Автоматика и телемеханика, № 5, 2021

Управление в социально-экономических системах

© 2021 г. **Т.Ю. ПАШИНСКАЯ, канд. физ.-мат. наук (tatyana.obedko@mail.ru),**
В.В. ДОМБРОВСКИЙ, д-р техн. наук (dombrovs.ef@tsu.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ СО СКРЫТЫМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ И MS VAR МОДЕЛЬЮ ДОХОДНОСТЕЙ

Рассматривается задача управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке с переключением режимов с учетом ограничений на объемы вложений и займов. Предполагается, что доходности рисковых активов описываются векторной авторегрессионной моделью со скрытым переключением режимов (Markov Switching Vector Autoregression, MS VAR). Для оценки параметров используется EM-алгоритм. Представлены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, прогнозирующее управление, векторная авторегрессионная модель с переключением режимов, скрытая марковская цепь.

DOI: 10.31857/S0005231021050081

1. Введение

Задача управления инвестиционным портфелем (ИП) является одной из ключевых в финансовой инженерии. Финансовые временны́е ряды представляют собой нестационарные динамические стохастические системы с высокой волатильностью и скачкообразными изменениями. В связи с этим для описания динамики ИП широко используются модели с марковскими скачками.

Задаче управления ИП на финансовом рынке с марковским переключением режимов посвящены публикации [1–7], в которых предполагается, что цепь Маркова является наблюдаемой. Однако на практике при управлении реальным ИП состояние цепи, как правило, недоступно прямому наблюдению. В [8, 9] рассматривается задача управления ИП на скачкообразном рынке со скрытой сменой режимов цепи. В частности, публикация [8] посвящена задаче управления по критерию “mean-variance”. Оценки параметров модели скрытой цепи Маркова получены с использованием EM-алгоритма. Оптимизационная задача сводится к решению уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. В [9] рассматривается задача оптимизации ИП по критерию “mean-variance” с учетом квадратичных транзакционных издержек и ограничений. Для решения задачи используется метод управления с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control).

Известные результаты по управлению ИП на рынке с переключением режимов ограничиваются рассмотрением модели экономического броуновского движения со скачкообразно меняющимися параметрами, в основе которой лежит предложение о независимости и одинаковой распределенности доходностей рисковых активов. Однако на практике данное предположение, как правило, не выполняется.

В данной статье рассматривается динамическая задача управления ИП на финансовом рынке с переключением режимов с учетом явных ограничений на объемы вложений и займов. Предполагается, что доходности рисковых финансовых активов описываются векторной авторегрессионной моделью со скрытым переключением режимов (Markov Switching Vector Autoregression Model, MS VAR модель) [10, гл. 1, с. 10]. Задача управления ИП формулируется как динамическая задача слежения со скользящим горизонтом инвестирования за эталонным портфелем, имеющим заданную доходность [11]. Для оценки параметров MS VAR модели используется EM-алгоритм, предложенный в [10, гл. 6, с. 104]. Данная статья является обобщением результатов, полученных авторами в [7], где предполагается, что состояние цепи Маркова доступно прямому наблюдению. Представлены результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка.

2. Описание модели и постановка задач управления

Рассмотрим ИП, состоящий из n видов рисковых финансовых активов и одного безрискового финансового актива (банковский счет или надежные облигации). Управление портфелем осуществляется путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций посредством банковского счета. Капитал, помещенный в i-й рисковый актив в момент времени k, равен $u_i(k)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а в безрисковый – $u_0(k)$. Тогда общий объем вложений (капитал портфеля) в момент времени k равен:

$$V(k) = \sum_{i=1}^{n} u_i(k) + u_0(k). \tag{2.1}$$

Отметим, что если $u_i(k) < 0$ $(i = \overline{1, n})$, то это означает участие в операции “продажа без покрытия” на сумму $|u_i(k)|$. В начальный момент времени весь капитал помещен в безрисковый актив и заемные средства не используются: $u_i(0) = 0$ $(i = \overline{1, n})$, $u_0(0) = V(0)$.

Пусть $\eta_i(k+1)$ – ставка доходности i-го рискового актива за период времени $[k, k+1]$. Это случайная ненаблюдаемая в момент времени k величина, определяемая по формуле

$$\eta_i(k+1) = \left(Z_i(k+1) - Z_i(k)\right)/Z_i(k), \tag{2.2}$$

где $Z_i(k)$ – рыночная цена i-го рискового актива в момент времени k.

Отметим, что величина $u_i(k)$ $(i=\overline{1,n})$, полученная в момент времени k, означает для инвестора необходимость совершения сделки на покупку или на продажу актива i-го вида объемом $|u_i(k)-[1+\eta_i(k)]u_i(k-1)|$, где $\eta_i(k)$ – наблюдаемая в момент времени k величина.

В момент времени $k+1$ капитал ИП станет равен:

$$V(k+1)=\sum_{i=1}^{n}\left[1+\eta_i(k+1)\right]u_i(k)+\left[1+r(k+1)\right]u_0(k), \tag{2.3}$$

где $r(k+1)$ – доходность безрисковых вложений.

С учетом $u_0(k)=V(k)-\sum_{i=1}^{n}u_i(k)$, уравнение (2.3) преобразуем к виду

$$V(k+1)=\left[1+r(k+1)\right]V(k)+\sum_{i=1}^{n}\left[\eta_i(k+1)-r(k+1)\right]u_i(k). \tag{2.4}$$

Будем полагать, что вектор доходностей рисковых активов $\eta(k)= =[\eta_1(k),\ldots,\eta_n(k)]^{\mathrm{T}}$ описывается уравнением

$$\eta(k+1)=\mu\left[\theta(k+1)\right]+y(k+1), \tag{2.5}$$

где $\theta(k)=[\delta(\alpha(k),1),\ldots,\delta(\alpha(k),\nu)]^{\mathrm{T}}$, $\delta(\alpha(k),j)$ — функция Кронекера $(j=1,2,\ldots,\nu)$; $\alpha(k)$ — однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots,\nu\}$, матрицей переходных вероятностей

$$P=[P_{ij}]\ (i,j\in\{1,2,\ldots,\nu\}),\quad P_{ji}=P\{\alpha(k+1)=j\,|\,\alpha(k)=i\},\quad \sum_{j=1}^{\nu}P_{ji}=1,$$

