

© 2021 г. Л.А. НЕЖЕЛЬСКАЯ, д-р физ.-мат. наук (ludne@mail.ru),
А.В. КЕБА (mir.na.mig7@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО МАР-ПОТОКА СОБЫТИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний обобщенного МАР-потока (Markovian Arrival Process) с n состояниями, являющегося одной из математических моделей реальных информационных потоков сообщений. Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний исследуемого потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты расчетов оценок состояний на основании построенной имитационной модели обобщенного МАР-потока событий.

Ключевые слова: обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний, оптимальное оценивание состояний, апостериорные вероятности, критерий максимума апостериорной вероятности.

DOI: 10.31857/S0005231021050056

1. Введение

Интенсивное развитие компьютерных систем, расширение информационных сетей связи дало толчок к формированию широкой сферы приложений аппарата теории массового обслуживания (ТМО), а именно: проектирование, внедрение, эксплуатация информационно-вычислительных сетей, систем спутниковой связи, телекоммуникационных сетей и т.п. Это стало причиной введения в рассмотрение новой математической модели входящего потока событий, адекватно описывающей реальные информационные потоки случайных событий.

Так как зачастую на практике все параметры потока известны частично или полностью неизвестны, или изменяются со временем (нередко изменения носят случайный характер), то в качестве математических моделей реальных потоков событий в середине 80-х годов прошлого века вошли в рассмотрение дважды стохастические потоки. Такие потоки характеризуются случайностью моментов времени наступления событий в потоке, представлением интенсивности потока как случайного процесса и подразделяются на два класса: 1) интенсивность потоков есть непрерывный случайный процесс [1]; 2) интенсивность потоков представляет собой кусочно-постоянный случайный процесс с конечным числом состояний [2, 3]. Потоки второго класса, к которым относится обобщенный МАР-поток событий с произвольным числом состояний [4], в [2] получили название МС-потоков (Markov Chain).

Дважды стохастические потоки событий, как правило, являются коррелированными потоками. В этой связи исследование как самих потоков, так и систем массового обслуживания (СМО), составной частью которых являются коррелированные входящие потоки событий, является актуальной задачей. Исчерпывающий анализ современного состояния теории очередей с коррелированными потоками приведен в книге [5].

При исследовании дважды стохастических потоков событий выделяют два основных раздела задач, базой для которых служат наблюдения за моментами времени наступления событий: 1) оценка состояний (фильтрация) потока событий [6–11]; 2) оценка параметров потока [12–17].

В данной статье решается задача об оптимальной оценке состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний. Предлагается алгоритм оптимального оценивания состояний потока, согласно которому решение о состоянии выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений. Критерий обеспечивает минимум безусловной вероятности ошибки вынесения решения.

2. Постановка задачи

Рассматривается обобщенный МАР-поток событий (далее — поток), сопровождающий процесс $\lambda(t)$ которого является случайным кусочно-постоянным принципиально ненаблюдаемым процессом с n состояниями: S_1, \dots, S_n . Если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, то будем говорить, что имеет место i -е состояние (S_i) процесса $\lambda(t)$, причем $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$.

Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии ($i = \overline{1, n}$) определяется случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $i = \overline{1, n}$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i -м состоянии, т.е. $\lambda(t) = \lambda_i$, то в момент окончания i -го состояния происходит следующий розыгрыш состояний: 1) наступает событие потока в i -м состоянии, и процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е состояние с вероятностью $P_1(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$; 2) не наступает событие потока в i -м состоянии, и процесс $\lambda(t)$ переходит из i -го состояния в j -е состояние с вероятностью $P_0(\lambda_j | \lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$. При этом выполняется условие нормировки

$$\sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_i) + \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j | \lambda_i) = 1, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Замечание 1. Обобщение МАР-потока событий с произвольным числом состояний заключается во введении вероятности $P_0(\lambda_i | \lambda_i) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, перехода процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния в i -е без наступления события потока.

Блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса $\lambda(t)$ имеет вид

$$D = \| \|D_0 | D_1 \|,$$

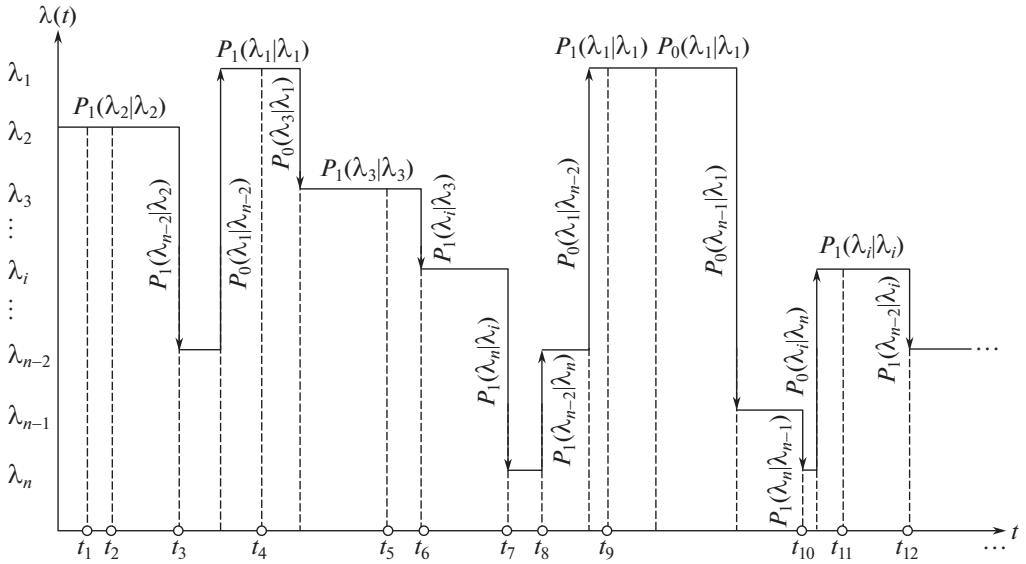


Рис. 1. Реализация обобщенного МАР-потока событий с n состояниями.

