

© 2021 г. В.С. ВИКТОРОВА, д-р техн. наук (vsviktorova@gmail.com),  
А.С. СТЕПАНЯНЦ (a.s.stepanyants@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ В НЕМОНОТОННЫХ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЯХ МНОГОУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Рассматривается логико-вероятностное моделирование надежностного поведения многоуровневых систем, описываемое немонотонными функциями алгебры логики. Предлагается метод вычисления параметра потока переходов в заданное немонотонной функцией подмножество состояний. Описывается подход к вычислению на логико-вероятностных моделях оценок интервальных показателей надежности, эффективности, безопасности многоуровневых систем. Приводится пример расчета показателей эксплуатационной готовности многоуровневой системы с немонотонными логическими критериями перехода между уровнями. Проводится сравнение полученных значений показателей с результатами марковского моделирования.

*Ключевые слова:* надежность, логико-вероятностные методы, немонотонные модели, интервальные показатели, параметр потока отказов, коэффициент сохранения эффективности.

DOI: 10.31857/S000523102105007X

### 1. Введение

В современных системах управления и технологических комплексах достижение высоких показателей эффективности, надежности, безопасности обеспечивается не только выбором более надежных элементов, резервированием, но и реализацией многоуровневого функционирования системы [1–3]. В классических двухуровневых моделях надежности все множество состояний системы, определяемых работоспособностью, отказами элементов системы, представляется двумя классами — класс работоспособных состояний системы (уровень эффективности  $E_{\max}$ , в частности 100 %) и класс неработоспособных состояний (уровень эффективности  $E_0 \leq 0$ , в частности 0 %). Надежностное поведение многоуровневых систем характеризуется тем, что при возникновении отказов уровень эффективности функционирования  $E_i$  может снижаться и принимать дискретные значения  $E_0 < E_1 < \dots < E_{\max}$ , промежуточные между  $E_{\max}$  и  $E_0$ . Множество состояний многоуровневой системы разбивается на классы  $K_i$ , соответствующие этим уровням. Состояния отказа системы также могут быть разбиты на классы, соответствующие уровням критичности отказов, что привело к разработке и исследованию надежностных моделей анализа безопасности [4].

<sup>1</sup> Посвящается памяти Александра Сергеевича Можжаева.

Для исследования надежностного поведения многоуровневых систем могут применяться марковские процессы [5–7]. Подход на основе марковских моделей является универсальным в смысле учета различных особенностей сложного надежностного поведения систем и возможности вычисления практически всех показателей надежности как мгновенных (дифференциальных), так и интервальных (интегральных). Еще одним из подходов к моделированию многоуровневых систем является подход, основанный на методе производящих функций, предложенном И.А. Ушаковым [8] и развитом в [9–12]. При практических расчетах надежности сложных многокомпонентных, многоуровневых систем приходится прибегать к логико-вероятностным методам (ЛВМ) [13, 14]. Это связано с рядом причин, основными из которых являются:

- “взрывной” рост размерности марковских моделей при увеличении числа компонентов системы;

- использование производящей функции имеет преимущество в случаях, когда не только система, но и ее элементы являются многоуровневыми, а при бинарных элементах может оказаться полезным, если не возникнет проблема размерности [3, раздел 3.5];

- ЛВМ с визуальной интерпретацией в виде деревьев отказов являются стандартом де факто при анализе надежности в атомной энергетике, авиационной, газовой отрасли [15, 16] и других ответственных областях.

Недостатками логико-вероятностных моделей и методов являются:

- ограничение на надежностное поведение моделируемого объекта, связанное с независимостью функционирования, отказов и восстановлений его элементов; это ограничение приводит к возможности отражения в логико-вероятностных моделях надежности только нагруженного резервирования и неограниченного восстановления;

- возможные трудности, которые могут возникнуть при задании произвольного начального состояния (в момент  $t = 0$ ), особенно для элементов с неэкспоненциальными функциями распределения соответствующих случайных величин;

- ЛВМ для восстанавливаемых систем позволяют рассчитывать лишь дифференциальные показатели надежности, определяемые в момент времени  $t$ .

Отметим, что коэффициент готовности  $A(t)$  и параметр потока отказов  $\omega(t)$ , по существу, исчерпывают список основных показателей надежности для момента времени  $t$  (на стационарном или нестационарном участках работы системы). Непосредственное вычисление показателей безотказности (вероятность отказа и безотказной работы на интервале  $(0, t)$ , интенсивность отказов, средняя наработка до отказа и ряда других важных показателей надежности) в ЛВМ невозможно.

Решением здесь является построение оценок этих показателей, используя  $A(t)$  и  $\omega(t)$ . В [17–19] получены оценки для показателей безотказности. Верхняя оценка интенсивности отказов  $\lambda(t)$  и нижняя оценка вероятности безот-

казной работы  $R(t)$ :

$$(1) \quad \lambda(t) \approx \frac{\omega(t)}{A(t)}; \quad R(t) \approx \exp \left\{ - \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{A(\tau)} d\tau \right\}.$$

Вероятность отказа на интервале  $Q(0, t)$  и среднюю наработку до первого отказа  $MTTFF$  можно вычислить по известным соотношениям:

$$(2) \quad Q(t) = 1 - R(t); \quad MTTFF = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau.$$

Пусть  $A^{\Omega_d}(t)$  – вероятность застать систему в момент  $t$  в выделенном подмножестве ее состояний  $\Omega_d$ , а  $\omega^{\Omega_d}(t)$  – параметр потока переходов в это подмножество. Интегрирование  $A^{\Omega_d}(t)$  и  $\omega^{\Omega_d}(t)$  в заданных пределах дает точные выражения для показателей среднего времени пребывания  $T_{\Sigma}^{\Omega_d}(0, t)$  и среднего числа переходов  $N_{\Sigma}^{\Omega_d}(0, t)$  в  $\Omega_d$ :

$$(3) \quad T_{\Sigma}^{\Omega_d}(0, t) = \int_0^t A^{\Omega_d}(\tau) d\tau; \quad N_{\Sigma}^{\Omega_d}(0, t) = \int_0^t \omega^{\Omega_d}(\tau) d\tau.$$

Для надежностного анализа многоуровневых систем в отечественную нормативную документацию был введен показатель – коэффициент сохранения эффективности  $C(0, t)$ , который определяется как отношение математического ожидания эффективности использования объекта по назначению за определенную продолжительность эксплуатации к номинальному значению эффективности, вычисленному при условии, что отказы объекта в течение того же периода не возникают. Конкретизация понятия эффективности осуществляется, исходя из существа задачи анализа надежности, особенностей функционирования и назначения системы. Для многоуровневых систем важным показателем эффективности функционирования является усредненное по уровням значение интегральной эффективности  $E$  на интервале  $(0, t)$

$$(4) \quad E(0, t) = \sum_i h_i \int_0^t A_i(\tau) d\tau + \sum_{i,j,j \neq i} h_{ij} \int_0^t \omega_{ij}(\tau) d\tau,$$

где  $A_i(t)$  – вероятность застать систему в момент  $t$  в  $i$ -м классе состояний ( $K_i$ );  $\omega_{ij}(t)$  – параметр потока переходов в момент  $t$  из  $K_i$  в  $K_j$ ;  $h_i$  – доход (потери) в единицу времени от пребывания системы в  $K_i$ ;  $h_{ij}$  – единовременные доходы (потери) за переход из  $K_i$  в  $K_j$ , обусловленные затратами на восстановление работоспособности, штрафами, потерями находящегося в обработке продукта (сырья, заготовки).