и начальным распределением $p_i=P\{\alpha(0)=i\}$ $(i=\overline{1,\nu})$, $\sum_{i=1}^{\nu}p_i=1$; $\mu[\theta(k)]= =[\mu_1[\theta(k)],\ldots,\mu_n[\theta(k)]]^{\mathrm{T}}$ – вектор ожидаемых доходностей (средних значений) рисковых активов; вектор $y(k)\in\mathbb{R}^n$ описывается векторной авторегрессионной моделью порядка p без свободного члена, коэффициенты которой зависят от состояния цепи Маркова $\theta(k)$ (MS VAR, Markov Switching Vector Autoregression Model) [10, гл. 1, с. 13]:

$$\begin{aligned}y(k+1)=\gamma_1[\theta(k+1)]y(k)+\ldots+\gamma_p[\theta(k+1)]y(k-p+1)+\\+\Sigma[\theta(k+1)]w(k+1).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $w(k)\in\mathbb{R}^n$ – вектор белых шумов с нулевым средним и матрицей ковариации $E\left\{w(k)w^{\mathrm{T}}(k)\right\}=I_n$, I_n – единичная матрица размерности n.

Параметры уравнений (2.5), (2.6) принимают одно из возможных значений из заданного набора в зависимости от состояния цепи Маркова при $\alpha(k)=i$:

$$\mu_j[\theta(k)]=\mu_j^{(i)}\ (j=\overline{1,n}),\quad \Sigma\left[\theta(k)\right]=\Sigma^{(i)},\quad \gamma_j\left[\theta(k)\right]=\gamma_j^{(i)}\ (j=\overline{1,p}).$$

Цепь Маркова $\theta(k)$ определяет режим рынка: рынок в состоянии высокой или низкой волатильности и/или рынок в состоянии восходящего или нисходящего тренда.

Предполагается также, что доходность безрискового актива $r[\theta(k)]$ зависит от состояния цепи Маркова $\theta(k)$ и принимает одно из возможных значений $\left\{r^{(i)} \in \mathbb{R} : i = \overline{1,\nu}\right\}$.

Вектор $\theta(k)$ допускает представление в пространстве состояний [12, гл. 2, с. 17]:

$$\theta\,(k+1) = P\theta(k) + \upsilon(k+1), \tag{2.7}$$

где $\{\upsilon(k)\}$ – последовательность мартингал-разностей.

Процесс, описываемый MS VAR моделью порядка p, может быть представлен в виде процесса первого порядка MS VAR (1):

$$\begin{gathered} Y(k+1) = \gamma[\theta(k+1)]Y(k) + \sigma[\theta(k+1)]W(k+1), \\ Y(k) = \left[y^{\mathrm{T}}(k), y^{\mathrm{T}}(k-1), \ldots, y^{\mathrm{T}}(k+p-1)\right]^{\mathrm{T}}{}_{np\times 1}, \\ W(k) = \left[w^{\mathrm{T}}(k), 0_{1\times n}, 0_{1\times n}, \ldots, 0_{1\times n}\right]^{\mathrm{T}}{}_{np\times 1}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\sigma[\theta(k)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k)\sigma^{(i)}, \quad \sigma^{(i)} = \operatorname{diag}\left\{\Sigma^{(i)}, 0, \ldots, 0\right\}_{np\times np}, \tag{2.9}$$

$$\gamma[\theta(k)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k)\gamma^{(i)}, \quad \gamma^{(i)} = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(i)} & \gamma_2^{(i)} & \ldots & \gamma_{p-1}^{(i)} & \gamma_p^{(i)} \\ I_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{np\times np}, \tag{2.10}$$

$\theta_i(k)$ $(i = \overline{1,\nu})$ – компоненты вектора $\theta(k)$.

С учетом (2.5) и (2.8) уравнение (2.4) примет вид

$$V(k+1) = A[\theta(k+1)]V(k) + B[Y(k+1)]u(k) + D[\theta(k+1)]u(k), \tag{2.11}$$

где $u(k) = [u_1(k), \ldots, u_n(k)]^{\mathrm{T}}$,

$$A[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k+1)A^{(i)}, \quad A^{(i)} = 1 + r^{(i)}, \tag{2.12}$$

$$D[\theta(k+1)] = \sum_{i=1}^{\nu} \theta_i(k+1)D^{(i)}, \quad D^{(i)} = \left[\begin{array}{ccc} \mu_1^{(i)} - r^{(i)} & \ldots & \mu_n^{(i)} - r^{(i)} \end{array}\right], \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered} B\left[Y(k+1)\right] = \left[\begin{array}{cccc} y_1(k+1) & y_2(k+1) & \ldots & y_n(k+1) \end{array}\right] = \\ = Y^{\mathrm{T}}(k+1)L^{\mathrm{T}}, \quad L = \left[I_n, 0_{n\times n(p-1)}\right]. \end{gathered} \tag{2.14}$$

При управлении портфелем учитываются ограничения:

$$u_i{}^{\min}(k) \le u_i(k) \le u_i{}^{\max}(k) \;\; (i = \overline{1,n}), \tag{2.15}$$

$$u_0{}^{\min}(k) \le V(k) - \sum_{i=1}^{n} u_i(k) \le u_0{}^{\max}(k). \tag{2.16}$$

Если ${u_i}^{\min}(k) < 0$ $(i = \overline{1,n})$, то для рискового актива i-го вида допустимо участие в операции "продажа без покрытия" на сумму не более $|u_i^{\min}(k)|$; если $u_i^{\min}(k) \geq 0$, то операции "продажа без покрытия" для рискового актива i-го вида запрещены; $u_0^{\max}(k) \geq 0$ определяет максимальный размер капитала, который можно вкладывать в безрисковый актив, $u_i^{\max}(k) \geq 0$ $(i = \overline{1,n})$ определяют максимальный объем капитала, который можно вкладывать в рисковый актив i-го вида; $u_0^{\min}(k) \leq 0$, величина $\left|u_0^{\min}(k)\right|$ определяет максимальный размер займа безрискового актива. Отметим, что величины $u_i^{\min}(k)$ $(i = \overline{1,n})$, $u_i^{\max}(k)$ $(i = \overline{0,n})$ на практике часто зависят от капитала ИП, что можно учесть, положив $u_i^{\min}(k) = \gamma_i' V(k)$, $u_i^{\max}(k) = \gamma_i'' V(k)$, где γ_i', γ_i'' – постоянные коэффициенты.