где

$$D_0 = \left\| \begin{array}{cccc} -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) & \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_0(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & -\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) & \dots & \lambda_2 P_0(\lambda_n|\lambda_2) \\ \lambda_3 P_0(\lambda_1|\lambda_3) & \lambda_3 P_0(\lambda_2|\lambda_3) & \dots & \lambda_3 P_0(\lambda_n|\lambda_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_0(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_0(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & -\lambda_n(1 - P_0(\lambda_n|\lambda_n)) \end{array} \right\|_{n \times n},$$

$$D_1 = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) & \lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1) & \dots & \lambda_1 P_1(\lambda_n|\lambda_1) \\ \lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2) & \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2) & \dots & \lambda_2 P_1(\lambda_n|\lambda_2) \\ \lambda_3 P_1(\lambda_1|\lambda_3) & \lambda_3 P_1(\lambda_2|\lambda_3) & \dots & \lambda_3 P_1(\lambda_n|\lambda_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n P_1(\lambda_1|\lambda_n) & \lambda_n P_1(\lambda_2|\lambda_n) & \dots & \lambda_n P_1(\lambda_n|\lambda_n) \end{array} \right\|_{n \times n}.$$

Элементы $d_{ii}^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$, матрицы D_0 — интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком; элементы $d_{ij}^{(0)}$ — интенсивности переходов из состояния i в состояние j без наступления события, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Элементами $d_{ij}^{(1)}$ матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния i в состояние j с наступлением события, $i, j = \overline{1, n}$.

Утверждение 1. Процесс $\lambda(t)$ для обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний является скрытым марковским процессом.

Одна из реализаций процесса $\lambda(t)$ и обобщенного МАР-потока событий с n состояниями изображена на рис. 1, где t_1, t_2, \dots — моменты наступления событий.

Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t необходимо получить явный вид апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t_1, \dots, t_m, t) = P(\lambda(t) = \lambda_i|t_1, \dots, t_m, t) = w(\lambda_i|t)$ того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, при условии, что известна реализация t_1, \dots, t_m (наблюдения) моментов времени наступления событий потока на интервале $(t_0; t)$, где t_0 — момент начала наблюдения, t — момент окончания наблюдения.

Рассматривается стационарный режим функционирования потока, поэтому переходными процессами пренебрегаем и без ограничения общности полагаем $t_0 = 0$.

Оптимальное оценивание состояния процесса $\lambda(t)$ в смысле минимума полной (безусловной) вероятности ошибки принятия решения [18] осуществляется по критерию максимума апостериорной вероятности на основании сравнения $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в момент времени t : если $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

3. Алгоритм оптимальной оценки состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний

3.1. Вывод рекуррентных соотношений для апостериорных вероятностей состояний

Пусть наблюдения за потоком начинаются в момент времени $t = 0$ и время t изменяется дискретно с шагом Δt : $t^{(l)} = l\Delta t$, $l = 0, 1, \dots$ [19]. Введем двумерный случайный процесс $(\lambda^{(l)}, r_l)$, где $\lambda^{(l)} = \lambda(l\Delta t)$ — значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $t^{(l)} = l\Delta t$ ($\lambda^{(l)} = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$); $r_l = r_l(\Delta t) = r(l\Delta t) - r((l-1)\Delta t)$ — число событий потока, наступивших на интервале времени $((l-1)\Delta t; l\Delta t)$ длительности Δt , $r_l = 0, 1, \dots$. Поскольку на интервале $(-\Delta t; 0)$ наблюдение за потоком не производится, то r_0 можем положить произвольным, например $r_0 = 0$.

Утверждение 2. Случайный процесс $(\lambda^{(l)}, r_l)$ для обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний является марковским процессом.

Введем $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, \dots, r_m)$ — последовательность значений количества наблюдаемых событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((l-1)\Delta t; l\Delta t)$ длительности Δt , $l = \overline{0, m}$; $\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ — последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(l\Delta t)$ в моменты времени $l\Delta t$, $l = \overline{0, m}$ ($\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$).

Введем $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ — совместную вероятность значений $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ и \mathbf{r}_m ; $w(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}|\mathbf{r}_m)$ — условная вероятность значений $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация \mathbf{r}_m ; $w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m)$ — условная вероятность значения $\lambda^{(m)}$ при условии, что наблюдалась реализация \mathbf{r}_m , $w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1})$ — условная вероятность значения $\lambda^{(m+1)}$ при условии, что наблюдалась реализация \mathbf{r}_{m+1} .

Для двумерного марковского случайного процесса $(\lambda^{(l)}, r_l)$ справедливо рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей [20]:

$$(1) \quad w\left(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}\right) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)})},$$

где $p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}) = p(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m)$ — вероятность перехода процесса $(\lambda^{(l)}, r_l)$ из состояния $(\lambda^{(m)}, r_m)$ в состояние $(\lambda^{(m+1)}, r_{m+1})$ за один шаг Δt .

Рассмотрим вероятность $w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)}|r_0(\Delta t), r_1(\Delta t), \dots, r_m(\Delta t))$. Компонента $r_l(\Delta t) = r(l\Delta t) - r((l-1)\Delta t)$ вектора \mathbf{r}_m зависит от текущего времени $t^{(l)} = l\Delta t$, $l = \overline{0, m}$; при этом $t^{(m)} = m\Delta t = t$ — момент окончания наблюдения. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_m &= \left(r_0(t^{(0)}), r_1(t^{(1)}), \dots, r_m(t^{(m)})\right) = \\ &= \left(r_0(t=0), r_1\left(\frac{t}{m}\right), r_2\left(\frac{2t}{m}\right), \dots, r_m(t)\right) = \mathbf{r}_m(t), \end{aligned}$$

т.е. вектор наблюдений \mathbf{r}_m является функцией времени t ($t^{(l)} = \frac{l}{m}t$).

В связи с этим $w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m(t)) = w(\lambda^{(m)}|t)$; $w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}(t + \Delta t)) = w(\lambda^{(m+1)}|t + \Delta t)$.

