Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

Стохастические системы

© 2021 г. **Е.С. ПАЛАМАРЧУК, канд. физ.-мат. наук**
(e.palamarchuck@gmail.com)
(Центральный экономико-математический институт РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВРЕМЕННОЙ ШКАЛОЙ[1]

Рассматривается задача линейно-квадратического регулятора при изменении параметра времени в соответствии со стохастической временной шкалой. Стохастическая временная шкала задается при помощи случайного процесса с непрерывно дифференцируемыми траекториями. При стремлении горизонта планирования к бесконечности находится стратегия управления, оптимальная по критериям, являющимся аналогами долговременных средних. Изучаются примеры задания стохастических временных шкал, используемых в различных приложениях.

Ключевые слова: линейно-квадратический регулятор, стохастическая временная шкала, долговременное среднее.

DOI: 10.31857/S0005231021050020

1. Введение

В данной статье проводится исследование задачи линейно-квадратического регулятора для случая, когда изменение параметра времени описывается случайным процессом. Процедура случайной замены времени [1, 2] широко используется при моделировании динамики систем и принятии решений в различных областях приложений, см. [3–8]. При этом добавление стохастической временной шкалы приводит к системе управления с нестационарными случайными коэффициентами. В частности, ранее линейные регуляторы без аддитивных шумов и со случайным параметром времени рассматривались в [9], где шкала задавалась в виде суммы случайных величин. В [10] предполагалось, что случайное время связано только с выбором управляющих воздействий и относится к классу субординаторов. Следует отметить, что в задачах управления [9, 10] рассматривалась минимизация ожидаемых значений целевых функционалов, а потраекторная оптимальность (оптимизация с вероятностью единица) не анализировалась. Общая ситуация линейной системы управления со случайными коэффициентами изучалась в [11] на

[1] Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

конечном интервале. Переход к бесконечному горизонту планирования при нестационарных коэффициентах общего вида затруднен из-за неограниченности значений целевых функционалов и необходимости исследования вопросов существования решений обратных стохастических дифференциальных уравнений. Однако, как будет показано в данной статье, при рассмотрении линейной системы управления, возникающей вследствие наличия стохастической временной шкалы, удается избежать указанных трудностей. Соответствующие критерии оптимальности, используемые на бесконечном интервале времени, будут включать как критерии на основе ожидаемых значений (с детерминированной нормировкой), так и потраекторные критерии при случайной нормировке на основе процесса стохастической временной шкалы. Изложение материала организовано следующим образом. В разделе 2 дается описание изучаемой модели и осуществляется постановка задачи. Раздел 3 содержит основной результат о виде оптимального закона управления. В разделе 4 приводятся примеры задания стохастических временных шкал из различных приложений и пример скалярной системы управления.

2. Описание модели и постановка задачи

2.1. Предварительные сведения

Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задан скалярный случайный процесс α_t, $t \geqslant 0$, имеющий с вероятностью единица непрерывные и положительные траектории. Тогда стохастическая временная шкала определяется как почти наверное (п.н.) возрастающий процесс $\tau_t = \int_0^t \alpha_v \, dv$, $t \geqslant 0$, или в дифференциальной форме

$$d\tau_t = \alpha_t \, dt, \quad \tau_0 = 0. \tag{1}$$

В качестве α_t, $t \geqslant 0$, могут рассматриваться процессы диффузионного типа, см. [5], или, например, случайная величина (с.в.) $\alpha_t = \bar{\alpha} > 0$ с абсолютно-непрерывным распределением и конечными моментами, задающая коэффициент “масштаба” временной шкалы, см. [4]. Процесс τ_t, $t \geqslant 0$, носит название “внутреннего” времени в отличие от физического или реального времени t. Также используется терминология “операционное”, “экономическое” время, “информационная” временная шкала, “биологические” или “молекулярные часы” и др. в зависимости от области приложений.

П р е д п о л о ж е н и е $\mathcal{A}$. *Случайный процесс* $\alpha_t > 0$, $t \geqslant 0$, *задающий временную шкалу в* (1), *имеет непрерывные* (*с вероятностью единица и в среднем квадратичном*) *траектории и при этом* $\int_0^t \alpha_v \, dv \to \infty$, $t \to \infty$, *п.н.*

Следует отметить, что по теореме о монотонной сходимости, см., например, [12, теорема 1.1, с. 15], выполнение условия $\int_0^t \alpha_v \, dv \to \infty$, $t \to \infty$, п.н. также влечет и $\int_0^t E\alpha_v \, dv \to \infty$, $t \to \infty$. Как будет показано далее, включение стохастической временной шкалы τ_t в систему управления, известную как стохастический линейно-квадратический регулятор, приводит к уравнениям динамики и целевому функционалу со случайными коэффициентами.

2.2. Постановка задачи

Пусть $\tilde{W}_t$, $t \geqslant 0$, — d-мерный стандартный винеровский процесс относительно $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Эволюция состояния системы Y_τ, $\tau \geqslant 0$, во внутреннем времени τ определяется при помощи n-мерного управляемого случайного процесса с динамикой

$$dY_\tau = AY_\tau d\tau + B\tilde{U}_\tau d\tau + Gd\tilde{W}_\tau, \qquad Y_0 = x, \tag{2}$$

где x — неслучайное начальное состояние; $\tilde{U}_\tau$ — k-мерный вектор допустимого управления, определяемого далее; $A, B, G \neq 0$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Предположение о детерминированном начальном состоянии сделано из-за последующего рассмотрения системы управления на бесконечном интервале. В случае невырожденных шумовых воздействий вклад начального состояния со временем снижается при оптимальном управлении.

Если задано значение T — длины горизонта планирования в реальном времени, то соответствующая величина $\mathcal{T}(T) = \int_0^T \alpha_t\, dt$. Целевой функционал при внутренней временной шкале имеет вид

$$J_{\mathcal{T}}(\tilde{U}) = \int\limits_0^{\mathcal{T}} \left(Y_\tau^{\mathrm{T}} Q Y_\tau + \tilde{U}_\tau^{\mathrm{T}} R \tilde{U}_\tau \right) d\tau, \tag{3}$$

где $Q \geqslant 0$, $R > 0$ — симметричные матрицы; $^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования; запись $A \geqslant B$ $(A > B)$ для матриц означает, что разность $A - B$ неотрицательно (положительно) определена.