Коэффициент сохранения эффективности определяется как

$$(5) \quad C(0, t) = \frac{E(0, t)}{h_{100\%} t}.$$

Для стационарного участка работы системы можно вычислить показатели средней наработки между отказами  $MTTF$  и среднего времени между отказами  $MTBF$  через стационарные значения коэффициента готовности  $A$  и параметра потока отказов  $\omega$ :

$$(6) \quad MTTF = \frac{A}{\omega}; \quad MTBF = \frac{1}{\omega}.$$

Зная  $MTTF$  и  $MTBF$ , очевидным образом определяется среднее стационарное время восстановления  $MTTR = MTBF - MTTF$ .

Показатель  $MTBF$  не входит в перечень показателей надежности отечественных стандартов. Однако он часто упоминается в зарубежной литературе и требования по его обязательному вычислению выдвигаются при международной сертификации ответственных объектов. Отметим, что в отечественной практике (например, авиастроении) часто показатель  $MTTF$  вычисляют правильно по приведенному выше интегральному выражению (2), а обозначают его  $MTBF$ , что неверно.

Таким образом, не прибегая к марковскому моделированию, можно вычислять различные показатели надежности, эффективности, безопасности, выражая их через коэффициент готовности и параметр потока отказов, которые непосредственно вычисляются в логико-вероятностных моделях.

Традиционно ЛВМ работают с монотонными системами, а именно с системами, модель надежности которых представляется монотонной логической функцией отказа/работоспособности [20, с. 77]. В таких системах не может быть ни одного элемента, отказ которого увеличивает, а восстановление снижает надежность системы. Методы расчета дифференциальных показателей надежности монотонных систем известны [13, 14, 21, 22].

Формализация многоуровневых систем осуществляется немонотонными функциями алгебры логики (ФАЛ) относительно каждого уровня эффективности функционирования  $E_i$  [3, 23]. Немонотонность порождается тем, что для реализации промежуточных уровней необходимо, чтобы какая-то часть системы отказала, а другие части были работоспособными. Деревья отказов, соответствующие немонотонной ФАЛ, называют некогерентными деревьями отказов [24, с. 251]. Методы вычисления вероятности застать систему в момент времени  $t$  в классе состояний  $K_i$ , соответствующих немонотонной ФАЛ (коэффициент готовности относительно уровня  $E_i$ ), известны и не представляют принципиальных трудностей. Определение параметра потока отказов для немонотонного случая — достаточно трудная и нетривиальная задача, характеризующаяся большим объемом вычислений. Подход к вычислению  $\omega$  немонотонных восстанавливаемых систем, основанный на двоичных диаграммах решений (BDD), описан в [25]. Эффективность этого подхода при программной реализации достигается за счет представления логической функции бинарным деревом. Авторами данной статьи предлагается рекурсивный метод вычисления параметра потока отказов (ППП) в класс состояний  $K_i$  и между классами состояний  $K_i, K_j$ , показавший свою эффективность как при программной реализации, так и в случае расчетов вручную.

## 2. Метод вычисления дифференциальных показателей надежности в логико-вероятностных моделях

### 2.1. Монотонные модели

Кратко сформулируем основные положения логико-вероятностного моделирования, в классе которого и рассматривается предлагаемый метод, и результаты по вычислению коэффициента готовности и параметра потока отказов для монотонных моделей, полученные в [22, 26].

Пусть элементы системы  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  и система  $S(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = \{x_i\}$  могут находиться в двух состояниях — работоспособном и неработоспособном:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если элемент } i \text{ исправен,} \\ 0, & \text{если элемент } i \text{ отказал,} \end{cases}$$
$$S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если система исправна,} \\ 0, & \text{если система отказала.} \end{cases}$$

Пусть состояние системы полностью определяется состоянием в момент  $t$  ее элементов. Обозначим:  $A = \{A_j\}$  — множество всех минимальных путей работоспособности системы,  $C = \{C_j\}$  — множество всех минимальных сечений неработоспособности системы [24, с. 227–240], [27, с. 82–83]. Тогда работоспособность системы в момент  $t$  записывается как

$$(7) \quad S(\mathbf{x}, t) = \left\{ \bigvee_{j=1}^r A_j \right\} = 1,$$

а неработоспособность —

$$(8) \quad \overline{S}(\mathbf{x}, t) = \left\{ \bigvee_{j=1}^l C_j \right\} = 1.$$

Каждый минимальный путь (сечение) представляет собой конъюнкцию некоторого набора из работоспособных (отказавших) элементов  $\mathbf{x} = \{x_i\}$ . Коэффициент готовности (простоя) системы определяется по выражениям:

$$(9) \quad P\{S(\mathbf{x}, t) = 1\} = P\{\overline{S}(\mathbf{x}, t) = 0\} = P\left\{ \bigvee_{j=1}^r A_j = 1 \right\} = 1 - P\left\{ \bigvee_{j=1}^l C_j = 1 \right\},$$

$$(10) \quad P\{S(\mathbf{x}, t) = 0\} = P\{\overline{S}(\mathbf{x}, t) = 1\} = P\left\{ \bigvee_{j=1}^l C_j = 1 \right\} = 1 - P\left\{ \bigvee_{j=1}^r A_j = 1 \right\},$$

где  $P\{\cdot\}$  — вероятность наступления в момент  $t$  заключенного в скобки события.

Параметр потока отказов системы — это производная в момент времени  $t$  от среднего числа отказов на  $(0, t)$ . Можно сказать, что параметр потока отказов есть математическое ожидание появления отказа системы в момент времени  $t$  (т.е. на  $(t, t + \Delta t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ ), что означает возникновение по крайней

мере одного сечения в момент времени  $t + \Delta t$ . Пусть  $e_i$  – событие появления  $i$ -го сечения в  $(t, t + \Delta t)$ , где  $e_i(t, t + \Delta t)$  – конъюнкция  $n_i$  переменных (элементов), образующих сечение  $C_i$ . Так как базовым допущением ЛВМ является ординарность потока отказов, то вероятность появления на  $\Delta t$  сечения  $e_i$  определяется как

$$(11) \quad P\{e_i\} = \omega_i^*(t) \Delta t = \sum_{j_i=1}^{n_i} \left[ \omega_{j_i}(t) \prod_{g_i \neq j_i}^{n_i} Q_{g_i}(t) \right] \Delta t,$$

где  $\omega_{j_i}(t)$ ,  $Q_{g_i}(t)$  – параметр потока отказов и коэффициент простоя (неготовность) элементов  $j_i$ ,  $g_i$  в момент времени  $t$ ;  $\omega_i^*(t)$  – параметр потока отказов, обусловленный появлением сечения  $C_i$ .