Тогда рекуррентное соотношение (1) принимает вид

$$(2) \quad w\left(\lambda^{(m+1)}|t + \Delta t\right) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)})}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m)p(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)})}.$$

Утверждение 3. В силу конструкции случайного процесса $(\lambda^{(l)}, r_l)$ и его марковости переходная вероятность в (2) для обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний выпишется в виде

$$\begin{aligned} p\left(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}, r_m\right) p\left(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, r_m, \lambda^{(m+1)}\right) &= \\ &= p\left(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}\right) p\left(r_{m+1}|\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $r_{m+1} = 0$ в (2), т.е. на интервале $(t; t + \Delta t)$, где $t = m\Delta t$, $t + \Delta t = (m + 1)\Delta t$, нет событий обобщенного МАР-потока. Этот случай описывает поведение апостериорной вероятности на интервале времени между моментами t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$, наступления соседних событий потока. Положим в (2) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_i$. Тогда с учетом утверждения 3 рекуррентное соотношение (2) для апостериорных вероятностей $w(\lambda^{(m)}|t)$, $w(\lambda^{(m+1)}|t + \Delta t)$ состояний обобщенного МАР-потока запишется в виде

$$\begin{aligned}
 & w(\lambda_i|t + \Delta t) = \\
 (3) \quad & \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t)p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i|\lambda^{(m)})p(r_{m+1} = 0|\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t)p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)})p(r_{m+1} = 0|\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}, \\
 & \sum_{i=1}^n w(\lambda_i|t + \Delta t) = 1, \quad i = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

3.2. Явный вид апостериорных вероятностей

Найдем вероятность перехода $p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i|\lambda^{(m)} = \lambda_i)p(r_{m+1} = 0|\lambda^{(m)} = \lambda_i, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i)$, $i = \overline{1, n}$, в формуле (3).

Введем событие $(\lambda^{(m)} = \lambda_i, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i)$ — процесс $\lambda(t)$ в момент времени t принимает значение λ_i , и на интервале $(t; t + \Delta t)$ не наступает событие потока, и в момент времени $t + \Delta t$ процесс $\lambda(t)$ принимает значение λ_i . Тогда вероятность описанной ситуации представляется в виде

$$\begin{aligned}
 & p(\lambda^{(m)} = \lambda_i, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i) = \\
 & = p(r_{m+1} = 0|\lambda^{(m)} = \lambda_i, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i) p(\lambda^{(m)} = \lambda_i, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i),
 \end{aligned}$$

откуда следует

$$p(r_{m+1} = 0|\lambda^{(m)} = \lambda_i, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i) = \frac{p(\lambda^{(m)} = \lambda_i, r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i)}{p(\lambda^{(m)} = \lambda_i, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i)}$$

или

$$p(r_{m+1} = 0|\lambda^{(m)} = \lambda_i, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i) = \frac{p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i|\lambda^{(m)} = \lambda_i)}{p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i|\lambda^{(m)} = \lambda_i)}.$$

Из последнего равенства, учитывая, что

$$p(r_{m+1} = 0, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i|\lambda^{(m)} = \lambda_i) = 1 - \lambda_i(1 - P_0(\lambda_i|\lambda_i))\Delta t + o(\Delta t),$$

находим

$$\begin{aligned}
 & p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i|\lambda^{(m)} = \lambda_i) p(r_{m+1} = 0|\lambda^{(m)} = \lambda_i, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i) = \\
 & = 1 - \lambda_i(1 - P_0(\lambda_i|\lambda_i))\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

Аналогично для вероятностей перехода при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} p\left(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i | \lambda^{(m)} = \lambda_j\right) p\left(r_{m+1} = 0 | \lambda^{(m)} = \lambda_j, \lambda^{(m+1)}\right) = \\ = \lambda_j P_0(\lambda_i | \lambda_j) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Подставляя выписанные выражения для вероятностей перехода в (3), находим числитель A и знаменатель B в виде

$$\begin{aligned} A = w(\lambda_i | t) + \left[-\lambda_i w(\lambda_i | t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j P_0(\lambda_i | \lambda_j) w(\lambda_j | t) \right] \Delta t + o(\Delta t), \\ B = 1 - \left[\sum_{d=1}^n \lambda_d \left(1 - \sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_d) \right) w(\lambda_d | t) \right] \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

где $w(\lambda_i | t) = w(\lambda^{(m)} = \lambda_i | t)$, $i = \overline{1, n}$.

Учитывая, что

$$B^{-1} = 1 + \left[\sum_{d=1}^n \lambda_d \left(1 - \sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_d) \right) w(\lambda_d | t) \right] \Delta t + o(\Delta t),$$

и проделывая необходимые преобразования, находим (3) в виде

$$\begin{aligned} w(\lambda_i | t + \Delta t) - w(\lambda_i | t) = \left[-\lambda_i w(\lambda_i | t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j P_0(\lambda_i | \lambda_j) w(\lambda_j | t) + \right. \\ \left. + w(\lambda_i | t) \sum_{d=1}^n \lambda_d \left(1 - \sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_d) \right) w(\lambda_d | t) \right] \Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Разделив обе части последнего соотношения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно апостериорных вероятностей:

$$\begin{aligned} (4) \quad w'(\lambda_i | t) = -\lambda_i w(\lambda_i | t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j P_0(\lambda_i | \lambda_j) w(\lambda_j | t) + \\ + w(\lambda_i | t) \sum_{d=1}^n \lambda_d \left(1 - \sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_d) \right) w(\lambda_d | t), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Обозначим $u_d = 1 - \sum_{j=1}^n P_0(\lambda_j | \lambda_d) = \sum_{j=1}^n P_1(\lambda_j | \lambda_d)$.

С учетом сделанного обозначения система уравнений (4) преобразуется к виду

$$(5) \quad \begin{aligned} w'(\lambda_i|t) = & -\lambda_i w(\lambda_i|t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j) w(\lambda_j|t) + \\ & + w(\lambda_i|t) \sum_{d=1}^n \lambda_d u_d w(\lambda_d|t), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Апостериорные вероятности состояний обобщенного МАР-потока событий с n состояниями, $n = 2, 3, \dots$, на интервалах времени $(t_0; t_1)$ и $(t_k; t_{k+1})$, $k = 1, 2, \dots$, имеют вид

$$(6) \quad \begin{aligned} w(\lambda_i|t) = & \frac{\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{A}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j|t_k) e^{\beta_s(t-t_k)}}{\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{A}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j|t_k) e^{\beta_s(t-t_k)}}, \\ & i = \overline{1, n}, \quad t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \\ & \sum_{i=1}^n w(\lambda_i|t) = 1, \end{aligned}$$

где величины \tilde{A}_1 , \tilde{A}_{js} , $\alpha_i^{(s)}$, β_s определяются в ходе доказательства.

