

Нелинейные системы

© 2021 г. М.Э. БУЗИКОВ (me.buzikov@physics.msu.ru),

А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.rssi.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПЕРЕХВАТ ПОДВИЖНОЙ ЦЕЛИ МАШИНОЙ ДУБИНСА ЗА КРАТЧАЙШЕЕ ВРЕМЯ¹

Задача перехвата движущейся по предписанной траектории цели машиной Дубинса сформулирована и формализована как задача оптимального управления по критерию быстродействия с произвольным направлением скорости машины при перехвате. Уточнены имеющиеся в литературе условия, при которых оптимальной траекторией является геодезическая линия, проведенная из начального положения машины в точку перехвата. Получены алгебраические уравнения для вычисления оптимального времени перехвата. На основе этих уравнений произведен синтез оптимального управления. Разработан программный модуль для построения оптимальных траекторий машины при различных траекториях движения цели.

Ключевые слова: машина Дубинса, множество достижимости, перехват подвижной цели, движение в условиях ветра, задача быстродействия, геодезическая линия.

DOI: 10.31857/S0005231021050019

1. Введение

Первые работы по поиску линии, соединяющей две заданные точки и имеющей ограниченную кривизну и минимальную длину, принадлежат А.А. Маркову. В [1] он рассмотрел четыре задачи о прокладке железнодорожных путей. Первая задача была сформулирована как поиск линии, соединяющей две точки на плоскости и имеющей кратчайшую длину и ограниченную кривизну, причем в первой точке фиксировано направление выхода этой линии. Соответствующая кратчайшая траектория называется геодезической линией. Не умаляя общности, можно считать минимальный радиус кривизны такой линии единичным.

Первая задача Маркова может быть переформулирована как задача наискорейшего достижения финальной точки подвижным объектом с постоянной по модулю скоростью и ограниченной маневренностью. В такой постановке задачу рассматривал Р. Айзекс в [2] для иллюстрации примера универсальной поверхности в задаче о шофере-убийце с неподвижным пешеходом. В [3] Ю.И. Бердышев, используя принцип максимума Понтрягина, получил полное аналитическое решение этой задачи в том случае, когда рассматриваемый объект ограниченной маневренности точечный. Помимо этого, в [3] приведено

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Молодежной научной школы Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

решение задачи о наискорейшем попадании из заданного начального состояния на окружность с нормальным к ней в конечный момент времени вектором скорости при условии достаточной удаленности начального положения объекта от центра этой окружности. Результат Ю.И. Бердышева дополняет результаты А.А. Маркова аналитическими выражениями для оптимального управления. Решение первой задачи Маркова получено и для некоторых более общих случаев: когда подвижный объект имеет форму окружности или отрезка [4, 5]; когда вводится дополнительное управление производной модуля скорости [6, 7]; когда на подвижный объект действует постоянное возмущение [8].

В [9] Л.Э. Дубинс произвел классификацию оптимальных траекторий движения в задаче поиска линии наименьшей длины и ограниченной кривизны при заданном направлении выхода из начальной точки и заданном направлении прихода в конечную точку. Подробное аналитическое решение этой задачи получил Т. Pecsvaradi в [10]. Позднее этот результат был переоткрыт другой группой исследователей [11]. Кратчайшую траекторию в такой задаче называют «путь Дубинса», а соответствующий подвижный объект с ограниченной маневренностью называют «машина Дубинса» (первые аналогии с машиной проводил, по-видимому, Р. Айзекс).

Для некоторых приложений [12, 13], использующих модель машины Дубинса, важную роль занимает понятие множества достижимости. В декартовых координатах (x, y) граница множества достижимости «в момент» описана в [14], а «к моменту» — в [15]. Построение и анализ множеств достижимости в трехмерном пространстве состояний для машины Дубинса произвели В.С. Пацко и др. [16, 17]. В данной работе использованы некоторые свойства проекции на декартову плоскость множества достижимости «в момент» для машины Дубинса (замкнутость, непрерывность границ или их частей, смена связности).

В отличие от [18] в настоящей работе рассматривается не игровая задача наискорейшего перехвата подвижной цели машиной Дубинса. Предполагается, что цель движется по произвольной и заранее известной непрерывной траектории. В сравнении с [19, 20] управление считается ограниченной функцией времени.

Подобная задача встречалась сразу в нескольких работах, и авторы ограничивались лишь частичным ее решением. В [21] для игры «двух автомобилей» установлены необходимые и достаточные условия поимки цели при любых начальных условиях. В неигровом случае предписанных движений цели эти условия носят достаточный характер. В [22] установлены достаточные условия того, что оптимальной траекторией будет линия типа «дуга-прямая». Эти условия накладывают ограничения на отношение минимального радиуса кривизны траектории машины и расстояния между целью и машиной в начальный момент времени. В [7, 23] синтезировано управление для перехвата цели по геодезической линии, проведенной из начала движения машины в точку перехвата, причем полагается, что цель движется по прямой с постоянной скоростью. В [24] приведен алгоритм поимки движущейся по прямой цели машиной Дубинса, которая выбирает кратчайшую траекторию из класса «дуга-прямая».

Авторы работ [25, 26] выделили сразу несколько утверждений, связанных с рассматриваемой в настоящей работе задачей. Во-первых, они установили, что если траектория цели не попадает в круги единичного радиуса, которые касаются вектора скорости машины Дубинса в начальный момент времени, то перехват за кратчайшее время осуществляется по геодезической линии. Во-вторых, если траектория все же попадает в эти круги, то возможны случаи, когда оптимальный перехват осуществляется не по геодезической линии. Также авторы приводят оценки сверху и снизу для оптимального времени перехвата.

В некоторых работах рассмотрены задачи бокового перехвата подвижной цели. В таких задачах угол перехвата фиксирован в конечный момент времени. Например, в [27] получено решение для задачи наискорейшего перехвата под прямым углом, а в [28] рассмотрен случай перехвата за минимальное время, заканчивающийся попаданием в движущуюся по окружности цель сзади. В обеих работах предполагается, что цель достаточно удалена от объекта управления в начальный момент времени.

2. Постановка задачи

Будем описывать управляемый подвижный объект моделью машины Дубинса [3, 15]. Выберем единицы измерения длины и времени так, чтобы скорость и минимальный радиус кривизны траектории машины были равны единице. В этом случае динамика машины в декартовой системе координат описывается следующей системой:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = \cos \varphi; & \dot{\varphi} = u; \\ \dot{y} = \sin \varphi; & |u(t)| \leq 1. \end{cases}$$

Здесь $(x(t), y(t))$ — положение машины на декартовой плоскости, $\varphi(t)$ — угол ее скорости с осью абсцисс, $u(t)$ — управление в момент времени t . Положим все начальные условия для системы (2.1) фиксированными:

$$(2.2) \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть непрерывная вектор-функция $E(t) = (x_E(t), y_E(t))$ задает траекторию движения цели на декартовой плоскости. Терминальные условия поимки выглядят следующим образом:

$$(2.3) \quad x_T \stackrel{\text{def}}{=} x(T) = x_E(T), \quad y_T \stackrel{\text{def}}{=} y(T) = y_E(T).$$

Здесь $T \in \mathbb{R}_0^+$ — время движения из начальной точки в точку перехвата. Поставим задачу поимки цели за кратчайшее время как задачу поиска оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций:

$$J[u] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T dt \rightarrow \min_u.$$

Из теоремы 1 статьи [14] следует, что класса кусочно-постоянных функций будет достаточно.

