

Стохастические системы

© 2021 г. И.Р. БЕЛОВ (ivanb1993@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АНИЗОТРОПИЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ¹

Рассматривается задача анизотропийной фильтрации на конечном интервале времени для линейной дискретной нестационарной системы с мультипликативными шумами. На вход системы поступает случайное возмущение с неточно известным распределением, неопределенность в описании которого характеризуется ограничением анизотропийного функционала. Оценка выхода исходной системы производится с помощью выбранного фильтра определенного вида по принципу минимизации критерия качества в виде анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации. На основании леммы об ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации выводятся соотношения на неизвестные матрицы фильтра. В качестве частных случаев рассмотрены задачи анизотропийной фильтрации для системы с отказом в измерениях, а также аналогичная задача для системы с фильтром специального вида. Приведен численный пример использования полученного метода синтеза анизотропийного фильтра.

Ключевые слова: анизотропия, анизотропийная норма, задача фильтрации, системы с отказом в измерениях, мультипликативный шум, дискретная система.

DOI: 10.31857/S0005231021060027

1. Введение

Задача фильтрации состояния или выходного сигнала системы на основании доступных измерений является одной из фундаментальных задач теории управления. Технические системы чаще всего имеют достаточно сложную структуру, и поэтому точно измерить все их параметры не представляется возможным. Кроме того, те измерения параметров объекта, которые можно провести с помощью разнообразных технических средств, таких как датчики и сенсоры, чаще всего содержат в себе случайные или постоянные шумы, которые могут сильно влиять на конечное значение измеряемой величины и динамику системы в целом. Наличие подобных проблем и является предпосылкой появления целого класса задач обработки цифровых сигналов и фильтрации.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-31-90060).

Проблема обработки данных, приходящих с разнообразных технических объектов, актуальна до сих пор, и наблюдается повышенный интерес к данному разделу теории управления. Универсального метода решения задачи фильтрации для любой технической системы и любых внешних условий не существует, поэтому при разработке новых методов используются определенные допущения о виде модели рассматриваемого объекта, фильтра, о свойствах шумов, входящих в измеряемый выходной сигнал систем или действующих на нее извне, и т.д.

При постановке задачи фильтрации для исследуемого объекта вводится некоторый критерий эффективности искомого фильтра, который чаще всего представляется в форме квадратичного функционала от ошибки фильтрации. Поэтому задача фильтрации часто сводится к задаче поиска фильтра, при котором функционал качества системы с данным фильтром достигает своего экстремального значения (оптимальная фильтрация), или к задаче поиска фильтра, обеспечивающего ограниченность значения заданного критерия некоторой величиной. Наиболее известными методами решения задач фильтрации являются методы $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -теорий [1–3]. В самом простом случае LQG/ $\mathcal{H}_2$ -оптимальный фильтр, или фильтр Калмана, используется при допущении, что входное возмущение системы является гауссовским белым шумом. Также предполагается, что точно известны параметры модели исследуемого объекта, т.е. матрицы линейной системы объекта являются детерминированными. Подобный фильтр обеспечивает минимальный след ковариационной матрицы ошибки оценивания состояния системы и эффективен для систем с указанными допущениями. Однако фильтр Калмана оказывается неэффективным с точки зрения подавления возмущений, если указанные допущения не выполняются (к примеру, если входное возмущение не является белым шумом или параметры объекта не точно известны). Если статистические или иные свойства шумов точно не известны, то используется $\mathcal{H}_\infty$ -фильтр. При его использовании предполагается, что входное возмущение является квадратично суммируемым или возмущением с ограниченной мощностью. При построении $\mathcal{H}_\infty$ -фильтра математически конструируется наихудшее внешнее возмущение и решается стандартная задача фильтрации при данном возмущении, в виду чего в реальных ситуациях данный фильтр оказывается излишне консервативным, а в некоторых случаях практической реализации — неоправданно энергозатратным.

Поскольку $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -фильтры являются наиболее эффективными только при выполнении условий задач, существует множество научных работ по поиску методов синтеза фильтров, более устойчивых к возмущениям со статистическими характеристиками, отличными от характеристик гауссовского белого шума, чем $\mathcal{H}_2$ -, и менее консервативных, чем $\mathcal{H}_\infty$. В 90-е годы с целью обобщения $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -теории И.Г. Владимировым была предложена анизотропная теория управления и фильтрации в [4–7]. Фундаментальными понятиями этой теории являются анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия (стационарной эргодической) последовательности случайных векторов и анизотропная норма системы. Понятие анизотропии случайного вектора было введено на основе таких понятий теории информации, как энтропия и количество информации, и представляет собой меру отличия

распределения случайного вектора от нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей.