Доказательство. Обозначим $\psi(t) = \sum_{d=1}^n \lambda_d u_d w(\lambda_d|t)$ и в (5) выполним замену переменных

$$(7) \quad w(\lambda_i|t) = x_i(t) e^{\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau},$$

где $x_i(t)$ — новые неизвестные функции, $i = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда (5) сводится к системе линейных дифференциальных уравнений:

$$x'_i(t) = -\lambda_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j P_0(\lambda_i|\lambda_j) x_j(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Последнюю систему представим в матричном виде

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{X} = AX, \quad X = \|x_i(t)\|, \quad i = \overline{1, n}, \\ A = \left\| \begin{array}{cccc} -\lambda_1(1 - P_0(\lambda_1|\lambda_1)) & \lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) & \dots & \lambda_n P_0(\lambda_1|\lambda_n) \\ \lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1) & -\lambda_2(1 - P_0(\lambda_2|\lambda_2)) & \dots & \lambda_n P_0(\lambda_2|\lambda_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 P_0(\lambda_n|\lambda_1) & \lambda_2 P_0(\lambda_n|\lambda_2) & \dots & -\lambda_n(1 - P_0(\lambda_n|\lambda_n)) \end{array} \right\|_{n \times n}. \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (8) в виде $X = \tilde{A} e^{\beta t}$, где вектор-столбец $\tilde{A} = \|\alpha_i\|$, $i = \overline{1, n}$. Тогда, подставляя X в (8), получим систему линейных однородных уравнений относительно α_i :

$$(9) \quad (A - \beta E) \tilde{A} = O,$$

где E — единичная матрица, O — нулевой вектор-столбец.

Для того чтобы уравнению (9) удовлетворял нетривиальный вектор \tilde{A} , необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (9) был равен нулю, т.е.

$$(10) \quad |A - \beta E| = 0.$$

Для каждого корня β_s , $s = \overline{1, n}$, характеристического уравнения (10) из (9) определяется вектор $\tilde{A}^{(s)} \neq 0$. Будем рассматривать только случай, когда все корни β_s характеристического уравнения (10) действительны и различны. Получаем n линейно независимых решений $X_s = \tilde{A}^{(s)} e^{\beta_s t}$, где $\tilde{A}^{(s)} = \|\alpha_i^{(s)}\|$, $i, s = \overline{1, n}$. Постоянные $\alpha_i^{(s)}$, $i, s = \overline{1, n}$ определяются из (9) неоднозначно. Общее решение системы (8) имеет вид

$$X = \sum_{s=1}^n C_s \tilde{A}^{(s)} e^{\beta_s t}, \quad x_i(t) = \sum_{s=1}^n C_s \alpha_i^{(s)} e^{\beta_s t}, \quad i = \overline{1, n},$$

где C_s — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий. Учитывая (7), в момент $t = t_k$ находим $x_i(t_k) = w(\lambda_i | t_k)$, $i = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \dots$

Тогда имеем систему n линейных неоднородных уравнений для нахождения произвольных постоянных C_s :

$$\sum_{s=1}^n C_s \alpha_i^{(s)} e^{\beta_s t_k} = w(\lambda_i | t_k), \quad i = \overline{1, n},$$

с отличным от нуля определителем для n линейно независимых решений соответствующей однородной системы. Решая полученную систему с использованием правила Крамера, находим

$$C_s = e^{-\beta_s t_k} \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{A}_1} w(\lambda_j | t_k), \quad s = \overline{1, n},$$

где \tilde{A}_{js} — алгебраические дополнения элементов $\tilde{\alpha}_{js}$ матрицы \tilde{A}_1 ($\tilde{\alpha}_{js} = \alpha_j^{(s)}$); $\det \tilde{A}_1$ — определитель матрицы $\tilde{A}_1 = \|\tilde{A}^{(1)} \quad \tilde{A}^{(2)} \quad \dots \quad \tilde{A}^{(n)}\|$.

Поэтапно возвращаясь к ранее сделанным заменам, получаем (7) в виде

$$(11) \quad w(\lambda_i | t) = e^{\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau} \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{A}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j | t_k) e^{\beta_s(t-t_k)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

С учетом условия нормировки из (11) находится явный вид функции

$$(12) \quad e^{\int_{t_k}^t \psi(\tau) d\tau} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{A}_1} \alpha_i^{(s)} w(\lambda_j | t_k) e^{\beta_s(t-t_k)} \right)^{-1}.$$

Подставляя (12) в (11), приходим к (6). Теорема 1 доказана.

Для того чтобы найти значение $w(\lambda_i|t)$ в произвольный момент времени t , необходимо знать $w(\lambda_j|t_k)$, $j = \overline{1, n}$, — значение апостериорной вероятности в момент времени t_k , $k = 1, 2, \dots$, наступления события потока.

Апостериорная вероятность $w(\lambda_j|t_k)$ определяется следующей теоремой.

Теорема 2. В момент времени t_k наблюдения события в обобщенном МАР-потоке для апостериорных вероятностей $w(\lambda_j|t_k)$, $j = \overline{1, n}$, имеет место формула пересчета