Далее будут использованы обозначения из [11] для именования классов траекторий: букве C соответствует движение по дуге окружности (circle arc) единичного радиуса; букве S — движение по отрезку (straight line segment). Тогда CS — это класс траекторий, состоящих из дуги окружности единичного радиуса и отрезка, а CC — это класс траекторий, состоящих из двух дуг разных окружностей единичного радиуса. Все стыки дуг и отрезков подразумеваются гладкими. В работе будет показано, что траекторий из классов CS и CC достаточно для осуществления оптимального перехвата. На месте буквы C может стоять буква L или R для указания направления разворота (левый и правый развороты соответственно). При движении по прямой $u(t) = 0$; при L -развороте $u(t) = 1$; при R -развороте $u(t) = -1$. Круги единичного радиуса, касающиеся вектора скорости машины в начальный момент времени, будем обозначать через \mathcal{D}_L и \mathcal{D}_R .

Подобно [14] будем обозначать через $\mathcal{R}(t)$ множество достижимости машины Дубинса в момент времени t на плоскости геометрических координат, а через $\mathcal{B}(t)$ — границу этого множества. Решение задачи с неподвижной целью полностью исследовано в [3, 14, 15] и получено подробное описание множества $\mathcal{R}(t)$ [14], поэтому вместо применения принципа максимума Понтрягина воспользуемся свойствами этого множества для синтеза оптимального управления в задаче с подвижной целью. В разделе 3 выписаны алгебраические соотношения, описывающие $\mathcal{B}(t)$; из множества $\mathcal{B}(t)$ выделено подмножество точек $\mathcal{B}_G(t)$, в которые машина попадает в момент t по геодезической линии; найден порог времени, после которого оптимальные геодезические траектории принадлежат только классу CS . В разделе 4 доказано, что, за исключением только одной ситуации, оптимальная точка перехвата лежит на $\mathcal{B}(t)$; выведены уравнения для вычисления оптимального времени перехвата; приведен алгебраический критерий того, что перехват осуществляется по геодезической линии. В разделе 5 описан алгоритм синтеза оптимального управления, опирающийся на решение нелинейных алгебраических уравнений, а также приведены результаты численного моделирования оптимального перехвата для различных траекторий движения цели.

3. Граница множества достижимости

Рассмотрим управления, ведущие на границу $\mathcal{B}(t)$ множества достижимости $\mathcal{R}(t)$. В [14, с. 212] показано, что любая точка из $\mathcal{B}(t)$ может быть достигнута по траектории длины t из классов CS , CC . Управления, отвечающие этим траекториям, ведут на $\mathcal{B}(t)$ и могут быть кратко описаны с помощью следующей леммы, которая естественным образом следует из теоремы 4 статьи [14].

Лемма 1. Каждая точка $\mathcal{B}(T)$ в момент T может быть достигнута с помощью управления

$$(3.1) \quad u(t) = \begin{cases} s, & t \in [0, \tau]; \\ -\sigma s, & t \in (\tau, T], \end{cases}$$

где $s \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, $\tau \in [0, T]$, $\tau \leq 2\pi$.

Действительно, если $\sigma = 0$, то управлению (3.1) отвечают траектории типа CS ; если $\sigma = 1$, то траектории типа CC ; если $s = 1$, то начальный разворот направлен налево; если $s = -1$, то направо. Число τ называется моментом переключения управления.

Далее через $\mathcal{B}_\Lambda(t)$ будут обозначаться подмножества $\mathcal{B}(t)$, на которые в момент t можно попасть, используя управление типа $\Lambda \in \{LS, RS, LR, RL\}$. Также обозначим: $\mathcal{B}_{CS}(t) = \mathcal{B}_{LS}(t) \cup \mathcal{B}_{RS}(t)$ и $\mathcal{B}_{CC}(t) = \mathcal{B}_{LR}(t) \cup \mathcal{B}_{RL}(t)$. Дальнейшее изложение текущего раздела существенно повторяет полученные в [14] результаты, но в более удобной для задачи перехвата форме, а также уточняет их.

Рассмотрим сначала управления, ведущие на $\mathcal{B}_{CS}(T)$. Проинтегрируем уравнения динамики (2.1) при начальных условиях (2.2) для управления (3.1) при $\sigma = 0$:

$$(3.2) \quad \begin{cases} sx_T + 1 = -(T - \tau) \sin \tau + \cos \tau; \\ y_T = (T - \tau) \cos \tau + \sin \tau. \end{cases}$$

Определим функцию знака следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Согласно [3, 15], для того чтобы $(x_T, y_T) \in \mathcal{B}_{CS}(T)$, требуется выполнение $s = -\operatorname{sgn} x_T$, кроме случая, когда $x_T = 0$ и $y_T < 0$. Это означает, по какую сторону от оси ординат лежит точка (x_T, y_T) , туда же и должна поворачивать машина Дубинса в течение времени $\tau < 2\pi$. Если (x_T, y_T) лежит на отрицательной части оси ординат, то начальное направление поворота произвольно, т.е. $s = \pm 1$. Подставляя s в первое равенство (3.2), получим уравнение

$$|x_T| = (T - \tau) \sin \tau - (\cos \tau - 1) \geq 0,$$

которое при фиксированном T дает ограничение на время переключения τ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} x_{LS}(\tau, T) &\stackrel{\text{def}}{=} -x_{RS}(\tau, T) \stackrel{\text{def}}{=} -(T - \tau) \sin \tau + (\cos \tau - 1); \\ y_{LS}(\tau, T) &\stackrel{\text{def}}{=} y_{RS}(\tau, T) \stackrel{\text{def}}{=} (T - \tau) \cos \tau + \sin \tau. \end{aligned}$$

С помощью этих обозначений можно выписать явный вид для подмножеств $\mathcal{B}_{CS}(T)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{LS}(T) &= \{(x_{LS}(\tau, T), y_{LS}(\tau, T)) \mid \tau \in [0, T], \tau < 2\pi, x_{LS}(\tau, T) \leq 0\}; \\ \mathcal{B}_{RS}(T) &= \{(x_{RS}(\tau, T), y_{RS}(\tau, T)) \mid \tau \in [0, T], \tau < 2\pi, x_{RS}(\tau, T) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим управления типа CC , ведущие на $\mathcal{B}_{CC}(T)$. Проинтегрируем уравнения динамики (2.1) при начальных условиях (2.2) для управления (3.1) при $\sigma = 1$ и получим систему

$$(3.3) \quad \begin{cases} sx_T + 1 = (2 - \cos(T - \tau)) \cos \tau - \sin(T - \tau) \sin \tau; \\ y_T = (2 - \cos(T - \tau)) \sin \tau + \sin(T - \tau) \cos \tau. \end{cases}$$