Для линейных нестационарных систем существует множество публикаций на тему анизотропийного анализа и задачи анизотропийной фильтрации. В [7] было показано, что для решения задачи оптимальной анизотропийной фильтрации в случае линейной дискретной нестационарной системы на конечном интервале времени необходимо решить разностное уравнение Риккати с дополнительным условием в виде алгебраического уравнения специального вида. В [8] приведена формулировка леммы об ограниченности анизотропийной нормы для линейных нестационарных систем. Эта лемма является основой для многих работ по анизотропийной фильтрации для различных классов нестационарных систем. Задача субоптимальной анизотропийной фильтрации для линейных нестационарных систем с неслучайными матрицами была решена в [9]. Также в [10] была решена задача субоптимальной фильтрации для линейных систем с условием равенства размерностей векторов оцениваемого выхода и внешнего возмущения. Задача субоптимальной фильтрации заключается в поиске фильтра, который обеспечивает ограниченность анизотропийной нормы сверху заданным числом. Это число можно менять для достижения требуемого уровня качества фильтрации. В отличие от задачи оптимальной фильтрации, в субоптимальной фильтрации условия существования искомого фильтра выражены в виде линейных матричных неравенств, решение которых проще с точки зрения программной реализации алгоритма решения задачи.

С середины двадцатого столетия появилось немало научных работ на тему задач управления и фильтрации для частного случая стохастических систем, а именно систем, содержащих мультипликативные шумы. Преимущество описания стохастических систем подобным образом заключается в том, что они достаточно эффективно аппроксимируют линейные дискретные системы со случайными матрицами и для них проще найти подход к решению задач анализа, управления и фильтрации. Также системы с мультипликативными шумами часто используются для математического описания разнообразных физических и финансовых процессов, технических объектов и т.д., как показано в [11–13]. Вследствие большого научного интереса к таким системам уже существует множество статей на темы задач робастного управления [14], оценивания состояния системы [15], линейного квадратичного управления [16] и многие другие.

В [17] представлена лемма об ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами. Эта лемма является основой метода решения задачи анизотропийной фильтрации для систем с мультипликативными шумами, который представлен в данной статье. Помимо общего случая задачи анизотропийной фильтрации для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами, в статье рассмотрены частные случаи построения фильтров и решения исходных задач в рамках сделанных предположений.

2. Обозначения и предварительные сведения

Перед описанием класса рассматриваемых систем введем необходимые обозначения. Пусть $\mathbb{R}^n$ — множество n -мерных векторов с элементами из $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ — множество $(n \times m)$ -мерных матриц с элементами из $\mathbb{R}$; $\mathbb{L}_2^n$ — множество $\mathbb{R}^n$ -значных интегрируемых с квадратом случайных векторов; $\mathbb{L}_2^{n \times m}$ — множество $\mathbb{R}^{n \times m}$ -значных интегрируемых с квадратом случайных матриц; $\mathbf{E}(x)$ — математическое ожидание случайной величины x . В выкладках статьи будут использоваться следующие матричные и векторные нормы:

- 1) $\|x\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}(x^\top x)}$ — норма случайного вектора x из $\mathbb{L}_2^n$;
- 2) $\|X\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{E}(X^\top X))}$ — 2-норма случайной матрицы X из $\mathbb{L}_2^{n \times m}$;
- 3) $\|X\|_\infty = \sqrt{\max_i \lambda_i(\mathbf{E}(X^\top X))}$ — ∞ -норма случайной матрицы X из $\mathbb{L}_2^{n \times m}$, где $\lambda_i(\mathbf{E}(X^\top X))$ — собственные значения матрицы $\mathbf{E}(X^\top X)$.
- 4) $\Phi_M(X)$ — блочно-диагональная матрица из M матриц X .

Для сокращения записи линейных матричных неравенств (ЛМН) будет использоваться символ $*$ на месте элемента ЛМН, равного симметричному ему элементу относительно главной диагонали под знаком транспонирования.

В следующих подразделах приведены основные понятия анизотропийной теории, определение системы с мультипликативными шумами и лемма об ограниченности анизотропийной нормы для таких систем.

2.1. Класс рассматриваемых систем

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему F на ограниченном интервале $[0, N]$ следующего вида:

$$(2.1) \quad F : \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k), \end{cases} \\ x(0) = 0, \quad k \in [0, N],$$

где $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$ — вектор входа системы, $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$ — вектор выхода системы. Матрицы системы $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ являются случайными матрицами специального вида

$$A(k) = \sum_{i=0}^M \xi_{1i}(k) A_i(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x \times n_x}, \quad B(k) = \sum_{i=0}^M \xi_{2i}(k) B_i(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x \times m_w}, \\ C(k) = \sum_{i=0}^M \xi_{3i}(k) C_i(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z \times n_x}, \quad D(k) = \sum_{i=0}^M \xi_{4i}(k) D_i(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z \times m_w},$$

где $\xi_{ji}(k)$, $j = \overline{1, 4}$, $i = \overline{1, M}$, $k = \overline{0, N}$ являются независимыми в совокупности по i, j, k скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Случайные величины $\xi_{j0}(k)$, $j = \overline{1, 4}$, $k = \overline{0, N}$ обладают единичными математическими ожиданиями и дисперсиями. Следовательно, выполняются равенства $\mathbf{E}A(k) = A_0(k)$, $\mathbf{E}B(k) = B_0(k)$, $\mathbf{E}C(k) = C_0(k)$, $\mathbf{E}D(k) = D_0(k)$.