Для дальнейшей постановки задачи преобразуем (2)–(3) с учетом (1). Нетрудно заметить, что $\tilde{W}_{\tau_t}$ является $\mathcal{F}_t$-мартингалом с квадратической характеристикой каждой из компонент, равной $\int_0^t \alpha_s\, ds$. Тогда согласно утверждению [13, лемма 2] существует винеровский процесс W_t, $t \geqslant 0$, такой что $\tilde{W}_\tau = \int_0^t \sqrt{\alpha_s} dW_s$. Полагая $X_t = Y_\tau$, $U_t = \tilde{U}_\tau$, $J_T^{(\alpha)}(U) = J_{\mathcal{T}}(\tilde{U})$, получаем систему управления со случайными коэффициентами:

$$dX_t = \alpha_t A X_t dt + \alpha_t B U_t dt + \sqrt{\alpha_t} G dW_t, \quad X_0 = x, \tag{4}$$

$$J_T^{(\alpha)}(U) = \int\limits_0^T \alpha_t \left(X_t^{\mathrm{T}} Q X_t + U_t^{\mathrm{T}} R U_t \right) dt, \tag{5}$$

где в качестве допустимых управлений U_t, $t \geqslant 0$, рассматриваются такие $\bar{\mathcal{F}}_t$-согласованные процессы $\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma\{W_s, \alpha_s, s \leqslant t\}$, что уравнение (4) имеет решение ($\sigma(\cdot)$ — обозначение σ-алгебры). Множество допустимых управлений обозначим через $\mathcal{U}$. Ранее линейные системы вида (4) со случайными коэффициентами (без управляющих воздействий) изучались при моделировании в области физики [7], финансов [3] и механики [8]. Отметим, что в экономике и финансах (4) часто используется при описании динамики отклонений переменных от своих равновесных значений, а также показателей, которые могут иметь разный знак (инфляция, доходность, бюджетный баланс и т.д.). Очевидно, что далеко не всегда процесс α_t, $t \geqslant 0$, доступен прямому наблюдению. В экономике и финансах существуют подходы, позволяющие использовать информацию об известных переменных для определения динамики стохастической временной шкалы. Процесс α_t связывают с экономической (или рыночной) активностью, и существуют различные показатели ее измерения: торговая активность (число сделок и их объем), волатильность ключевых финансовых переменных и связанных с ними деривативов, специальные индексы экономической активности и др., см. обзорную часть в [14], а также [15]. В физике α_t описывает, например, неоднородность среды, см. [16], и можно провести наблюдение за соответствующими характеристиками. Установление взаимосвязи между конкретными наблюдаемыми показателями и процессом α_t является отдельной задачей, строгая математическая формулировка которой приводит к более сложным моделям с неполной информацией, не рассматриваемым в данной статье. В приведенных выше ситуациях существенным моментом оказывается предположение о независимости скорости течения времени α_t стохастической временной шкалы от случайных воздействий (процесса W_t) в уравнении динамики (4). Также полезно отметить, что при изучении (4) для линейных законов управления можно использовать результаты по условной гауссовости X_t относительно $\mathcal{F}_t^{(\alpha)} = \sigma\{\alpha_s, s \leqslant t\}$, если α_t является диффузионным процессом с условиями на коэффициенты в уравнении своей динамики, см. [17, раздел 12] и пример в разделе 4. При $T \to \infty$ рассматриваются задачи управления

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E} J_T^{(\alpha)}(U)}{\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \tag{6}$$

и

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\int\limits_0^T \alpha_t dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью единица.} \tag{7}$$

Решение задачи (7) понимается в следующем смысле: если U^* — оптимальное управление, $J^* = \limsup_{T\to\infty}\left\{J_T^{(\alpha)}(U^*)\left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}\right\}$, то для любого допустимого управления $U\in\mathcal{U}$ п.н. выполнено $\limsup_{T\to\infty}\left\{J_T^{(\alpha)}(U)\left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}\right\} \geqslant$ $\geqslant J^*$. Далее окажется, что с вероятностью единица значение J^* равно константе, т.е. значения критерия сравниваются с постоянной величиной при каждом исходе $\omega \in \Omega$. Здесь можно охарактеризовать также и методику построения критерия в задаче (6). Используется тот же принцип, на котором основан вид стандартного долговременного среднего: нормировка ожидаемого значения выбирается в соответствии с поведением $\mathrm{E}J_T(U^*)$ на управлении U^* при $T \to \infty$. Полезно отметить, что во внутреннем времени (без учета (1)) задачи (6)–(7) имели бы вид задач управления с долговременными средними $\limsup_{\mathcal{T}\to\infty}\{\mathrm{E}J_{\mathcal{T}}(U)/\mathcal{T}\} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ и $\limsup_{\mathcal{T}\to\infty}\{J_{\mathcal{T}}(U)/\mathcal{T}\} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ п.н. Данное наблюдение позволяет предположить, что существование хорошо известного установившегося закона управления вида $U^* = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi X^*$ ($\Pi \geqslant 0$ — решение алгебраического уравнения Риккати) может быть достаточным для построения оптимальной стратегии и в (6)–(7). Пусть в функционале (3) матрица $Q = C^{\mathrm{T}}C$, где C — некоторая квадратная матрица. Вводится следующее предположение.

Предположение $\mathcal{P}$. *Пара матриц* (A, B) *— стабилизируема, пара матриц* (A, C) *— выявляема (обнаруживаема).*

Напомним, что пара матриц (A, B) называется стабилизируемой, если существует матрица K, такая что матрица $A + BK$ — экспоненциально устойчива, а выявляемость является двойственным свойством к стабилизуемости. Точее, выявляемость для (A, C) означает стабилизируемость $(A^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}})$, см. [18, с. 168].