Согласно [14, с. 211], для того чтобы $(x_T, y_T) \in \mathcal{B}_{CC}(T)$, требуется выполнение $s = \operatorname{sgn} x_T$ при $x_T \neq 0$, т.е. по какую сторону точка (x_T, y_T) лежит от оси ординат, в противоположную ей сторону должна поворачивать машина Дубинса в течение времени $\tau \leq \pi/2$. Если же $x_T = 0$, то направление первого поворота произвольно, т.е. $s = \pm 1$. Подставляя s в первое равенство (3.3), получим уравнение

$$(3.4) \quad |x_T| = (2 - \cos(T - \tau)) \cos \tau - \sin(T - \tau) \sin \tau - 1 \geq 0,$$

которое при фиксированном T дает ограничение на время переключения τ .

По траектории типа CC можно попасть на границу множества достижимости только при $T < \mathcal{T}^* = 2\pi + \arccos(23/27)$ [14, с. 215]. Множество $\mathcal{B}_{CC}(t)$ «стягивается» в некоторую точку E^* в том смысле, что начиная с некоторого момента времени t , в произвольной ε -окрестности точки E^* содержатся все точки из $\mathcal{B}_{CC}(t)$. В точку «стягивания» ведет траектория типа CC с $\tau = \arccos(1/3)$ [14, с. 215]. Вычислить положение точки E^* можно, подставив $\tau = \arccos(1/3)$ и $T = \mathcal{T}^*$ в уравнения (3.3), что даст $E^* = (0, 2\sqrt{2}/3)$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} x_{LR}(\tau, T) &\stackrel{\text{def}}{=} -x_{RL}(\tau, T) \stackrel{\text{def}}{=} (2 - \cos(T - \tau)) \cos \tau - \sin(T - \tau) \sin \tau - 1; \\ y_{LR}(\tau, T) &\stackrel{\text{def}}{=} y_{RL}(\tau, T) \stackrel{\text{def}}{=} (2 - \cos(T - \tau)) \sin \tau + \sin(T - \tau) \cos \tau. \end{aligned}$$

Согласно [14, с. 214] при $T > 2\pi$ границы внутренней полости состоят только из точек $\mathcal{B}_{CC}(T)$, поэтому точка с наименьшей ординатой из $\mathcal{B}_{CC}(T)$ лежит не ниже, чем $T - 2\pi$ (иначе в точку с наименьшей ординатой приводила бы траектория типа CS с $\tau = 2\pi$). Теперь можно выписать явный вид для подмножеств $\mathcal{B}_{CC}(T)$ при $T < \mathcal{T}^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{LR}(T) &= \left\{ (x_{LR}(\tau, T), y_{LR}(\tau, T)) \mid \tau \in [0, T], \right. \\ &\quad \left. \tau \leq \frac{\pi}{2}, x_{LR}(\tau, T) \geq 0, y_{LR}(\tau, T) \geq T - 2\pi \right\}; \\ \mathcal{B}_{RL}(T) &= \left\{ (x_{RL}(\tau, T), y_{RL}(\tau, T)) \mid \tau \in [0, T], \right. \\ &\quad \left. \tau \leq \frac{\pi}{2}, x_{RL}(\tau, T) \leq 0, y_{RL}(\tau, T) \geq T - 2\pi \right\}. \end{aligned}$$

В иных случаях полагаем $\mathcal{B}_{CC}(T) = \emptyset$. Иллюстрация эволюции границы множества достижимости приведена на рис. 1.

Опишем множество точек $\mathcal{B}_G(T) \subset \mathcal{B}(T)$, в которые машина Дубинса попадает в момент T по геодезической линии. Согласно [1, 3], если конечная точка находится внутри кругов $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$, то геодезическая линия принадлежит классу CC , а если она лежит вне этих кругов, то классу CS . Учитывая дополнительно, что все точки $\mathcal{B}_{CS}(t)$ лежат вне кругов $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$, получаем, что

$$(3.5) \quad \mathcal{B}_G(T) = \mathcal{B}_{CS}(T) \cup \left\{ (x, y) \in \mathcal{B}_{CC}(T) \mid (|x| - 1)^2 + y^2 < 1 \right\}.$$