Вероятность отказа системы на  $\Delta t$  можно представить выражением

$$(12) \quad \omega_s \Delta t = P \left\{ (S(\mathbf{x}, t) = 1) \wedge \left( \bigcup_{i=1}^l e_i \right) \right\}.$$

Основные соотношения разработанного в [22, 26] рекурсивного метода оценки параметра потока отказов следующие:

$$(13) \quad \omega^k(t) \Delta t = P \left\{ (S(\mathbf{x}, t) = 1) \wedge \left( \bigcup_{i=1}^l e_i \right) / x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 1 \right\};$$

$$\nu^k(t) \Delta t = P \left\{ (S(\mathbf{x}, t) = 1) \wedge \left( \bigcup_{i=1}^l e_i \right) / x_{k+1} = 0, x_{k+2} = \dots = x_n = 1 \right\},$$

где  $\left\{ (S(\mathbf{x}, t) = 1) \wedge \left( \bigcup_{i=1}^l e_i \right) / x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 1 \right\}$  – условное событие работоспособности системы в момент времени  $t$  и появления на  $\Delta t$  отказа (реализация появления хотя бы одного сечения) при условии работоспособности элементов  $x_{k+1}, \dots, x_n$ ;  $\omega^k(t)$ ,  $\nu^k(t)$  – условный параметр потока отказов системы на  $k$ -м шаге рекурсии.

Параметр потока отказов системы на шаге  $k + 1$  рекурсивно вычисляется как

$$(14) \quad \omega^{k+1}(t) = R_{k+1}(t) \omega^k(t) + Q_{k+1}(t) \nu^k(t) + (p^k(t) - r^k(t)) \omega_{k+1}(t),$$

$$\omega^0(t) = \nu^0(t) = 0,$$

где  $R_i(t)$ ,  $Q_i(t)$ ,  $\omega_i(t)$  – коэффициент готовности, коэффициент простоя, параметр потока отказов элемента  $x_i$ , а

$$(15) \quad p^k(t) = P\{(S(x_1, x_2, \dots, x_k; t) = 1) / x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 1\},$$

$$r^k(t) = P\{(S(x_1, x_2, \dots, x_k; t) = 1) / x_{k+1} = 0, x_{k+2} = \dots = x_n = 1\}$$

– условные вероятности работоспособности системы в момент  $t$ .

Причем  $p^0(t) = 1$ , а  $p^{k+1}(t) = R_{k+1}(t) p^k(t) + Q_{k+1}(t) r^k(t)$ . Последовательно вычисляя  $p^1(t), p^2(t), \dots, p^n(t)$ , на последнем  $n$ -м шаге рекурсии получим коэффициент готовности системы и аналогично, последовательно вычисляя  $\omega^1(t), \omega^2(t), \dots, \omega^n(t)$ , получаем параметр потока отказов системы  $\omega(t) = \omega^n(t)$ .

## 2.2. Немонотонные модели

Немонотонные логико-вероятностные модели систем не могут быть представлены логическим выражением, содержащим только работоспособные наборы элементов (например, как при задании множества минимальных путей работоспособности системы) или только неработоспособные наборы элементов (как при задании минимальных сечений отказа). Немонотонные модели формализуют некоторые промежуточные состояния системы, в которых обязательно присутствуют как отказавшие наборы элементов, так и работоспособные. На рис. 1 приведена надежность модель в виде графа состояний и переходов гипотетической системы, в которой стрелки от состояний с меньшими номерами к состояниям с большими — это потоки отказов элементов, а стрелки от состояний с большими номерами к состояниям с меньшими — это потоки восстановления элементов.

Пусть обведенные состояния 4, 5,  $n - 1$  определяют класс (подмножество) состояний системы, в которых эффективность функционирования составляет уровень  $E_j$ . Тогда переходы в это подмножество состояний определяются как потоком отказов (стрелки из состояний с меньшими номерами), так и потоком восстановления (стрелки из состояний с большими номерами). Отметим, что в классе монотонных двухуровневых моделей все множество состояний разделено на два подмножества, одно соответствует работоспособности системы, другое — отказу, а переходы из одного подмножества в другое определяются одним потоком — либо отказов, либо восстановления.

Логическая функция  $Y(E_j)$ , выделяющая класс состояний, эквивалентных промежуточному уровню  $E_j$ , может быть разделена на две составляющие  $A$  и  $\bar{B}$ , объединенные конъюнкцией

$$(16) \quad Y(E_j) = A \wedge \bar{B},$$

где  $A$  — логическое выражение работоспособности части структуры системы, необходимой для обеспечения уровня не ниже  $E_j$ ;  $\bar{B}$  — логическое выраже-

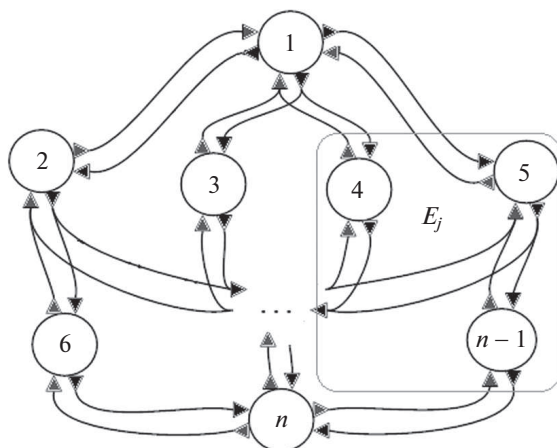


Рис. 1. Граф состояний и переходов немонотонной модели надежности.

ние неработоспособности части структуры системы, приводящей к тому, что система не может функционировать на уровнях выше  $E_j$ .

Параметр потока переходов в подмножество состояний, определяемое логическим выражением (16), будет состоять из суммы параметров – потока отказов по составляющей  $\overline{B}$  и потока восстановления по составляющей  $A$ . Поэтому чтобы определять параметр потока переходов в заданное немонотонной функцией подмножество состояний, необходимо написать выражения для вычисления параметра потока восстановления.

Параметр потока восстановления рекурсивным способом может быть вычислен в соответствии с выражениями:

$$(17) \quad \psi^k(t)\Delta t = P\left\{(S(\mathbf{x}, t) = 0) \wedge \left(\bigcup_{i=1}^r \eta_i\right) / x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\right\};$$

$$\varphi^k(t)\Delta t = P\left\{(S(\mathbf{x}, t) = 0) \wedge \left(\bigcup_{i=1}^r \eta_i\right) / x_{k+1} = 1, x_{k+2} = \dots = x_n = 0\right\},$$

$$(18) \quad \psi^{k+1}(t) = Q_{k+1}(t)\psi^k(t) + R_{k+1}(t)\varphi^k(t) + (g^k(t) - f^k(t))\psi_{k+1}(t), \\ \psi^0(t) = \varphi^0(t) = 0,$$

где  $\psi^k(t)$ ,  $\varphi^k(t)$  – условные параметры потока восстановления системы на  $k$ -м шаге рекурсии;  $\psi_{k+1}(t)$  – параметр потока восстановления элемента  $x_{k+1}$ ;  $\eta$  – множество минимальных путей попадания в состояния, определяемые составляющей  $A$  в логической функции  $Y(E_j)$ ;  $g^k(t)$ ,  $f^k(t)$  – условные вероятности неработоспособности системы в момент  $t$ :

$$(19) \quad g^k(t) = P\{(S(x_1, x_2, \dots, x_k; t) = 0) / x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\},$$

$$f^k(t) = P\{(S(x_1, x_2, \dots, x_k; t) = 0) / x_{k+1} = 1, x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}.$$

Параметр потока восстановления системы равен  $\psi(t) = \psi^n(t)$ .