3. Основной результат

Вследствие предположения $\mathcal{P}$ существует симметричная матрица $\Pi \geqslant 0$, являющаяся единственным неотрицательно определенным решением алгебраического уравнения Риккати

$$\Pi A + A^{\mathrm{T}}\Pi - \Pi B R^{-1} B^{\mathrm{T}}\Pi + Q = 0, \tag{8}$$

при этом матрица $A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi$ — экспоненциально устойчива, см. [19, теорема 3.7, с. 275]. Тогда можно определить закон управления

$$U_t^* = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi X_t^*, \tag{9}$$

где процесс X_t^*, $t \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению

$$dX_t^* = \alpha_t\left(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi\right)X_t^* dt + \sqrt{\alpha_t}\,G dW_t, \quad X_0^* = x. \tag{10}$$

Далее будет показано, что U^* вида (9)–(10) является решением задач (6) и (7). Уравнение (10) представляет собой линейное стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) со случайными коэффициентами, и в силу предположения $\mathcal{A}$, см. также [2, следствие 4.6], его решение существует и может быть выписано в явном виде

$$X_t^* = \Phi(t,0)x + \Phi(t,0)\int_0^t \Phi(0,s)\sqrt{\alpha_s}\,G dW_s, \tag{11}$$

где матрица $\Phi(t,s) = \exp\left\{\left(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi\right)\int_s^t \alpha_v dv\right\}$ с вероятностью единица допускает оценку $\|\Phi(t,s)\| \leqslant \kappa_0 \exp\left(-\kappa\int_s^t \alpha_v dv\right)$, $s \leqslant t$, при некоторых неслучайных константах $\kappa_0, \kappa > 0$ ($\|\cdot\|$ — матричная евклидова норма). Ряд асимптотических свойств процесса X_t^*, $t \to \infty$, которые потребуются в дальнейшем, представлен в следующей лемме.

Лемма. *Пусть выполнены предположения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$. Тогда существуют константы $\bar{c}_1, \bar{c}_2 > 0$, такие что*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}\|X_t^*\|^2}{\ln\left(\mathrm{E}\int\limits_0^t \alpha_s ds + e\right)} < \bar{c}_1, \tag{12}$$

и с вероятностью единица выполняется неравенство

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\|X_t^*\|^2}{\ln\left(\int\limits_0^t \alpha_s ds + e\right)} < \bar{c}_2, \tag{13}$$

где e — основание натурального логарифма.

Доказательства леммы и теоремы вынесены в Приложение.

Необходимо отметить, что получение (4)–(5) из (2)–(3) при детерминированной замене времени позволяет напрямую использовать известные результаты по оптимальному управлению для автономных систем, см. [20]. В рассматриваемом случае стохастической временной шкалы требуется проводить отдельный анализ, результаты которого сформулированы в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть выполнены предположения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$. Тогда закон управления U^*, определенный в* (9)–(10), *будет являться решением задач* (6) *и* (7). *При этом*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)} = \lim_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\int\limits_0^T \alpha_t dt} = \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G) \quad \text{п.н.}$$

(tr$(\cdot)$ — *обозначение для следа матрицы*).

Замечание 1. Условие $\alpha_t > 0$ п.н., $t \geqslant 0$, было необходимо для перехода от системы (1)–(3) к системе (4)–(5) путем включения в анализ временной шкалы. Если процессы (4)–(5) уже заданы, то в предположение $\mathcal{A}$ можно ввести более слабое условие $\alpha_t \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

Замечание 2. В случае детерминированной системы, развивающейся во внутреннем времени, т.е. когда $G=0$ в (2), закон управления U^* будет являться решением задач $\limsup_{T\to\infty} \mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ и $\limsup_{T\to\infty} J_T^{(\alpha)}(U) \to \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ п.н. При этом $\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U^*) = \lim_{T\to\infty} J_T^{(\alpha)}(U^*) = x^{\mathrm{T}}\Pi x$.

Замечание 3. Наряду с задачами (6)–(7) можно рассмотреть и задачу $\limsup_{T\to\infty} \mathrm{E}\left\{J_T^{(\alpha)}(U)\left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}\right\} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$, в которой критерий получен из долговременного среднего, известного для детерминированной системы при постоянных неслучайных воздействиях. По аналогии с доказанным в теореме закон управления U^* вида (9)–(10) будет являться решением, и значение критерия при этом также равно $\mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}}\Pi G)$.

4. Примеры задания стохастических временных шкал и скалярной системы управления

В задаче управления (7) использовалась стохастическая нормировка, однако во многих примерах случайную нормировку удается заменить на детерминированную функцию. В приложениях при описании процесса α_t, $t \geqslant 0$, также часто вводят требование “сравнимости” временной шкалы $\mathcal{T}(T) = \int_0^T \alpha_t dt$ и реального горизонта планирования T при $T \to \infty$, см., например, [21, теорема 6.1, с. 174], т.е. $\mathcal{T}(T)/T \to \mathrm{const}$ п.н. В следующем замечании описываются возможность перехода к неслучайным нормировкам и вид соответствующих задач управления.

Замечание 4.

1. Пусть для случайного процесса α_t, $t \geqslant 0$, $\limsup_{T\to\infty} \left\{ \int_0^T \alpha_t dt / \Gamma_T^{(+)} \right\} = c^{(+)} > 0$ или $\liminf_{T\to\infty} \left\{ \int_0^T \alpha_t dt / \Gamma_T^{(-)} \right\} = c^{(-)} > 0$ с вероятностью единица; $\Gamma_T^{(+)}$, $\Gamma_T^{(-)}$ — положительные детерминированные функции, $c^{(+)}$, $c^{(-)}$ — константы. Тогда вместо (7) можно рассмотреть задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(+)}} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{или} \quad \liminf_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(-)}} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}.$$

Значения критериев на оптимальном управлении U^* будут при этом равны соответственно

$$\limsup_{T\to\infty} \left\{ \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(+)}} \right\} = c^{(+)} \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} \Pi G) \quad \text{и} \quad \liminf_{T\to\infty} \left\{ \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(-)}} \right\} = c^{(-)} \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} \Pi G).$$

Эргодичность процесса α_t, т.е. когда

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ T^{-1} \int_0^T \alpha_t dt \right\} = \lim_{T\to\infty} \left\{ T^{-1} \int_0^T \mathrm{E}\alpha_t dt \right\} \quad \text{п.н.},$$

превращает критерии задач (6)–(7) в долговременные средние.

