

Управление в технических системах

© 2021 г. БИНЬ СУНЬ, канд. физ.-мат. наук (sunbin_bsu@hotmail.com)
(Университет Науки и Технологии Внутренней Монголии, Баотоу, КНР),

С.А. ДУДИН, канд. физ.-мат. наук (dudins@bsu.by),

О.С. ДУДИНА, канд. физ.-мат. наук (dudina@bsu.by)

(Белорусский государственный университет, Минск),

А.Н. ДУДИН, д-р физ.-мат. наук (dudin@bsu.by)

(Белорусский государственный университет, Минск;

Российский университет дружбы народов, Москва)

МОДЕЛЬ ОБСЛУЖИВАНИЯ МОБИЛЬНЫХ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ В СОТЕ С АДАПТИВНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ¹

Исследованы характеристики производительности соты мобильной сети, в которой скорость обслуживания пользователя зависит от зоны соты, где он находится. Разделение соты на зоны определяется качеством сигнала и зависит от расстояния до базовой станции, наличием препятствий и помех для радиосигнала. Входящий поток запросов описывается маркированным марковским входным потоком, где тип запроса соответствует зоне, в которой он генерируется. Во время обслуживания запросы могут перемещаться между зонами, что приводит к изменению их типов. Учет на возможность флуктуации параметров потоков и процессов обслуживания под влиянием внешних случайных воздействий (случайной среды). Численно проиллюстрированы важность учета зависимости параметров от состояния случайной среды и возможность использования результатов для решения оптимизационных задач.

Ключевые слова: сота мобильной сети связи, перемещение пользователей, система массового обслуживания, случайная среда, маркированный марковский входной поток.

DOI: 10.31857/S0005231021050068

1. Введение

В современных сотовых сетях связи доминирующим является уже не речевой, а потоковый мультимедийный трафик. Поэтому для их проектирования уже недостаточно использования классических моделей телетрафика, например для расчета необходимого числа логических каналов с фиксированной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (National Natural Science Foundation of China) (грант № 61262083) и программы стратегического академического лидерства РУДН (RUDN University Strategic Academic Leadership Program).

скоростью передачи информации. Необходимо учитывать возможность динамического изменения схемы модуляции для обеспечения необходимого качества обслуживания пользователей. На возможность выбора схемы, в частности, влияет качество сигнала, получаемого конкретным пользователем от базовой станции. На качество сигнала влияет ряд факторов, наиболее существенными из которых являются расстояние между пользователем и базовой станцией, наличие различного рода препятствий и шумов в передающей среде. Необходимость учета этих факторов привела к появлению исследований моделей работы сот, в которых сота делится на несколько непересекающихся зон и скорость обслуживания пользователя зависит от текущей зоны, в которой он находится, см., например, [1, 2]. Более общая модель, предполагающая произвольное число зон, возможность неоднократного пересечения пользователем границ зон и более общий, маркированный марковский, поток запросов, была рассмотрена в [3].

Недостатком модели, изученной в [3], является то, что все параметры, характеризующие входной поток, скорости обслуживания запросов, находящихся в определенной зоне, и их перемещения, не изменяются во времени, являются постоянными. Во многих реальных сотовых сетях эти параметры могут изменяться в зависимости, например, от времени суток, доступности сетевых ресурсов, зашумленности каналов и т.д. Известным способом адекватного учета такого рода зависимостей является рассмотрение соответствующих моделей систем обслуживания, функционирующих в случайной среде. Под случайной средой понимается некоторый внешний случайный процесс, как правило, цепь Маркова с конечным пространством состояний. Все или некоторые параметры системы зависят от состояния этой среды и скачкообразно изменяют свои значения при изменении состояния среды. Исследование систем, функционирующих в случайной среде, было начато, по-видимому, в [4] под названием систем с частичным выходом прибора из строя. Ссылки на многочисленные более поздние публикации можно найти, например, в [5].

В данной статье исследование модели соты с зависимостью параметров входного потока и процесса обслуживания от зоны, в которой находится пользователь, обобщено на случай, когда эти параметры зависят еще и от состояний внешней случайной среды.

В разделе 2 описана изучаемая математическая модель системы массового обслуживания. В разделе 3 процесс функционирования системы описан многомерной цепью Маркова и обсуждена проблема нахождения ее стационарного распределения. Формулы для вычисления характеристик производительности системы приведены в разделе 4. Раздел 5 содержит описание численного эксперимента, иллюстрирующего важность учета влияния случайной среды.

2. Математическая модель

В качестве модели работы соты рассматриваем N -линейную систему массового обслуживания без буфера, где N есть максимальное число пользователей, которые могут получать обслуживание одновременно. Сота разделена на R зон, $1 < R < \infty$. Во время обслуживания запроса в соте пользователь мо-

жет перемещаться между зонами или покинуть соту. Мощность сигнала, получаемого пользователем, и, следовательно, скорость обслуживания запроса зависят от зоны в соте, в которой находится запрос. Для учета этого условно делим все запросы, получающие обслуживание в системе, на R типов. Прибытие запроса типа r в соту соответствует генерации соединения с базовой станцией пользователем, находящимся в r -й зоне, где $r = \overline{1, R}$.

Предполагается, что параметры системы, включая параметры, задающие входной поток и процесс обслуживания, зависят от состояния некоторого внешнего случайного процесса k_t , $t \geq 0$, называемого случайной средой. Предполагается, что этот процесс является неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем, пространством состояний $\{1, 2, \dots, K\}$ и инфинитезимальным генератором H .

Считаем, что процесс поступления запросов задается маркированным марковским входным потоком (Marked Markov Arrival Process — ММАР), введенным в [6] как обобщение широко известного марковского входного потока (Markov Arrival Process — МАР), см., например, [7–9], на случай разнородных запросов. Возможные моменты прибытия запросов в рассматриваемом потоке определяются как моменты скачков некоторого процесса с непрерывным временем ν_t , $t \geq 0$, с конечным пространством состояний $\{1, 2, \dots, W\}$, такого что двумерный процесс $\{k_t, \nu_t\}$, $t \geq 0$, является цепью Маркова с непрерывным временем. При фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, процесса k_t (случайной среды) входной поток определяется набором квадратных матриц $D_0^{(k)}$, $D_r^{(k)}$, $r = \overline{1, R}$. Элементы матрицы $D_r^{(k)}$ определяют интенсивности переходов процесса ν_t при фиксированном состоянии k процесса k_t , которые сопровождаются прибытием запроса типа r , $r = \overline{1, R}$. Обозначим $D^{(k)} = \sum_{r=1}^R D_r^{(k)}$. Недиagonальные элементы матрицы $D_0^{(k)}$ определяют интенсивность переходов процесса ν_t , которые не сопровождаются прибытием запроса. Диагональные элементы матрицы $D_0^{(k)}$ определяют интенсивность выхода процесса ν_t из соответствующих состояний. Обозначим $D^{(k)}(1) = D_0^{(k)} + D^{(k)}$.

