \leqslant C^2 x_e^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} E x_e$. Перепишем данное условие в виде

$$z^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} C^2 E^{\mathrm{T}} E & 0 & 0 \\ * & -1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \geqslant 0. \tag{22}$$

Согласно S-процедуре неравенства (21) и (22) будут одновременно выполнены, если будет выполнено неравенство (18). Значит, из условия (19) функция $x_e(t)$ ограничена, следовательно, сигналы $x(t)$ и $\varepsilon(t)$ ограничены. Тогда закон управления (14) будет ограниченным. В силу теоремы 1 цель управления (3) будет выполнена. Теорема 3 доказана.

П р и м е р 6. Продемонстрируем качество управления на объекте с двумя входами и двумя выходами со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad \varphi(x) = \sin(x),$$

возмущение $f(t)$ определено в (10).

Параметры регулятора (14) зададим в виде $K_1 = 0{,}01 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $K_2 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -1{,}75 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Дополнительно выберем $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ и $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Пусть $\Phi(\varepsilon, t) = \operatorname{diag}\{\Phi_1(\varepsilon_1, t), \Phi_2(\varepsilon_2, t)\}$, где Φ_i определены, как в примере 3, т.е.

$$\Phi_i(\varepsilon_i, t) = \frac{\overline{g}_i(t)e^{\varepsilon_i} + \underline{g}_i(t)}{e^{\varepsilon_i} + 1}, \quad i = 1, 2.$$

Значит, $\Phi(\varepsilon, t) > 0$ для любых ε и t. Тогда

$$\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i, t)}{\partial \varepsilon_i} = \frac{e^{\varepsilon_i}(\overline{g}_i(t) - \underline{g}_i(t))}{(e^{\varepsilon_i} + 1)^2} > 0,$$

так как $\overline{g}_i(t) > \underline{g}_i(t)$. Дополнительно, $\left(\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i,t)}{\partial \varepsilon_i}\right)^{-1} \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$ и наименьшее значение $\left(\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i,t)}{\partial \varepsilon_i}\right)^{-1}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{4}{\overline{g}_i(t) - \underline{g}_i(t)} > 0$. Согласно [22], если выполнено линейное матричное неравенство в вершинах политопа, то и внутри политопа линейное матричное неравенство будет выполнено. В рассматриваемом случае при каждом фиксированном $\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i,t)}{\partial \varepsilon_i}$ матричное неравенство (18) является линейным. Однако политоп не замкнутый, так как $\left(\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i,t)}{\partial \varepsilon_i}\right)^{-1} \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$. Численное моделирование при увеличении $\left(\frac{\partial \Phi_i(\varepsilon_i,t)}{\partial \varepsilon_i}\right)^{-1}$ показало, что собственные числа матрицы P сходятся к некоторым положительным значениям. В вершинах $\frac{4}{\overline{g}_i(t) - \underline{g}_i(t)}$ матричное неравенство (18) также выполнено.

Зададим параметры функции $\Phi(\varepsilon, t)$ в виде

$$\begin{aligned} &\overline{g}_1(t) = (g_0 - g_1)e^{-kt} + g_1, \qquad \overline{g}_2(t) = (g_0 - g_2)\cos(kt) + g_4, \\ &\underline{g}_1(t) = (g_0 - g_2)e^{-kt} + g_3, \qquad \underline{g}_2(t) = \cos(kt) + g_5, \end{aligned} \tag{23}$$

где $g_0 = \sqrt{y^{\mathrm{T}}(0)y(0)} + 0{,}01$, $g_1 = 0{,}1$, $g_2 = 2$, $g_3 = -0{,}2$, $g_4 = g_0 - 0{,}1$, $g_5 = 0{,}8$ и $k = 0{,}5$.

На рис. 5, 6 приведены результаты переходных процессов по $y_1(t)$, $y_2(t)$ и $u(t) = \operatorname{col}\{u_1(t), u_2(t)\}$ при $x(0) = \operatorname{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$.