$$\begin{aligned}
 (13) \quad w(\lambda_j|t_k) &= w(\lambda_j|t_k + 0) = \\
 &= \frac{\sum_{d=1}^n \lambda_d P_1(\lambda_j|\lambda_d) w(\lambda_d|t_k - 0)}{\sum_{d=1}^n \sum_{s=1}^n \lambda_d P_1(\lambda_s|\lambda_d) w(\lambda_d|t_k - 0)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, \\
 \sum_{j=1}^n w(\lambda_j|t_k + 0) &= 1; \\
 w(\lambda_d|t_k - 0) &= \frac{\sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{A}_1} \alpha_d^{(s)} w(\lambda_j|t_{k-1} + 0) e^{\beta_s(t_k - t_{k-1})}}{\sum_{d=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{A}_{js}}{\det \tilde{A}_1} \alpha_d^{(s)} w(\lambda_j|t_{k-1} + 0) e^{\beta_s(t_k - t_{k-1})}}, \\
 d &= \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, \\
 \sum_{d=1}^n w(\lambda_d|t_k - 0) &= 1.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда в (2) $r_{m+1} = 1$, т.е. на интервале времени $(t; t + \Delta t)$ наступает событие потока, допустим, в момент времени t_k . Положим в (2) $\lambda^{(m+1)} = \lambda_i$. Тогда, с учетом утверждения 3, рекуррентное соотношение (2) для апостериорных вероятностей $w(\lambda^{(m)}|t)$, $w(\lambda^{(m+1)}|t + \Delta t)$ состояний потока запишется в виде

$$\begin{aligned}
 &w(\lambda_i|t + \Delta t) = \\
 &= \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t) p(\lambda^{(m+1)} = \lambda_i|\lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1|\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)} = \lambda_i)}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_n} w(\lambda^{(m)}|t) p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)}) p(r_{m+1} = 1|\lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)})}, \quad i = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим два смежных интервала $(t; t_k)$ и $(t_k; t + \Delta t)$, длительности которых есть $\Delta t' = t_k - t$ и $\Delta t'' = t + \Delta t - t_k$ соответственно. Выполняя в последнем рекуррентном соотношении введенные замены $t = t_k - \Delta t'$, $t + \Delta t = t_k + \Delta t''$, расписывая вероятности перехода подобно случаю $r_{m+1} = 0$ и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t' \rightarrow 0$ и $\Delta t'' \rightarrow 0$ соответственно), приходим к (13). Теорема 2 доказана.

Случаи $r_{m+1} = 2, 3, \dots$, не рассматриваются, так как имеют вероятность $o(\Delta t)$.

Замечание 2. В точке $t_k, k = 1, 2, \dots$, (момент времени наступления события потока) апостериорная вероятность $w(\lambda_i|t), i = \overline{1, n}$, претерпевает разрыв первого рода (имеет место конечный скачок).

Осталось рассмотреть поведение апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t), i = \overline{1, n}$, на отрезке $[t_0; t_1]$, где t_0 — момент начала наблюдения за потоком, t_1 — момент наступления первого события потока. В момент времени t_0 начала наблюдения за потоком апостериорную вероятность $w(\lambda_i|t)$ положим равной априорной финальной вероятности $\pi_i, i = \overline{1, n}$, состояний процесса $\lambda(t)$.

3.3. Выражения для априорных финальных вероятностей состояний потока

Обозначим $\pi_i(t|t^0)$ — априорная вероятность того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i, i = \overline{1, n}$, при условии, что функционирование потока началось в момент времени t^0 .

Теорема 3. Априорные финальные вероятности состояний процесса $\lambda(t)$ для обобщенного МАР-потока событий имеют вид

$$(14) \quad \pi_j = \frac{P_{nj}}{\det P}, \quad j = \overline{1, n},$$

где P_{nj} — алгебраическое дополнение элемента p_{nj} матрицы $P = \|p_{ij}\|, i, j = \overline{1, n}$,

$$p_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i (1 - P_0(\lambda_i|\lambda_i) - P_1(\lambda_i|\lambda_i)), & i = \overline{1, n-1}; \\ \lambda_j (P_0(\lambda_i|\lambda_j) + P_1(\lambda_i|\lambda_j)), & i \neq j, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, n}; \\ 1, & i = n, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Доказательство. Нетрудно показать, что для априорных вероятностей $\pi_i(t|t^0), i = \overline{1, n}$, справедлива система дифференциальных уравнений:

$$(15) \quad \begin{aligned} \pi_i'(t|t^0) &= -\lambda_i \pi_i(t|t^0) + \sum_{j=1}^n \lambda_j [P_0(\lambda_i|\lambda_j) + P_1(\lambda_i|\lambda_j)] \pi_j(t|t^0), \quad i = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n \pi_i(t|t^0) &= 1. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что рассматривается стационарный режим функционирования потока и $\lambda(t)$ — марковский процесс, имеем: $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t|t^0) = \pi_i, i = \overline{1, n}$.

Тогда система (15) принимает вид

$$-\lambda_i \pi_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j [P_0(\lambda_i|\lambda_j) + P_1(\lambda_i|\lambda_j)] \pi_j = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n \pi_i = 1.$$

В силу линейной зависимости уравнений последней системы заменим последнее уравнение при $i = n$ условием нормировки $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$ и, решая систему с использованием формул Крамера, приходим к (14). Теорема 3 доказана.

Полученные аналитические формулы (6), (13) и (14) позволяют сформулировать следующий алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, и алгоритм вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t :

1) в момент начала наблюдения $t_0 = 0$ в качестве начального значения $w(\lambda_i|t_0 + 0)$, $i = \overline{1, n}$, выбирается априорная финальная вероятность π_i , $i = \overline{1, n}$, вычисляемая по формуле (14), т.е. $w(\lambda_i|t_0 + 0) = w(\lambda_i|t_0 = 0) = \pi_i$;

2) по формуле (6) вычисляется вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в любой момент времени t , $t_0 < t < t_1$, где t_1 — момент наблюдения первого события потока;

3) по формуле (6) вычисляется вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в момент времени t_1 , т.е. $w(\lambda_i|t_1) = w(\lambda_i|t_1 - 0)$;

4) по формуле (13) производится пересчет апостериорной вероятности в момент времени t_1 , т.е. вычисляется величина $w(\lambda_i|t_1 + 0)$, $i = \overline{1, n}$, — начальное условие для $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, на интервале $(t_1; t_2)$;

5) по формуле (6) рассчитывается апостериорная вероятность $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, для любого момента времени t , $t_1 < t < t_2$, где t_2 — момент наблюдения второго события потока и т.д.

При расчете апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, в произвольный момент времени t выносятся решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ по методу максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$.

4. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов с использованием формул (6), (13) и (14) разработан алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_i|t)$, описанный в разделе 3 данной работы. Программа реализована на языке программирования C# в среде Visual Studio 2015.