Запись общего выражения для параметра потока переходов из подмножества состояний  $\overline{Y}(E_j)$  в подмножество  $Y(E_j)$  основывается на следующих положениях:

1. Элементы составляющих  $A$  и  $\overline{B}$  располагаются в определенном порядке и помечаются (при необходимости перенумеровываются, если говорить об алгоритмизации вычислений), чтобы для одних рекурсивно записывать параметр потока восстановлений (для путей, входящих в  $A$ ), а для других (для сечений, входящих в  $\overline{B}$ ) – параметр потока отказов;

2. Пусть  $K_i$  – событие появления  $i$ -й конъюнкции, содержащей пересечение одного сечения из  $\overline{B}$  и одного пути из  $A$ , в  $(t, t + \Delta t)$ , т.е.  $i$ -я конъюнкция имеет вид  $K_i = e_i \wedge \eta_i$ , причем в  $e_i$  и  $\eta_i$  нет общих элементов. При ординарном потоке отказов, восстановления появление  $K_i$  на  $\Delta t$  означает: а) либо в момент  $t$  неработоспособными были  $(n_i - 1)$  элементов сечения  $e_i$  ( $n_i$  – число элементов сечения  $e_i$ ,  $h_i$  – число элементов пути  $\eta_i$ ) и произошел отказ на  $\Delta t$  одного (работоспособного в момент  $t$ ) элемента, при этом все элементы пути  $\eta_i$  – работоспособны; б) либо в момент  $t$  работоспособными были  $(h_i - 1)$



элементов пути  $\eta_i$  и произошло восстановление одного (неработоспособного в момент  $t$ ) элемента, при этом все элементы сечения  $e_i$  – неработоспособны. Тогда вероятность появления на  $\Delta t$  конъюнкции  $K_i$  определится по формуле полной вероятности

$$(20) \quad P\{K_i\} = \gamma_i^*(t)\Delta t = \prod_{r=1}^{h_i} R_r(t) \sum_{j_i=1}^{n_i} \left[ w_{j_i}(t) \prod_{g_i \neq j_i}^{n_i} Q_{g_i}(t) \right] \Delta t + \\ + \prod_{r=1}^{n_i} Q_r(t) \sum_{j_i=1}^{h_i} \left[ \psi_{j_i}(t) \prod_{g_i \neq j_i}^{h_i} R_{g_i}(t) \right] \Delta t,$$

где  $w_{j_i}(t), \psi_{j_i}, Q_r(t), R_r(t)$  – параметр потока отказов и восстановления элементов  $j_i$ , а также коэффициент простоя (неготовность) и коэффициент готовности элементов  $r, g_i$  в момент времени  $t$ ;  $\gamma_i^*(t)$  – параметр потока переходов, обусловленный появлением конъюнкции  $K_i$ ;

3. В общем случае предлагаемый рекурсивный метод оперирует не каждой в отдельности конъюнкцией  $K_i$ , а записывается условный ППП (отказов, восстановления) для системы при указанных в условии состояниях элементов. При алгоритмизации метода для вычисления условных параметров потоков отказов, восстановления необходимо реализовывать новые итерации определения этих параметров потоков, но с меньшим числом элементов. При второй, третьей и т.д. итерации вновь применяется рекурсивный метод вычисления. Обычно после первых итераций анализируемая структура сводится к последовательным, параллельным и “ $m$  из  $n$ ” надежностным схемам, поэтому повторные итерации можно не применять и определять параметры соответствующих потоков, используя стандартные формулы. Это повышает эффективность процедуры вычисления.

### 3. Пример вычисления параметра потока переходов в немонотонной модели

Работу предложенного метода продемонстрируем на вычислении ППП мостиковой схемы с немонотонным логическим критерием, интересующим аналитика. Выбор именно этой схемы для иллюстрации работы метода обусловлен двумя факторами. Во-первых, “мостик” является классическим примером для демонстрации особенностей вычислительных методов логико-вероятностных моделей [28, 29], так как его логическое описание не сводится к бесповторным формам. В импликанты логического описания мостиковой схемы могут входить одни и те же переменные (элементы структуры), что приводит к зависимости соответствующих случайных событий и, как результат, усложнению задачи преобразования логических выражений в вероятностные. Во-вторых, мостиковая структура [20, с. 67–71] имеет важное прикладное значение, так как она описывает обширный класс реальных технических систем, в частности бортовых электроэнергетических установок [27, с. 16–21].

Рассмотрим мостиковую структуру (рис. 2), записав для нее немонотонный логический критерий, а именно: работа только одного из выходов схемы.

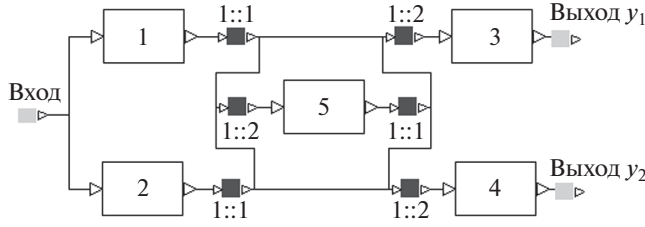


Рис. 2. Блок-схема надежности мостиковой структуры.

Пусть необходимо вычислить параметр потока переходов в подмножество состояний, заданное логическим выражением  $Y(E_j) = y_1 \wedge \bar{y}_2$ .

Логические выражения для работоспособности (неработоспособности) по выходам  $y_1, y_2$  имеют вид:

$$(21) \quad \begin{aligned} y_1 &= x_1 \wedge x_3 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge x_5; & \bar{y}_1 &= \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2; \\ y_2 &= x_2 \wedge x_4 \vee x_1 \wedge x_4 \wedge x_5; & \bar{y}_2 &= \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2. \end{aligned}$$

$$(22) \quad Y(E_j) = (x_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_5 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_5).$$

Сечения  $e_i$  для  $y_2$ :  $e_1 = \bar{x}_4$ ;  $e_2 = \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_5$ ;  $e_3 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ .

Пути  $\eta_i$  для  $y_1$ :  $\eta_1 = x_1 \wedge x_3$ ;  $\eta_2 = x_2 \wedge x_3 \wedge x_5$ .

Обозначим для элементов  $x_i$  их вероятностные характеристики:  $p_i$  (готовность),  $q_i$  (неготовность),  $\omega_i$  (параметр потока отказов),  $\psi_i$  (параметр потока восстановлений).