Соотношение вход-выход системы (2.1) можно записать в следующей форме:

$$Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N},$$

где $Z_{0:N} = (z^\top(0), \dots, z^\top(N))^\top$ — последовательность выходных сигналов системы, $W_{0:N} = (w^\top(0), \dots, w^\top(N))^\top$ — последовательность входных сигналов системы, $Z_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{p_z(N+1)}$, $W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{m_w(N+1)}$. Для сокращения записи дальнейших выкладок введем обозначения $l_z = p_z(N+1)$, $l_w = m_w(N+1)$. Матрица связи в $Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N}$ имеет вид $F_{0:N} = \text{block}_{0 \leq k, \kappa \leq N} (f(k, \kappa))$, где

$$(2.2) \quad f(k, \kappa) = \begin{cases} C(k)T(k, \kappa+1)B(\kappa), & \text{если } k > \kappa, \\ D(k), & \text{если } k = \kappa, \\ 0, & \text{если } k < \kappa. \end{cases}$$

Матрица перехода $T(k, \kappa)$ для $k > \kappa$ удовлетворяет рекуррентной формуле $T(k, \kappa) = A(k-1)T(k-1, \kappa) = T(k, \kappa+1)A(\kappa)$ при граничном условии $T(k, k) = I_{n_x}$. Стоит отметить, что случайная матрица $F_{0:N}$ и случайный вектор $W_{0:N}$ являются независимыми в силу независимости случайных величин $\xi_{ji}(k)$. Нормой системы (2.1) будем считать норму соответствующей матрицы $F_{0:N}$. Рассмотрим следующие виды нормы случайной матрицы $F_{0:N}$:

- $\mathcal{H}_2$ -норма системы F вида (2.1)

$$\|F\|_2 \triangleq \sqrt{\text{tr}(\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])} = \|F_{0:N}\|_2;$$

- $\mathcal{H}_\infty$ -норма системы F вида (2.1).

Меру отклика системы T_{zw} на входной вектор $W_{0:N}$ можно описать с помощью среднеквадратичного коэффициента усиления, который определяется по формуле

$$(2.3) \quad \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \frac{\|Z_{0:N}\|_2}{\|W_{0:N}\|_2}.$$

С учетом независимости $F_{0:N}$ и $W_{0:N}$ среднеквадратичный коэффициент усиления можно записать следующим образом:

$$(2.4) \quad \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda \Sigma)}{\text{tr}(\Sigma)}},$$

где $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}] \in \mathbb{R}^{l_w \times l_w}$, $\Sigma = \mathbf{E}[W_{0:N} W_{0:N}^\top] \in \mathbb{R}^{l_w \times l_w}$. Для системы F $\mathcal{H}_\infty$ -норма определяется как супремум среднеквадратичного коэффициента усиления $\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N})$ системы по всем последовательностям входных векторов $W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{l_w}$, т.е.

$$\|F\|_\infty \triangleq \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{l_w}} \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \|F_{0:N}\|_\infty.$$

Далее приведены понятия анизотропии случайного вектора и анизотропийной нормы системы, с помощью которых можно отказаться от предположения о наихудшем возмущении и таким образом устранить консервативность $\mathcal{H}_\infty$ -метода.

2.2. Анизотропия случайного вектора

Впервые определение анизотропии случайного вектора введено И.Г. Владимировым в [4]. Впоследствии, в [7] определение сформулировано следующим образом

Определение 1. Анизотропией $\mathbf{A}(W)$ m -мерного случайного вектора W называется неотрицательная величина, определенная по формуле

$$(2.5) \quad \mathbf{A}(W) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \|W\|^2 \right) - \mathbf{h}(W),$$

где $\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda})$ — относительная энтропия (расстояние Кульбака–Лейблера) функции плотности распределения вероятности f вектора W относительно функции плотности гауссовского распределения $p_{m,\lambda}$ с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей λI_m , $\lambda > 0$; $\mathbf{h}(W) = - \int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$ — дифференциальная энтропия W .

2.3. Анизотропийная норма

На основании определений среднеквадратичного коэффициента усиления $\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N})$ и понятия анизотропии случайного вектора $\mathbf{A}(W_{0:N})$ приведем определение анизотропийной нормы.

Определение 2. Анизотропийной нормой системы (2.1), которая определяется матрицей $F_{0:N}$ на временном интервале $k \in [0, N]$, называется неотрицательная величина следующего вида:

$$(2.6) \quad \|F\|_a = \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{W}_a} \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}),$$

где $\mathbb{W}_a = \{W \in \mathbb{L}_2^{l_w} : \mathbf{A}(W) \leq a\}$ — множество l_w -мерных случайных векторов с анизотропией, ограниченной сверху числом $a \geq 0$.