Первый этап заключается в имитационном моделировании обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний с целью получения выборки моментов времени наступления событий; второй этап — вычисление апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $t_0 < t < t_1$; $w(\lambda_i|t_k + 0)$ и $w(\lambda_i|t)$, $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, $i = \overline{1, n}$, где n — число состояний процесса $\lambda(t)$, и определение в произвольный момент времени t оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$ методом максимума апостериорной вероятности на основе полученной выборки моментов наступления событий t_1, \dots, t_m в наблюдаемом потоке.

Для числа состояний $n = 3$, значений вероятностей, приведенных в табл. 1, значений $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ процесса $\lambda(t)$, времени моделирования $T_m = 100$ ед. времени проведены расчеты по нахождению оценки $\hat{\lambda}(t)$ процесса $\lambda(t)$.

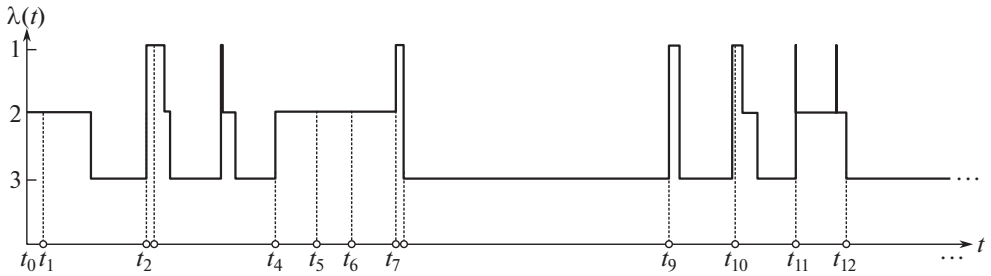


Рис. 2. Траектория процесса $\lambda(t)$.

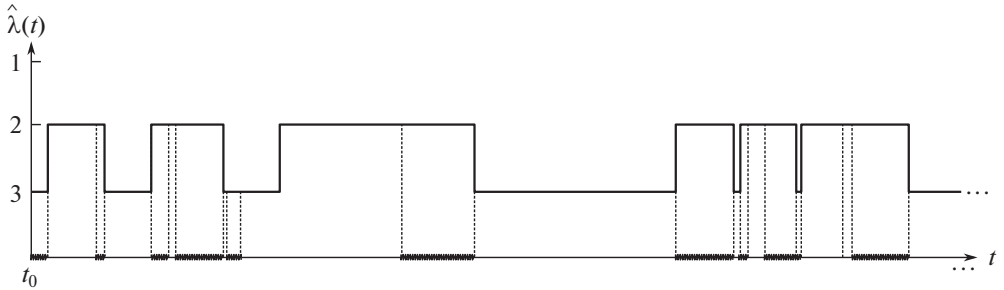


Рис. 3. Траектория оценки $\hat{\lambda}(t)$.

В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория поведения процесса $\lambda(t)$ (истинная реализация процесса), полученная путем имитационного моделирования, где 1, 2, 3 — состояния процесса $\lambda(t)$, t_1, t_2, \dots — моменты времени наступления событий потока.

На рис. 3 приведена траектория поведения оценки $\hat{\lambda}(t)$, где 1, 2, 3 — состояния оценки $\hat{\lambda}(t)$. Вынесение решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ производилось с шагом $\Delta t = 0,001$. Штриховкой на оси абсцисс на рис. 3 отмечены области принятия ошибочного решения, когда значение оценки $\hat{\lambda}(t)$ не совпадает с истинным значением процесса $\lambda(t)$.

Ни рис. 4–6 продемонстрированы траектории поведения апостериорных вероятностей $w(\lambda_1|t), w(\lambda_2|t), w(\lambda_3|t)$, синхронизированные с моментами наступления событий t_1, t_2, \dots , приведенными на рис. 2. При этом в любой момент времени t , $t_0 \leq t \leq T_m$, выполняется условие нормировки $w(\lambda_1|t) + w(\lambda_2|t) + w(\lambda_3|t) = 1$.

Таблица 1. Исходные данные для эксперимента

$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,15$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,09$	$P_0(\lambda_1 \lambda_3) = 0,21$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,24$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,13$	$P_0(\lambda_2 \lambda_3) = 0,07$
$P_0(\lambda_3 \lambda_1) = 0,12$	$P_0(\lambda_3 \lambda_2) = 0,25$	$P_0(\lambda_3 \lambda_3) = 0,15$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,19$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,16$	$P_1(\lambda_1 \lambda_3) = 0,18$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,23$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,23$	$P_1(\lambda_2 \lambda_3) = 0,27$
$P_1(\lambda_3 \lambda_1) = 0,07$	$P_1(\lambda_3 \lambda_2) = 0,14$	$P_1(\lambda_3 \lambda_3) = 0,12$

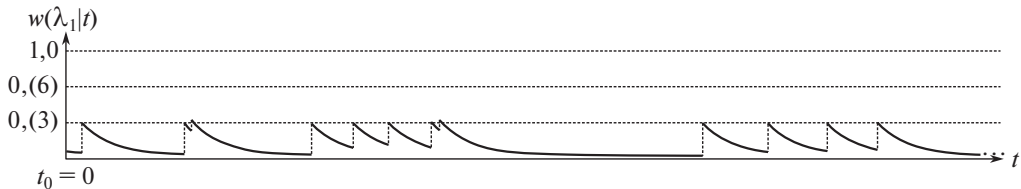


Рис. 4. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_1|t)$.

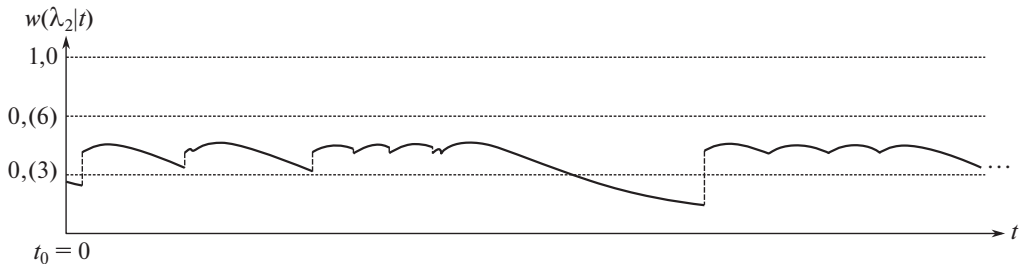


Рис. 5. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_2|t)$.