Средняя интенсивность $\lambda^{(k)}$ поступления запросов при фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, случайной среды задается формулой

$$\lambda^{(k)} = \theta^{(k)} D^{(k)} \mathbf{e},$$

где $\theta^{(k)}$ – вектор-строка, которая является единственным решением системы

$$\theta^{(k)} D^{(k)}(1) = \mathbf{0}, \quad \theta^{(k)} \mathbf{e} = 1.$$

Здесь \mathbf{e} – вектор-столбец соответствующего размера, состоящий из единиц, и $\mathbf{0}$ – вектор-строка соответствующего размера, состоящий из нулей.

Средняя интенсивность $\lambda_r^{(k)}$ поступления запросов типа r при фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, случайной среды равна

$$\lambda_r^{(k)} = \theta^{(k)} D_r^{(k)} \mathbf{e}, \quad r = \overline{1, R}.$$

При фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, случайной среды коэффициент вариации $c_{var}^{(k)}$ длин последовательных интервалов между поступлением запросов определяется как

$$c_{var}^{(k)} = 2\lambda^{(k)}\boldsymbol{\theta}^{(k)} \left(-D_0^{(k)}\right)^{-1} \mathbf{e} - 1.$$

При фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, случайной среды коэффициент корреляции $c_{cor}^{(k)}$ длин двух соседних интервалов между поступлением запросов вычисляется как

$$c_{cor}^{(k)} = \left(\lambda^{(k)}\boldsymbol{\theta}^{(k)} \left(-D_0^{(k)}\right)^{-1} D^{(k)} \left(-D_0^{(k)}\right)^{-1} \mathbf{e} - 1 \right) / c_{var}^{(k)}.$$

Введем матрицы:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_r &= \text{diag} \left\{ D_r^{(k)}, k = \overline{1, K} \right\}, \quad r = \overline{1, R}, \\ \tilde{D}_0 &= H \otimes I_W + \text{diag} \left\{ D_0^{(k)}, k = \overline{1, K} \right\}, \\ \tilde{D} &= \sum_{r=1}^R \tilde{D}_r, \quad \tilde{D}(1) = \tilde{D}_0 + \tilde{D}. \end{aligned}$$

Здесь $\text{diag}\{\dots\}$ означает диагональную матрицу с диагональными блоками, перечисленными в скобках, а \otimes есть символ Кронекерова произведения матриц, см., например, [10].

Средние интенсивности входного потока запросов λ и потока запросов r -го типа λ_r определяются как

$$(1) \quad \lambda = \boldsymbol{\theta}\tilde{D}\mathbf{e}, \quad \lambda_r = \boldsymbol{\theta}\tilde{D}_r\mathbf{e}, \quad r = \overline{1, R},$$

где вектор $\boldsymbol{\theta}$ является единственным решением системы уравнений

$$\boldsymbol{\theta}\tilde{D}(1) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\theta}\mathbf{e} = 1.$$

Коэффициент вариации c_{var} длин интервалов между моментами поступления запросов определяется как

$$c_{var} = 2\lambda\boldsymbol{\theta}(-\tilde{D}_0)^{-1}\mathbf{e} - 1.$$

Коэффициент корреляции c_{cor} двух соседних интервалов между моментами поступления запросов вычисляется как

$$c_{cor} = \left(\lambda\boldsymbol{\theta}(-\tilde{D}_0)^{-1}\tilde{D}_1(-\tilde{D}_0)^{-1}\mathbf{e} - 1 \right) / c_{var}.$$

Предполагается, что если в произвольный момент поступления запроса в системе уже обслуживаются N пользователей, запрос покидает систему

без обслуживания (теряется). Иначе запрос принимается в систему и начинает обслуживание. Это предположение объясняется тем, что, как правило, в мобильных сотовых сетях отсутствует механизм буферизации запросов и запрос, заставший в системе максимально допустимое число запросов, N , либо теряется, либо совершает повторные попытки попасть на обслуживание через случайные интервалы времени. Правильный выбор параметра N (с учетом имеющихся технических или экономических возможностей) позволяет минимизировать вероятности потери запросов или непредоставления обслуживания при первой попытке запроса.

Предполагаем, что время нахождения обслуживаемого пользователя в r -й зоне имеет (при фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, случайной среды) экспоненциальное распределение с интенсивностью $\mu_r^{(k)}$, $r = \overline{1, R}$.

Пользователь может покинуть зону r по следующим причинам:

- 1) его обслуживание успешно завершено;
- 2) пользователь переходит в зону r' (и становится запросом типа r');
- 3) обслуживание пользователя прекращается досрочно и он покидает соту без полного обслуживания. Такое завершение может быть интерпретировано как потеря соединения или передача обслуживания в другую соту. Это прекращение обслуживания будем также называть уходом из соты из-за нетерпеливости.

Каждая из этих возможностей имеет определенную вероятность, и, умножая интенсивность $\mu_r^{(k)}$ на эти вероятности, получаем интенсивности $\mu_{r,+}^{(k)}$, $\mu_{r,r'}^{(k)}$, $\mu_{r,-}^{(k)}$ успешного завершения обслуживания, перехода запроса в r' -ю зону, прекращение обслуживания из-за нетерпеливости соответственно. Ясно, что

$$\mu_r^{(k)} = \mu_{r,+}^{(k)} + \mu_{r,-}^{(k)} + \sum_{r'=1, r' \neq r}^R \mu_{r,r'}^{(k)}.$$

Представленное описание характеризует время обслуживания пользователя только в r -й зоне. Очевидно, что из-за возможности посещения пользователем в течение времени его обслуживания в соте случайного количества зон, общее время обслуживания произвольного запроса в соте состоит из случайного числа экспоненциально распределенных случайных величин с параметрами распределения, зависящими от посещаемых им зон. Следовательно, хорошо известное распределение фазового типа (PH) (см., например, [11]) является подходящим для описания общего времени обслуживания произвольного запроса в соте. Распределение PH включает в себя множество ранее известных распределений (экспоненциальное, эрланговское, гиперэрланговское, коксовское и т.д.) и популярно в литературе благодаря своей простой вероятностной трактовке и потому, что его можно успешно использовать для аппроксимации произвольного распределения на неотрицательной полуоси, см. [12]. Тем не менее распределение PH в своем первоначальном виде, см. [11], соответствует описанию времен обслуживания *однородных* запросов, тогда как в рассматриваемой модели запросы являются *неоднородными*.