В [7] показано, что супремум среднеквадратичного коэффициента усиления $\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N})$ в (2.6) достигается при входном возмущении в виде случайного вектора, распределенного по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей вида

$$\Sigma(q) = (I_{l_w} - q\Lambda)^{-1},$$

где q — скалярный параметр, являющийся решением уравнения

$$-\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma(q)}{\text{tr}\Sigma(q)} = a$$

на интервале $q \in [0; \|F_{0:N}\|_\infty^{-2})$.

Анизотропийная норма является неубывающей функцией при любом $a \geq 0$, удовлетворяющей неравенствам

$$\|F\|_2 / \sqrt{l_w} = \lim_{a \rightarrow 0+} \|F\|_a \leq \|F\|_a,$$

$$\|F\|_a \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|F\|_a = \|F\|_\infty.$$

Эффективное использование математического аппарата анизотропийной теории имеет смысл при выполнении строгого неравенства $\|F\|_2/\sqrt{l_w} < \|F\|_\infty$.

В [17] показано, что для вычисления анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами необходимо решить разностное уравнение Риккати в обратном времени на интервале $k = 0 \dots N + 1$ и разностное уравнение Ляпунова в прямом времени. Для решения задачи анизотропийной фильтрации для систем с мультипликативными шумами, которое обеспечивает ограниченность анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации, запишем лемму об ограниченности анизотропийной нормы для данного класса систем.

Лемма 1. Дана линейная дискретная нестационарная система F с мультипликативными шумами вида (2.1) и задано максимальное значение анизотропии $a \geq 0$ входного сигнала. Тогда анизотропийная норма системы $\|F\|_a$ ограничена заданной константой $\gamma \geq 0$ тогда и только тогда, когда существуют значение параметра $q \geq 0$ и решения разностных уравнений Риккати $R_1(k) \succ 0$, $R_2(k) \succ 0$ такие, что

$$(2.7) \quad R_1(k) = \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k) C_i(k),$$

$$(2.8) \quad R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k),$$

$$(2.9) \quad S(k) = \left(I_{m_z} - \sum_{i=0}^M (q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k)) - \right. \\ \left. - B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k) \right)^{-1} \succ 0,$$

$$(2.10) \quad L(k) = S(k) \left(B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + \right. \\ \left. + q D_0^\top(k) C_0(k) \right),$$

$$(2.11) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det S(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

3. Постановка задачи фильтрации

Задана линейная дискретная нестационарная стохастическая система F на конечном временном интервале

$$(3.1) \quad F : \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_z(k)w(k), \end{cases}$$

где $x(k)$ является вектором состояния системы, $w(k)$ — вектором входного возмущения, а $z(k)$ — вектором оцениваемого выхода системы. В системе (3.1) вход $w(k)$ является случайным процессом, удовлетворяющим усло-

вию $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$, $\mathbf{E}[w(k)] = 0$. Предполагается, что известна априорная информация о других статистических характеристиках входной последовательности $W = w(k)$, на основе которой можно ввести ограничение анизотропии $A(W) \leq a$, где параметр a является известным положительным числом.

Целью работы является получение оценки выхода $z(k)$ на основе измеряемого выхода $y(k)$, описываемого следующим уравнением наблюдения:

$$(3.2) \quad y(k) = C_y(k)x(k) + D_y(k)w(k).$$

Ниже приведена формулировка задачи анизотропийной фильтрации

Задача 1. Получить такую оценку выхода $z(k)$ системы (3.1) на основе измеряемого выхода $y(k)$ вида (3.2), что анизотропийная норма $|||T_{zw}|||_a$ системы в ошибках фильтрации T_{zw} будет ограничена сверху заданным числом $\gamma > 0$.

Выбрана следующая модель фильтра T_{zw} :

$$(3.3) \quad T_{zw} : \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k) + H(k)(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{z}(k) = F(k)\hat{x}(k) + G(k)(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{y}(k) = \Gamma(k)\hat{x}(k), \\ \hat{x}(0) = 0, \quad k = \overline{0, N}. \end{cases}$$

Матрицы фильтра (3.3) являются детерминированными матрицами, являющимися решением задачи фильтрации.