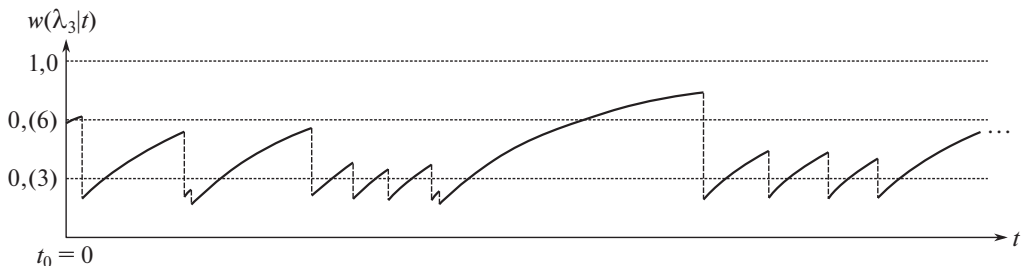


Рис. 6. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda_3|t)$.

Для установления частоты ошибочных решений о состоянии процесса $\lambda(t)$ по реализации обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний проведен ряд статистических экспериментов, состоящих из следующих этапов:

1) для определенного набора параметров (значений λ_i , $i = \overline{1, n}$, значений вероятностей $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$) осуществляется моделирование обобщенного МАР-потока с n состояниями на заданном отрезке времени моделирования $[0; T_m]$ (отдельный ν -й эксперимент);

2) осуществляется расчет апостериорных вероятностей $w(\lambda_i|t)$, $i = \overline{1, n}$, состояний процесса $\lambda(t)$ на заданном отрезке моделирования $[0; T_m]$ по формулам (6), (13), (14);

3) осуществляется оценивание траекторий процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t на отрезке $[0; T_m]$ по методу максимума апостериорной вероятности: если $w(\lambda_i|t) \geq w(\lambda_j|t)$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса $\hat{\lambda}(t) = \lambda_i$;

4) определяется (для отдельного ν -го эксперимента) d_ν — суммарная протяженность интервалов, на которых истинное значение процесса $\lambda(t)$ не совпадает с полученной оценкой $\hat{\lambda}(t)$, $0 \leq t \leq T_m$;

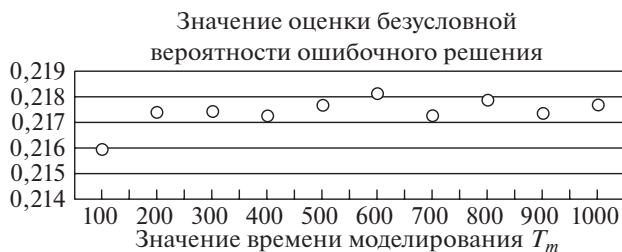


Рис. 7. График зависимости \hat{P}_0 от значений T_m .

5) вычисляется значение $\hat{p}_\nu = \frac{d_\nu}{T_m}$ — доля ошибочных решений;

6) шаги 1)–5) повторяются N раз ($\nu = \overline{1, N}$) для расчета оценки безусловной (полной) вероятности ошибки оценивания состояний случайного процесса $\lambda(t)$ на рассматриваемом отрезке $[0; T_m]$.

Результатом реализации вышеприведенного алгоритма является выборка $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ долей ошибочных решений при проведении N экспериментов. На основании полученных данных вычисляются выборочное среднее безусловной вероятности ошибки принятия решения $\hat{P}_0 = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \hat{p}_\nu$ и выборочная дисперсия $\hat{D}_0 = \frac{1}{N-1} \sum_{\nu=1}^N (\hat{p}_\nu - \hat{P}_0)^2$.

Эксперимент 1. Фиксируются число состояний $n = 3$, количество опытов $N = 100$, значения параметров $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ процесса $\lambda(t)$ и вероятности, представленные в табл. 1. При этом время моделирования $T_m \in \{100, 200, \dots, 1000\}$. Цель первого эксперимента заключается в установлении стационарного режима.

В табл. 2 при заданных параметрах потока устанавливается зависимость оценок \hat{P}_0 и \hat{D}_0 от времени имитационного моделирования T_m .

Из табл. 2 и рис. 7 вытекает, что для принятых значений параметров потока стационарный режим устанавливается для $T_m \geq 200$ ед. времени. В связи с этим для дальнейших экспериментов полагаем $T_m = 1000$ ед. времени.

Эксперимент 2. Фиксируются число состояний $n = 3$, значение времени моделирования $T_m = 1000$, количество опытов $N = 100$, значения параметров $\lambda_1 = 21$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 1$ процесса $\lambda(t)$ и вероятности, представленные в табл. 1. Второй эксперимент отличается от первого заданием значений λ_i , $i = \overline{1, n}$, когда состояния процесса более различимы.

При заданных параметрах в эксперименте 2 вычисляются $\hat{P}_0 = 0,072305$ и $\hat{D}_0 = 0,0000011$. Из сравнения результатов эксперимента 2 и эксперимента 1

Таблица 2. Результаты первого статистического эксперимента

T_m	100	200	300	400	500	...	1000
\hat{P}_0	0,215952	0,217409	0,217452	0,217273	0,217682	...	0,217707
\hat{D}_0	0,000105	0,000068	0,000036	0,000031	0,000022	...	0,000009

Таблица 3. Исходные данные для третьего статистического эксперимента

$P_0(\lambda_1 \lambda_1) = 0,02$	$P_0(\lambda_1 \lambda_2) = 0,02$	$P_0(\lambda_1 \lambda_3) = 0,02$
$P_0(\lambda_2 \lambda_1) = 0,02$	$P_0(\lambda_2 \lambda_2) = 0,02$	$P_0(\lambda_2 \lambda_3) = 0,02$
$P_0(\lambda_3 \lambda_1) = 0,02$	$P_0(\lambda_3 \lambda_2) = 0,02$	$P_0(\lambda_3 \lambda_3) = 0,02$
$P_1(\lambda_1 \lambda_1) = 0,7$	$P_1(\lambda_1 \lambda_2) = 0,12$	$P_1(\lambda_1 \lambda_3) = 0,12$
$P_1(\lambda_2 \lambda_1) = 0,12$	$P_1(\lambda_2 \lambda_2) = 0,7$	$P_1(\lambda_2 \lambda_3) = 0,12$
$P_1(\lambda_3 \lambda_1) = 0,12$	$P_1(\lambda_3 \lambda_2) = 0,12$	$P_1(\lambda_3 \lambda_3) = 0,7$