Еще один недостаток классического распределения PH с точки зрения целей данного исследования – отсутствие дифференциации результатов обслуживания запроса; напротив, в исследуемой модели общее время обслуживания может заканчиваться либо успешно, либо неуспешно (запрос покидает соту до завершения обслуживания). Таким образом, чтобы значительно упростить исследование системы, будем использовать для описания времени обслуживания произвольного запроса в соте так называемое обобщенное распределение фазового типа (GPH), введенное в [13] и [14].

Определим общее время обслуживания запроса в соте как время, в течение которого неприводимая цепь Маркова η_t , $t \geq 0$, с переходными состояниями $\{1, \dots, R\}$ и двумя поглощающими состояниями достигает одного из поглощающих состояний. Эта цепь Маркова описывается следующим образом. Начальное состояние цепи η_t выбирается среди переходных состояний в зависимости от типа запроса, принятого на обслуживание. Если этот запрос начинает обслуживание в зоне r , то начальное состояние цепи η_t – это состояние r , $r = \overline{1, R}$.

При фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, случайной среды значения интенсивностей переходов процесса η_t между переходными состояниями определяются субгенератором

$$S^{(k)} = \begin{pmatrix} -\mu_1^{(k)} & \mu_{1,2}^{(k)} & \mu_{1,3}^{(k)} & \cdots & \mu_{1,R}^{(k)} \\ \mu_{2,1}^{(k)} & -\mu_2^{(k)} & \mu_{2,3}^{(k)} & \cdots & \mu_{2,R}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{R,1}^{(k)} & \mu_{R,2}^{(k)} & \mu_{R,3}^{(k)} & \cdots & -\mu_R^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Когда процесс η_t находится в переходном состоянии r , запрос получает обслуживание типа r . Переход процесса η_t из одного переходного состояния в другое означает соответствующее изменение зоны, в которой находится запрос. Переход в первое поглощающее состояние соответствует успешному завершению обслуживания запроса. При фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, случайной среды значения интенсивностей переходов в это поглощающее состояние определяются компонентами вектора-столбца

$$\mathbf{S}_+^{(k)} = \left(\mu_{1,+}^{(k)}, \mu_{2,+}^{(k)}, \dots, \mu_{R,+}^{(k)} \right)^T.$$

Здесь T – символ транспонирования.

Переход процесса η_t во второе поглощающее состояние соответствует уходу из соты без завершения обслуживания (из-за нетерпеливости). При фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$, случайной среды значения интенсивностей переходов в это поглощающее состояние определяются вектором-столбцом

$$\mathbf{S}_-^{(k)} = \left(\mu_{1,-}^{(k)}, \mu_{2,-}^{(k)}, \dots, \mu_{R,-}^{(k)} \right)^T.$$

Считаем, что в моменты переходов процесса k_t , $t \geq 0$, состояния процессов ν_t и η_t , $t \geq 0$, не изменяются, только изменяются интенсивности последующих переходов этих процессов.

Отметим, что в данной статье предполагаем, что все введенные выше параметры системы массового обслуживания известны, и концентрируемся на исследовании случайных процессов, описывающих динамику системы. Важная проблема нахождения значений этих параметров, основываясь на доступной информации о реальном объекте, который моделирует данная система, в статье не рассматривается. Отметим, что эта проблема активно изучается в современной литературе. Например, существуют десятки серьезных работ, посвященных построению моделей *МАР* или *ММАР*, основываясь на результатах наблюдения за реальными потоками. Для ссылок см., например, [15–17] и статьи, цитируемые в этих публикациях. Проблема описания мобильности пользователей рассматривалась, например, в [18, 19].

Полностью определив входной процесс и процесс обслуживания запросов, можем приступить к анализу стационарного поведения системы.

3. Процесс изменения состояний системы

Поведение рассматриваемой системы может быть описано регулярной неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем

$$\xi_t = \{n_t, k_t, \nu_t, \mathbf{m}_t\}, \quad t \geq 0,$$

где в момент времени t

n_t – число обслуживаемых пользователей, $n_t = \overline{0, N}$;

k_t – состояние случайной среды, $k_t = \overline{1, K}$;

ν_t – состояние управляющего процесса *ММАР*, $\nu_t = \overline{1, W}$;

$\mathbf{m}_t = (m_t^{(1)}, \dots, m_t^{(R)})$, где $m_t^{(r)}$ – число пользователей в r -й зоне, $m_t^{(r)} = \overline{0, n_t}$, $\sum_{r=1}^R m_t^{(r)} = n_t$, $r = \overline{1, R}$.

Здесь используем подход к заданию цепи Маркова, учитывающий количество пользователей в каждой зоне вместо учета зоны обслуживания для каждого обслуживаемого пользователя. Данный подход восходит к работе В. Рамасвами и Д. Лукантони [20] и позволяет строить цепь с гораздо меньшим пространством состояний и соответственно получать численные результаты для систем с существенно большим числом R зон и обслуживающих каналов N в соте.

Размерность пространства состояний процесса ξ_t равна

$$KW \sum_{n=0}^N J_n = KW C_{N+R}^R,$$

где

$$J_n = C_{n+R-1}^{R-1} = \frac{(n+R-1)!}{n!(R-1)!}.$$

Цепь Маркова ξ_t , $t \geq 0$, неприводимая и имеет конечное пространство состояний. Следовательно, стационарные вероятности состояний этой цепи и

описываемой ею системы обслуживания

$$\begin{aligned} & \pi \left(n, k, \nu, m^{(1)}, \dots, m^{(R)} \right) = \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ n_t = n, k_t = k, \nu_t = \nu, m_t^{(1)} = m^{(1)}, \dots, m_t^{(R)} = m^{(R)} \right\}, \\ & n = \overline{0, N}, \quad k = \overline{1, K}, \quad \nu = \overline{1, W}, \quad m^{(r)} = \overline{0, n}, \quad \sum_{r=1}^R m^{(r)} = n, \quad r = \overline{1, R}, \end{aligned}$$

существуют при любых значениях параметров системы.

Сформируем векторы-строки $\pi(n, k)$, $n = \overline{0, N}$, $k = \overline{1, K}$, из этих вероятностей, перенумеровав их в обратном лексикографическом порядке компонент $m^{(1)}, \dots, m^{(R)}$ и прямом лексикографическом порядке компоненты ν .

Далее построим векторы π_n , $n = \overline{0, N}$, как

$$\pi_n = (\pi(n, 1), \pi(n, 2), \dots, \pi(n, K)).$$

Хорошо известно, что векторы вероятностей π_n , $n = \overline{0, N}$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (уравнений равновесия):

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)Q = \mathbf{0}, \quad (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)\mathbf{e} = 1,$$

где Q – инфинитезимальный генератор цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$.

Чтобы вычислить стационарные вероятности состояний системы, нужно получить генератор Q цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$.