Исследования робастности замкнутой системы с законом управления $u = K_1 y + K_2 \varepsilon$ по отношению к параметрам объекта (5) путем моделирования показали, что замкнутая система сохраняет устойчивость и обеспечивает выполнение цели управления при $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ и $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{\varphi 1} & g_{\varphi 2} & g_{\varphi 3} \end{bmatrix}$, где $a_1 \in [-5; 0{,}1]$, $a_2 \in [-5; -2]$, $a_3 \in [-5; -3]$, $b \in [0{,}5; 10]$ и $g_{\varphi 1} \in [-3; 3]$, $g_{\varphi 2} \in [-3; 3]$ и $g_{\varphi 3} \in [-3; 3]$.

Исследование робастности по отношению к начальным значениям объекта показало следующее. Согласно условиям (3) и (a) начальные значения $y_i(0)$ должны быть согласованы с неравенствами $\underline{g}_i(0) < y_i(0) < \overline{g}_i(0)$, $i = 1, 2$. Однако начальные условия могут иметь существенную неопределенность, и если они оказались на границе заданной области или за ее пределами, то закон

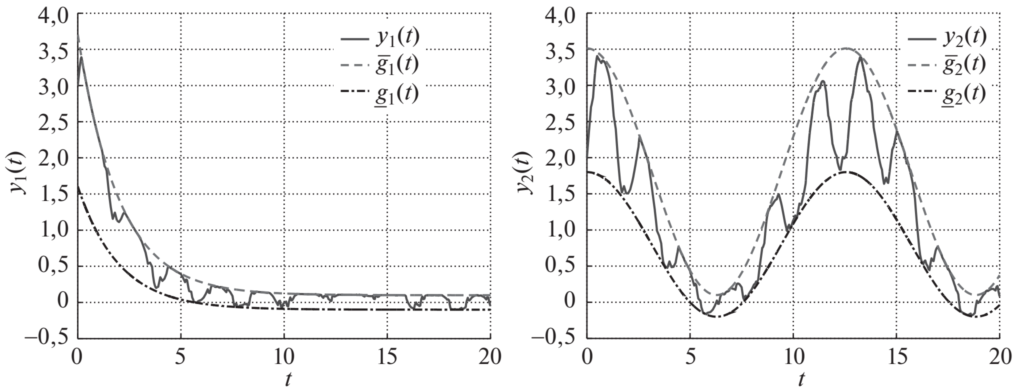

Рис. 5. Переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_2(t)$ для функции $\Phi(\varepsilon, t)$ с параметрами (23) при $x(0) = \mathrm{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$.

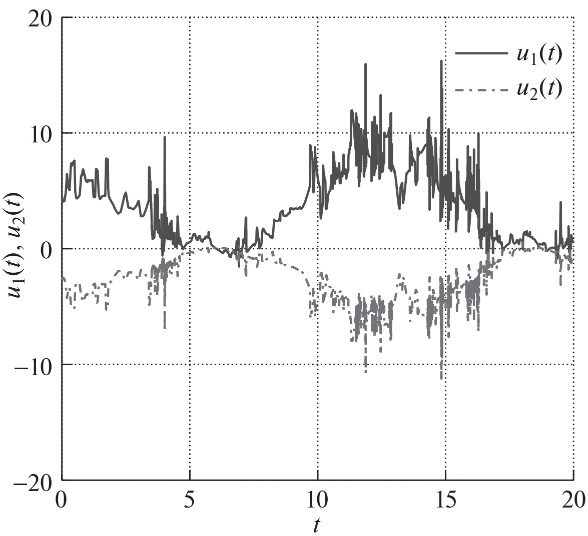

Рис. 6. Переходные процессы по $u(t) = \mathrm{col}\{u_1(t), u_2(t)\}$ для функции $\Phi(\varepsilon, t)$ с параметрами (23) при $x(0) = \mathrm{col}\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1\}$.