Вычислим параметр потока отказов для  $\bar{y}_2$ . Так как в общее логическое выражение (22) вошли только 3 элемента из четырех, входящих в  $\bar{y}_2$ , то рекурсию можно делать только по этим трем элементам, уменьшая размерность задачи. Расположим элементы в следующем порядке  $x_4, x_2, x_5$ . Отметим также, что готовностью (для параметра потока переходов по отказам) являются состояния  $\bar{Y}(E_j)$ , из которых происходит переход в состояния  $Y(E_j)$ . Таким образом, для рассматриваемых элементов  $x_4, x_2, x_5$  при вычислении параметра потока отказов состояния  $S(x_2, x_4, x_5; t) = S(x, t) = y_2 = x_2 \wedge x_4 \vee x_4 \wedge x_5$  определяют искомые вероятности  $p^i, r^i$  (15). Тогда

$$\begin{aligned} p^0(t) &= P\{S(x, t) = 1/x_2 = x_4 = x_5 = 1\} = 1, \\ r^0(t) &= P\{S(x, t) = 1/x_4 = 0, x_2 = x_5 = 1\} = 0, \\ p^1(t) &= P\{S(x, t) = 1/x_2 = x_5 = 1\} = p_4 p^0 + q_4 r^0 = p_4, \\ r^1(t) &= P\{S(x, t) = 1/x_2 = 0, x_5 = 1\} = p_4, \\ p^2(t) &= P\{S(x, t) = 1/x_5 = 1\} = p_2 p^1 + q_2 r^1 = p_4, \\ r^2(t) &= P\{S(x, t) = 1/x_5 = 0\} = p_2 p_4, \\ p^3(t) &= P\{S(x, t) = 1\} = p_4 p_5 + q_5 p_2 p_4. \end{aligned}$$

Теперь рекурсивно определим параметр потока переходов по отказам в  $Y(E_j)$  (14) с учетом обеспечения необходимого состояния по состав-

ляющей  $y_1$ :

$$\omega^0(t) = [\omega(t)/x_2 = x_4 = x_5 = 1] = 0,$$

$$\nu^0(t) = [\omega(t)/x_4 = 0, x_2 = x_5 = 1] = 0,$$

$$\begin{aligned}\omega^1(t) &= [\omega(x_4, t)/(x_2 = x_5 = 1)][P\{y_1(x)/(x_2 = x_5 = 1, (\overline{x_4} = 0)) = 1\}] = \\ &= p_4\omega^0 + q_4\nu^0 + \omega_4(p^0 - r^0)p_3 = \omega_4p_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu^1(t) &= [\omega(x_4, t)/(x_2 = 0, x_5 = 1)][P\{y_1(x)/(x_2 = 0, x_5 = 1, (\overline{x_4} = 0)) = 1\}] = \\ &= \omega_4p_1p_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^2(t) &= [\omega(x_2, t)/x_5 = 1][P\{y_1(x)/(x_5 = 1, (\overline{x_2} = 0)) = 1\}] = \\ &= p_2\omega^1 + q_2\nu^1 + \omega_2(p^1 - r^1)p_1p_3 = \\ &= \omega_4p_2p_3 + \omega_4p_1p_3q_2 + \omega_2(p_4 - p_4)p_1p_3 = \\ &= \omega_4(p_2p_3 + q_2p_1p_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu^2(t) &= [\omega(x_4, x_2, t)/(x_5 = 0)][P\{y_1(x)/(x_5 = 0, (\overline{x_4}, \overline{x_2} = 0)) = 1\}] = \\ &= p_1p_3p_4\omega_2 + p_1p_2p_3\omega_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^3(t) &= [\omega(x_4, x_2, x_5, t)][P\{y_1(x)/(x_5 = 1, (\overline{x_4}, \overline{x_2}, \overline{x_5} = 0)) = 1\}] = \\ &= p_5\omega^2 + q_5\nu^2 + \omega_5(p^2 - r^2)p_1p_3 = \\ &= p_5\omega_4(p_2p_3 + q_2p_1p_3) + q_5(p_4\omega_2 + p_2\omega_4)p_1p_3 + \omega_5(p_4 - p_4p_2)p_1p_3.\end{aligned}$$

Поясним запись и результат для  $\nu^1(t)$ . Будем обозначать те переменные, от которых зависит параметр в первой квадратной скобке и которые входят в дополнительные условия выражений для  $P\{\cdot\}$ , в круглых скобках со стрелкой сверху. Если число этих переменных равно единице, например  $[\omega(x_i, t)/(\overline{\cdot\cdot\cdot})]$ , то это означает, что когда для условного параметра потока записывается параметр этого элемента  $\omega_i(\psi_i)$ , то дополнительным условием для  $P\{\cdot\}$  является  $x_i = 0$  ( $x_i = 1$ ). Если число переменных больше единицы, то параметр записывается по очереди для каждой из них, и именно эта переменная принимает значение, равное нулю (единицы для параметра восстановления) в дополнительных условиях для  $P\{\cdot\}$ . В алгоритме вычисления по (14) для  $\omega^{k+1}$  и (18) для  $\psi^{k+1}$  вторая квадратная скобка с вероятностью по второй составляющей появляется только для третьего слагаемого. Так, для  $\nu^1(t)$  элемент  $x_4$  не входит в условие, и именно от него зависит вычисляемый на этом шаге параметр потока отказов. Таким образом, условием является  $x_2 = 0, x_5 = 1$ , что и написано в первой квадратной скобке выражения  $\nu^1(t)$ . Вторая квадратная скобка – это вероятность того, что состояние системы по составляющей  $y_1$  принадлежит искомому подмножеству состояний. Условиями для этой вероятности являются, во-первых, условия составляющей шага рекурсии, а во-вторых, добавляется условие равенства нулю состояния того элемента, для которого по составляющей  $y_2$  записывается параметр потока отказов. Имеем  $\omega(x_4, t)/(x_2 = 0, x_5 = 1) = \omega_4$ , так как исключено сечение с  $\overline{x_1}$ , то остается одно сечение  $\overline{y_2}/(x_2 = 0, x_5 = 1) = \overline{x_4}$ . Во второй квадратной скобке добавляется условие  $x_4 = 0$  и тогда  $P\{\overline{y_1}(x)/(x_2 = 0, x_5 = 1, x_4 = 0)\} = P\{x_1 \wedge x_3 = 1\} = p_1p_3$ . Окончательно получаем  $\nu^1(t) = \omega_4p_1p_3$ .

Вычислим параметр потока восстановления для  $y_1$ . Расположим элементы в следующем порядке  $x_1, x_2, x_3, x_5$ . Для этих элементов при вычисле-

нии параметра потока восстановления состояния  $\overline{S}(x_1, x_2, x_3, x_5; t) = \overline{S}(x; t) = \overline{y}_1 = \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_5 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$  определяют искомые вероятности  $g^i, f^i$  (19).