Обозначим ошибку оценивания выхода как $\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$. Перепишав систему (3.3) относительно ошибки оценивания $\tilde{z}(k)$ и ошибки оценивания состояния $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$, получим систему в ошибках фильтрации. Вывод уравнений этой системы подробно разобран в следующем разделе. Переформулируем задачу анизотропийной фильтрации следующим образом:

Задача 2. Для заданных системы F вида (3.1), уровня анизотропии $a \geq 0$ входного возмущения W и верхней границы анизотропийной нормы $\gamma \geq 0$ найти фильтр вида (3.3) такой, чтобы для системы в ошибках фильтрации выполнялось неравенство

$$(3.4) \quad |||T_{zw}|||_a \leq \gamma.$$

4. Решение задачи фильтрации

В первую очередь, необходимо построить систему в ошибках фильтрации, соответствующую исходной системе объекта (3.1) и выбранной модели фильтра (3.3). Подставив выражение (3.2) измеряемого выхода $y(k)$ в модель (3.3), получим

$$(4.1) \quad \begin{cases} \hat{x}(k+1) = (W(k) - H(k)\Gamma(k))\hat{x}(k) + H(k)C_y(k)x(k) + \\ + H(k)D_y(k)w(k), \\ \hat{z}(k) = (F(k) - G(k)\Gamma(k))\hat{x}(k) + G(k)C_y(k)x(k) + \\ + G(k)D_y(k)w(k). \end{cases}$$

Для упрощения дальнейших выкладок вводим замену переменных

$$X(k) = W(k) - H(k)\Gamma(k), \quad Y(k) = F(k) - G(k)\Gamma(k).$$

Далее запишем выражение для ошибки оценивания выхода $z(k)$ системы (3.1)

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \tilde{z}(k) = & (C_z(k) - G(k)C_y(k))x(k) + \\ & + (D_z(k) - G(k)D_y(k))w(k) - Y(k)\hat{x}(k). \end{aligned}$$

Для записи системы в ошибках фильтрации введем обозначение

$$(4.3) \quad e(k) = x(k) - \hat{x}(k).$$

Из (3.1), (3.3) с учетом (4.3) получим динамику ошибки оценивания состояния:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} e(k+1) = & (A(k) - X(k) - H(k)C_y(k))x(k) + \\ & + X(k)e(k) + (B(k) - H(k)D_y(k))w(k). \end{aligned}$$

В итоге получим следующий вид системы в ошибках фильтрации $T_{\tilde{z}w}$:

$$(4.5) \quad T_{\tilde{z}w} : \begin{cases} e(k+1) = (A(k) - X(k) - H(k)C_y(k))x(k) + \\ \quad + X(k)e(k) + (B(k) - H(k)D_y(k))w(k), \\ \tilde{z}(k) = (C_z(k) - Y(k) - G(k)C_y(k))x(k) + \\ \quad + (D_z(k) - G(k)D_y(k))w(k) + Y(k)e(k). \end{cases}$$

Для сокращенной записи системы (4.5) введем расширенный вектор состояния

$$(4.6) \quad \bar{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ e(k) \end{pmatrix}.$$

Запишем систему в ошибках фильтрации $T_{\tilde{z}w}$ вида (4.5) в терминах расширенного вектора состояния

$$(4.7) \quad T_{\tilde{z}w} : \begin{cases} \bar{x}(k+1) = \mathcal{A}(k)\bar{x}(k) + \mathcal{B}(k)w(k), \\ \tilde{z}(k) = \mathcal{C}(k)\bar{x}(k) + \mathcal{D}(k)w(k), \\ \bar{x}(0) = 0, \quad k = \overline{0, N}, \end{cases}$$

где матрицы $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$, $\mathcal{C}(k)$, $\mathcal{D}(k)$ определяются следующим образом:

$$(4.8) \quad \mathcal{A}(k) = \begin{pmatrix} A(k) & 0_{n_x \times n_x} \\ A(k) - X(k) - H(k)C_y(k) & X(k) \end{pmatrix},$$

$$(4.9) \quad \mathcal{B}(k) = \begin{pmatrix} B(k) \\ B(k) - H(k)D_y(k) \end{pmatrix},$$

$$(4.10) \quad \mathcal{C}(k) = \begin{pmatrix} C_z(k) - Y(k) - G(k)C_y(k) & Y(k) \end{pmatrix},$$

$$(4.11) \quad \mathcal{D}(k) = D_z(k) - G(k)D_y(k).$$

Для решения задачи анизотропийной фильтрации в данной работе необходимо, чтобы система в ошибках фильтрации (4.7) была системой с мультипликативными шумами. Следовательно, должны быть выполнены следующие условия:

- 1) матрицы системы (4.7) $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$, $\mathcal{C}(k)$, $\mathcal{D}(k)$ являются независимыми в совокупности,
- 2) матрицы системы (3.1) $A(k)$, $B(k)$, $C_z(k)$, $D_z(k)$, $C_y(k)$, $D_y(k)$ являются независимыми в совокупности,
- 3) матрицы системы (4.7) $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$, $\mathcal{C}(k)$, $\mathcal{D}(k)$ удовлетворяют следующим выражениям:

$$(4.12) \quad \mathcal{A}(k) = \mathcal{A}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_i(k), \quad \mathcal{B}(k) = \mathcal{B}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{2i}(k) \mathcal{B}_i(k),$$

$$(4.13) \quad \mathcal{C}(k) = \mathcal{C}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{3i}(k) \mathcal{C}_i(k), \quad \mathcal{D}(k) = \mathcal{D}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{4i}(k) \mathcal{D}_i(k).$$