управления будет неработоспособным в силу того, что обратная функция не существует при таких значениях (см. пример 3). Для решения данной проблемы $\underline{g}_i(t)$ и $\overline{g}_i(t)$ в (23) можно задавать с «запасом» в начальный момент времени, например в виде

$$\begin{aligned}
&\overline{g}_1(t) = (g_0 - g_1)e^{-kt} + g_1 + g_6 e^{-k_0 t}, \qquad \overline{g}_2(t) = (g_0 - g_2)\cos(kt) + g_4 + g_6 e^{-k_0 t},\\
&\underline{g}_1(t) = (g_0 - g_2)e^{-kt} + g_3 - g_6 e^{-k_0 t}, \qquad \underline{g}_2(t) = \cos(kt) + g_5 - g_6 e^{-k_0 t},
\end{aligned} \tag{24}$$

где $g_6 > 0$ и $k_0 > 0$. Причем для покрытия большой области начальных значений с обеспечением нахождения выходных переменных объекта в множестве (23) необходимо g_6 и k_0 выбирать достаточно большими числами. Результаты моделирования по выходным сигналам $y_1(t)$ и $y_2(t)$ представлены

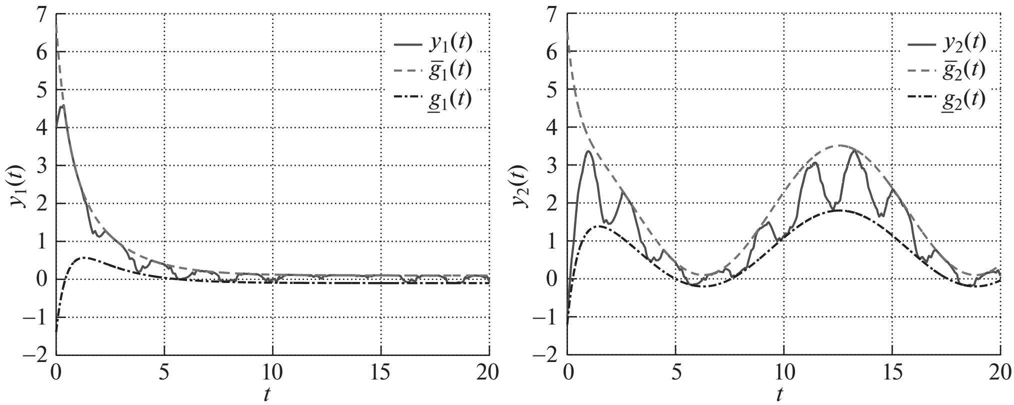

Рис. 7. Переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_2(t)$ для функции $\Phi(\varepsilon, t)$ с параметрами (24) при $x(0) = \mathrm{col}\{\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -1\}$.

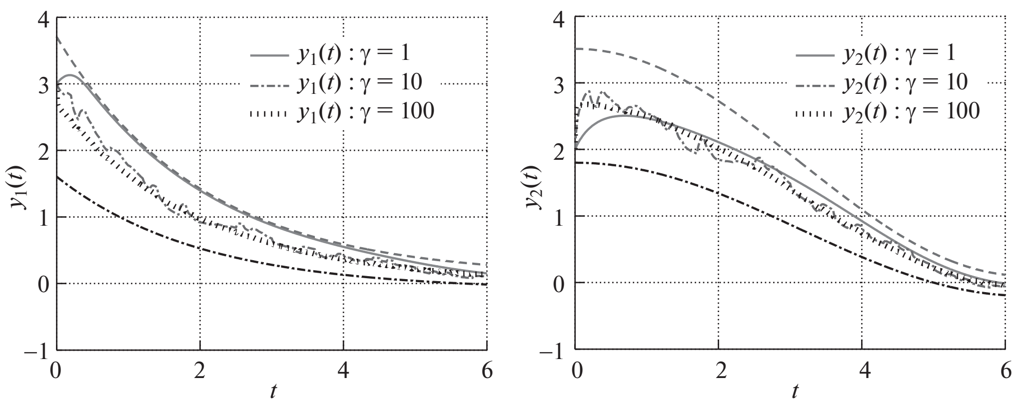

Рис. 8. Переходные процессы по $y_1(t)$ и $y_2(t)$ при $\gamma = 1$, $\gamma = 10$ и $\gamma = 100$ при $x(0) = \mathrm{col}\{1\ 1\ 0\}$.