2. Пусть $T^{-1} \int_0^T \alpha_t \to \bar{\alpha}$ п.н. и $T^{-1} \int_0^T \mathrm{E}\alpha_t \to \mathrm{E}\bar{\alpha}$, $T \to \infty$, где $\bar{\alpha} > 0$ — некоторая случайная величина. В этом случае (6)–(7) заменяются на задачи с критериями долговременных средних:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T^{(\alpha)}(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{и} \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}},$$

но здесь

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ T^{-1} \mathrm{E} J_T^{(\alpha)}(U^*) \right\} = (\mathrm{E}\bar{\alpha}) \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} \Pi G) \text{ и } \lim_{T\to\infty} \left\{ T^{-1} J_T^{(\alpha)}(U^*) \right\} = \bar{\alpha} \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} \Pi G),$$

т.е. детерминированная нормировка приводит к различию в значениях двух критериев на U^*, одно из долговременных средних будет являться случайной величиной.

Во всех рассматриваемых далее примерах в качестве $\bar{W}_t$, $t \geqslant 0$, обозначен скалярный винеровский процесс.

Пример 1. В финансовых и физических приложениях, см. [3, 7], в качестве замены времени часто используется так называемый CIR-процесс (процесс Cox-Ingersoll-Ross). Эта модель допускает обобщение на случай переменных коэффициентов в уравнении. Пусть $\alpha_t = \xi_t$, где ξ_t, $t \geqslant 0$, задается уравнением

$$d\xi_t = \mu\rho_t(\theta - \xi_t)dt + \sigma\sqrt{\rho_t}\sqrt{\xi_t}d\bar{W}_t, \quad \xi_0 = \bar{\xi} > 0, \tag{14}$$

константы $\mu, \theta, \sigma > 0$, $2\mu\theta \geqslant \sigma^2$; детерминированная монотонная функция $\rho_t > 0$, $t \geqslant 0$, такая что $\int_0^t \rho_s ds \to \infty$, $t \to \infty$. Нетрудно заметить, см., например, [22, теорема 8.5.7, с. 190], что $\xi_t = \tilde{\xi}_{\nu_t}$, где $\nu_t = \int_0^t \rho_s ds$, а процесс $\tilde{\xi}_\nu$ — стандартный процесс CIR с постоянными параметрами, т.е. решение уравнения $d\tilde{\xi}_\nu = \mu(\theta - \tilde{\xi}_\nu)d\nu + \sigma\sqrt{\tilde{\xi}_\nu}d\tilde{W}_\nu$, $\tilde{\xi}_0 = \bar{\xi}$, здесь $\tilde{W}_\nu$ — некоторый винеровский процесс. Тогда условие $2\mu\theta \geqslant \sigma^2$ дает $\tilde{\xi}_\nu > 0$ п.н., $\nu \geqslant 0$ (см., например, [23, раздел 6.3.1, с. 357]), и, следовательно, $\xi_t > 0$ с вероятностью единица, $t \geqslant 0$. Таким образом, процесс стохастической временной шкалы $\tau_t = \int_0^t \xi_s ds = \int_0^t \tilde{\xi}_{\nu_s} ds$ задается при помощи двойной замены времени. Так как статистические характеристики $\tilde{\xi}_\nu$, $\nu \geqslant 0$, хорошо известны, см., например, [23, раздел 6.3.3], то, используя замену времени, можно определить, что $\mathrm{E}\xi_t \to \theta$, $\mathrm{E}(\xi_t - \mathrm{E}\xi_t)^2 \to \theta\sigma^2(2\mu)^{-1}$ при $t \to \infty$. Для ковариационной функции $K(t,s) = \mathrm{E}(\xi_t\xi_s) - \mathrm{E}\xi_t\mathrm{E}\xi_s$ при этом справедлива оценка $\|K(t,s)\| \leqslant c_\xi \left(\exp\left\{-\mu\int_0^{\tilde{t}} \rho_v dv\right\} + \exp\left\{-\mu\int_{\tilde{s}}^{\tilde{t}} \rho_v dv\right\}\right)$, где $c_\xi > 0$ — некоторая константа, переменные $\tilde{t} = \max(t,s)$, $\tilde{s} = \min(t,s)$. Для исследования поведения нормировки $\mathcal{T}(T)$, $T \to \infty$, обратимся к утверждению [24, теорема A, с. 154], согласно которому для эргодичности процесса достаточно наличия оценки $\chi_T = \int_0^T\int_0^T \|K(t,s)\|dsdt \leqslant \bar{c}T^\gamma$ при некоторых константах $0 \leqslant \gamma < 2$ и $\bar{c} > 0$. Нетрудно заметить, что для неубывающей ρ_t при больших T характеристика $\chi_T \leqslant \bar{c}T$ в силу того, что $\|K(t,s)\| \leqslant c_\xi \left(\exp\left\{-\mu\rho_0\tilde{t}\right\} + \right.$ $\left. + \exp\left\{-\mu\rho_0\left(\tilde{t} - \tilde{s}\right)\right\}\right)$. При $\rho_t \to 0$, $t \to \infty$, и ограничении $\rho_t t^\beta \to \infty$, $t \to \infty$, для некоторого $\beta < 1$ можно взять константу $\gamma = \beta + 1$, так как в данном случае предел (при нахождении по правилу Лопиталя) равен $\lim\limits_{T\to\infty}\{\chi_T/T^\gamma\} =$ $= \lim\limits_{T\to\infty}\{1/(\rho_T T^{\gamma-1})\} = 0$. Следовательно, $\left(\int_0^T \xi_t dt - \int_0^T \mathrm{E}\xi_t dt\right)T^{-1} \to 0$ п.н., $T \to \infty$, и нормировки критериев в задачах (6)–(7) будут равны T (также см. п. 1 замечания 4).