Таблица 4. Результаты третьего статистического эксперимента

значения состояний процесса $\lambda(t)$	\hat{P}_0	\hat{D}_0
$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$	0,307015	0,00010933
$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$	0,181478	0,00005049
$\lambda_1 = 21, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 1$	0,065359	0,00000982

следует, что оценка \hat{P}_0 существенно меньше для второго эксперимента, что является естественным, так как состояния процесса $\lambda(t)$ более различимы.

Эксперимент 3. Фиксируются число состояний $n = 3$, значение времени моделирования $T_m = 1000$, количество опытов $N = 100$ и вероятности, заданные в табл. 3. Стоит отметить, что в данном эксперименте вероятности $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = \overline{1, n}$, задаются следующим образом: увеличиваются вероятности наступления событий при переходе процесса $\lambda(t)$ из i -го состояния i -е, $i = \overline{1, 3}$, тем самым поток становится более интенсивным в каждом из своих трех состояний, и значительно уменьшаются значения вероятностей ненаступления событий.

В рамках данного эксперимента рассматриваются три случая задания значений параметров процесса $\lambda(t)$. В табл. 4 приведены величины оценок \hat{P}_0 и \hat{D}_0 в зависимости от значений λ_i , $i = \overline{1, 3}$.

Представленные численные результаты табл. 4 свидетельствуют о том, что оценивание тем лучше, чем состояния процесса $\lambda(t)$ более различимы, т.е. обеспечивается лучшее (в смысле малости оценки вероятности ошибки принятия решения) качество оценивания состояний рассматриваемого потока событий.

5. Заключение

Полученные результаты демонстрируют возможность оценивания состояний обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний по текущим наблюдениям, что позволяет адекватно реагировать на изменение интенсивности входящего потока (изменять режимы работы системы обслуживания в зависимости от того или иного состояния обобщенного МАР-потока). Так как апостериорные вероятности состояний потока получены в явном аналитическом виде, то нет необходимости прибегать к привлечению численных методов. Предложенный в статье алгоритм состояний исследуемого потока обеспечивает минимум безусловной вероятности ошибки вынесения решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cox D.R.* The analysis of non-Markovian stochastic processes // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51. No. 3. P. 433–441.
2. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
3. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. P. 764–779.
4. *Кеба А.В., Нежелская Л.А.* Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного МАР-потока событий с произвольным числом состояний // Тр. Том. гос. ун-та. Серия физико-математическая. 2018. Т. 302. С. 157–164.
5. *Вишневецкий В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.
6. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Shevchenko T.I.* Estimation of the states of an MC-stream of events in the presence of measurement errors // Russian Physics J. 1993. V. 36. No. 12. P. 1153–1167.
7. *Бушланов И.В., Горцев А.М.* Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // АиТ. 2004. № 9. С. 40–51.
Bushlanov I.V., Gortsev A.M. Optimal Estimation of the States of a Synchronous Double Stochastic Flow of Events // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 9. P. 1389–1399.
8. *Centanni S., Minozzo M.* Estimation and filtering by reversible jump MCMC for a doubly stochastic Poisson model for ultrahigh-frequency financial data // Stat. Model. 2006. No. 6. P. 97–118.
9. *Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A.* The Probability of Wrong Decisions in the Estimation of States of a Generalized Asynchronous Flow of Events // Tomsk State Univer. J. Control Comp. Sci. 2012. V. 19. Is. 2. P. 88–101.
10. *Bakholdina M.A., Gortsev A.M.* Optimal estimation of the states of modulated semi-synchronous integrated flow of events in condition of its incomplete observability // Appl. Math. Sci. 2015. V. 9. No. 29–32. P. 1433–1451.
11. *Nezhelskaya L., Sidorova E.* Optimal estimation of the states of synchronous generalized flow of events of the second order under its complete observability // Communicat. Comp. Inform. Sci. 2018. V. 912. P. 157–171.
12. *Telek M., Horvath G.* A minimal representation of Markov arrival processes and a moments matching method // Performance Evaluation. 2007. V. 64. No. 9. P. 1153–1168.
13. *Okamura H., Dohi T., Trivedi K.S.* Markovian arrival process parameter estimation with group data // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2009. V. 17. No. 4. P. 1326–1339.
14. *Leonova M.A., Nezhelskaya L.A.* Maximum Likelihood Estimation of Dead Time Value at a Generalized Asynchronous Flow of Events // Tomsk State Univer. J. Control Comp. Sci. 2013. V. 23. Is. 2. P. 54–63.
15. *Gortsev A.M., Leonova M.A., Nezhelskaya L.A.* The Comparison of Maximum Likelihood Estimation and Method of Moments Estimation of Dead Time Value in a Generalized Asynchronous Flow of Events // Tomsk State Univer. J. Control Comp. Sci. 2013. V. 25. Is. 4. P. 32–42.

16. *Nezhel'skaya L.A.* Estimation of the unextendable dead time period in a flow of physical events by the method of maximum likelihood // Russian Physics J. 2016. V. 59. Is. 5. P. 651–662.
17. *Nezhelskaya L., Tumashkina D.* Estimation of the probability density parameters of the interval duration between events in correlated semi-synchronous event flow of the second order by the method of moments // Communicat. Comp. Inform. Sci. 2019. V. 1109. P. 60–72.
18. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1968. 504 с.
19. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
20. *Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A.* Optimal Estimate of the States of a Generalized Asynchronous Event Flow with an Arbitrary Number of States // Tomsk State Univer. J. Control Comp. Sci. 2019. Is. 47. P. 12–23.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 21.12.2019

После доработки 08.09.2020

Принята к публикации 08.12.2020