Случайные величины $\zeta_{ij}(k)$, $i = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, M_i}$, $k = \overline{0, N}$, в выражениях (4.12)–(4.13) обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{E}[\zeta_{ij}(k)] = 0, \quad \mathbf{E}[\zeta_{ij}^2(k)] = 1.$$

Заметим, что в матрицы системы $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$, $\mathcal{C}(k)$, $\mathcal{D}(k)$ входят матрицы $C_y(k)$ и $D_y(k)$, в общем случае являющиеся случайными. Поскольку матрицы $\mathcal{A}(k)$, $\mathcal{B}(k)$, $\mathcal{C}(k)$, $\mathcal{D}(k)$ должны быть независимыми в совокупности, необходимо выполнение следующего условия:

$$(4.14) \quad H(k)G^\top(k) = 0.$$

Это условие, к примеру, выполняется в следующих случаях:

- 1) $H(k) = 0$ или $G(k) = 0$;
- 2) $H(k) = \begin{pmatrix} H'(k) & 0 \end{pmatrix}$, $G(k) = \begin{pmatrix} 0 & G'(k) \end{pmatrix}$,
где $H'(k)$ — ненулевая часть неизвестной матрицы $H(k)$, $G'(k)$ — ненулевая часть неизвестной матрицы $G(k)$.

Частные случаи фильтра $H(k) = 0$ и $G(k) = 0$ будут рассмотрены в следующих разделах статьи. Пока предполагаем, что условие (4.14) выполняется при $H(k) \neq 0$ и $G(k) \neq 0$.

Стоит отметить, что матрица $\Gamma(k)$ влияет на динамику изменения переменной фильтра $\hat{x}(k)$ и на связь между оценкой выхода $\hat{z}(k)$ и переменной $\hat{x}(k)$. В зависимости от значения этой матрицы оценка выхода $\hat{z}(k)$ может корректироваться на основе значения измеряемого выхода $y(k)$ исходной системы или на основе “ошибки оценки” измеряемого выхода. Поскольку в общем случае матрица $C_y(k)$ может быть случайной, а все искомые матрицы

фильтра являются детерминированными, выражение $\hat{y}(k)$ является, скорее, прогнозом значения измеряемого выхода системы. Это выражение вводится дополнительно к основной модели фильтра. Значение матрицы $\Gamma(k)$ выбирается вручную вне процесса решения задачи. Частные случаи фильтра при различных значениях матрицы $\Gamma(k)$ будут рассмотрены в соответствующем разделе.

4.1. Условия ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации

В данном разделе воспользуемся леммой 1 для системы (4.7) для сведения исходной задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации к задаче выпуклой оптимизации с условиями в виде линейных матричных неравенств. Объединим уравнения (2.7)–(2.10) в одно уравнение Риккати. Для этого введем замену переменных $R(k) = R_1(k) + R_2(k)$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + \sum_{i=0}^M q C_i^\top(k) C_i(k) + \\
 & + A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k) = \\
 & = \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R(k+1) A_i(k) + \sum_{i=0}^M q C_i^\top(k) C_i(k) + \\
 & + A_0^\top(k) R(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k) - \\
 (4.15) \quad & - \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R_2(k+1) A_i(k) - A_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k),
 \end{aligned}$$

где матрицы $S(k)$ и $L(k)$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad S(k) &= I - B_0^\top(k) R(k+1) B_0(k) - \sum_{i=0}^M q D_i^\top(k) D_i(k) - \\
 & - \sum_{i=0}^M \left(B_i^\top(k) (R(k+1) - R_2(k+1)) B_i(k) \right) + B_0^\top(k) R_1(k+1) B_0(k),
 \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad L(k) = S(k) \left(B_0^\top(k) R(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k) \right).$$

В итоге получаем матричное уравнение

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad R(k) &= \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R(k+1) A_i(k) + \sum_{i=0}^M q C_i^\top(k) C_i(k) + \\
 & + A_0^\top(k) R(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k) + Q(k),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.19) \quad S(k) &= I - B_0^\top(k)R(k+1)B_0(k) - \sum_{i=0}^M qD_i^\top(k)D_i(k) - \\
&\quad - \sum_{i=0}^M \left(B_i^\top(k)(R(k+1) - R_2(k+1))B_i(k) \right) + \\
&\quad + B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)
\end{aligned}$$

$$(4.20) \quad L(k) = S(k) \left(B_0^\top(k)R(k+1)A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k) \right),$$

где

$$Q(k) = - \sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R_2(k+1)A_i(k) - A_0^\top(k)R_1(k+1)A_0(k).$$