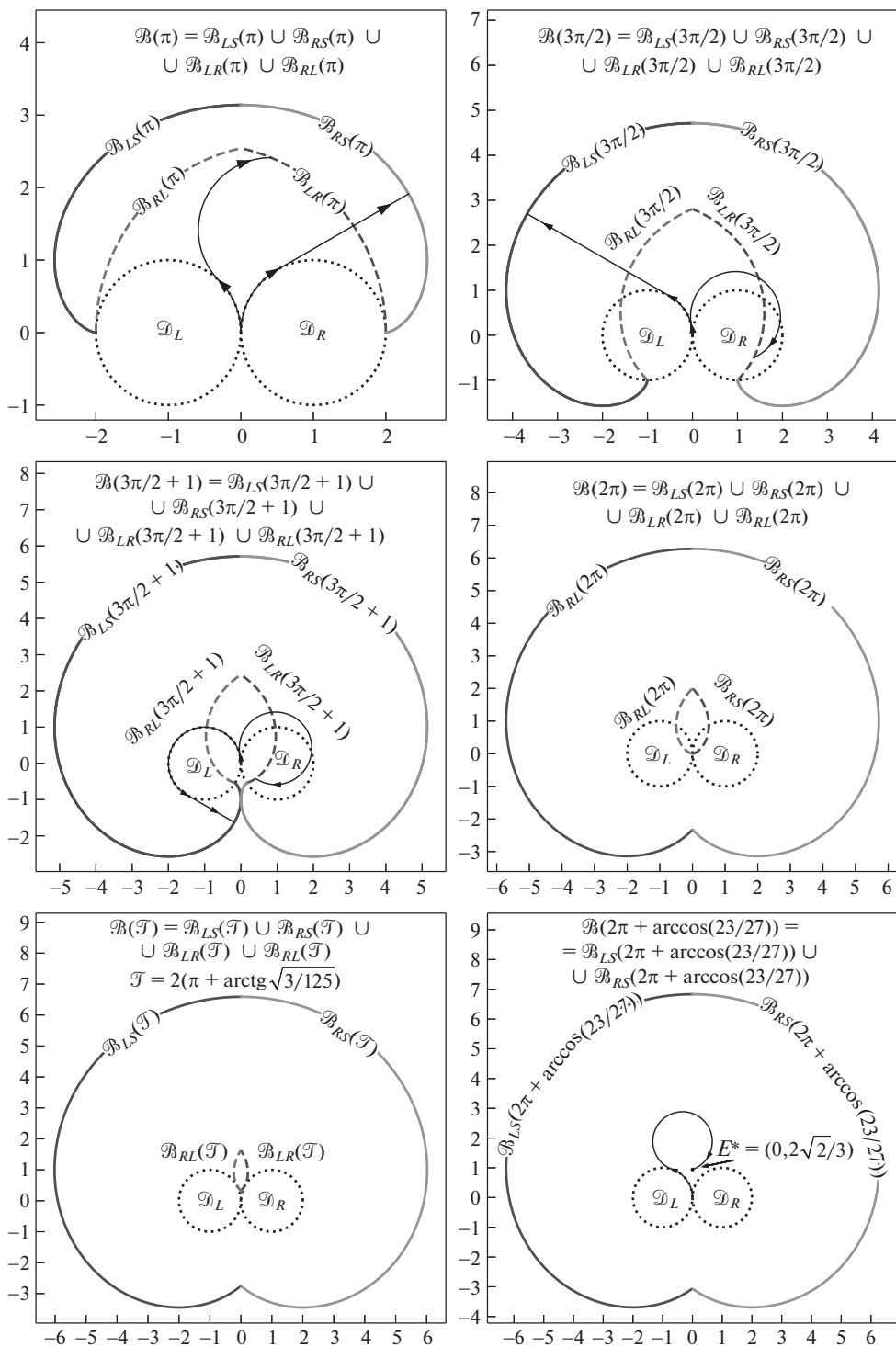


Рис. 1. Эволюция множества $\mathcal{B}(t)$, границы множества достижимости.

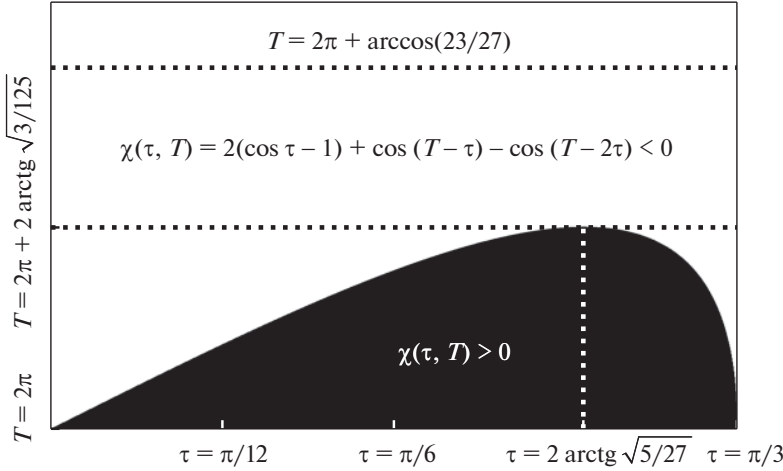


Рис. 2. Иллюстрация поведения неявно заданной функции $\chi(\tau, T) = 0$. Область, где $\chi(\tau, T) > 0$, закрашена черным, а область, где $\chi(\tau, T) < 0$, — белым.

Лемма 2. *Время $\mathcal{T} = 2(\pi + \arctg \sqrt{3/125})$ является минимальным временем, для которого при любых $T \geq \mathcal{T}$ множество $\mathcal{B}_G(T)$ состоит только из элементов множества $\mathcal{B}_{CS}(T)$.*

Доказательство леммы 2. Согласно выражению (3.5) для $\mathcal{B}_G(T)$ нужно показать, что $\{(x, y) \in \mathcal{B}_{CC}(T) \mid (|x| - 1)^2 + y^2 < 1\} = \emptyset$ для $T \geq \mathcal{T}$. В силу симметрии рассмотрим только случай правой полуплоскости. Ранее было отмечено, что $\tau \leq \pi/2$ для траекторий, ведущих на $\mathcal{B}_{CC}(T)$. Если $\tau > \pi/3$, то вторая дуга траектории LR не пересечет круг \mathcal{D}_R ни при каких T . Значит всякая геодезическая линия, ведущая в \mathcal{D}_R , имеет время переключения $\tau \leq \pi/3$. Подставим в

$$(|x_T| - 1)^2 + y_T^2 < 1$$

второе соотношение из (3.3) и соотношение (3.4). Получим

$$(3.6) \quad \chi(\tau, T) \stackrel{\text{def}}{=} 2(\cos \tau - 1) + \cos(T - \tau) - \cos(T - 2\tau) > 0.$$

Так как $\mathcal{B}_{CC}(T) = \emptyset$ при $T \geq \mathcal{T}^*$, то нужно показать, что неравенство (3.6) не справедливо ни при каких $\tau \in [0, \pi/3]$ и $T \in [\mathcal{T}, \mathcal{T}^*]$. Функция $\chi(\tau, T)$ монотонно убывает по T при любом $\tau \in (0, \pi/3]$. Проанализируем график неявно заданной функции, определяемой уравнением $\chi(\tau, T) = 0$ относительно T (рис. 2). Эта неявная функции имеет единственный максимум на прямоугольнике $\tau \in (0, \pi/3]$, $T \in [2\pi, \mathcal{T}^*]$. Положение этого максимума определяется решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2(\cos \tau - 1) + \cos(T - \tau) = \cos(T - 2\tau); \\ -2 \sin \tau + \sin(T - \tau) = 2 \sin(T - 2\tau). \end{cases}$$

Ход решения этой системы на рассматриваемом прямоугольнике довольно громоздкий. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что ее решение — это пара $\tau = 2 \arctg \sqrt{5/27}$, $T = \mathcal{T}$. Лемма доказана.

4. Решение задачи перехвата

Покажем, что оптимальная точка перехвата подвижной цели лежит на границе $\mathcal{B}(t)$ множества достижимости $\mathcal{R}(t)$ за исключением одного случая. Согласно [14, с. 208] множество $\mathcal{R}(t)$ замкнуто и ограничено для всех положительных t . Граница $\mathcal{B}(t)$ множества достижимости состоит из нескольких гладких частей. Эти части непрерывно связаны между собой не более чем в шести точках в каждый момент времени t (рис. 3). Для $t \in (0, 3\pi/2 + 1)$ таких точек четыре: (a), (b), (c) и (d); при $t = 3\pi/2 + 1$ их пять: точка (e) совпадает с точкой (f); для $t \in (3\pi/2 + 1, 2\pi)$ их шесть; для $t \in [2\pi, \mathcal{T}^*)$ их четыре: точки (c), (d) и (e) совпадают при $t = 2\pi$; при $t \geq \mathcal{T}^*$ их две: (a) и (f).