Пример 2. В [25] была предложена сетевая модель "часов" со скоростью изменения времени, характеризуемой экспоненциальным процессом Орнштейна–Уленбека. Точнее, $\alpha_t = \lambda_t \exp(\xi_t)$, где $\xi_t = \sigma\exp(-at)\int_0^t \exp(at)d\bar{W}_t$, константа $a > 0$; функция $\lambda_t = (\exp(\mathrm{E}\xi_t^2/2))^{-1}$, т.е. $\mathrm{E}\alpha_t = 1$ в силу логнормального распределения для $\exp(\xi_t)$, $t \geqslant 0$. Соответственно $\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\alpha_t dt = 1$. Затем при потраекторном анализе временной шкалы рассматривается процесс $\mathcal{Y}_t = \alpha_t - \mathrm{E}\alpha_t$. Определяется его ковариационная функция $K(t,s) =$

$= \exp\{\rho(t,s)\} - 1$, где $\rho(t,s) = \mathrm{E}\xi^2_{\min(t,s)} \exp\{-a|t-s|\}$ и находится оценка $\chi_T = \int_0^T \int_0^T K(t,s)dsdt \leqslant \bar{c}T$ с некоторой константой $\bar{c} > 0$. Тогда, см. [24, теорема A, с. 154], $\lim_{T\to\infty}(\mathcal{Y}_T/T) = 0$ п.н., следствием чего будет являться соотношение $\lim_{T\to\infty} T^{-1}\int_0^T \alpha_t dt = 1$. В данном случае критерии в задачах (6)–(7) имеют вид долговременных средних.

Пример 3. В [26] при оценке финансовых инструментов использовалось "экономическое время" $\tau_t = \lambda_1 t + \lambda_2 \int_0^t \bar{W}_s^2 ds$ ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$ — константы). Здесь $\alpha_t = \lambda_1 + \lambda_2 \bar{W}_t^2$ и известно, см., например, [27], что

$$\liminf_{T\to\infty} \left\{ \left(\Gamma_T^{(-)}\right)^{-1} \int\limits_0^T \bar{W}_t^2 dt \right\} = 1/8, \quad \limsup_{T\to\infty} \left\{ \left(\Gamma_T^{(+)}\right)^{-1} \int\limits_0^T \bar{W}_t^2 dt \right\} = 8/\pi^2$$

для функций $\Gamma_T^{(-)} = T^2(\ln\ln T)^{-1}$, $\Gamma_T^{(+)} = T^2 \ln\ln T$, а также $\mathrm{E}\bar{W}_t^2 = t$. Таким образом, в данном примере временная шкала не обладает эргодическим свойством. Следовательно, при переходе от случайной нормировки к детерминированной вместо (7) возможно рассмотрение двух задач с разными критериями, включающими нормирующие функции $\Gamma_T^{(-)}$, $\Gamma_T^{(+)}$, см. п. 1 замечания 4.

Пример 4. Пусть $\alpha_t = \int_0^t \exp(-as + \sigma\bar{W}_s)ds$, где константа $a > 0$. Так как $a > 0$, то с вероятностью единица $\alpha_t \to \bar{\alpha}$, $t \to \infty$, где случайная величина $\bar{\alpha}$ имеет обратное гамма-распределение, см. [28]. Конечность значения $\mathrm{E}\bar{\alpha}$ обеспечивается при выполнении условия $\sigma^2/2 - a < 0$, а $\mathrm{E}\bar{\alpha}^2 < \infty$ при $\sigma^2 - a < 0$. Тогда согласно п. 2 замечания 4 задачи управления (6) и (7) можно заменить на задачи, содержащие критерии долговременных средних. При $\sigma^2/2 - a \geqslant 0$ соотношение $T^{-1}\int_0^T \mathrm{E}\alpha_t \to \infty$, $T \to \infty$, и требуется нормировка в (6), растущая быстрее T: степенная T^2 для случая $a = \sigma^2/2$ или экспоненциальная $\exp\{(\sigma^2/2 - a)t\}$, если $a < \sigma^2/2$. Следует отметить, что потраекторное долговременное среднее вместо критерия из (7) при этом сохраняется.

Полученные ранее результаты иллюстрируются на примере скалярной системы управления. Также определяется ряд характеристик процесса при оптимальной стратегии.

Пример 5. Рассматривается модель управления скоростью частицы в неоднородной среде, например, для области клеточной биологии. За основу берется уравнение динамики из [29] с "диффузионной диффузивностью", изменяющей временную шкалу в уравнении скорости, см. введение в [16], и моделируемой при помощи CIR-процесса с постоянными параметрами (14), где в качестве примера фактора с такой динамикой может рассматриваться процесс воздействия на клеточную мембрану из [30]. Уравнение динамики вида $dX_t = \xi_t U_t dt + G\sqrt{\xi_t}dW_t$, $X_0 = x$, и целевой функционал $J_T^{(\alpha)}(U) = \int_0^T (X_t^2 + U_t^2)dt$ соответствуют (4)–(5) с коэффициентами $A = 0$, $B = 1$, $Q = R = 1$, $\alpha_t = \xi_t$. Процессы $\bar{W}_t$ из (14) и W_t предполагаются независимыми, $t \geqslant 0$. Из результатов теоремы и примера 1 следует, что закон управления $U_t^* = -X_t^*$ является оптимальным по критериям долговременных средних. Воспользовавшись условной гауссовостью процесса X_t^*, можно выписать выражения $\mathrm{E}X_t^* = \mathrm{E}\left(\exp\left\{-\int_0^t \xi_v dv\right\}\right) x$ и $\mathrm{E}(X_t^*)^2 = $ $= \mathrm{E}\left(\exp\left\{-2\int_0^t \xi_v dv\right\}\right) x^2 + G^2/2$, см. [17, теорема 12.1]. Известно, см., например, [23, следствие 6.3.4.2], что при $\lambda > 0$ $\mathrm{E}\left(\exp\left\{-\lambda\int_0^t \xi_v dv\right\}\right) \sim$ $\sim \exp\left\{-\theta\mu\sigma^{-2}\left(\sqrt{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2} - \mu\right) t\right\}$, т.е. для двух моментов процесса X_t^* имеет место экспоненциальная скорость сходимости к постоянным значениям (нулю и $G^2/2$). В силу эргодичности процесса ξ_t и из леммы следует, что траектории X_t^* п.н. мажорируются функцией, пропорциональной $\sqrt{\ln t}$ при $t \to \infty$.