Представим ограничения (2.15)–(2.16) в матричном виде

$$u_{\min}(k) \leq S(k)u(k) \leq u_{\max}(k), \tag{2.17}$$

где

$$u^{\min}(k) = \left[u_1^{\min}(k), \ldots, u_n^{\min}(k), u_0^{\min}(k) - V(k)\right]^{\mathrm{T}},$$
$$u^{\max}(k) = [u_1^{\max}(k), \ldots, u_n^{\max}(k), u_0^{\max}(k) - V(k)]^{\mathrm{T}},$$
$$S(k) = \left[\begin{array}{cc} I_n & -1_n \end{array}\right],$$
$$-1_n = [-1, \ldots, -1],$$

I_n – единичная матрица размерности n.

Будем определять стратегию управления ИП путем перераспределения капитала между различными видами инвестиций так, чтобы капитал реального портфеля с минимально возможными отклонениями (с минимально возможным риском) следовал капиталу заданного инвестором эталонного портфеля с желаемой доходностью μ_0, эволюция которого описывается уравнением

$$V^0(k+1) = [1 + \mu_0]V^0(k), \quad V^0(0) = V(0). \tag{2.18}$$

Для управления ИП используем стратегии управления с прогнозирующей моделью. На каждом шаге k будем минимизировать квадратичный критерий со скользящим горизонтом управления:

$$\begin{aligned} J(k+m\,|\,k) = \sum_{i=1}^{m} E\Big\{&\rho_1(k+i)\left[V(k+i\,|\,k) - V^0(k+i)\right]^2 - \\ &- \rho_2(k+i)\left[V(k+i\,|\,k) - V^0(k+i)\right] + \\ &+ u^{\mathrm{T}}(k+i-1\,|\,k)R(k+i-1)u(k+i-1\,|\,k)\,\Big|\, V(k), Y(k), \theta(k)\Big\}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где m – горизонт прогноза; k – текущий момент времени; $V(k+i\,|\,k)$ – прогнозное значение капитала ИП согласно уравнению динамики (2.11), $u(k+i) = [u_1(k+i), \ldots, u_n(k+i)]^{\mathrm{T}}$ – вектор прогнозирующих управлений; $\rho_1(k+i) \geq 0$, $\rho_2(k+i) \geq 0$ – весовые коэффициенты (скалярные величины); $R(k+i) > 0$ – положительно определенная симметричная матрица размерности n.

Критерий (2.19) представляет собой линейную комбинацию квадратичной части, минимизирующей среднеквадратическое отклонение капитала реального портфеля от эталонной траектории, и линейной части, которая штрафует прогнозные значения капитала ИП, меньшие желаемого значения. Третье слагаемое неявно накладывает "штраф" за большие объемы вложений в рисковые активы, а также гарантирует существование решения задачи оптимизации (см. замечание к теореме).

Критерий (2.19) может быть записан в эквивалентном виде:

$$
\begin{aligned}
(2.20) \qquad J(k+m\,|\,k) = \sum_{i=1}^{m} E\Big\{ & R_1(k+i)V^2(k+i\,|\,k) - \\
& - R_2(k+i)V(k+i\,|\,k) + \\
& + u^{\mathrm{T}}(k+i-1\,|\,k)R(k+i-1)u(k+i-1\,|\,k) \,\Big|\, V(k), Y(k), \theta(k)\Big\},
\end{aligned}
$$

где

$$R_1(k+i) = \rho_1(k+i), \quad R_2(k+i) = 2V^0(k+i)\rho_1(k+i) + \rho_2(k+i).$$

Таким образом, имеем задачу управления ИП, динамика которого описывается уравнением (2.11), по критерию (2.20) при ограничениях (2.17).

3. Алгоритм оценки скрытой цепи Маркова

На практике состояние цепи $\alpha(k)$ (или $\theta(k)$) является скрытым. Наблюдению доступен вектор доходностей $\eta(k)$. Будем полагать, что доходности безрисковых активов $r^{(i)}$ и ожидаемые доходности рисковых активов $\mu_j^{(i)}$ известны (оцениваются отдельно). Для оценки состояния скрытой цепи Маркова и параметров MS VAR(p) модели вида (2.6) будем использовать EM-алгоритм [10, гл. 6, с. 104]. Альтернативным подходом к оценке MS VAR моделей является метод "сэмплирования" Гиббса [10, гл. 8, с. 148]. Преимуществом метода является его робастность по отношению к форме графика функции максимума правдоподобия. Однако он требует значительных вычислительных затрат. В [13] предложен адаптивный EM-алгоритм (рекурсивная оценка максимального правдоподобия). Недостатком подхода является высокая чувствительность к адаптивной матрице, вычисление которой становится трудоемким для моделей с большим количеством параметров. В частности, в [13] результаты ограничиваются моделью с восемью параметрами.