Мнозначное отображение \mathcal{B} называется полунепрерывным снизу в момент времени t_0 , если для всякого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $P_0 \in \mathcal{B}(t_0)$ существует $\delta > 0$, что для любого $t : |t - t_0| < \delta$ существует точка $P \in \mathcal{B}(t)$, что $\|P - P_0\| < \varepsilon$. Мнозначное отображение \mathcal{B} полунепрерывно сверху в момент времени t_0 , если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для любого $t : |t - t_0| < \delta$ и любой точки $P \in \mathcal{B}(t)$ существует точка $P_0 \in \mathcal{B}(t_0)$, что $\|P - P_0\| < \varepsilon$. Если многозначное отображение \mathcal{B} полунепрерывно снизу и сверху в точке t_0 , то оно называется непрерывным в этой точке.

Лемма 3. Многозначное отображение \mathcal{B} , задающее эволюцию границы множества достижимости, является непрерывным в любой момент времени $t > 0$, кроме $t = \mathcal{T}^$, где отображение \mathcal{B} является полунепрерывным снизу.*

Доказательство леммы 3. Сначала покажем, что все точки $\mathcal{B}(t_0)$, кроме (a)–(f), имеют конечную скорость движения на плоскости для всякого $t_0 > 0$. Зафиксируем $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{B}(t_0)$ и рассмотрим два случая. В первом

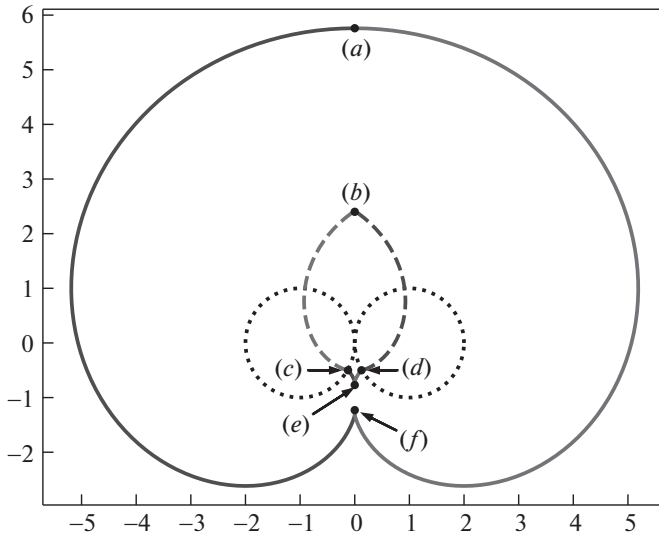


Рис. 3. Граница $\mathcal{B}(t)$ множества достижимости в момент $t = 11\pi/6$. В этот момент на границе присутствуют все шесть точек сшивания гладких границ.

случае $P_0 \in \mathcal{B}_{CS}(t_0)$, причем точка P_0 не совпадает с точками (а), (с)–(f). В соответствии с (3.2) имеет место система

$$\begin{cases} x_0 = s_0(-(t_0 - \tau_0) \sin \tau_0 + \cos \tau_0 - 1); \\ y_0 = (t_0 - \tau_0) \cos \tau_0 + \sin \tau_0. \end{cases}$$

Берем частные производные по t_0 от первого и второго уравнения этой системы, возводим их в квадрат, суммируем и получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial t_0}\right)^2 = 1.$$

Во втором случае $P_0 \in \mathcal{B}_{CC}(t_0)$, причем точка P_0 не совпадает с точками (b)–(d). В соответствии с (3.3) справедлива система

$$\begin{cases} x_0 = s_0((2 - \cos(t_0 - \tau_0)) \cos \tau_0 - \sin(t_0 - \tau_0) \sin \tau_0 - 1), \\ y_0 = (2 - \cos(t_0 - \tau_0)) \sin \tau_0 + \sin(t_0 - \tau_0) \cos \tau_0. \end{cases}$$

Снова берем частные производные по t_0 от первого и второго уравнений этой системы, возводим их в квадрат, суммируем и получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial t_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial t_0}\right)^2 = 1.$$

При единичной скорости всегда найдется $\delta = \varepsilon > 0$ и точка $P \in \mathcal{B}(t)$, что при $|t - t_0| < \delta$ имеет место $\|P - P_0\| \leq |t - t_0| < \delta = \varepsilon$.

Теперь пусть P_0 — одна из точек (а)–(f). В силу того, что P_0 примыкает к непрерывным линиям множества $\mathcal{B}(t_0)$, для любых t_0 найдется отличная от (а)–(f) точка $P'_0 \in \mathcal{B}(t_0)$ такая, что $\|P_0 - P'_0\| < \varepsilon/2$, а для P'_0 , в связи с доказанным выше, найдется $P \in \mathcal{B}(t)$, причем $\|P - P'_0\| < \varepsilon/2$. Пользуясь неравенством треугольника, получим $\|P - P_0\| < \varepsilon$, что доказывает полунепрерывность снизу.

Так как $\mathcal{B}(t)$ состоит из непрерывных частей, то для любой точки $P \in \mathcal{B}(t)$ найдется $P' \in \mathcal{B}(t)$, отличная от (а)–(f), причем $\|P - P'\| \leq \varepsilon/2$. Если $t_0 \neq \mathcal{T}^*$, то выбрав $\delta = \min(|\mathcal{T}^* - t_0|, \varepsilon/2)$, для любого момента $t : |t - t_0| < \delta$ и любой точки $P \in \mathcal{B}(t)$ найдется такая точка $P_0 \in \mathcal{B}(t_0)$, для которой выполняется

$$\|P - P_0\| \leq \|P - P'\| + \|P' - P_0\| \leq \varepsilon/2 + |t - t_0| < \varepsilon/2 + \delta \leq \varepsilon,$$

что доказывает полунепрерывность сверху для всех $t_0 > 0$, кроме $t_0 = \mathcal{T}^*$. В момент $t_0 = \mathcal{T}^*$ пропадает множество $\mathcal{B}_{CC}(t_0)$, которое отделено от $\mathcal{B}_{CS}(t_0)$, поэтому полунепрерывности сверху в этот момент нет. Лемма доказана.