Для этого введем следующие обозначения:

I – единичная матрица и O – нулевая матрица соответствующей размерности;

\oplus – символ кронекеровой суммы матриц;

$$\tilde{S}_1^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_+^{(k)} & S^{(k)} \end{pmatrix}; \quad \tilde{S}_2^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_-^{(k)} & S^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, K};$$

$\beta^{(r)}$, $r = \overline{1, R}$, – вектор-строка размера R со всеми нулевыми компонентами кроме r -й компоненты, равной единице.

Согласно подходу Рамасвами–Лукантони пусть при условии, что в момент перехода цепи Маркова ξ_t в системе обслуживается n запросов:

матрица $P_n(\beta_r)$ определяет вероятности переходов процесса \mathbf{m}_t , $t \geq 0$, в момент, когда запрос r -го типа начинает новое обслуживание;

матрица $L_{N-n}(N, \tilde{S}_l^{(k)})$ определяет интенсивности переходов процесса \mathbf{m}_t при переходе управляющего процесса обслуживания одного из запросов в поглощающее состояние l , $l = 1, 2$, при фиксированном состоянии среды k , $k = \overline{1, K}$;

матрица $A_n(N, S^{(k)})$ определяет интенсивности переходов процесса \mathbf{m}_t между переходными состояниями при фиксированном состоянии среды k , $k = \overline{1, K}$;

модули диагональных элементов диагональной матрицы $\Delta_n^{(k)}$ определяют общую интенсивность выхода из соответствующего состояния процесса \mathbf{m}_t при фиксированном состоянии k , $k = \overline{1, K}$.

Подробное описание этих матриц и алгоритмы, используемые для их расчета, представлены в [21]. Стоит отметить, что подход Рамасвами–Лукантони предполагает существование одного поглощающего состояния. Поскольку в анализируемой модели есть два поглощающих состояния, в данной статье была разработана и реализована определенная модификация этого подхода по сравнению с [20] и [21].

Анализируя все возможные переходы цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, в течение интервала бесконечно малой длины и переписывая интенсивности этих переходов в блочно-матричной форме, получаем следующий результат.

Теорема. Инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, имеет следующую блочно-тредиагональную структуру

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & O & O & \dots & O & O \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & O & \dots & O & O \\ O & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & \dots & Q_{N,N-1} & Q_{N,N} \end{pmatrix}.$$

Ненулевые блоки определяются следующим образом:

$$Q_{0,0} = \tilde{D}_0 = \text{diag} \left\{ D_0^{(k)}, k = \overline{1, K} \right\} + H \otimes I_W,$$

$$Q_{n,n} = \text{diag} \left\{ D_0^{(k)} \oplus \left(A_n \left(N, S^{(k)} \right) + \Delta_n^{(k)} \right), k = \overline{1, K} \right\} + H \otimes I_{WJ_n}, n = \overline{1, N-1},$$

$$Q_{N,N} = \text{diag} \left\{ D_0^{(k)} \oplus \left(A_N \left(N, S^{(k)} \right) + \Delta_n^{(k)} \right) + D^{(k)} \otimes I_{J_N}, k = \overline{1, K} \right\} + H \otimes I_{WJ_N},$$

$$Q_{n,n-1} = \text{diag} \left\{ I_W \otimes \left(L_{N-n} \left(N, \tilde{S}_1^{(k)} \right) + L_{N-n} \left(N, \tilde{S}_2^{(k)} \right) \right), k = \overline{1, K} \right\}, n = \overline{1, N},$$

$$Q_{n,n+1} = \text{diag} \left\{ \sum_{r=1}^R D_r^{(k)} \otimes P_n(\beta_r), k = \overline{1, K} \right\}, n = \overline{0, N-1}.$$

Доказательство. Диагональные элементы матрицы $Q_{n,n}$ отрицательны и с точностью до знака определяют интенсивность выхода из соответствующего состояния цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$. В случае если число запросов в системе равно нулю, выход из соответствующего состояния цепи может произойти из-за перехода управляющего процесса входного потока запросов (интенсивности этого события определяются диагональными элементами матрицы $\text{diag}\{D_0^{(k)}, k = \overline{1, K}\}$) или изменения состояния случайной среды (интенсивности этого события определяются диагональными элементами матрицы $H \otimes I_W$). В случае если число запросов в системе n больше нуля, выход из соответствующего состояния цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, может произойти

также из-за перехода управляющего процесса обслуживания одного из запросов (интенсивности этого события определяются диагональными элементами матрицы $\text{diag}\{I_W \otimes \Delta_n^{(k)}, k = \overline{1, K}\}$). Заметим, что если число запросов в системе равно N , приход запроса без изменения состояния управляющего процесса ν_t не приводит к изменению состояния цепи $\xi_t, t \geq 0$, из-за того что поступающий запрос теряется. Таким образом, в данном случае из общей интенсивности выхода из соответствующего состояния необходимо отнять интенсивность перехода процесса ν_t в то же самое состояние с генерацией запроса, определяемую соответствующим диагональным элементом матрицы $\text{diag}\{D^{(k)} \otimes I_{J_N}, k = \overline{1, K}\}$. Отметим также, что в *ММАР*-потоке не допускаются переходы управляющего процесса в то же состояние без генерации запроса. Недиагональные элементы матриц $Q_{n,n}$ определяют интенсивности переходов цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, которые не приводят к изменению значения компоненты n_t – числа запросов в системе, $n_t = \overline{0, N}$. Такими переходами являются:

- переход управляющего процесса *ММАР* без генерации запроса (интенсивности такого перехода определяются недиагональными элементами матрицы $\text{diag}\{D_0^{(k)}, k = \overline{1, K}\}$);
- изменение состояния случайной среды (интенсивности определяются недиагональными элементами матрицы $H \otimes I_W$);
- в случае наличия $n, n = \overline{1, N}$, запросов – переходы управляющего процесса обслуживания одного из запросов, не приводящие к окончанию обслуживания (интенсивности таких переходов определяются элементами матрицы $\text{diag}\{I_W \otimes A_n(N, S^{(k)}), k = \overline{1, K}\}$);
- в случае присутствия в системе N запросов – переходы управляющего процесса ν_t , сопровождающиеся поступлением (и последующей потерей) запроса (интенсивности таких переходов определяются недиагональными элементами матрицы $\text{diag}\{D^{(k)} \otimes I_{J_N}, k = \overline{1, K}\}$).

Записывая описанные интенсивности переходов в виде блочных матриц, получим блоки генератора $Q_{n,n}, n = \overline{0, N}$.