Предположим, что в модели (2.6) случайная составляющая $w(k)$ подчиняется стандартному нормальному распределению. Неизвестными параметрами являются $\Big\{\beta^{(i)} = vec(\gamma_1^{(i)}, \ldots, \gamma_p^{(i)}), \Sigma^{(i)}, i = \overline{1,\nu}; \rho = vec(P), \theta(0)\Big\}$, $vec(\cdot)$ означает операцию векторизации матрицы. Обозначим через λ вектор, содержащий все неизвестные параметры модели. Обозначим через $Y_t = \big\{y^{\mathrm{T}}(t), y^{\mathrm{T}}(t-1), \ldots, y^{\mathrm{T}}(1), y^{\mathrm{T}}(0), \ldots, y^{\mathrm{T}}(1-p)\big\}^{\mathrm{T}}$ переменные, наблюдаемые до момента времени t включительно, $Y \equiv Y_T$ – вся выборка наблюдений, доступная на момент времени k, размера T. Обозначим через η_t вектор условных плотностей процесса $y(t)$:

$$\eta_t = f(y(t)\,|\,\theta(t), Y_{t-1}) = \tag{3.1}$$

$$= \left[f\left(y(t)\,|\,\theta(t)=e_1, Y_{t-1}\right), \ldots, f\left(y(t)\,|\,\theta(t)=e_\nu, Y_{t-1}\right)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$f\left(y(t)\,|\,\theta(t)=e_i, Y_{t-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\Sigma^{(i)}\right|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y(t)-\overline{y}^{(i)}(t)\right)^{\mathrm{T}}\left(\Sigma^{(i)}\right)^{-1}\left(y(t)-\overline{y}^{(i)}(t)\right)\right\},$$

$$\overline{y}^{(i)}(t) = \gamma_1^{(i)} y(t-1) + \gamma_2^{(i)} y(t-2) + \ldots + \gamma_p^{(i)} y(t-p), \quad i=\overline{1,\nu}.$$

Пошагово EM-*алгоритм* имеет вид:

1. Инициализация. Задаются начальные значения параметров модели:

$$\left\{\beta^{(i)}, \Sigma^{(i)}, i=\overline{1,\nu}; \rho, \theta(0)=\xi_{1|0}\right\}.$$

2. E-шаг. Определяются отфильтрованные вероятности $\xi_{t|t} = [\xi_{1,t\ t}, \ldots$ $\ldots, \xi_{\nu,t|t}]^{\mathrm{T}}$ по формуле (прямая рекурсия):

$$\xi_{t|t} = \frac{\eta_t \odot \xi_{t|t-1}}{1_\nu^{\mathrm{T}}\left(\eta_t \odot \xi_{t|t-1}\right)} = \frac{\eta_t \odot P\xi_{t-1|t-1}}{1_\nu^{\mathrm{T}}\left(\eta_t \odot P\xi_{t-1|t-1}\right)}, \quad t=\overline{1,T}, \quad 1_\nu = [1,\ldots,1]^{\mathrm{T}}.$$

Определяются сглаженные вероятности по формуле (обратная рекурсия):

$$\xi_{T-j|T} = \left[P^{\mathrm{T}}\left(\xi_{T-j+1|T} \oslash \xi_{T-j+1|T-j}\right)\right] \odot \xi_{T-j|T-j}, j=\overline{1,T-1},$$

где $\xi_{T-j+1|T-j} = P\xi_{T-j|T-j}$. Рекурсия начинается с отфильтрованной вероятности $\xi_{T|T}$. Символы $\odot$, $\oslash$ означают поэлементное матричное умножение и деление соответственно.

3. M-шаг. Оценки коэффициентов уравнения авторегрессии равны:

$$\left.\begin{aligned} \beta^{(i)} &= \left((X^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)} \otimes I_n\right)y, \\ \Sigma^{(i)} &= \left(T^{(i)}\right)^{-1}\left(U^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)}U^{(i)}, \end{aligned}\right. \qquad i=\overline{1,\nu}, \tag{3.2}$$

$$\left(\Upsilon^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} = \left(X^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\Xi^{(i)}Y, \quad \Xi^{(i)} = \mathrm{diag}\left\{\left(\xi_{i,1|T},\ldots,\xi_{i,T|T}\right)\right\},$$

$$T^{(i)} = \sum_{t=1}^{T}\xi_{i,t|T}, \quad \left(U^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} = Y - X\left(\Upsilon^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{T\times n},$$

$$X = [Y_{-1},\ldots,Y_{-p}] \in \mathbb{R}^{T\times np}, \quad Y_{-i} = [y(1-j),\ldots,y(T-j)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{T\times n},$$

$$y = \left[y^{\mathrm{T}}(1),\ldots,y^{\mathrm{T}}(T)\right] \in \mathbb{R}^{Tn\times 1}.$$

Вероятности перехода равны

$$\rho = \xi^{(2)} \oslash \left(1_\nu \otimes \xi^{(1)}\right), \tag{3.3}$$

$$\xi^{(2)} = \sum_{t=1}^{T} \xi^{(2)}_{t|T}, \quad \xi^{(2)}_{t|T} = vec(P) \odot \left[\left(\xi_{t+1|T}\right) \oslash \left(\xi_{t+1|k}\right) \otimes \left(\xi_{t|t}\right)\right],$$

$$\xi^{(1)} = \left(1_\nu^{\mathrm{T}} \otimes I_\nu\right) \xi^{(2)}$$

символ $\otimes$ означает прямое произведение матриц.

Оценка начального распределения состояния цепи Маркова равна $\xi_0 = \xi_{1|T}$.

4. Шаги 2–3 повторяются до момента выполнения условий сходимости [10, гл. 6, с. 111].