Уравнение (4.18) не является разностным уравнением Риккати относительно новой переменной $R(k)$ по причине наличия членов с матрицами $R_1(k)$ и $R_2(k)$, которые содержатся в (4.18)–(4.20). Стоит отметить, что слагаемые $-Q(k)$, $\sum_{i=0}^M (B_i^\top(k)R_2(k+1)B_i(k))$ и $B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)$ являются неотрицательно определенными матрицами. Второе и третье слагаемые из перечисленных содержатся под знаком обратной матрицы, а в данном случае справедливо следующее утверждение

$$\text{Если } A \succ 0, \quad X \succeq 0, \quad \text{то } (A + X)^{-1} \preceq A^{-1}.$$

Введем матрицу $\mathcal{R} \succ 0$, являющуюся решением матричного неравенства вида

$$\begin{aligned}
(4.21) \quad \mathcal{R}(k) &\succ \mathcal{A}_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)\mathcal{A}_0(k) + \sum_{i=1}^{M_1} \mathcal{A}_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)\mathcal{A}_i(k) + \\
&\quad + q \sum_{i=0}^{M_3} \mathcal{C}_i^\top(k)\mathcal{C}_i(k) + \mathcal{L}^\top(k)\mathcal{S}^{-1}(k)\mathcal{L}(k), \\
&\quad \mathcal{R}(N+1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.22) \quad \mathcal{S}(k) &= \left(I_{m_w} - \left(q \sum_{i=0}^{M_4} \mathcal{D}_i^\top(k)\mathcal{D}_i(k) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=0}^{M_2} \mathcal{B}_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)\mathcal{B}_i(k) \right) \right)^{-1} \succ 0,
\end{aligned}$$

$$(4.23) \quad \mathcal{L}(k) = \mathcal{S}(k) \left(\mathcal{B}_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)\mathcal{A}_0(k) + q\mathcal{D}_0^\top(k)\mathcal{C}_0(k) \right),$$

$$(4.24) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Разность правых частей неравенства (4.21) и уравнения (4.18) является неотрицательно определенной матрицей. Поэтому в силу свойства монотонности решения дискретного уравнения Риккати, описанного в [18, 19], решение $\mathcal{R}(k)$ неравенства (4.21) удовлетворяет условию $\mathcal{R}(k) \succ R(k)$ при всех $k \in [0, N]$. Таким образом, получена система матричных неравенств (4.21)–(4.23) с неравенством специального вида (4.24), которая в соответствии с изложенными преобразованиями позволяет получить субоптимальное решение поставленной задачи.

Запишем теорему об условиях существования фильтра вида (3.3), который обеспечивает ограниченность анизотропийной нормы системы вида (4.7).

Теорема 1. Задана линейная дискретная нестационарная система F на конечном интервале времени с реализацией в пространстве состояний (3.1) и выбраны вещественные числа $\gamma \geq 0$, $a \geq 0$. Фильтр $T_{\hat{z}_w}$ с реализацией в пространстве состояний (3.3), гарантирующий выполнение неравенства $|||T_{\hat{z}_w}|||_a \leq \gamma$ для системы в ошибках фильтрации с реализацией в пространстве состояний (4.7), существует, если найдутся матрицы $\mathcal{P}(k) \succ 0$, $\mathcal{P}(N+1) = 0$, $W(k)$, $H(k)$, $F(k)$, $G(k)$, $\Gamma(k)$ и $\bar{\Psi}(k)$, при которых выполняются неравенства

$$(4.25) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k) & \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_0(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\bar{\mathcal{A}}^\top(k) & 0 & 0 & \ddots & * & * \\ \mathcal{C}_0(k) & \mathcal{D}_0(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \bar{\mathcal{C}}^\top(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(4.26) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \bar{\mathcal{C}}(N) & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(4.27) \quad \begin{pmatrix} \eta I_{m_w} - \bar{\Psi}(k) & * & * & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_0^\top(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_M^\top(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \bar{\mathcal{D}}^\top(k) & 0 & \dots & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(4.28) \quad \begin{pmatrix} \eta I_{m_w} - \bar{\Psi}(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(4.29) \quad \prod_{k=0}^N \det \bar{\Psi}(k) \geq e^{2a}(\eta - \gamma^2)^{m_w(N+1)},$$

$$\mathcal{P}(k) \succ 0, \quad k = N-1, \dots, 0.$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении 1.

Стоит отметить, что в произведении матриц $\mathcal{A}_i \mathcal{P}(k+1)$, $\mathcal{B}_i^\top \mathcal{P}(k+1)$ могут содержаться нелинейные члены в виде произведений неизвестных матриц фильтра $W(k)$, $H(k)$, $F(k)$, $G(k)$, $\Gamma(k)$ и компонент матрицы $\mathcal{P}(k+1)$. В зависимости от частных случаев задачи фильтрации вводятся дополнительные замены переменных и к неравенствам (4.25)–(4.29) добавляются новые условия в соответствии с введенными заменами переменных. В частных случаях задачи анизотропийной фильтрации это будет показано наглядно.