Элементы матриц $Q_{n,n-1}, n = \overline{1, N}$, определяют интенсивности переходов цепи Маркова ξ_t , которые приводят к уменьшению на единицу числа запросов в системе. Такими переходами в случае наличия n запросов, $n = \overline{1, N}$, являются:

- переходы управляющего процесса обслуживания одного из запросов в первое поглощающее состояние, означающие успешное окончание обслуживания (интенсивности таких переходов определяются элементами матрицы $\text{diag}\{I_W \otimes L_{N-n}(N, \tilde{S}_1^{(k)}), k = \overline{1, K}\}$);
- переходы управляющего процесса обслуживания одного из запросов во второе поглощающее состояние, означающие досрочное окончание обслуживания (интенсивности определяются элементами матрицы $\text{diag}\{I_W \otimes L_{N-n}(N, \tilde{S}_2^{(k)}), k = \overline{1, K}\}$).

Записывая данные интенсивности переходов в виде блочных матриц, получаем доказываемый вид блоков генератора $Q_{n,n-1}, n = \overline{1, N}$.

Элементы матриц $Q_{n,n+1}$, $n = \overline{0, N-1}$, определяют интенсивности переходов цепи Маркова ξ_t , которые приводят к увеличению на единицу числа запросов в системе. Увеличение числа запросов в системе происходит в моменты переходов управляющего процесса $ММАР$ с генерацией запроса любого типа (при состоянии случайной среды k интенсивности определяются элементами матриц $D_r^{(k)}$, $r = \overline{1, R}$) при условии, что система не заполнена. В случае поступления запроса r -го типа увеличивается число запросов, находящихся на r -й фазе обслуживания (вероятности переходов компонент цепи, задающих состояние процесса обслуживания, определяются элементами матрицы $P_n(\beta_r)$ при условии, что в системе в момент поступления было n запросов). Таким образом, получаем, что блоки $Q_{n,n+1}$, $n = \overline{0, N-1}$, имеют вид $Q_{n,n+1} = \text{diag} \left\{ \sum_{r=1}^R D_r^{(k)} \otimes P_n(\beta_r), k = \overline{1, K} \right\}$. Теорема доказана.

Для нахождения стационарного распределения системы может быть использован следующий численно устойчивый алгоритм.

Алгоритм 1. 1. Вычисляем матрицу

$$G_1 = -Q_{1,0}(G_{0,0})^{-1}.$$

2. Вычисляем матрицы G_n , $n = \overline{2, N}$, с помощью рекурсии

$$G_n = -Q_{n,n-1}(Q_{n-1,n-1} + G_{n-1}Q_{n-2,n-1})^{-1}.$$

3. Вычисляем матрицы F_k с помощью обратной рекурсии:

$$F_N = I, F_n = F_{n+1}G_{n+1}, n = \overline{1, N}.$$

4. Находим вектор π_N как единственное решение системы

$$\pi_N(Q_{N,N} + G_N Q_{N-1,N}) = \mathbf{0}, \quad \pi_0 \sum_{n=0}^N F_n \mathbf{e} = \mathbf{1}.$$

5. Вычисляем векторы π_n , $n = \overline{1, N}$, как

$$\pi_n = \pi_N F_n, n = \overline{0, N-1}.$$

Численная устойчивость алгоритма обеспечена оперированием в ходе его выполнения только неотрицательными матрицами, что гарантирует невозможность потери значащих цифр при компьютерной реализации.

4. Характеристики производительности

Вычислив векторы π_n , $n = \overline{0, N}$, можно подсчитать значения различных характеристик производительности системы.

Среднее число запросов в системе вычисляется по формуле

$$N_c = \sum_{n=1}^N n \pi_n \mathbf{e}.$$

Интенсивность выходного потока успешно обслуженных запросов определяется как

$$\mu_+ = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \pi(n, k) \left(I_W \otimes L_{N-n} \left(N, \tilde{S}_1^{(k)} \right) \right) \mathbf{e}.$$

Интенсивность выходного потока запросов, которые покидают систему из-за нетерпеливости, определяется как

$$\mu_- = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K \pi(n, k) \left(I_W \otimes L_{N-n} \left(N, \tilde{S}_2^{(k)} \right) \right) \mathbf{e}.$$

Вероятность потери произвольного запроса из-за нетерпеливости определяется как

$$P_{imp} = \frac{\mu_-}{\lambda}.$$

Вероятность потери произвольного запроса, поступающего в r -ю зону из-за переполненности системы, определяется как

$$P_{ent}^{(r)} = \lambda_r^{-1} \sum_{k=1}^K \pi(N, k) \left(D_r^{(k)} \otimes I_{J_N} \right) \mathbf{e}, \quad r = \overline{1, R}.$$

Вероятность потери произвольного запроса из-за переполненности системы определяется как

$$P_{ent} = \lambda^{-1} \pi_N(\tilde{D} \otimes I_{J_N}) \mathbf{e} = 1 - \frac{\mu_+ + \mu_-}{\lambda} = \frac{\sum_{r=1}^R \lambda_r P_{ent}^{(r)}}{\lambda}.$$

Вероятность потери произвольного запроса вычисляется как

$$P_{loss} = P_{imp} + P_{ent} = 1 - \frac{\mu_+}{\lambda}.$$

Вероятность успешного обслуживания произвольного запроса определяется как

$$P_{succ} = 1 - P_{loss}.$$

5. Численный эксперимент

Задачами численного эксперимента являются:

- 1) показать важность учета зависимости параметров рассмотренной системы от состояния случайной среды;
- 2) показать, как с помощью полученных результатов можно решать различные оптимизационные задачи.

Для начала рассмотрим следующий набор входных данных, который будем обозначать как *withRE*. Считаем, что сота условно делится на $R = 3$ зоны. Предполагаем, что сота функционирует в случайной среде, которая имеет $K = 2$ состояния. Генератор среды определяется матрицей H , имеющей следующий вид:

$$H = \begin{pmatrix} -0,0019 & 0,0019 \\ 0,0012 & -0,0012 \end{pmatrix}.$$

Вероятность того, что в произвольный момент времени среда находится в первом состоянии, равна $p_1 = 0,3871$, а во втором $-p_2 = 0,6129$.

При первом состоянии среды в соту поступает поток запросов, характеризующийся матрицами:

$$D_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 9,16 & 0,04 \\ 0,012 & 0,404 \end{pmatrix},$$

$$D_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,2 \\ 0,024 & 1,16 \end{pmatrix}, \quad D_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,04 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Этот поток имеет среднюю интенсивность $\lambda^{(1)}$, равную 2,911, средние интенсивности поступления запросов различных типов определяются как $\lambda_1^{(1)} = 1,41671$, $\lambda_2^{(1)} = 1,09013$, $\lambda_3^{(1)} = 0,404557$, коэффициент корреляции интервалов между моментами поступления равен $c_{cor} = 0,187$, а коэффициент их вариации c_{var} равен 1,646.