на рис. 7 при $g_6 = 3$ и $k_0 = 2$ (значения g_6 и k_0 не выбраны достаточно большими числами для иллюстрации результата на рисунке) в (24), а также $x(0) = \mathrm{col}\{\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -1\}$.

Анализ результатов моделирования также показал, что если:

1) время переходного процесса по $y(t)$ соизмеримо со временем переходного процесса по $\varepsilon(t)$;

2) функция $|f(t)|$ принимает большие значения,

то переходные процессы по y могут протекать почти на границах $\overline{g}(t)$ и $\underline{g}(t)$. Из выражения $\varepsilon = \ln \frac{\underline{g} - y}{y - \overline{g}}$ следует, что величина $|\varepsilon(t)|$ может принимать большие значения, а значит, возрастет вычислительная нагрузка на систему управления. В результате увеличивается работа Matlab/Simulink, а иногда Matlab/Simulink выдает ошибку в вычислениях. Для предотвращения данной проблемы рекомендуется выбирать настраиваемые параметры так, чтобы переходные процессы по $\varepsilon(t)$ протекали быстрее, чем по $y(t)$. Это также позволит повысить робастность по отношению к параметрической неопределенности в объекте и влиянию возмущения f. Так, из рис. 8 видно, что при увеличении $\gamma > 0$ в законе управления $u = K_1 y + \gamma K_2 \varepsilon$ переходные процессы по y отдаляются от границ $\underline{g}(t)$ и $\overline{g}(t)$.

6. Динамический регулятор для объектов со скалярным входным и выходным сигналами и произвольной относительной степенью

Результаты разделов 4 и 5 справедливы при относительной степени объекта, не превышающей единицы. Хорошо известно, что управление объектами со скалярными входными и выходными сигналами и с произвольной относительной степенью в условиях параметрической неопределенности является сложной задачей относительно обоснования работоспособности алгоритма, см., например, [23, 24]. Поскольку основная цель статьи — обеспечение целевого условия (2) с применением нового преобразования (3), то в настоящем разделе ради простоты выводов рассматривается объект со скалярными входным и выходным сигналами и с известными параметрами, но с произвольной относительной степенью. В численном примере будет продемонстрирована работоспособность алгоритма по отношению к параметрической неопределенности.

Пусть объект управления описывается уравнением

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t). \tag{25}$$

Здесь $y \in \mathbb{R}$ — выходной сигнал, $u \in \mathbb{R}$ — сигнал управления, $f \in \mathbb{R}$ — ограниченное возмущение, $Q(p)$ и $R(p)$ — линейные дифференциальные операторы с известными коэффициентами, $Q(\lambda)$ — гурвицевый полином, λ — комплексная переменная, $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования. Требуется разработать алгоритм управления, обеспечивающий выполнение целевого условия (2).

Подставив $y(t)$ из (25) в (4), получим

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \left(\frac{pR(p)}{Q(p)} u(t) + \frac{pD(p)}{Q(p)} f(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}\right). \tag{26}$$

Закон управления $u = -\frac{Q(p)}{pR(p)} K\varepsilon$, где $K > 0$, позволил бы свести уравнение (26) к виду $\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \left(-K\varepsilon + \frac{pD(p)}{Q(p)} f(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial t}\right)$, решение которого было бы ограниченным при $\frac{\partial \Phi(\varepsilon,t)}{\partial \varepsilon} > 0$. Обозначим относительную степень объекта (25) через $\rho = \deg Q(p) - \deg R(p)$. Тогда приведенный закон управления не реализуем при $\rho > 1$ из-за требований к наличию $\rho - 1$ производных от сигнала $\varepsilon(t)$. Поэтому зададим закон управления в виде

$$u = -\frac{Q(p)}{R(p)[p(\mu p + 1)^{\rho - 1} + a\mu]} K\varepsilon. \tag{27}$$