Тогда

$$\begin{aligned}
 f^0(t) &= P\{\overline{S}(x, t) = 1/x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_5 = 0\} = 1, \\
 g^1(t) &= P\{\overline{S}(x, t) = 1/x_2 = x_3 = x_5 = 0\} = q_1 \cdot 1 + p_1 \cdot 1 = 1, \\
 f^1(t) &= P\{\overline{S}(x, t) = 1/x_2 = 1, x_3 = x_5 = 0\} = 1, \\
 g^2(t) &= P\{\overline{S}(x, t) = 1/x_3 = x_5 = 0\} = q_2 \cdot 1 + p_2 \cdot 1 = 1, \\
 f^2(t) &= P\{\overline{S}(x, t) = 1/x_3 = 1, x_5 = 0\} = q_1, \\
 g^3(t) &= P\{\overline{S}(x, t) = 1/x_5 = 0\} = q_3 \cdot 1 + p_3 q_1 = q_3 + p_3 q_1, \\
 f^3(t) &= P\{\overline{S}(x, t) = 1/x_5 = 1\} = P\{\overline{x}_3 \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)\} = q_3 + p_3 q_1 q_2, \\
 g^4(t) &= P\{\overline{S}(x, t) = 1\} = q_5(q_3 + p_3 q_1) + p_5(q_3 + p_3 q_1 q_2).
 \end{aligned}$$

Теперь рекурсивно определим параметр потока переходов в  $Y(E_j)$  по восстановлению элементов (17) с учетом обеспечения необходимого состояния по составляющей  $\overline{y}_2$ :

$$\begin{aligned}
 \psi^0(t) &= \psi(x, t)/(x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_5 = 0) = 0, \\
 \varphi^0(t) &= \psi(x, t)/(x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_5 = 0) = 0, \\
 \psi^1(t) &= q_1 \cdot 0 + p_1 \cdot 0 + [\psi_1(1 - 1)] \times \\
 &\quad \times [P\{\overline{y}_2(x_1)/(x_2 = x_3 = x_5 = 0, (\overline{x}_1 = 1)) = 1\}] = 0, \\
 \varphi^1(t) &= [\psi(x_1, t)/(x_2 = 1, x_3 = x_5 = 0)] \times \\
 &\quad \times [P\{\overline{y}_2(x_1)/(x_2 = 1, x_3 = x_5 = 0, (\overline{x}_1 = 1)) = 1\}] = 0, \\
 \psi^2(t) &= q_2 \cdot 0 + p_2 \cdot 0 + [\psi^2(1 - 1)] \times \\
 &\quad \times [P\{\overline{y}_2(x_1)/(x_3 = x_5 = 0, (\overline{x}_2 = 1)) = 1\}] = 0, \\
 \varphi^2(t) &= [\psi(x_1, x_2, t)/(x_3 = 1, x_5 = 0)] \times \\
 &\quad \times [P\{\overline{y}_2(x_1, x_2)/(x_3 = 1, x_5 = 0, (\overline{x}_1, \overline{x}_2 = 1)) = 1\}] = \psi_1(q_4 + p_4 q_2), \\
 \psi^3(t) &= q_3 \cdot 0 + p_3 \psi_1(q_4 + p_4 q_2) + [\psi_3(1 - q_1)] \times \\
 &\quad \times [P\{\overline{y}_2(x_1, x_2, x_4)/(x_5 = 0, (\overline{x}_3 = 1)) = 1\}] = \\
 &= p_3 \psi_1(q_4 + p_4 q_2) + \psi_3 p_1(q_4 + p_4 q_2), \\
 \varphi^3(t) &= [\psi(x_1, x_2, x_3, t)/(x_5 = 1)] \times \\
 &\quad \times [P\{y_2(x_1, x_2, x_3, x_4)/(x_5 = 1, (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3 = 1)) = 1\}] = \\
 &= \psi_3(p_1 + q_1 p_2)[P\{\overline{x}_4 + \overline{x}_2 \overline{x}_5 + \overline{x}_2 \overline{x}_1/(x_5 = 1, x_3 = 1) = 1\}] + \\
 &+ p_3 \psi_1 q_2 [P\{\overline{x}_4 + \overline{x}_2 \overline{x}_5 + \overline{x}_2 \overline{x}_1/(x_5 = 1, x_3 = 1, x_1 = 1) = 1\}] + \\
 &+ \psi_2 q_1 [P\{\overline{x}_4 + \overline{x}_2 \overline{x}_5 + \overline{x}_2 \overline{x}_1/(x_5 = 1, x_3 = 1, x_2 = 1) = 1\}] = \\
 &= \psi_3(p_1 + q_1 p_2) q_4 + p_3(\psi_1 q_2 q_4 + \psi_2 q_1 q_4), \\
 \psi^4(t) &= q_5(\psi_1 p_3 + \psi_3 p_1)(q_4 + p_4 q_2) + p_5(\psi_3(p_1 + q_1 p_2) + p_3(\psi_1 q_2 + \psi_2 q_1)) q_4 + \\
 &+ [\psi_5(q_3 + p_3 q_1 - q_3 - p_3 q_1 q_2)] [P\{\overline{y}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)/(x_5 = 1) = 1\}] = \\
 &= q_5(\psi_1 p_3 + \psi_3 p_1)(q_4 + p_4 q_2) + p_5(\psi_3(p_1 + q_1 p_2) + p_3(\psi_1 q_2 + \psi_2 q_1)) q_4 + \\
 &+ \psi_5(p_3 q_1 p_2) q_4.
 \end{aligned}$$

Окончательно записываем параметр  $\gamma(t)$  потока переходов в подмножество состояний  $Y(E_j) = y_1 \wedge \bar{y}_2$  как сумму параметров потока переходов по отказам и по восстановлению, т.е.

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{Y}(E_j) \Rightarrow Y(E_j), t) &= \omega^3(t) + \psi^4 = \\ &= [p_5\omega_4(p_2p_3 + q_2p_1p_3) + q_5(p_4\omega_2 + p_2\omega_4)p_1p_3 + \omega_5p_4q_2p_1p_3] + \\ &+ [q_5(\psi_1p_3 + \psi_3p_1)(q_4 + p_4q_2) + p_5(\psi_3(p_1 + q_1p_2) + p_3(\psi_1q_2 + \psi_2q_1))q_4 + \\ &+ \psi_5(p_3q_1p_2)q_4]. \end{aligned}$$

#### 4. Сравнение рекурсивного логико-вероятностного метода определения ППП с марковским моделированием

Рекурсивная природа предложенного алгоритма определения ППП обеспечивает простоту программирования и хорошее быстродействие полученного программного кода. Для подтверждения корректности алгоритма сравним результаты вычисления параметра потока переходов “многоуровневого мостика” с результатами марковского моделирования. В предположении экспоненциального распределения случайных времен до отказа и восстановления элементов соответствующая марковская модель (ММ) приведена на рис. 3. Вершинам марковского графа соотнесен код “i\*j\*k”, соответствующий номерам отказавших элементов схемы. Все множество состояний  $\Omega$  марковской и логико-вероятностной моделей разбито на классы  $K_i$  (см. табл. 1) в соответствии с тремя уровнями эффективности 100, 50, 0% и удельными доходами в единицу времени при пребывании в состоянии класса. В последнем столбце таблицы приводятся ФАЛ, определяющие класс состояний в ЛВМ.