При первом состоянии среды среднее время пребывания запроса в зонах 1, 2 и 3 определяется как $\frac{1}{0,6}$, $\frac{1}{0,51}$ и $\frac{1}{0,37}$ соответственно. Вероятности успешного завершения обслуживания во время пребывания запроса в зонах 1, 2 и 3 равны $\frac{0,49}{0,6}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{0,27}{0,37}$ соответственно. Вероятности перехода запроса из зоны 1 в зону 2 и из зоны 2 в зону 1 равны $\frac{0,1}{0,6}$ и $\frac{0,08}{0,51}$ соответственно. Вероятности перехода запроса из зоны 2 в зону 3 и из зоны 3 в зону 2 равны $\frac{0,08}{0,51}$ и $\frac{0,08}{0,37}$ соответственно. Вероятности потери запроса из-за нетерпеливости из зоны 1, 2 и 3 равны $\frac{0,01}{0,6}$, $\frac{0,01}{0,51}$ и $\frac{0,01}{0,37}$ соответственно.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mu_1^{(1)} &= 0,6, & \mu_2^{(1)} &= 0,51, & \mu_3^{(1)} &= 0,37, \\ \mu_{1,+}^{(1)} &= 0,49, & \mu_{2,+}^{(1)} &= 0,34, & \mu_{3,+}^{(1)} &= 0,27, \\ \mu_{1,2}^{(1)} &= 0,1, & \mu_{1,3}^{(1)} &= 0, & \mu_{2,1}^{(1)} &= 0,08, \\ \mu_{2,3}^{(1)} &= 0,08, & \mu_{3,1}^{(1)} &= 0, & \mu_{3,2}^{(1)} &= 0,08, \\ \mu_{1,-}^{(1)} &= 0,01, & \mu_{2,-}^{(1)} &= 0,01, & \mu_{3,-}^{(1)} &= 0,02. \end{aligned}$$

При втором состоянии среды в соту поступает поток запросов, характеризующийся матрицами:

$$D_0^{(2)} = \begin{pmatrix} -6,4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,28 \end{pmatrix},$$

$$D_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,4 \\ 0,144 & 0,56 \end{pmatrix}, \quad D_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 5,2 & 0,04 \\ 0,012 & 0,004 \end{pmatrix}.$$

Этот поток имеет среднюю интенсивность $\lambda^{(2)}$, равную 2,413, средние интенсивности поступления запросов различных типов определяются как $\lambda_1^{(2)} = 0,363758$, $\lambda_2^{(2)} = 0,666309$, $\lambda_3^{(2)} = 1,38336$, коэффициент корреляции равен $c_{cor} = 0,247$ и коэффициент вариации c_{var} равен 2,76.

При втором состоянии среды среднее время пребывания запроса в зонах 1, 2 и 3 определяется как $\frac{1}{0,4}$, $\frac{1}{0,21}$ и $\frac{1}{0,17}$ соответственно. Вероятности успешного завершения обслуживания во время пребывания запроса в зонах 1, 2 и 3 равны $\frac{0,34}{0,4}$, $\frac{0,12}{0,21}$ и $\frac{0,11}{0,17}$ соответственно. Вероятности перехода запроса из зоны 1 в зону 2 и из зоны 2 в зону 1 равны $\frac{0,05}{0,4}$ и $\frac{0,04}{0,21}$ соответственно. Вероятности перехода запроса из зоны 2 в зону 3 и из зоны 3 в зону 2 равны $\frac{0,04}{0,21}$ и $\frac{0,04}{0,17}$ соответственно. Вероятности потери запроса из-за нетерпеливости из зоны 1, 2 и 3 равны $\frac{0,01}{0,4}$, $\frac{0,01}{0,21}$ и $\frac{0,01}{0,17}$.

Соответственно имеем, что:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(2)} &= 0,4, & \mu_2^{(2)} &= 0,21, & \mu_3^{(2)} &= 0,17, \\ \mu_{1,+}^{(2)} &= 0,34, & \mu_{2,+}^{(2)} &= 0,12, & \mu_{3,+}^{(2)} &= 0,11, \\ \mu_{1,2}^{(2)} &= 0,05, & \mu_{1,3}^{(2)} &= 0, & \mu_{2,1}^{(2)} &= 0,04, \\ \mu_{2,3}^{(2)} &= 0,04, & \mu_{3,1}^{(2)} &= 0, & \mu_{3,2}^{(2)} &= 0,04, \\ \mu_{1,-}^{(2)} &= 0,01, & \mu_{2,-}^{(2)} &= 0,01, & \mu_{3,-}^{(2)} &= 0,02. \end{aligned}$$

Для того чтобы показать важность учета корреляции и влияния случайной среды, рассмотрим второй набор входных данных, который будем обозначать как *withoutRE*. Рассмотрим систему, в которую разного типа запросы поступают, перемещаются, обслуживаются и уходят из-за нетерпеливости независимо от состояния среды с такой же средней интенсивностью, как и ранее. Другими словами, предположим, что в систему поступают стационарные пуассоновские потоки запросов трех типов с интенсивностями λ_1 , λ_2 , λ_3 соответственно, где λ_r , $r = \overline{1, R}$, находятся по формуле (1). Средние интенсивности переходов, перемещения и ухода из-за нетерпеливости определяются как соответствующие интенсивности при первом состоянии случайной среды, умноженные на вероятность p_1 того, что система находится в первом состоянии среды, плюс соответствующие интенсивности при втором состоянии случайной среды, умноженные на вероятность p_2 того, что система находится во втором состоянии среды. Например, средняя интенсивность ухода

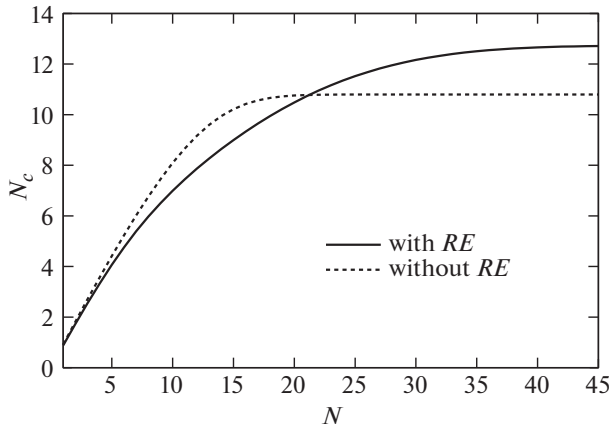


Рис. 1. Зависимость среднего числа запросов в системе N_c от параметра N .

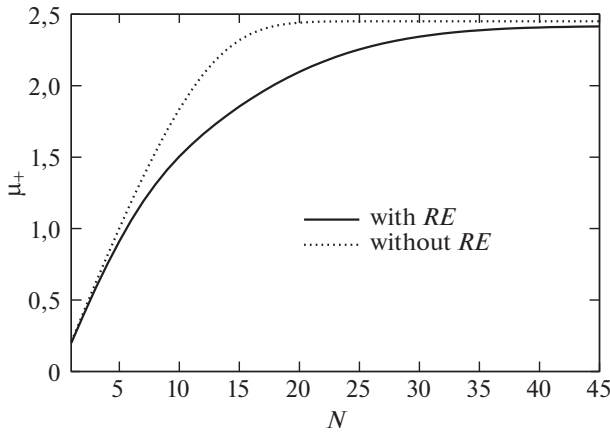


Рис. 2. Зависимость интенсивности μ_+ выходного потока успешно обслуженных запросов от параметра N .