Утверждение 1. Если оптимальный перехват цели возможен в момент времени T , то оптимальная точка перехвата лежит на $\mathcal{B}(T)$, кроме случая, когда оптимальная точка перехвата $E^ = (0, 2\sqrt{2}/3)$, а оптимальное время перехвата $T = \mathcal{T}^*$.*

Доказательство утверждения 1. Если $E(T) = E^*$ и $T = \mathcal{T}^*$, то оптимальный перехват осуществляется по траектории типа RL или LR , но происходит не на $\mathcal{B}(T)$, так как в силу приведенного в разделе 3 описания границы множества достижимости $E^* \notin \mathcal{B}(\mathcal{T}^*)$. Пусть теперь $E(T) \neq E^*$ или $T \neq \mathcal{T}^*$. Предположим, что $E(T)$ является внутренней точкой для $\mathcal{R}(T)$. Тогда найдется шар \mathcal{O} с центром в точке $E(T)$, который полностью лежит внутри $\mathcal{R}(T)$ и каждая точка границы такого шара удалена от $\mathcal{B}(T)$ не менее чем на $\varepsilon > 0$. В силу леммы 3 и «стягивания» $\mathcal{B}_{CC}(t)$ к $E^* \neq E(T)$ при $t \rightarrow \mathcal{T}^*$ найдется такое $\delta > 0$, что для всяких $t \in (T - \delta, T + \delta)$ точки границы $\mathcal{B}(t)$ не попадут в этот шар, поэтому $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}(t)$. В силу непрерывности $E(t)$ можно выбрать δ настолько малым, чтобы выполнялось $E(t) \in \mathcal{O}$. Значит $E(t) \in \mathcal{R}(t)$, что противоречит тому, что T — минимальное время перехвата, а следовательно, $E(T)$ лежит на границе $\mathcal{R}(T)$. Утверждение доказано.

Получим алгебраические уравнения для определения оптимального времени перехвата. Если оптимальный перехват осуществляется по траектории типа CS , то в соответствии с (2.3) и (3.2) оптимальные τ и T определяются следующей системой:

$$(4.1) \quad \begin{cases} 1 - |x_E(T)| = -(T - \tau) \sin \tau + \cos \tau; \\ y_E(T) = (T - \tau) \cos \tau + \sin \tau. \end{cases}$$

Возведем выражения (4.1) в квадрат и просуммируем их, тогда после нетрудных преобразований и учета того, что $T \geq \tau$, получим

$$(4.2) \quad T - \tau = \sqrt{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T) - 1}.$$

Введем обозначения

$$\alpha_C(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - |x_E(T)| + y_E(T) \sqrt{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T) - 1}}{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T)},$$

$$\alpha_S(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_E(T) - (1 - |x_E(T)|) \sqrt{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T) - 1}}{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T)},$$

тогда после подстановки (4.2) в (4.1), решая систему (4.1) относительно $\tau \in [0, 2\pi)$, получим

$$\tau = \theta_{CS}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \arccos \alpha_C(T), & \alpha_S(T) \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \alpha_C(T), & \alpha_S(T) < 0. \end{cases}$$

Подставив значение $\tau = \theta_{CS}(T)$ в (4.2), получим уравнение для определения оптимального времени перехвата. Таким образом, оптимальное время перехвата $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]$ является наименьшим неотрицательным корнем следующего уравнения относительно T

$$(4.3) \quad T - \theta_{CS}(T) - \sqrt{(1 - |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T) - 1} = 0.$$

Если данное уравнение не имеет неотрицательных корней, то будем полагать, что $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] = +\infty$. Для некоторых T в левой части выражения (4.3) могут возникать некорректные операции: деление на ноль, извлечение корня из отрицательного числа и т.п. В таких случаях оптимальная поимка в момент T по траектории типа CS невозможна. Например, если предположить, что оптимальная точка перехвата лежит внутри кругов $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$, то оптимальный перехват не может быть осуществлен по траектории типа CS , так как при вычислении левой части (4.3) возникнет корень из отрицательного числа, поэтому в этом случае полагаем, что $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] = +\infty$.

Теперь проведем аналогичные рассуждения для случая оптимального перехвата по траектории типа CC . В соответствии с (2.3) и (3.3) оптимальные τ и T определяются системой

$$(4.4) \quad \begin{cases} |x_E(T)| + 1 = (2 - \cos(T - \tau)) \cos \tau - \sin(T - \tau) \sin \tau, \\ y_E(T) = (2 - \cos(T - \tau)) \sin \tau + \sin(T - \tau) \cos \tau. \end{cases}$$

Возведем выражения (4.4) в квадрат и просуммируем их, тогда после нетрудных преобразований получим

$$(4.5) \quad \cos(T - \tau) = \frac{5 - (1 + |x_E(T)|)^2 - y_E^2(T)}{4} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(T).$$

После подстановки (4.5) в (4.4), решая систему (4.4) относительно $\tau \in [0, \pi/2]$, получим, вообще говоря, два решения:

$$\tau = \theta_{CC}^{\pm}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{(1 + |x_E(T)|)(2 - \alpha(T)) \pm y_E(T) \sqrt{1 - \alpha^2(T)}}{(1 + |x_E(T)|)^2 + y_E^2(T)}.$$

Можно показать, что если $T \leq \pi$, то $\tau = \theta_{CC}^+(T)$, а если $T \geq \pi + \arccos(1/3)$, то $\tau = \theta_{CC}^-(T)$.

Рассматривая отдельно случаи $\tau = \theta_{CC}^+(T)$ и $\tau = \theta_{CC}^-(T)$, после подстановки τ в (4.5) и обращения косинуса с учетом того, что $T - \tau \in [0, 2\pi]$, получим два уравнения для определения оптимального времени перехвата:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} T - \theta_{CC}^+(T) - \arccos \alpha(T) &= 0, \\ T - \theta_{CC}^-(T) - 2\pi + \arccos \alpha(T) &= 0. \end{aligned}$$

Наименьшие неотрицательные корни этих двух уравнений будем обозначать через $\mathcal{T}_{CC}^+[x_E, y_E]$, $\mathcal{T}_{CC}^-[x_E, y_E]$ соответственно. В случае отсутствия корней будем полагать, что $\mathcal{T}_{CC}^{\pm}[x_E, y_E] = +\infty$. Как и в случае траекторий типа CS , при вычислении левой части какого-либо из уравнений (4.6) для некоторого T могут возникать некорректные операции. Если некорректные операции возникают при вычислении сразу двух выражений, то оптимальная поимка в момент T по траектории типа CC невозможна. Если некорректные операции появляются при вычислении первого выражения, а второе выражение при подстановке T превращается в тождество, то оптимальный перехват осуществляется с моментом переключения $\theta_{CC}^-(T)$ и наоборот. Оптимальное время перехвата определяется выбором наименьшего времени из двух времен:

$\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E] = \min(\mathcal{T}_{CC}^+[x_E, y_E], \mathcal{T}_{CC}^-[x_E, y_E])$. Оптимальный момент переключения при известном T определяется следующим образом:

$$\tau = \theta_{CC}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \theta_{CC}^+(T), & \mathcal{T}_{CC}^+[x_E, y_E] \leq \mathcal{T}_{CC}^-[x_E, y_E]; \\ \theta_{CC}^-(T), & \mathcal{T}_{CC}^+[x_E, y_E] > \mathcal{T}_{CC}^-[x_E, y_E]. \end{cases}$$

Если перехват невозможен, то уравнения (4.3), (4.6) не имеют неотрицательных решений. Если перехват возможен, то хотя бы одно из уравнений (4.3), (4.6) имеет неотрицательное решение, так как машина Дубинса вполне управляема в классах траекторий CS и CC .