Здесь достаточно малое число $\mu > 0$ и коэффициент $a > 0$ выбираются из условия гурвицевости полинома $\lambda(\mu\lambda + 1)^{\rho-1} + a\mu$. Учитывая (27), перепишем (25) и (26) как

$$y(t) = -K\frac{1}{p(\mu p+1)^{\rho-1}+a\mu}\varepsilon(t) + \frac{D(p)}{Q(p)}f(t), \tag{28}$$

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\left(-K\varepsilon - K\frac{p-p(\mu p+1)^{\rho-1}-a\mu}{p(\mu p+1)^{\rho-1}+a\mu}\varepsilon + \phi\right), \tag{29}$$

где $\phi = \frac{pD(p)}{Q(p)}f(t) - \frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial t}$ — ограниченная функция.

Теорема 4. Пусть для преобразования (3) *выполнены условия* (а)–(г), $\frac{\partial\Phi(\varepsilon,t)}{\partial\varepsilon} > 0$ *для любых* ε *и* t. *Тогда существуют коэффициенты* μ_0 *и* a *такие, что при* $\mu < \mu_0$ *полином* $\lambda(\mu\lambda+1)^{\rho-1}+a\mu$ *гурвицев и закон управления* (27) *обеспечивает выполнение целевого условия* (2).

Доказательство. Рассмотрим уравнение (29), которое является регулярно возмущенным при малом параметре μ. Перепишем (29) при $\mu = 0$ в виде

$$\dot{\overline{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial\Phi(\overline{\varepsilon},t)}{\partial\overline{\varepsilon}}\right)^{-1}(-K\overline{\varepsilon}+\phi). \tag{30}$$

Для анализа устойчивости (30) зададим функцию Ляпунова как $V = 0{,}5\overline{\varepsilon}^2$. Проверим условие $\dot{V} + 2\alpha V\left(\frac{\partial\Phi(\overline{\varepsilon},t)}{\partial\overline{\varepsilon}}\right)^{-1} - \beta\left(\frac{\partial\Phi(\overline{\varepsilon},t)}{\partial\overline{\varepsilon}}\right)^{-1}\phi^2 < 0$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Подставив V и (30) в последнее неравенство, получим $-(K-\alpha)\overline{\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon}\phi - \beta\phi^2 < 0$. Данное неравенство будет выполнено при выполнении условия $K > \alpha$ и $(K-\alpha)\beta > 0{,}25$ (см. доказательство теоремы 2). Поскольку α и β — произвольные числа, то всегда можно обеспечить выполнение данных условий при заданном K. Следовательно, решение уравнения (30) предельно ограниченное. Значит, согласно теореме 2.2 из [25] существует μ_0 такое, что при $\mu < \mu_0$ выполнено условие $|\overline{\varepsilon}(t) - \varepsilon(t)| < O(\mu)$, где $\lim_{\mu\to 0} O(\mu) = 0$. В результате при $\mu < \mu_0$ решение уравнения (29) также предельно ограниченное. Тогда в силу ограниченности $f(t)$ и $\varepsilon(t)$, а также гурвицевости $Q(\lambda)$ и $\lambda(\mu\lambda+1)^{\rho-1}+a\mu$ сигнал $y(t)$ будет ограниченным из (28). Значит, закон управления u будет ограничен из (27). Тогда из теоремы 1 следует, что целевое условие (3) будет выполнено. Теорема 4 доказана.

Пример 7. Пусть параметры объекта управления (25) определены в виде $Q(p) = (p+1)^3$, $R(p) = 1$ и возмущение $f(t)$ задано в (10).