5. Заключение

В статье проведено исследование линейной системы управления (2) с квадратичным целевым функционалом (3) на бесконечном интервале в предположении о стохастическом характере временной шкалы (1) (также см. предположение $\mathcal{A}$). Включение (1) в анализ приводит к системе (4)–(5) со случайными коэффициентами, для которой сформулированы задачи управления (6) и (7) с критериями, выступающими аналогами долговременных средних. Показано, что в данном случае оптимальная стратегия управления может быть выбрана в виде хорошо известного линейного закона U^* (см. (9)–(10) и утверждение теоремы). Следует отметить, что в отличие от задач синтеза стохастических линейных регуляторов с детерминированными коэффициентами, см., например, [20, 31], нормировки в критериях для двух задач (6) и (7) управления системой (4)–(5) являются различными. В общем случае эргодичность процесса временной шкалы $\tau_t = \int_0^t \alpha_s ds$ не имеет места, и может наблюдаться существенное расхождение в порядках роста целевого функционала $J_T(U^*)$ и его ожидаемого значения $\mathrm{E}J_T(U^*)$ на оптимальном управлении U^* (см. примеры 3 и 4). Как можно видеть, при переходе к стохастической временной шкале в линейных системах управления с постоянными коэффициентами происходит сохранение ключевых свойств стабилизируемости/выявляемости, устойчивости и, как следствие, оптимальности на бесконечном интервале времени закона управления в форме линейной обратной связи по состоянию. Данное замечание позволяет предположить, что вид оптимальной стратегии может оказаться инвариантным относительно случайной замены времени и в других задачах оптимального управления для линейных систем, в частности, при использовании так называемого "чувствительного к риску" целевого функционала $\exp(\theta J_{\mathcal{T}}(\tilde{U}))$ ($J_{\mathcal{T}}(\tilde{U})$ задан в (3), θ — константа). В качестве направления дальнейших исследований можно выделить анализ ситуации немонотонной стохастической временной шкалы, встречающейся в приложениях для моделей из области статистики, метрологии и компьютерных наук.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Сначала утверждения леммы доказываются для случая уравнения (10) при $A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi = -\kappa I$, $\kappa > 0$ — константа,

I — единичная матрица. Затем показывается, что анализируемые свойства процесса X_t^*, $t \to \infty$, из уравнения (10) при произвольной экспоненциально устойчивой матрице $A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi$ не меняются. Рассматривается процесс $X_t^* = \hat{X}_t$, $t \geqslant 0$, с динамикой

$$d\hat{X}_t = -\kappa\alpha_t I\hat{X}_t + \sqrt{\alpha_t}GdW_t, \quad \hat{X}_0 = 0.$$

Обозначив через $\hat{X}_{it}$ i-ю компоненту процесса $\hat{X}_t$, $i = 1, \dots, n$, нетрудно получить представление $\hat{X}_{it} = c_i M_{it} \left(\langle M_{it}\rangle + 1\right)^{-1/2}$, где мартингал $M_{it} = c_i^{-1}\int_0^t \sqrt{\alpha_s}\exp\left\{\int_0^s \kappa\alpha_v dv\right\}\left(\sum_{j=1}^d G_{ij}dW_{js}\right)$, его квадратическая характеристика $\langle M_{it}\rangle = \exp\left\{2\kappa\int_0^t \alpha_v dv\right\} - 1$; константа $c_i = \left((2\kappa)^{-1}\sum_{j=1}^d G_{ij}^2\right)^{1/2}$, G_{ij} — элементы матрицы G ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, d$); W_{jt} — j-я компонента винеровского процесса W_t ($j = 1, \dots, d$). В [32, лемма 2.3] было установлено, что $\left\|M_{it}(\langle M_{it}\rangle + 1)^{-1/2}\right\| \leqslant N(\omega)\sqrt{\ln\ln(\langle M_{it}\rangle + e^e)}$, где $N(\omega) \geqslant 0$ — п.н. конечная случайная величина. Поэтому для процесса $\|\hat{X}_t\|^2$ с вероятностью единица будет иметь место соотношение

$$\|\hat{X}_t\|^2 \leqslant cN^2(\omega)\ln\left(\int_0^t \alpha_v dv + e\right). \tag{П.1}$$

Тогда из оценки (П.1) и неравенства Йенсена следует, что

$$\mathrm{E}\|\hat{X}_t\|^2 \leqslant \tilde{c}\ln\left(\mathrm{E}\int_0^t \alpha_v dv + e\right), \tag{П.2}$$

где в качестве $c, \tilde{c}$ в (П.1) и (П.2) обозначены некоторые положительные константы, конкретные значения которых несущественны и могут меняться от формулы к формуле. Нетрудно заметить, что соотношение (13) является очевидным следствием приведенного выше представления для компонент $\hat{X}_t$ и закона повторного логарифма для мартингалов, см., например, [33]. Далее в рассмотрение вводится процесс $Z_t = X_t^* - \hat{X}_t$ с уравнением динамики

$$dZ_t = \alpha_t\left(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi\right)Z_t dt + \alpha_t\left(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi + \kappa I\right)\hat{X}_t, \quad Z_0 = x,$$

имеющим решением $Z_t = \Phi(t,0)x + \int_0^t \Phi(t,s)\alpha_s(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\Pi + \kappa I)\hat{X}_s ds$. С учетом верхней границы для $\|\Phi(t,s)\|$ (см. замечание к (11)) и неравенства Коши–Буняковского для процесса Z_t возникает оценка

$$\begin{aligned} \|Z_t\|^2 \leqslant{} & 2\kappa_0^2 \exp\left\{-2\kappa\int_0^t \alpha_v dv\right\}\|x\|^2 + \\ & + c\exp\left\{-\kappa\int_0^t \alpha_v dv\right\}\int_0^t \alpha_s\exp\left\{\kappa\int_0^s \alpha_v dv\right\}\|\hat{X}_s\|^2 ds. \end{aligned} \tag{П.3}$$

Применение (П.1) к (П.3) дает соотношение

$$\|Z_t\|^2 \leqslant 2\kappa_0^2 \exp\left\{-2\kappa \int\limits_0^t \alpha_v dv\right\}\|x\|^2 + cN^2(\omega)\ln\left(\int\limits_0^t \alpha_v dv + e\right),$$