4. Синтез адаптивных стратегий управления ИП

Решение задачи управления ИП с динамикой (2.11) по критерию (2.20) при ограничениях (2.17) в условиях скрытой цепи Маркова дается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть капитал ИП описывается уравнением* (2.11) *при ограничениях* (2.17). *Состояние скрытой цепи Маркова и оценки параметров MS VAR модели* (2.6) *производятся EM-алгоритмом. Тогда стратегия прогнозирующего управления* $u(k+i\,|\,k)$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ *со скользящим горизонтом* m, *минимизирующая критерий* (2.20), *на каждом шаге* k *определяется уравнением*

$$u(k) = \left[\ I_n \quad 0_n \quad \ldots \quad 0_n\ \right] U(k),$$

где I_n *– единичная матрица размерности* n, 0_n *– нулевая матрица размерности* n; $U(k) = [u^{\mathrm{T}}(k\,|\,k), \ldots, u^{\mathrm{T}}(k+m-1\,|\,k)]^{\mathrm{T}}$ *– последовательность прогнозирующих управлений, которая определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием*

$$\overline{J}(k+m\,|\,k) = [2V(k)G(k) - F(k)]\,U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k) \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$U_{\min}(k) \le \overline{S}(k)U(k) \le U_{\max}(k), \quad \overline{S}(k) = \mathrm{diag}\,\{S(k), 0 \ldots, 0\}, \tag{4.2}$$

где

$$U_{\min}(k) = \left[u^{\mathrm{T}}_{\min}(k), \ldots, u^{\mathrm{T}}_{\min}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}},$$
$$U_{\max}(k) = \left[u^{\mathrm{T}}_{\max}(k), \ldots, u^{\mathrm{T}}_{\max}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}};$$

$H(k) = \{H_{tf}(k)\}$, $G(t) = \{G_t(k)\}$, $F(t) = \{F_t(k)\}$ $(t, f = \overline{1,m})$ – *блочные матрицы, блоки которых удовлетворяют уравнениям*

$$H_{tt}(k) = R(k+t-1) + \sum_{i_t=1}^{\nu} \left(D^{(i_t)}\right)^{\mathrm{T}} Q^{(i_t)}(k) D^{(i_t)} + \tag{4.3}$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{\nu} \dots \sum_{i_t=1}^{\nu} \Big(B\left[\gamma^{(i_t)} \dots \gamma^{(i_1)} Y(k)\right] + 2D^{(i_t)}\Big)^{\mathrm{T}} Q^{(i_1,\dots,i_t)}(k) B\left[\gamma^{(i_t)} \dots \gamma^{(i_1)} Y(k)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{t} \sum_{i_j=1}^{\nu} \dots \sum_{i_t=1}^{\nu} L^{\mathrm{T}} \left[\gamma^{(i_t)} \dots \gamma^{(i_{j+1})} \sigma^{(i_j)}\right] Q^{(i_j,\dots,i_t)}(k) \left[\gamma^{(i_t)} \dots \gamma^{(i_{j+1})} \sigma^{(i_j)}\right]^{\mathrm{T}} L,$$

$$H_{tf}(k) = \sum_{i_t=1}^{\nu} \dots \sum_{i_f=1}^{\nu} \left(D^{(i_t)}\right)^{\mathrm{T}} A^{(i_{t+1})} \dots A^{(i_f)} Q^{(i_t,\dots,i_f)}(k) D^{(i_f)} + \tag{4.4}$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{\nu} \dots \sum_{i_f=1}^{\nu} \left(D^{(i_t)}\right)^{\mathrm{T}} A^{(i_{t+1})} \dots A^{(i_f)} Q^{(i_1,\dots,i_f)}(k) B\left[\gamma^{(i_f)} \dots \gamma^{(i_1)} Y(k)\right] +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{\nu} \dots \sum_{i_f=1}^{\nu} B^{\mathrm{T}} \left[\gamma^{(i_t)} \dots \gamma^{(i_1)} Y(k)\right] A^{(i_{t+1})} \dots A^{(i_f)} Q^{(i_1,\dots,i_f)}(k) \Big(D^{(i_f)} +$$

$$+ B\left[\gamma^{(i_f)} \dots \gamma^{(i_1)} Y(k)\right]\Big) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{t} \sum_{i_j=1}^{\nu} \dots \sum_{i_f=1}^{\nu} L^{\mathrm{T}} \left[\gamma^{(i_t)} \dots \gamma^{(i_{j+1})} \sigma^{(i_j)}\right] A^{(i_{t+1})} \dots$$

$$\dots A^{(i_f)} Q^{(i_j,\dots,i_f)}(k) \left[\gamma^{(i_f)} \dots \gamma^{(i_{j+1})} \sigma^{(i_j)}\right]^{\mathrm{T}} L, t, f = \overline{1,m}, f > t,$$

$$H_{tf}(k) = \left(H_{ft}(k)\right)^{\mathrm{T}}, \quad f < t, \tag{4.5}$$

$$G_t(k) = \sum_{i_1=1}^{\nu} \dots \sum_{i_t=1}^{\nu} A^{(i_1)} \dots A^{(i_t)} Q^{(i_1,\dots,i_t)}(k) \Big(D^{(i_t)} + \tag{4.6}$$

$$+ B\left[\gamma^{(i_t)} \dots \gamma^{(i_1)} Y(k)\right]\Big),$$

$$F_t(k) = \sum_{i_t=1}^{\nu} Q_2^{(i_t)}(k) D^{(i_t)} + \tag{4.7}$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{\nu} \dots \sum_{i_t=1}^{\nu} Q_2^{(i_1,\dots,i_t)}(k) B\left[\gamma^{(i_t)} \dots \gamma^{(i_1)} Y(k)\right], \quad t = \overline{1,m}.$$

Матрицы $Q^{(i_t)}(k), Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k),\ Q_2^{(i_t)}(k), Q_2^{(i_t,\dots,i_s)}(k)$ *определяются уравнениями*

$$Q^{(i_t)}(k) = e_{i_t} P^t \theta(k) R_1(k+t) + \sum_{i_{t+1}=1}^{\nu} \left(A^{(i_{t+1})}\right)^2 Q^{(i_t,i_{t+1})}(k), \quad t = \overline{1, m-1}, \tag{4.8}$$

$$Q^{(i_t,\dots,i_s)}(k) = \Theta^{(i_t,\dots,i_s)}(k) R_1(k+s) + \sum_{i_{s+1}=1}^{\nu} \left(A^{(i_{s+1})}\right)^2 Q^{(i_t,\dots,i_{s+1})}(k), \quad t = \overline{1, m-2}, s > t, \tag{4.9}$$

$$Q_2^{(i_t)}(k) = e_{i_t} P^t \theta(k) R_2(k+t) + \sum_{i_{t+1}=1}^{\nu} Q_2^{(i_t,i_{t+1})}(k) A^{(i_{t+1})}, \quad t = \overline{1, m-1}, \tag{4.10}$$

$$Q_2^{(i_t,\dots,i_s)}(k) = \Theta^{(i_t,\dots,i_s)}(k) R_2(k+s) + \sum_{i_{s+1}=1}^{\nu} Q_2^{(i_t,\dots,i_{s+1})}(k) A^{(i_{s+1})}, \quad t = \overline{1, m-2}, \quad t < s < m, \tag{4.11}$$