Параметры регулятора (14) зададим в виде $K = 3$, $\mu = 0{,}01$ и $a = 0{,}1$. Тогда закон управления (27) будет выглядеть как

$$u = -\frac{3(p+1)^3}{p(0{,}01p+1)^2+10^{-3}}\varepsilon. \tag{31}$$

Зададим функцию Φ, как в примере 3, где $\Phi(\varepsilon,t) = \frac{\overline{g}(t)e^{\varepsilon}+\underline{g}(t)}{e^{\varepsilon}+1}$ и

$$\overline{g}(t) = \begin{cases} 2\cos(t)+0{,}2, & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\\ 2{,}2, & t > 2\pi; \end{cases} \qquad \underline{g}(t) = \begin{cases} 2\cos(t)-0{,}2, & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\\ 1{,}8, & t > 2\pi. \end{cases}$$

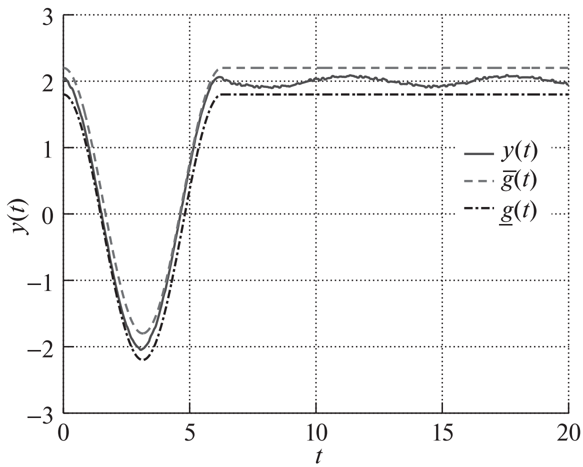

Рис. 9. Переходные процессы по $y(t)$.

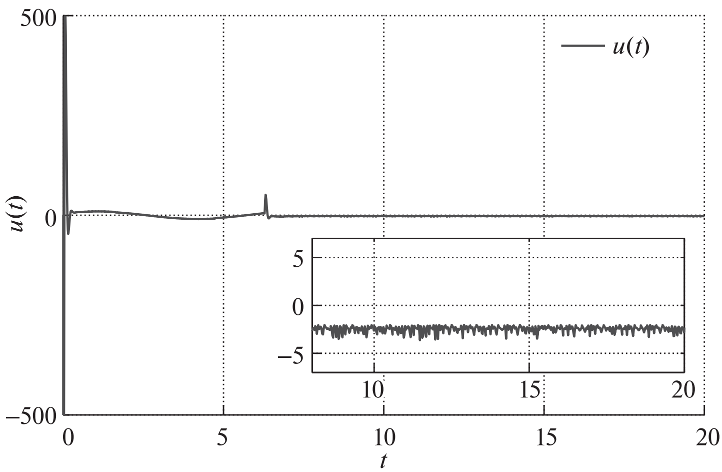

Рис. 10. График сигнала $u(t)$.

Результаты моделирования показали, что закон управления (31) обеспечивает цель управления (2). Моделирование также показало, что замкнутая система робастна по отношению к параметрическим неопределенностям. Так, на рис. 9, 10 приведены результаты переходных процессов по $y(t)$ и $u(t)$ при $y(0) = 2$, $py(0) = p^2y(0) = 1$, неустойчивом полиноме $Q(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ и регуляторе (31). Начальные всплески сигнала управления обусловлены рассогласованием начальных условий в регуляторе и в объекте управления. Однако после отработки регулятором рассогласования начальных условий дальнейший график управления принимает «небольшие» значения, которые соответствуют выходному сигналу в заданном множестве.

7. Заключение

Разработан новый метод управления динамическими системами, позволяющий гарантировать нахождение выходной переменной объекта управления в заданном множестве. Для решения задачи предложена специальная замена координат, позволяющая свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход-состоянию новой расширенной динамической системы без ограничений. Приведены примеры замены координат и алгоритмы управления линейными объектами и динамическими системами с секторной нелинейностью. Полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим эффективность предложенного метода и подтверждающими аналитические выводы.