взятие математического ожидания от обеих частей которого в совокупности с неравенством Йенсена приводит к оценке $\mathrm{E}\|Z_t\|^2 \leqslant \tilde{c} + \tilde{c}\ln\left(\mathrm{E}\int_0^t \alpha_v dv + e\right)$, откуда и следует (12) доказываемой леммы. Неравенство (13) также нетрудно получить известным образом, см., например, доказательство в [31, теорема 2], если заметить, что $h_t = \ln\left(\int_0^t \alpha_v dv + e\right)$ является неубывающей функцией. Тогда деление (П.3) на h_t при последующем оценивании интеграла в правой части (с привлечением результата для $\|\hat{X}_t\|^2$) в пределе даст ограниченную величину. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. При $U \in \mathcal{U}$ выписывается представление для разности целевых функционалов

$$J_T^{(\alpha)}(U^*) - J_T^{(\alpha)}(U) = \tag{П.4}$$
$$= 2x_T^{\mathrm{T}}\Pi X_T^* - \int\limits_0^T \alpha_t\left(x_t^{\mathrm{T}}Qx_t + u_t^{\mathrm{T}}Ru_t\right)dt - 2\int\limits_0^T \sqrt{\alpha_t}x_t^{\mathrm{T}}\Pi G dW_t,$$

где переменные $x_t = X_t^* - X_t$, $u_t = U_t^* - U_t$, при этом $dx_t = \alpha_t Ax_t dt + \alpha_t Bu_t dt$, $x_0 = 0$. Так как пара (A, C) — наблюдаема, то существует матрица F, такая что матрица $A + FC$ является экспоненциально устойчивой. Тогда $\|x_t\| \leqslant$ $\leqslant c\exp\left\{-\bar{\kappa}\int_0^t \alpha_v dv\right\}\int_0^t \exp\left\{\bar{\kappa}\int_0^s \alpha_v dv\right\}\alpha_s(\|Cx_s\| + \|u_s\|)ds$ при некотором числе $\bar{\kappa} > 0$. После возведения в квадрат и применения неравенства Коши–Буняковского, а также условий $Q = C^{\mathrm{T}}C$, $R > 0$ будем иметь $\|x_t\|^2 \leqslant$ $\leqslant \tilde{c}\exp\left\{-\bar{\kappa}\int_0^t \alpha_v dv\right\}\int_0^t \exp\left\{\bar{\kappa}\int_0^s \alpha_v dv\right\}\alpha_s\left(x_s^{\mathrm{T}}Qx_s + u_s^{\mathrm{T}}Ru_s\right)ds$. В дальнейшем при помощи интегрирования по частям показывается, что $\int_0^T \|x_t\|^2 ds \leqslant$ $\leqslant \tilde{c}\bar{\kappa}^{-1}\int_0^T \alpha_t\left(x_t^{\mathrm{T}}Qx_t + u_t^{\mathrm{T}}Ru_t\right)dt$. Соответственно получается оценка $\|x_T\|^2 +$ $+ \int_0^T \|x_s\|^2 ds \leqslant c_0\int_0^T \alpha_t\left(x_t^{\mathrm{T}}Qx_t + u_t^{\mathrm{T}}Ru_t\right)dt$ для $T > 0$ и некоторой константы $c_0 > 0$. Тогда с учетом элементарного неравенства $2ab \leqslant a^2\bar{c} + b^2/\bar{c}$, выполняющегося для любых чисел a, b и $\bar{c} > 0$, выражение в правой части (П.4) оценивается в виде

$$J_T^{(\alpha)}(U^*) - J_T^{(\alpha)}(U) \leqslant c_1\|X_T^*\|^2 - c_2\int\limits_0^T \alpha_t\|x_t\|^2 dt - 2\int\limits_0^T \sqrt{\alpha_t}x_t^{\mathrm{T}}\Pi G dW_t, \tag{П.5}$$

где $c_1, c_2 > 0$ — некоторые константы. После взятия математического ожидания от обеих частей (П.5) и деления на $\mathrm{E}(\int_0^T \alpha_t dt)$, при предельном переходе

$T \to \infty$ используется результат (П.2) леммы, что приводит к соотношению

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E} J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E} J_T^{(\alpha)}(U)}{\mathrm{E}\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)}.$$

При потраекторном анализе (П.5), введя обозначение

$$M_T = -2 \int\limits_0^T \sqrt{\alpha_t} x_t^{\mathrm{T}} \Pi G dW_t,$$

запишем оценку для (П.5) вида

$$J_T^{(\alpha)}(U^*) \leqslant J_T^{(\alpha)}(U) + \mathcal{R}_T,$$

где $\mathcal{R}_T = -c_3 \langle M_T \rangle + M_T$ при некоторой константе $c_3 > 0$; $\langle M_T \rangle = \int_0^T \|\sqrt{\alpha_t} G^{\mathrm{T}} \Pi x_t\|^2 dt$ — квадратическая характеристика M_T. Заметим, что $\limsup_{T\to\infty} g_T \mathcal{R}_T \leqslant 0$ п.н. для любой монотонной функции g_T со свойством $g_T > 0$, $g_T \to \infty$, $T \to \infty$ (см. [34]), в частности $g_T = \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1}$ (также см. предположение $\mathcal{A}$). Также очевидно, что из (13) следует $\|X_T^*\|^2 \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1} \to 0$ п.н., $T \to \infty$. Поэтому с вероятностью единица будет выполнено соотношение

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\left(\int\limits_0^T \alpha_t dt\right)}.$$

По формуле Ито стандартным образом определяется, что $J_T^{(\alpha)}(U^*) = x^{\mathrm{T}} \Pi x - (X_T^*)^{\mathrm{T}} \Pi X_T^* + \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} \Pi G) \int_0^T \alpha_t dt + 2 \int_0^T \sqrt{\alpha_t} (X_t^*)^{\mathrm{T}} \Pi G dW_t$. Тогда значение критерия в (6) при U^* равно $\lim_{T\to\infty} \left\{ \mathrm{E} J_T^{(\alpha)}(U^*) \mathrm{E}\left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1} \right\} = \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} \Pi G)$. Применение закона повторного логарифма для мартингала $\mathcal{M}_T = \int_0^T \sqrt{\alpha_t} (X_t^*)^{\mathrm{T}} \Pi G dW_t$ дает оценку $\|\mathcal{M}_T\| \leqslant c \sqrt{\langle \mathcal{M}_T \rangle \ln \ln \langle \mathcal{M}_T \rangle}$ при больших T, а использование (13) позволяет перейти к выражению $\langle \mathcal{M}_T \rangle \leqslant \tilde{c} \left(\int_0^T \alpha_t dt\right) \ln \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)$. Следовательно, $\|\mathcal{M}_T\| \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1} \to 0, T \to \infty$, п.н., тогда $\lim_{T\to\infty} \left\{ J_T^{(\alpha)}(U^*) \left(\int_0^T \alpha_t dt\right)^{-1} \right\} = \mathrm{tr}(G^{\mathrm{T}} \Pi G)$ с вероятностью единица. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Veraart A.E.D., Winkel M.* Time change / Encyclopedia of quantitative finance. N.Y.: Wiley, 2010. P. 1878–1881.