с граничными условиями

$$Q^{(i_m)}(k) = e_{i_m} P^m \theta(k) R_1(k+m), Q^{(i_t,\dots,i_m)}(k) = = \Theta^{(i_t,\dots,i_m)}(k) R_1(k+m), \quad t = \overline{1, m-1}, \tag{4.12}$$

$$Q_2^{(i_m)}(k) = e_{i_m} P^m \theta(k) R_2(k+m), Q_2^{(i_t,\dots,i_m)}(k) = = \Theta^{(i_t,\dots,i_m)}(k) R_2(k+m), \quad t = \overline{1, m-1}, \tag{4.13}$$

где $e_{i_t} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]_{1\times\nu}$ $(i_t = \overline{1,\nu},\ t = \overline{1,m})$,

$$\Theta^{(i_t,\dots,i_s)}(k) = P_{i_s,i_{s-1}} P_{i_{s-1},i_{s-2}} \dots P_{i_{t+1},i_t} \theta_{i_t}(k+t\,|\,k), \quad t = \overline{1, m-1}, s > t, \tag{4.14}$$

$\theta_{i_t}(k+t\,|\,k)$ — *компонента вектора прогноза состояния цепи Маркова* $\theta(k+t\,|\,k) = P^t\theta(k)$, $\theta(k) = \theta_{T\,|\,T}(k)$ – *отфильтрованные вероятности, определяемые уравнениями*

$$\theta_{t|t} = \frac{\eta_t \odot P\theta_{t-1|t-1}}{1_\nu^{\mathrm{T}}\left(\eta_t \odot P\theta_{t-1|t-1}\right)}, \quad t = \overline{1,T};$$

$$\theta_{T-j|T} = \left[P^{\mathrm{T}}\left(\theta_{T-j+1|T} \oslash \theta_{T-j+1|T-j}\right)\right] \odot \theta_{T-j|T-j}, \quad j = \overline{1, T-1},$$

где $\theta_{T-j+1|T-j} = P\theta_{T-j|T-j}$, η_t *определяется выражением* (3.1) *при* $t = k$, *оценки* $\gamma^{(i_t)}$, $\sigma^{(i_j)}$, P *определяются выражениями* (3.2)–(3.3).

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

З а м е ч а н и е. Условие $R(k+i)>0$ гарантирует, что критерий (4.1) является выпуклым, так как данный критерий получен посредством выпуклого преобразования критерия (2.20). Следовательно, решение задачи квадратичного программирования с критерием (4.1) существует и единственное, если ограничения (4.2) совместны.

5. Численное моделирование

Приведем результаты численного моделирования с использованием реальных данных российского фондового рынка. Предложен адаптивный, реализуемый на практике алгоритм оценки параметров скрытой цепи.

Рассматривался ИП, состоящий из банковского счета и обыкновенных акций: ПАО "Сбербанк России" (SBER), ПАО "Газпром" (GAZP), ПАО "ГМК "Норильский никель" (GMKN), ПАО "ЛУКОЙЛ" (LKOH), ПАО "НК "Роснефть" (ROSN). Период инвестирования: 02.08.2010 г.–23.08.2019 г. ($T = 2282$ торговых дня). Моделирование производилось по ценам закрытия; данные взяты с www.finam.ru. Предполагалось, что в модели ИП (2.11) скрытая цепь Маркова может находиться в двух состояниях ($\nu=2$). Вектор $y(k)$ описывается MS VAR моделью порядка $p=1$ вида (2.6). Проводились численные эксперименты с порядками авторегрессий от единицы до пяти, однако результаты не показали улучшения качества слежения для высоких порядков.

Из-за значительного количества оцениваемых параметров на основе EM-алгоритма была реализована упрощенная адаптивная процедура оценки. Параметры уравнений авторегрессии и матрица переходных вероятностей оценивались по выборке объемом $N=600$ наблюдений, предшествующих периоду инвестирования, и предполагались фиксированными на весь горизонт инвестирования T. На каждом шаге $k=1,\dots,T$ для оценки состояния скрытой цепи переоценивались только отфильтрованные и сглаженные вероятности по выборке объемом N наблюдений, предшествующих моменту времени k. Количество итераций EM-алгоритма не превышало 200. Матрица переходных вероятностей на начальном шаге (при $k=1$) задавалась произвольно. В качестве начальных значений вероятностей состояний $\xi_{1\,|\,T}$ использовались эргодические вероятности: $p_1 = P_{12}/(P_{12}+P_{21})$, $p_2 = 1-p_1$. При $k=2,3,\dots$ для инициализации алгоритма использовались оценки вероятностей состояний, полученные на шаге $k-1$.

Векторы ожидаемых доходностей рисковых активов в каждом состоянии цепи $\{\mu^{(1)},\mu^{(2)}\}$ на каждом k-м шаге оценивались адаптивно методом простой скользящей средней с периодом $l[\theta(k)]$, зависящим от состояния цепи, по формуле:

$$\hat{\mu}[\theta(k)] = \frac{1}{l[\theta(k)]}\sum_{i=1}^{l[\theta(k)]}\eta(k-i+1), \quad l[\theta(k)]\in\{l^{(1)},l^{(2)}\}, \quad l^{(1)}>l^{(2)}. \tag{5.1}$$

Предполагалось, что в состоянии низкой волатильности на рынке наблюдается долгосрочный тренд, поэтому применялась скользящая средняя с более длинным периодом: $l^{(1)}=24$, $l^{(2)}=9$. Доходность безрискового актива $r[\theta(k)]$ полагалась равной $r^{(1)}=0{,}00001$, $r^{(2)}=0{,}00005$. Капитал реального ИП вычислялся по формуле (2.4), где $\eta_i(k+1)$ $(i=\overline{1,n})$, $r(k+1)$ –