Если оптимальная точка перехвата лежит на оси ординат, то начальный знак управления может быть выбран произвольным (в силу симметрии задачи). В соответствии с леммой 1, если оптимальной траекторией является линия типа CS , то оптимальное управление выглядит так:

$$u(t) = u_{CS}^o(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\text{sgn } x_E(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]), & t < \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]), x_E(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]) \neq 0; \\ \pm 1, & t < \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]), x_E(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]) = 0; \\ 0, & t \geq \theta_{CS}(\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]). \end{cases}$$

Если оптимальной траекторией является линия типа CC , то оптимальное управление выглядит так:

$$u(t) = u_{CC}^o(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{sgn } x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]), & t < \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]), x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) \neq 0; \\ -\text{sgn } x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]), & t \geq \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]), x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) \neq 0; \\ \pm 1, & t < \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]), x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) = 0; \\ \mp 1, & t \geq \theta_{CC}(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]), x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) = 0. \end{cases}$$

Выбор знака \pm в приведенных выражениях может быть сделан произвольным образом.

Пусть время перехвата цели, движение которой заранее известно, является конечным. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Оптимальное управление в задаче перехвата подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время имеет вид

$$u(t) = u^o(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u_{CS}^o(t), & \mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] \leq \mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E], \\ u_{CC}^o(t), & \mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] > \mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]. \end{cases}$$

На основе описания $\mathcal{B}_G(t)$ и утверждения 1 нетрудно сформулировать алгебраический критерий оптимальности перехвата по геодезической линии. Для этого необходимо и достаточно потребовать, чтобы оптимальная точка перехвата лежала на $\mathcal{B}_G(T)$.

Утверждение 3. Оптимальная траектория перехвата является геодезической линией в том и только в том случае, когда $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] \leq \mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]$ или $(|x_E(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E])| - 1)^2 + y_E^2(\mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]) < 1$.

Теорема 5 из [26] является частным случаем этого утверждения. Действительно, если оптимальный перехват возможен и $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E] \leq \mathcal{T}_{CC}[x_E, y_E]$, то он осуществляется по траектории типа CS и заканчивается вне кругов \mathcal{D}_L и \mathcal{D}_R . При этом требование к траектории цели по ненахождению ее частей внутри \mathcal{D}_L и \mathcal{D}_R отпадает.

5. Численные примеры

С помощью утверждения 2 и выражений (4.3), (4.6) можно построить оптимальную траекторию перехвата подвижной цели. Опишем последовательность действий, которая позволяет сделать подобное построение. На первом шаге нужно найти три минимальных неотрицательных корня уравнений (4.3), (4.6). Если какое-либо уравнение не имеет корней, то считаем, что его корень равен $+\infty$. В конце первого шага имеем три значения $\mathcal{T}_{CS}[x_E, y_E]$,

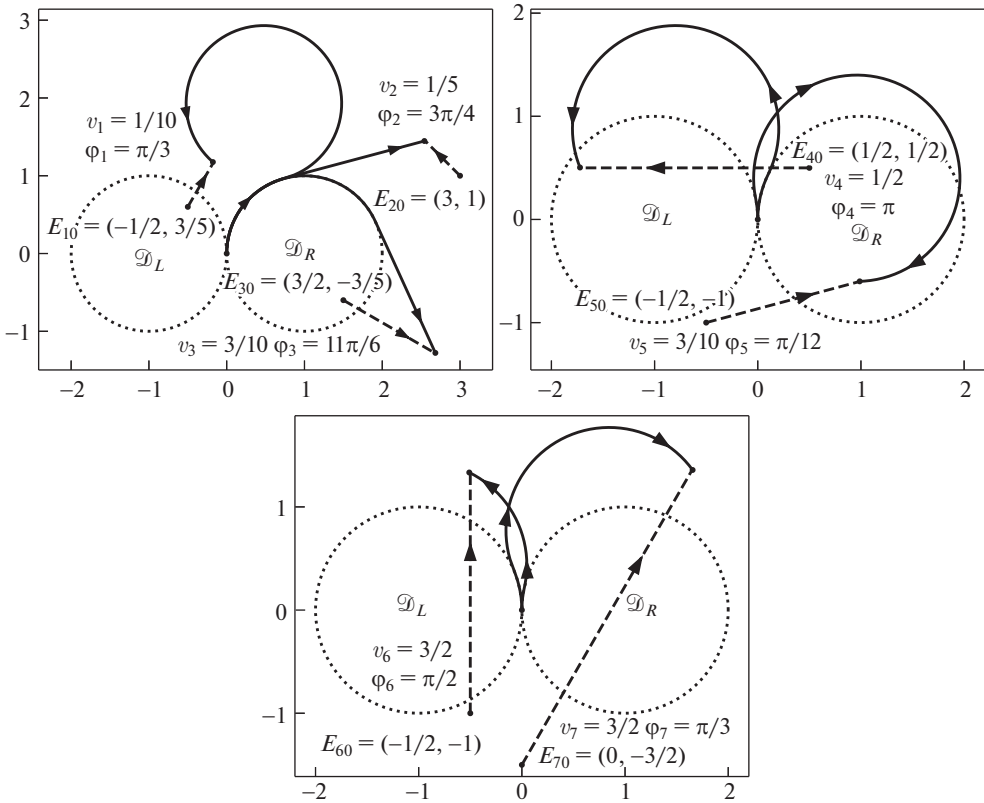


Рис. 4. Траектория оптимального перехвата (сплошная линия) при семи различных вариантах движения цели (пунктирная линия). $E_i(t) = E_{i0} + \vec{v}_i t$, где $\vec{v}_i = (v_i \cos \varphi_i, v_i \sin \varphi_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

$\mathcal{T}_{CC}^+[x_E, y_E], \mathcal{T}_{CC}^-[x_E, y_E]$. Если все три значения равны $+\infty$, то перехват невозможен. В противном случае трех вычисленных значений достаточно, чтобы явно получить оптимальное управление при помощи утверждения 2.

Траектория движения цели может быть любой непрерывной линией. Для простоты иллюстраций будем полагать, что цель движется по прямой с постоянной скоростью. На рис. 4 изображено семь различных случаев перехвата. При $i = 1$ цель начинает свое движение из круга \mathcal{D}_L с достаточно малой скоростью, которая позволяет цели избежать встречи на множестве $\mathcal{B}_{CS}(t)$ и отсрочить перехват до момента попадания на $\mathcal{B}_{CC}(T)$. При $i = 2$ траектория цели не проходит через круги $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$, поэтому оптимальный перехват осуществляется по траектории типа CS . При $i = 3$ цель начинает свое движение из \mathcal{D}_R , а оптимальный перехват, как и в случае $i = 2$, осуществляется по геодезической линии, так как выполнены условия утверждения 3. При $i = 4$ движение начинается из \mathcal{D}_R , а оптимальный перехват происходит в \mathcal{D}_L . Этот случай примечателен тем, что траектория цели может пересекать оптимальную траекторию машины до момента перехвата. При $i = 5$ движение цели начинается вне кругов $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$, а оптимальный перехват происходит внутри \mathcal{D}_R по траектории класса CC . При $i = 6$ и $i = 7$ цель имеет скорость, которая выше или равна скорости машины, но машина, несмотря на это, способна перехватить цель.