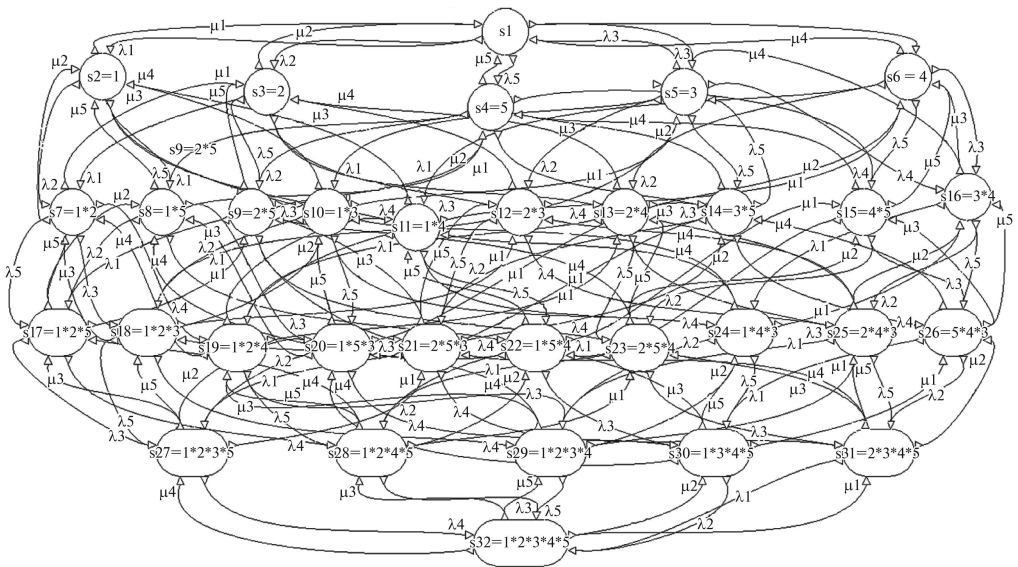


Рис. 3. Граф состояний и переходов марковской модели надежности мостиковой структуры.

**Таблица 1.** Классы состояний мостиковой структуры

Класс	Уровень, %	Доход, 1/ч	Описание	Состояния ММ	ФАЛ ЛВМ
$K_1$	$E_1 = 100$	$h_1 = 1$	Работа всех выходов	s1 ,s2, s3, s4	$y_1 \wedge y_2$
$K_2$	$E_2 = 50$	$h_2 = 0,5$	Работа только первого выхода	s6, s9, s11, s13, s15, s23	$y_1 \wedge \bar{y}_2$
$K_3$	$E_2 = 50$	$h_3 = 0,5$	Работа только второго выхода	s5, s8, s10, s12, s14, s20	$\bar{y}_1 \wedge y_2$
$K_4$	$E_3 = 0$	$h_4 = 0$	Отказ (не работают оба выхода)	s7, s16, ..., s19, s21, s22, s24, ..., s32	$\bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2$

**Таблица 2.** ППП в класс состояний  $K_2$

Время, ч	100	200	300	400	500
ММ	0,001611514	0,001658442	0,001662286	0,001662396	0,001662321
ЛВМ	0,001611512	0,0016584404	0,0016622856	0,0016623961	0,0016623211

Параметр потока переходов в марковской модели определяется как взвешенная сумма элементов вектора вероятностей состояний  $P(t)$

$$(23) \quad \omega(t) = \sum_{i \in \Omega_g} \sum_{j \in \Omega_f} P_i(t) \lambda_{ij},$$

где  $\Omega_f$  – множество интересующих аналитика состояний,  $\Omega_g$  – множество состояний, из которых возможен непосредственный переход в  $\Omega_f$ . Для данного случая  $\Omega_f = K_2$ , а  $\Omega_g = \Omega \setminus \Omega_f$ .

В табл. 2 приведены результаты расчета параметра потока переходов в класс состояний  $K_2$ , выполненные логико-вероятностным методом по предложенному рекурсивному алгоритму и на марковской модели, набранной в специализированном программном средстве Windchill Quality Solutions (PТС). Расчет проводился при следующих значениях интенсивностей отказов и восстановлений элементов мостика:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,003$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0,001$ ,  $\lambda_5 = 0,004$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_5 = 0,02$ ,  $\mu_3 = \mu_4 = 0,01$ . Результаты идентичны, однако, очевидно, что задание марковской модели намного сложнее. Если в рассмотренную схему будет добавлен хотя бы один дополнительный канал и две перемычки для попарной связи всех трех каналов (известная 35 задача И.А. Рябина), то построение марковской модели будет практически невозможным. Единственным аналитическим инструментом исследования многоуровневого функционирования структурно-сложных схем будет логико-вероятностное моделирование, нахождение ППП по предложенному рекурсивному методу наращивания переменных и далее определение показателей (1)–(6). Серьезным преимуществом логико-вероятностного моделирования надежности также является возможность учета неэкспоненциальных распределений соответствующих случайных величин.

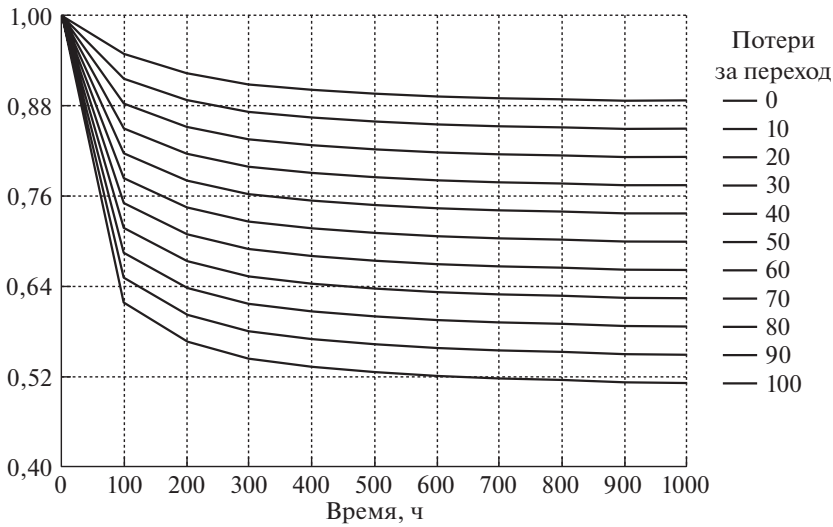


Рис. 4. Коэффициент сохранения эффективности мостиковой структуры.

Представленный метод определения ППП позволяет провести анализ по показателям коэффициента сохранения эффективности  $C(0, t)$  и среднего числа снижений эффективности  $N_{decl}(0, t)$  на заданном интервале. Отметим, что эти показатели являются основными надежностными показателями производственных комплексов. Так, именно они были включены в требования по эксплуатационной готовности технологического комплекса Штокмановского газоконденсатного месторождения (морское и наземное базирование). В случае “многоуровневого мостика”  $C(0, t)$  вычисляется по (4), (5), а  $N_{decl}(0, t)$  определяется, исходя из (3), где  $\omega^{\Omega_d}(t)$  есть параметр потока отказов при переходе из класса  $K_1$  в классы  $K_2, K_3, K_4$  и из классов  $K_2, K_3$  в класс  $K_4$ . Значения удельных доходов  $h_i$  за единицу времени пребывания в классах состояний  $K_i$  приведены в табл. 1. Величина единовременного дохода за переход была выбрана, исходя из предположения, что усредненные потери из-за снижения эффективности в 10 раз превосходят часовой доход при полной работоспособности, т.е.  $h_{ij} = -10$ . В табл. 3 приведены результаты расчета этих показателей. Расчеты показывают, что, несмотря на достаточно резкий рост во времени числа снижений эффективности, коэффициенты готовности и сохранения эффективности быстро достигают удовлетворительных стационарных значений за счет интенсивного восстановления и многоуровневости. На рис. 4 демонстрируется поведение  $N_{decl}(0, t)$  при разных значениях единовременных потерь.