2. *Kobayashi K.* Stochastic Calculus for a Time-Changed Semimartingale and the Associated Stochastic Differential Equations // J. Theor. Probab. 2011. V. 24. No. 3. P. 789–820.
3. *Borovkova S., Schmeck M.D.* Electricity Price Modeling with Stochastic Time Change // Energy Economics. 2017. V. 63. P. 51–65.
4. *Capra W.B., Muller H.G.* An Accelerated-time Model for Response Curves // JASA. 1997. V. 92. No. 437. P. 72–83.
5. *Heath D., Platen E.* Understanding the Implied Volatility Surface for Options on a Diversified Index // Asia-Pacific Financial Markets. 2004. V. 11. No. 1. P. 55–77.
6. *Ray D., Bossaerts P.* Positive Temporal Dependence of the Biological Clock Implies Hyperbolic Discounting // Frontiers in neuroscience. 2011. V. 5. P. 2.
7. *Uneyama T., Miyaguchi T., Akimoto T.* Relaxation Functions of the Ornstein-Uhlenbeck Process with Fluctuating Diffusivity // Physical Review E. 2019. V. 99. No. 3. P. 032127.
8. *Ye Z.S., Xie M.* Stochastic Modelling and Analysis of Degradation for Highly Reliable Products // Applied Stochastic Models in Business and Industry. 2015. V. 31. No. 1. P. 16–32.
9. *Poulsen D.R., Davis J.M., Gravagne I.A.* Optimal Control on Stochastic Time Scales // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 14861–14866.
10. *Lamperski A., Cowan N.J.* Time-changed Linear Quadratic Regulators // 2013 Eur. Control Conf. (ECC). IEEE, 2013. P. 198–203.
11. *Tang S.* General Linear Quadratic Optimal Stochastic Control Problems with Random Coefficients: Linear Stochastic Hamilton Systems and Backward Stochastic Riccati Equations // SIAM J. Control Optim. 2003. V. 42. No. 1. P. 53–75.
12. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of Random Processes: I. General Theory. Berlin: Springer, 2001.
13. *Oksendal B.* When is a Stochastic Integral a Time Change of a Diffusion? // J. Theor. Probab. 1990. V. 3. No. 2. P. 207–226.
14. *Shaliastovich I., Tauchen G.* Pricing Implications of Stochastic Volatility, Business Cycle Time Change and Non-Gaussianity // Working paper. Duke University. 2005.
15. *Howison S., Lamper D.* Trading Volume in Models of Financial Derivatives // Appl. Math. Financ. 2001. V. 8. No. 2. P. 119–135.
16. *Lanoiselee Y., Moutal N., Grebenkov D.S.* Diffusion-limited Reactions in Dynamic Heterogeneous Media // Nature Commun. 2018. V. 9. No. 1. P. 1–16.
17. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of random processes: II. Applications. Berlin: Springer, 2001.
18. *Дэвис М.Х.А.* Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.
19. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.
20. *Паламарчук Е.С.* Об инвариантности оптимального управления линейной экономической системой при одновременном масштабировании ее параметров // Сб. ЦЭМИ. 2018. Вып. 2. Режим доступа: https://cemi.jes.su/s111111110000084-5-1
21. *Chen H.* A Brownian Model of Stochastic Processing Networks / Stochastic Modeling and Optimization. With Applications in Queues, Finance, and Supply Chains. Yao D.D, Zhang H., Zhou X.Y. (Eds.). N.Y.: Springer, 2003. P. 171–192.
22. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, АСТ. 2003.

23. *Jeanblanc M., Yor M., Chesney M.* Mathematical methods for financial markets. N.Y.: Springer, 2009.
24. *Loeve M.* Probability theory II. 4th ed. New York: Springer, 1978.
25. *Freris N.M., Borkar V.S., Kumar P.R.* A Model-based Approach to Clock Synchronization // Proc. 48th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). N.Y.: IEEE, 2009. P. 5744–5749.
26. *Xia W.* Pricing Exotic Power Options with a Brownian-Time-Changed Variance Gamma Process // Commun. Math. Financ. 2017. V. 6. No. 1. P. 21–60.
27. *Csaki E.* Iterated Logarithm Laws for the Square Integral of a Wiener Process / The First Pannonian Symposium on Mathematical Statistics. Revesz P., Schmetterer L., Zolotarev V.M. (Eds.). N.Y.: Springer, 1981. P. 42–53.
28. *Dufresne D.* The Distribution of a Perpetuity, with Applications to Risk Theory and Pension Funding // Scandinavian Actuarial J. 1990. V. 1990. No. 1. P. 39–79.
29. *Lanoiselee Y., Grebenkov D.S.* A Model of Non-Gaussian Diffusion in Heterogeneous Media // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. 2018. V. 51. No. 14. P. 145602.
30. *Ditlevsen S., Lansky P.* Estimation of the Input Parameters in the Feller Neuronal Model // Physical Review E. 2006. V. 73. No. 6. P. 061910.
31. *Белкина Т.А., Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями // АиТ. 2013. № 4. С. 110–128.

    Belkina T.A., Palamarchuk E.S. On Stochastic Optimality for a Linear Controller with Attenuating Disturbances // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 4. P. 628–641.
32. *Lapeyre B.* A Priori Bound for the Supremum of Solutions of Stable Stochastic Differential Equations // Stochastics. 1989. V. 28. No. 3. P. 145–160.
33. *Wang J.* A Law of the Iterated Logarithm for Stochastic Integrals // Stoch. Proc. Appl. 1993. V. 47. No. 2. P. 215–228.
34. *Белкина Т.А., Кабанов Ю.М., Пресман Э.Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. №4. С. 661–675.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 26.06.2020

После доработки 07.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021