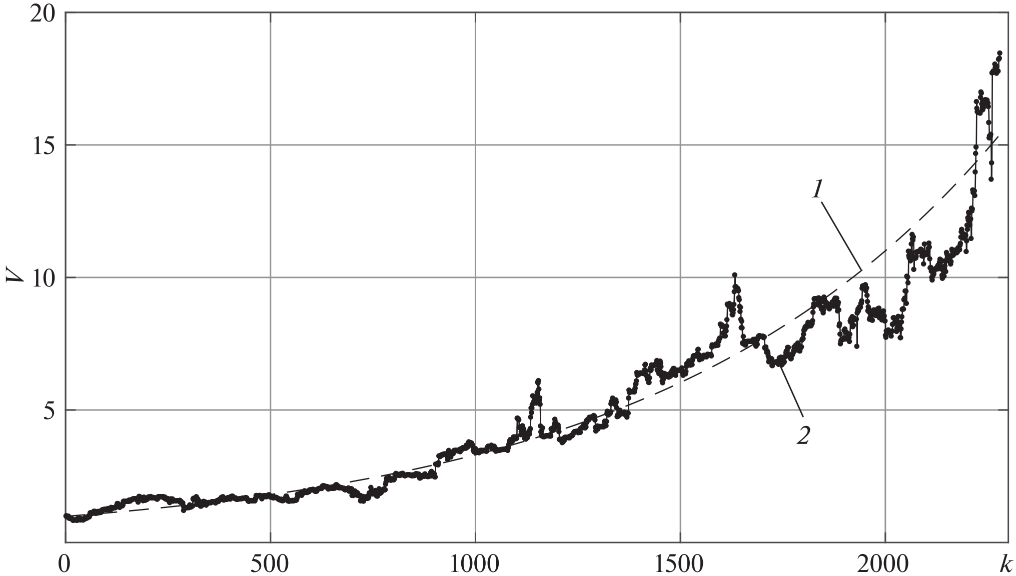

Рис. 1. Динамика капиталов эталонного ИП (линия *1*) и управляемого ИП (линия *2*).

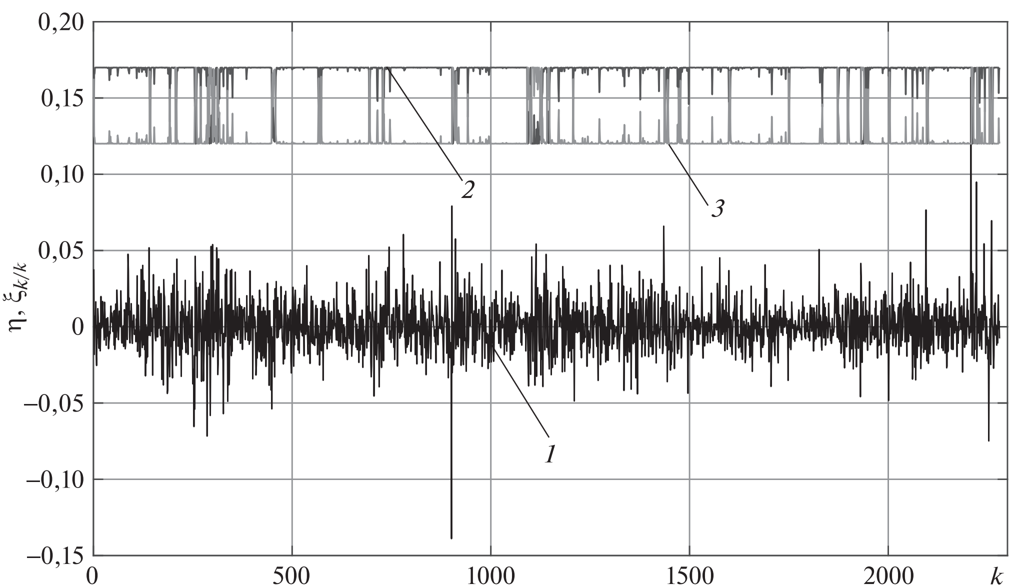

Рис. 2. Динамика доходности акции GAZP (линия *1*) и сглаженные вероятности (линия *2* – состояние 1, линия *3* – состояние 2).

реальные доходности активов. Доходность эталонного ИП $\mu_0 = 0{,}0012$ (0,12 % в день). Весовые коэффициенты $R(k+i) = \mathrm{diag}\{10^{-4}, \ldots, 10^{-4}\}$, $\rho_1(k+i) = 1$, $\rho_2(k+i) = 0{,}3$ для всех k, i. Горизонт прогноза $m = 10$. При управлении ИП учитывались ограничения в виде (2.15)–(2.16) с параметрами: $\gamma_i' = 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$, $\gamma i = 3$ $(i = 0, \ldots, 5)$. Задача квадратичного программирования решалась численно с использованием функции quadprog.m в MATLAB.

На рис. 1 показана динамика капиталов эталонного портфеля $V^0(k)$ и управляемого портфеля $V(k)$. Рисунок 2 иллюстрирует динамику доходностей акции GAZP и оценки вероятностей состояний рыночного режима. Из рис. 1 видно, что траектория капитала реального портфеля следует капиталу эталонного портфеля.