из-за переходов запросов из третьей зоны во вторую может быть найдена по формуле $p_1\mu_{3,2}^{(1)} + p_2\mu_{3,2}^{(2)}$ и равняется 0,0554839.

Рассмотрим влияние числа каналов в сети на характеристики ее производительности. Для этого будем изменять параметр N в интервале от 1 до 45.

Рисунки 1 и 2 показывают зависимость среднего числа запросов в системе N_c и интенсивности μ_+ выходного потока успешно обслуженных запросов от параметра N для двух наборов входных данных.

Рисунки 3 и 4 показывают зависимость интенсивности μ_- выходного потока запросов, которые покидают систему из-за нетерпеливости, и вероятности P_{imp} потери произвольного запроса из-за нетерпеливости от параметра N для двух наборов входных данных.

Рисунки 5 и 6 показывают зависимость вероятности P_{ent} потери произвольного запроса из-за переполненности системы от параметра N (изменяе-

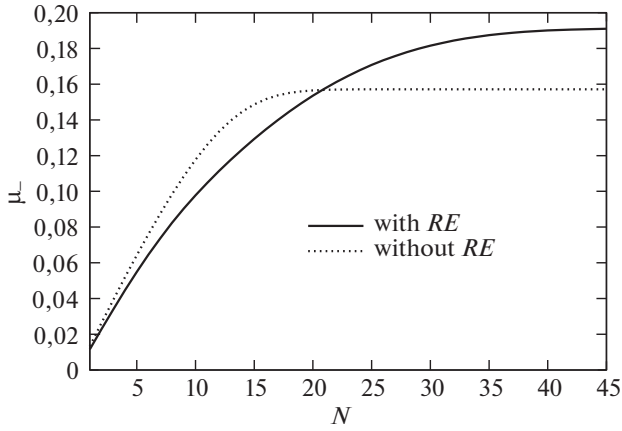


Рис. 3. Зависимость интенсивности μ_- выходного потока запросов, которые покидают систему из-за нетерпеливости, от параметра N .

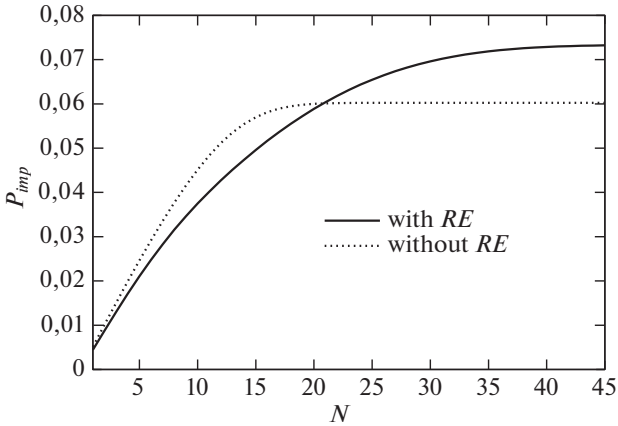


Рис. 4. Зависимость вероятности P_{imp} потери произвольного запроса из-за нетерпеливости от параметра N .

мого в диапазонах от 1 до 45 и от 15 до 45 соответственно) для двух наборов входных данных. На рис. 6 дополнительно проведена горизонтальная пунктирная линия, соответствующая значению 0,0015 этой вероятности.

Рисунок 7 показывает зависимость от параметра N для двух наборов входных данных вероятности P_{loss} потери произвольного запроса.

Как видно из приведенных рисунков, характеристики системы сильно зависят от корреляции входного потока и влияния случайной среды. При тех же самых средних интенсивностях поступления, обслуживания, перемещения и ухода из-за нетерпеливости характеристики производительности системы без влияния среды существенно лучше, чем для системы, на функционирование которой оказывает влияние случайная среда.

Предположим, что задачей оптимизации системы является задача определения минимальной емкости системы N , при которой вероятность потери

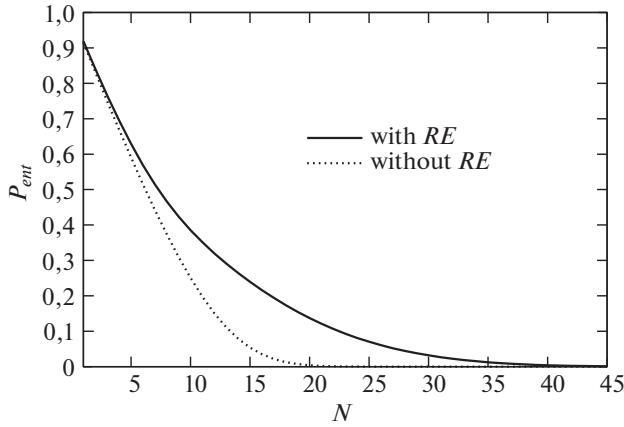


Рис. 5. Зависимость вероятности P_{ent} потери произвольного запроса из-за переполненности системы от параметра N .

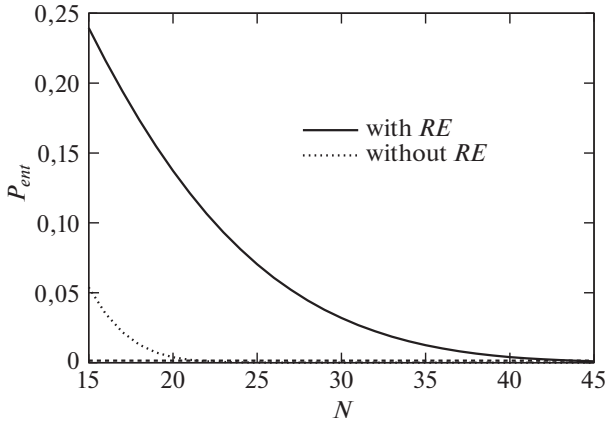


Рис. 6. Зависимость вероятности P_{ent} потери произвольного запроса из-за переполненности системы от параметра N .

произвольного запроса на входе в систему не превышала бы 0,0015. Как видно из рис. 5 и 6, для системы, которая игнорирует влияние среды, оптимальным значением емкости системы является емкость $N = 22$. В то же время для системы, учитывающей влияние среды, при $N = 22$ вероятность потери $P_{ent} = 0,10657$, что в 71 раз больше, чем требуется. Если система подвержена влиянию среды и проектируем емкость, равную $N = 22$, полученную из расчета по упрощенной модели, ожидая при этом, что на входе в систему получают отказ 15 запросов из 10 000, то в реальности будем терять больше, чем 1 запрос из 10. Для того чтобы добиться требуемой вероятности потери P_{ent} для системы, функционирующей в случайной среде, необходимо проектировать емкость системы $N = 44$.