Полученные примеры дополняют известные в литературе частные случаи оптимального перехвата. Отметим, что случаи $i \in \{1, 2, 3, 6, 7\}$ иллюстрируют тот факт, что если оптимальная точка перехвата лежит вне кругов $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$, то оптимальная траектория машины может быть как из класса CC (при $i \in \{1, 6, 7\}$, например), так и из класса CS (при $i \in \{2, 3\}$). Если же оптимальная точка перехвата лежит внутри кругов $\mathcal{D}_L, \mathcal{D}_R$, то оптимальная траектория машины принадлежит только классу CC .

6. Заключение

Для задачи перехвата подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время получены аналитические выражения (4.3), (4.6), позволяющие определить минимальное время перехвата. С помощью леммы 3 показано, что многозначное отображение \mathcal{B} , задающее эволюцию границы множества достижимости, является непрерывным, кроме одного момента времени. Утверждения 1, 2 позволяют определить положение оптимальной точки перехвата и вид оптимального управления. Приведенные выражения позволяют решить задачу наискорейшего перехвата при произвольной непрерывной и наперед заданной траектории движения цели. Выражения (4.3), (4.6) могут быть упрощены и оптимальное время перехвата может быть выражено явно, если класс траекторий цели уже класса непрерывных линий (например, точка, если цель покоится).

Утверждение 3 содержит в себе алгебраический критерий оптимальности перехвата по геодезической линии. Лемма 2 определяет пороговое значение времени перехвата для любого времени, больше которого оптимальные геодезические траектории принадлежат только классу CS . Однако для некоторых случаев движения цели оптимальный перехват не всегда проходит по геоде-

зической линии, что также проиллюстрировано численными примерами и моделированием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков А.А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщения Харьк. мат. общества. Вторая серия. Т. I. 1889. С. 250–276.
2. Isaacs R. Differential games. N.Y.: Wiley, 1965.
3. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления. 1973. № 12. С. 91–101.
4. Coates S., Pachter M., Murphey R. Optimal Control of a Dubins Car with a Capture Set and the Homicidal Chauffeur Differential Game // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 5091–5096.
5. Pachter M., Coates S. The Classical Homicidal Chauffeur Game // Dyn. Games Appl. 2019. V. 9. No. 3. P. 800–850.
6. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // ПММ. 1975. Т. 39. № 6. С. 985–994.
Berdyshev Yu.I. Time-optimal control synthesis for a fourth-order nonlinear system // J. Appl. Math. Mech. 1975. V. 39. No. 6. P. 985–994.
7. Бердышев Ю.И. Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение: Монография. УрО РАН, Екатеринбург, 2015.
8. Clements J.C. Minimum-time turn trajectories to fly-to points // Optim. Control Appl. Meth. 1990. V. 11. No. 1. P. 39–50.
9. Dubins L.E. On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // Am. J. Math. JSTOR. 1957. V. 79. No. 3. P. 497–516.
10. Pecsvaradi T. Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Autom. Control. 1972. V. 17. No. 6. P. 763–772.
11. Bui X.N. et al. Shortest path synthesis for Dubins non-holonomic robot // Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation. San Diego, 1994. V. 1. P. 2–7.
12. Бедин Д.А., Пацко В.С., Федотов А.А. и др. Восстановление траектории самолета по неточным измерениям // АиТ. 2010. № 2. С. 17–30.
Bedin D.A. et al. Restoration of aircraft trajectory from inaccurate measurements // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 2. P. 185–197.
13. Wu A., How J.P. Guaranteed infinite horizon avoidance of unpredictable, dynamically constrained obstacles // Autonom. Robots. 2012. V. 32. No. 3. P. 227–242.
14. Cocksayne E.J., Hall G.W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control. 1975. V. 13. No. 1. P. 197–220.
15. Boissonnat J., Bui X.N. Accessibility region for a car that only moves forwards along optimal paths. Sophia-Antipolis, France, 1994. INRIA Tech. Rep. 2181.
16. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.
Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2003. V. 42. No. 3. P. 320–328.

17. Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 182–197.
Patsko V.S., Fedotov A.A. Analytic description of a reachable set for the Dubins car // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2020. V. 26. No. 1. P. 182–197.
18. Рубинович Е.Я. Дифференциальная игра программного преследования с ограничением на разворот преследователя // АиТ. 1978. №. 9. С. 38–44.
Rubinovich E.Ya. A differential game of programmed pursuit with a constraint on the pursuant's turnabout // Autom. Remote Control. 1979. V. 39. No. 9. P. 1292–1297.
19. Guelman M., Shinar J. Optimal guidance law in the plane // J. Guid. Control Dyn. 1984. V. 7. No. 4. P. 471–476.
20. Glizer V.Y. Optimal planar interception with fixed end conditions: Closed-form solution // J. Optim. Theory Appl. 1996. V. 88. No. 3. P. 503–539.
21. Cockayne E. Plane Pursuit with Curvature Constraints // SIAM J. Appl. Math. 1967. V. 15. No. 6. P. 1511–1516.
22. Glizer V.Y., Shinar J. On the structure of a class of time-optimal trajectories // Optim. Control Appl. Meth. 1993. V. 14. No. 4. P. 271–279.
23. Бердышев Ю.И. О задачах последовательного обхода одним нелинейным объектом двух точек // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 43–52.
Berdyshev Yu.I. A problem of the sequential approach of a nonlinear object to two moving points // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2005. V. 11. No. 1. P. 43–52.
24. Looker J.R. Minimum paths to interception of a moving target when constrained by turning radius. Canberra, Australia: Defence Sci. Technol. Organisation, 2008.
25. Meyer Y., Isaiah P., Shima T. On Dubins Paths to Intercept a Moving Target at a Given Time // IFAC Proceedings Volumes. 2014. V. 47. No. 3. P. 2521–2526.
26. Meyer Y., Isaiah P., Shima T. On Dubins Paths to Intercept a Moving Target // Automatica. 2015. V. 53. P. 256–263.
27. Gopalan A., Ratnoo A., Ghose D. Time-optimal guidance for lateral interception of moving targets // J. Guid. Control Dyn. 2016. V. 39. No. 3. P. 510–525.
28. Manyam S.G. et al. Optimal dubins paths to intercept a moving target on a circle // Proc. Am. Control Conf. 2019. V. 2019-July. P. 828–834.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 27.08.2020

После доработки 15.11.2020

Принята к публикации 08.12.2020