6. Заключение

В статье решена задача управления ИП с прогнозирующей моделью на финансовом рынке со скрытым переключением режимов и MS VAR моделью доходностей с учетом ограничений на объемы вложений и займов. Для оценки параметров скрытой цепи использовался EM-алгоритм. Проведено численное моделирование стратегии управления на реальных данных с использованием адаптивной процедуры оценки параметров скрытой цепи. Результаты демонстрируют эффективность предложенной стратегии управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Алгоритм доказательства основан на результатах, полученных в [7]. Используя сглаживающее свойство условного математического ожидания, критерий (2.20) может быть представлен в виде

$$\begin{gathered}
J(k+m\,|\,k) = E\Big\{V^2(k+1\,|\,k)R_1(k+1) - R_2(k+1)V(k+1\,|\,k) + \\
+ u^{\mathrm{T}}(k\,|\,k)R(k+1)u(k\,|\,k) + \\
+ E\Big\{V^2(k+2\,|\,k)R_1(k+2) - R_2(k+2)V(k+2\,|\,k) + \\
+ u^{\mathrm{T}}(k+1\,|\,k)R(k+2)u(k+1\,|\,k) + \\
+ \ldots + E\Big\{V^2(k+m\,|\,k)R_1(k+m) - R_2(k+m)V(k+m\,|\,k) + \\
+ u^{\mathrm{T}}(k+m-1\,|\,k)R(k+m)u(k+m-1\,|\,k)\,|\,V(k+m-1), \theta(k+m-1)\Big\} \ldots \\
\ldots\,|\,V(k+1), \theta(k+1)\Big\} \ldots\,|\,V(k), \theta(k)\Big\}.
\end{gathered} \tag{П.1}$$

Используя (2.8)–(2.10), (2.11)–(2.14) и (2.7), получим:

$$\begin{gathered}
V(k+m-t\,|\,k) = \\
= \sum_{i_{m-t}=1}^{\nu} e_{i_{m-t}}[P\theta(k+m-t-1) + \upsilon(k+m-t)]\Big[A^{(i_{m-t})}V(k+m-t-1\,|\,k) + \\
+\Big(B\Big[\gamma^{(i_{m-t})}Y(k+m-t-1) + \sigma^{(i_{m-t})}W(k+m-t)\Big] + \\
+ D^{(i_{m-t})}\Big)u(k+m-t-1\,|\,k)\Big], \quad t = \overline{0, m-1}.
\end{gathered} \tag{П.2}$$

Последовательное вычисление математических ожиданий в (П.1) с учетом (П.2) и с заменой параметров их оценками (3.1)–(3.3) приводит к выражению

$$
\begin{aligned}
J(k+m\,|\,k) &= V^2(k)\sum_{i_1=1}^{\nu}\left(A^{(i_1)}\right)^2 Q^{(i_1)}(k) - \sum_{i_1=1}^{\nu} Q_2^{(i_1)}(k)A^{(i_1)}V(k) + \\
&+ [2V(k)G(k) - F(k)]U(k) + U^{\mathrm{T}}(k)H(k)U(k),
\end{aligned} \tag{П.3}
$$

матрицы $G(k)$, $F(k)$, $H(k)$ имеют вид (4.3)–(4.7), матрицы $Q^{(i_t)}(k)$, $Q^{(i_t,\ldots,i_s)}(k)$, $Q_2^{(i_1)}(k)$, $Q_2^{(i_s,\ldots,i_s)}(k)$ имеют вид (4.8)–(4.13). Очевидно, что задача минимизации критерия (П.3) при ограничениях (2.17) эквивалентна задаче минимизации критерия (4.1), где удалены слагаемые, не зависящие от управлений, при ограничениях (4.2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Costa O.L.V., Araujo M.V.* A Generalized Multi-Period Portfolio Optimization with Markov Switching Parameters // Automatica. 2008. V. 44. No. 10. P. 2487–2497. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.02.014.
2. *Bäuerle N., Rieder U.* Portfolio Optimization with Markov-Modulated Stock Prices and Interest Rates // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 3. P. 442–447. https://doi.org/10.1109/TAC.2004.824471.
3. *Sotomayor L.R., Cadenillas A.* Explicit Solutions of Consumption-Investment Problems in Financial Markets with Regime Switching // Math. Finance. 2009. V. 19. No. 2. P. 251–279. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2009.00366.x.
4. *Wu H.* Mean-Variance Portfolio Selection with a Stochastic Cash Flow in a Markov-switching Jump-Diffusion Market // J. Optim. Theory Appl. 2013. V. 158. P. 918–934. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0292-x.
5. *Levy M., Kaplanski G.* Portfolio Selection in Two–regime World // Eur. J. Oper. Res. 2015. V. 241. P. 514–524. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.10.012.
6. *Dombrovskii V.V., Obyedko T.Yu., Samorodova M.* Model Predictive Control of Constrained Markovian Jump Nonlinear Stochastic Systems and Portfolio Optimization under Market Frictions // Automatica. 2018. V. 87. No. 1. P. 61–68. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.09.018.
7. *Dombrovskii V., Pashinskaya T.* Model Predictive Control Design for Constrained Markov Jump Bilinear Stochastic Systems with an Application in Finance // Int. J. Syst. Sci. 2020. V. 51. No. 16. P. 3269–3284.

   https://doi.org/10.1080/00207721.2020.1814892.
8. *Ishijima H., Uchida M.* Log Mean-Variance Portfolio Selection Under Regime Switching // Asia-Pacific Financial Markets. 2011. V. 18. No. 2. P. 213–229.

   https://doi.org/10.1007/s10690-010-9132-2.
9. *Nystrup P., Boyd S., Lindström E., Madsen H.* Multi-Period Portfolio Selection with Drawdown Control // Ann. Oper. Res. 2018. P. 1–27.

   https://doi.org/10.1007/s10479-018-2947-3.
10. *Krolzig H.-M.* Markov Switching Vector Autoregressions. Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis. Berlin: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-3-642-51684-9.

11. *Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A.* Investment Portfolio Optimization with Transaction Costs and Constraints Using Model Predictive Control // Proc. 8th Russian-Korean Int. Sympos. on Science and Technology. Tomsk: TPU. 2004. P. 202–205. https://doi.org/10.1109/KORUS.2004.1555724.
12. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 1995.
https://doi.org/10.1007/978-0-387-84854-9.
13. *Holst U., Lindgren G., Holst J., Thuvesholmen M.* Recursive Estimation in Switching Autoregressions with Markov Regime // J. Time Series Analysis. 1994. V. 15. No. 5. P. 489–506. https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1994.tb00206.x.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 31.10.2020

После доработки 08.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021