Отметим, что время, затраченное на расчет значений описанных выше характеристик производительности системы для значений N от 1 до 45 на

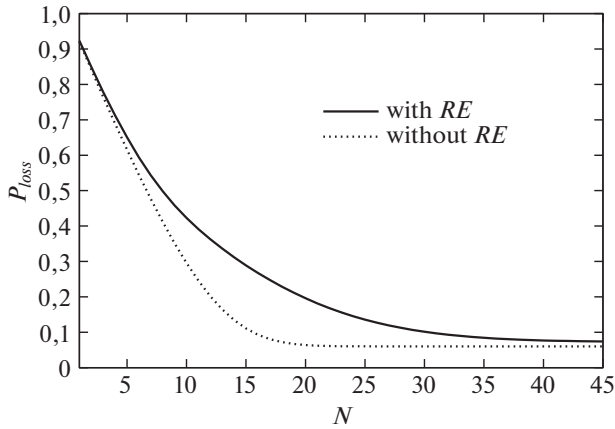


Рис. 7. Зависимость вероятности P_{loss} потери произвольного запроса от параметра N .

ноутбуке с характеристиками: процессор Inter(R) Core(TM) i7-10750H CPU @2.60GHz, оперативная память 16.0 ГБ, Wolfram Mathematica 11.0, составило около 19 мин С ростом N время счета существенно растет. Например, для $N = 60$ (при этом максимальный размер одного блока генератора равен 7564) время счета составило более 10 мин (616 с). Использование для расчетов более мощных компьютеров и особенно графических процессоров (GPU) может позволить существенно снизить время счета.

6. Заключение

В статье найдено стационарное распределение вероятностей состояний системы массового обслуживания, являющейся моделью работы соты мобильной сети связи. Сота разделена на зоны, которые определяют скорость обслуживания находящихся в них пользователей. Разделение соты на зоны определяется их расстоянием от базовой станции, наличием препятствий и помех для распространения радиосигнала. Поступление запросов описывается маркированным марковским потоком. Все параметры системы зависят от состояний некоторого внешнего случайного процесса (случайной среды). Численно проиллюстрированы возможность нахождения зависимости значений важнейших характеристик системы от числа каналов для передачи информации и решения задачи минимально необходимого числа каналов. Показано, что игнорирование учета влияния случайной среды (за счет соответствующего усреднения параметров системы) может привести к большим ошибкам в оценивании этого количества каналов.

В качестве направлений для будущих исследований отметим необходимость учета возможности совершения повторных попыток пользователями, не получившими доступ в систему, а также возможности деления ресурса базовой станции между пользователями не только в зависимости от зоны, в которой находится пользователь, но и от общего числа активных пользователей в соте. Последняя возможность исследовалась в публикации [22], но без учета возможного влияния случайной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lee Y.L., et al.* Recent Advances in Radio Resource Management for Heterogeneous LTE/LTE-A Networks // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2014. V. 16. No. 4. P. 2142–2180.
2. *Cao P., Xie J.* Optimal Control of a Multiclass Queueing System when Customers Can Change Types // Queueing Systems. 2016. V. 82. No. 3–4. P. 285–313.
3. *Dudin S., Kim C.* Analysis of Multi-Server Queue With Spatial Generation of Customers and Service Rate Depending on Customers' Location as a Model of Cell Operation // IEEE T. Commun. 2017. V. 65. P. 4325–4333.
4. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. Киев: КВИРТУ, 1963.
5. *Dudin A., et al.* Priority Retrial Queueing Model Operating in Random Environment with Varying Number and Reservation of Servers // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 269. P. 674–690.
6. *He Q.M.* Queues with Marked Customers // Advances in Applied Probability. 1996. P. 567–587.
7. *Chakravarthy S.R.* The Batch Markovian Arrival Process: a Review and Future Work // Advances in probability theory and stochastic processes. 2001. V. 1. P. 21–49.
8. *Lucantoni D.M.* New Results on the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process // Communications in Statistics. Stochastic Models. 1991. V. 7. No. 1. P. 1–46.
9. *Вишневецкий В.М., Дудин А.Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // АиТ. 2017. № 8. С. 3–59.
Vishnevskii V.M., Dudin A.N. Queueing Systems with Correlated Arrival Flows and Their Applications to Modeling Telecommunication Networks // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1361–1403.
10. *Graham A.* Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications. Courier Dover Publications, 2018.
11. *Neuts M.F.* Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models: an Algorithmic Approach. Courier Corporation, 1994.
12. *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. Springer Science & Business Media, 2008. V. 51.
13. *Kim C., et al.* Tandem Queueing System with Infinite and Finite Intermediate Buffers and Generalized Phase-type Service Time Distribution // Eur. J. Operational Research. 2014. V. 235. No. 1. P. 170–179.
14. *Dudin A., et al.* Multi-server Queueing System with a Generalized Phase-type Service Time Distribution as a Model of Call Center with a Call-back Option // Annals of Operations Research. 2016. V. 239. No. 2. P. 401–428.
15. *Brazenas M., Horvath G., Telek M.* Parallel Algorithms for Fitting Markov Arrival Processes // Performance Evaluation. 2018. V. 123. P. 50–67.
16. *Buchholz P., Krieger J.* Fitting Correlated Arrival and Service Times and Related Queueing Performance // Queueing Systems. 2017. V. 85. P. 337–359.
17. *Blume A., Buchholz P., Krieger J.* Parallelization of EM-Algorithms for Markovian Arrival Processes // Lect. Notes in Comput. Sci. 2020. V. 12040. P. 173–189.
18. *Daduna H.* Graph-Based Mobility Models: Asymptotic and Stationary Node Distribution // Lect. Notes in Comput. Sci. 2020. V. 12040. P. 155–172.

19. *Leo Y., et al.* Call Detail Records to Characterize Usages and Mobility Events of Phone Users // *Computer Communications*. 2016. V. 95. P. 43–53.
20. *Ramaswami V., Lucantoni D.M.* Algorithms for the Multi-Server Queue with Phase Type Service // *Stochastic Models*. 1985. V. 1. No. 3. P. 393–417.
21. *Kim C., et al.* Queueing System $MAP/PH/N/N + R$ with Impatient Heterogeneous Customers as a Model of Call Center // *Appl. Math. Modelling*. 2013. V. 37. No. 3. P. 958–976.
22. *Kim C., et al.* Mathematical Models for the Operation of a Cell With Bandwidth Sharing and Moving Users // *IEEE Trans. on Wireless Communications*. 2020. V. 19. No. 2. P. 744–755.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 27.10.2020

После доработки 17.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021