Отметим, что основной результат, сформулированный в теореме 1, справедлив для объектов с произвольной размерностью входных и выходных сигналов. Однако решение, полученное в разделе 5, не позволяет управлять объектами с размерностью выходного сигнала больше, чем размерность сигнала управления. Для управления такими объектами существует ряд решений, см., например, [26, 27] и список литературы в них. Применение методов [26, 27] и теоремы 1 может быть отдельным исследованием по управлению объектами с размерностью выходного сигнала больше, чем размерность сигнала управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
2. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. “Автоматика и телемеханика”. В 2-х ч. *Под ред. А.А. Воронова.* М.: Высш. шк., 1986.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления, учебное пособие. М.: Ленанд, 2019.
4. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 655–664.
6. *Whidborne J.F., Amar N.* Computing the Maximum Transient Energy Growth // BIT Numerical Math. 2011. V. 51. No. 2. P. 447–557.
7. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // АиТ. 2015. № 6. С. 18–41.

   Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 6. P. 957–976.
8. *Tao G.* Adaptive Control Design and Analysis. John Wiley & Sons, 2003.
9. *Андриевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л.* Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2018.
10. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
11. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014.
12. *Miller D.E., Davison E.J.* An Adaptive Controller Which Provides an Arbitrarily Good Transient and Steady-State Response // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 1. P. 68–81.

13. *Bechlioulis C.P., Rovithakis G.A.* Robust Adaptive Control of Feedback Linearizable MIMO Nonlinear Systems With Prescribed Performance // IEEE Trans. Autom. Control. 2008. V. 53. No. 9. P. 2090–2099.
14. *Bu X., He G., Wei D.* A new prescribed performance control approach for uncertain nonlinear dynamic systems via back-stepping // J. Franklin Institut. 2018. V. 355. No. 17. P. 8510–8536.
15. *Yin Z., Luo J., Wei C., Yin Z., Luo J., We C.* Robust Prescribed Performance Control for Euler-Lagrange Systems with Practically Finite-Time Stability // Eur. J. Control. 2020. V. 52. P. 1–10.
16. *Du P., Zhou Q., Liang H., Du P., Zhou Q., Liang H.* Neural adaptive prescribed performance control for interconnected nonlinear systems with output dead zone // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2019. https://doi.org/10.1002/rnc.4802
17. *Павлов Г.М., Меркурьев Г.В.* Автоматика энергосистем. СПб.: Издание Центра подготовки кадров РАО "ЕЭС России", 2001.
18. *Буяхияуй К., Григорьев Л.И., Лаауад Ф., Хелласи А.* Оптимальное нечеткое управление для снижения энергопотребления в дистилляционных колоннах // АиТ. 2005. № 2. С. 36–45.

    Bouyahiaoui C., Grigoriev L.I., Laaouad F., Khelassi A. Optimal Fuzzy Control to Reduce Energy Consumption in Distillation Columns // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 2. P. 200–208.
19. *Ruderman M., Krettek J., Hoffmann F., Bertram T.* Optimal State Space Control of DC Motor // Proc. 17th World Congress The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, 2008. P. 5796–5801.
20. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. Springer, 1995.
21. *Фомичев В.В., Ильин А.В., Коровин С.К.* Методы робастного обращения динамических систем. М.: Физматлит, 2009.
22. *Fridman E.* A refined input delay approach to sampled-data control // Automatica. 2010. V. 46. P. 421–427.
23. *Бобцов А.А.* Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом // АиТ. 2003. № 6. С. 104–113.

    Bobtsov A.A. A Robust Control Algorithm for Tracking the Reference Signal // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 6. P. 943–950.
24. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // АиТ. 2007. № 7. С. 103–115.

    Tsykunov A.M. Robust Control Algorithms with Compensation of Bounded Perturbations // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 7. P. 1213–1224.
25. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
26. *Liu X., Gu G., Zhou K.* Robust stabilization of MIMO nonlinear systems by backstepping // Automatica. 1999. V. 35. P. 987–992.
27. *Estrada A., Fridman L., Iriarte R.* Combined backstepping and HOSM control design for a class of nonlinear MIMO systems // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2017. V. 27. No. 4. P. 566–581.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 23.03.2020

После доработки 17.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020