Таблица 3. Результаты расчета показателей эксплуатационной готовности

Время, ч	168 (неделя)	720 (месяц)	8760 (год)
Коэффициент готовности	0,975344	0,971745	0,971738
Коэффициент сохранения эффективности	0,891883	0,848911	0,834657
Среднее число снижений эффективности	0,588877	2,6863	33,182402



## 5. Заключение

Логико-вероятностное моделирование немонотонными функциями алгебры логики является одним из наиболее эффективных аналитических аппаратов для исследования надежности и эффективности структурно-сложных многоуровневых систем. ЛВМ позволяют вычислять распределение готовностей классов состояний, характеризующихся различными уровнями эффективности функционирования. Недостатком логико-вероятностного подхода является невозможность вычисления интервальных показателей, чрезвычайно важных с практической точки зрения и обязательно включаемых в технические требования стадии проектирования. Предложенный в статье метод вычисления параметра потока переходов между классами состояний многоуровневой модели позволяет устранить этот недостаток и получать на интервале  $(0, t)$  оценки следующих показателей: вероятность безотказной работы, средняя наработка до отказа, среднее суммарное время пребывания системы в выделенных подмножествах состояний, среднее число переходов в выделенные подмножества состояний, среднее число снижений эффективности функционирования, усредненная на интервале готовность выделенных подмножеств состояний, усредненный на интервале интегральный доход, коэффициент сохранения эффективности. Рекурсивная процедура метода удобна для программной реализации [30] и позволяет работать с многоуровневыми системами большой размерности. Применение метода не ограничено предположением об экспоненциальности распределений для элементов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lisnianski A., Frenkel I., Ding Y.* Multi-state System Reliability Analysis and Optimization for Engineers and Industrial Managers. London: Springer, 2010.
2. *Natvig B.* Multistate Systems Reliability. Theory with Applications. N.Y.: Wiley, 2011.
3. *Викторова В.С., Степанянц А.С.* Анализ надежности и эффективности многоуровневых технических систем. М.: ЛЕНАНД, 2020.
4. *Волик Б.Г.* Анализ и обеспечение техногенной безопасности технических объектов // Датчики и системы. 2012. № 6. С. 57–63.
5. *Волик Б.Г., Буянов Б.Б., Лубков Н.В. и др.* Методы анализа и синтеза структур управляющих систем. М.: Энергоатомиздат, 1988.
6. *Reibman A.L., Smith R., Trivedi K.S.* Markov and Markov Reward Model Transient Analysis: An Overview of Numerical Approaches // Eur. J. Operat. Res. 1989. V. 40. P. 257–267.
7. *Викторова В.С., Лубков Н.В., Степанянц А.С.* A Unified Approach to Reliability, Availability, Performability Analysis Based on Markov Processes with Rewards // Advances in Systems Science and Applications. 2018. T. 18. № 4. С. 13–38. <https://ijassa.ipu.ru/index.php/ijassa/article/view/624/467>.
8. *Ушаков И.А.* Универсальная производящая функция // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1986. № 3. С. 37–49.
9. *Ushakov I.A.* The Method of Generating Sequences // Eur. J. Operat. Res. 2000. 125 (2). P. 316–323.
10. *Levitin G.* The Universal Generating Function in Reliability Analysis and Optimization. London: Springer, 2005.



11. *Lisnianski A.* Lz – transform for a Discrete-state Continuous-time Markov Process and its Applications to Multi-state System Reliability. / A. Lisnianski, I. Frenkel, Eds. Recent Advances in System Reliability. Signatures, Multi-state Systems and Statistical Inference. London: Springer, 2012. P. 79–96.
12. *Lisnianski A.* Application of Extended Universal Generating Function Technique to Dynamic Reliability Analysis of a Multi-state System // Second Int. Sympos. on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO). 2016. P. 1–10.
13. *Рябинин И.А., Черкесов Г.Н.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М.: Радио и связь. 1981.
14. *Можжаев А.С., Громов В.Н.* Теоретические основы общего логико-вероятностного метода автоматизированного моделирования систем. СПб.: ВИТУ, 2000.
15. *NUREG-0492.* Fault Tree Handbook. 1981.
16. *SAE ARP4761* Guidelines and Methods for Conducting the Safety Assessment Process on Civil Airborne Systems and Equipment. Dec., 1996.
17. *Schneeweiss W.G.* Computing Failure Frequency, MTBF & MTTR via Mixed Products of Availabilities and Unavailabilities // IEEE Trans. Reliab. 1981. V. 30. P. 362–363.
18. *Amari S.V.* Generic Rules to Evaluate System-Failure Frequency // IEEE Trans. Reliab. 2000. V. 49. P. 85–87.
19. *Amari S.V.* Addendum to: Generic Rules to Evaluate System-Failure Frequency // IEEE Trans. Reliab. 2002. V. 51. P. 378–379.
20. *Райншике К., Ушаков И.А.* Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988.
21. *Korczak E.* New Formula for the Failure/Repair Frequency of Multi-State Monotone Systems and its Applications // Control and Cybernetics. 2007. V. 36. No. 1.
22. *Степанянц А.С.* Вычисление параметра потока отказов в логико-вероятностных моделях методом рекурсивного наращивания переменных // АиТ. 2007. № 9. С. 161–175.  
*Stepanyants A.S.* Computing the Failure Flow Parameter in Logical-and-Probabilistic Models by the Variable Recursive Growing Method // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 9. P. 1618–1630.
23. *Викторова В.С., Свердлик Ю.М., Степанянц А.С.* Анализ надежности систем сложной структуры на многоуровневых моделях // АиТ. 2010. № 7. С. 143–148.  
*Viktorova V.S., Sverdlik U.M., Stepanyants A.S.* Analyzing Reliability for Systems with Complex Structure on Multilevel Models // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 7. P. 1410–1414.
24. *Kumamoto H., Henley E.J.* Probabilistic Risk Assessment and Management for Engineers and Scientists, 2nd Edition. April 2000. Wiley-IEEE Press.
25. *Wang D., Trivedi K.S.* Computing Steady-State MTTF for Non-Coherent Repairable Systems // IEEE Trans. Reliab. Sept. 2005. V. 54. P. 506–516.
26. *Stepanyants A., Victorova V.* Failure Frequency Calculation Technique in Logical-Probabilistic Models // Reliability & Risk Analysis: Theory & Applications / Electronic Journal of International Group on Reliability. 2009. V. 2. No. 4. ISSN 1932–2321. P. 8–23.
27. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2007.
28. *Gadani J.P., Misra K.B.* A Heuristic Algorithm for System Failure Frequency // IEEE Trans. Reliab. Oct. 1981. V. 30. P. 357–361.

29. *Heidtmann K.D.* Smaller Sums of Disjoint Products by Subproduct Inversion // IEEE Trans. Reliab. Aug. 1989. V. 38. P. 305–309.
30. *Викторова В.С., Лубков Н.В., Степаняц А.С.* Программа расчета показателей технической эффективности на многоуровневых моделях надежности газоперерабатывающего оборудования: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017660233 РФ; Зарег. 19.09.2017.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.*

Поступила в редакцию 03.09.2020

После доработки 09.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021