4.2. Частные случаи задачи фильтрации

В данном разделе рассмотрены частные случаи задачи анизотропийной фильтрации для разных типов стохастических систем и разных конфигураций фильтра.

4.2.1. Система с отказами в измерениях

Рассмотрим систему F вида (3.1)

$$(4.30) \quad F : \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_z(k)w(k), \\ y(k) = \lambda(k)C_y(k)x(k) + D_y(k)w(k), \end{cases}$$

где матрицы системы $A(k)$, $B(k)$, $C_z(k)$, $D_z(k)$, $C_y(k)$, $D_y(k)$ являются детерминированными матрицами соответствующих размерностей, $\lambda(k)$ — случайная величина с распределением вероятностей Бернулли:

$$P(\lambda(k) = 1) = p, \quad P(\lambda(k) = 0) = 1 - p.$$

Рассмотрим модель фильтра $T_{\hat{z}w}$ вида (3.3) со следующей конфигурацией:

$$(4.31) \quad T_{\hat{z}w} : \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k) + H(k)(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \hat{z}(k) = C_z(k)\hat{x}(k), \\ \hat{y}(k) = pC_y(k)\hat{x}(k), \\ \hat{x}(0) = 0, \quad k = \overline{0, N}. \end{cases}$$

Для системы (4.30) и фильтра (4.31) рассмотрим задачу анизотропийной фильтрации. Необходимо найти матрицы $W(k)$, $H(k)$ фильтра, при которых анизотропийная норма системы в ошибках фильтрации удовлетворяет неравенству $|||T_{\hat{z}w}|||_a$ для фиксированного $a > 0$. В первую очередь, запишем систему в ошибках фильтрации $T_{\hat{z}w}$ по формуле (4.7)

$$(4.32) \quad T_{\hat{z}w} : \begin{cases} X(k+1) = \mathcal{A}(k)X(k) + \mathcal{B}(k)w(k), \\ \tilde{z}(k) = \mathcal{C}(k)X(k) + \mathcal{D}(k)w(k), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
(4.33) \quad \mathcal{A}(k) &= \mathcal{A}_0(k) + (\lambda(k) - p)\mathcal{A}_1(k), \\
\mathcal{A}_0(k) &= \begin{pmatrix} A(k) & 0_{n_x \times n_x} \\ A(k) - W(k) & W(k) - pH(k)C_y(k) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{A}_1(k) &= \begin{pmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times n_x} \\ -H(k)C_y(k) & 0_{n_x \times n_x} \end{pmatrix}, \\
\mathcal{B}(k) &= \begin{pmatrix} B(k) \\ B(k) - H(k)D_y(k) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{C}(k) &= (0_{p_z \times n_x} \quad C_z(k)), \quad \mathcal{D}(k) = D_z(k).
\end{aligned}$$

Далее запишем сформулированные в предыдущем разделе условия ограниченности анизотропийной нормы в форме системы неравенств (4.25)–(4.29) для системы в ошибках фильтрации вида (4.32)

$$(4.34) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k) & \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_0(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * \\ \sqrt{p(1-p)}\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1^\top(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{C}(k) & \mathcal{D}(k) & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(4.35) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(4.36) \quad \begin{pmatrix} \eta I_{m_w} - \bar{\Psi}(k) & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}^\top(k) & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \bar{\mathcal{D}}^\top(k) & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(4.37) \quad \begin{pmatrix} \eta I_{m_w} - \bar{\Psi}(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{aligned}
(4.38) \quad \prod_{k=0}^N \det \bar{\Psi}(k) &\geq e^{2a}(\eta - \gamma^2)^{m_w(N+1)}, \\
\mathcal{P}(k) &\succ 0, \quad k = N-1, \dots, 0.
\end{aligned}$$

Видно, что в матричных неравенствах (4.34), (4.36) есть произведения матриц $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k)$, $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1(k)$ и $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}^\top(k)$. Матрицы $\mathcal{A}_0(k)$, $\mathcal{A}_1(k)$, $\mathcal{B}_0(k)$ удовлетворяют условиям (4.33). Следовательно, в $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k)$, $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1(k)$ и $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}^\top(k)$ есть произведения неизвестных матриц

$\mathcal{P}(k+1)$, $W(k)$ и $H(k)$. С целью устранения нелинейных членов в матричных неравенствах введем следующие замены переменных системы матричных неравенств:

$$(4.39) \quad \mathcal{X}(k) = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times p_y} \\ W(k) & H(k) \end{pmatrix},$$

$$(4.40) \quad \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k) = \mathcal{P}(k+1)\tilde{\mathcal{A}}_0^0(k) + \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k)\tilde{\mathcal{A}}_0^1(k),$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_0^0(k) = \begin{pmatrix} A & 0_{n_x \times n_x} \\ A & 0_{n_x \times n_x} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}}_0^1(k) = \begin{pmatrix} -I_{n_x} & I_{n_x} \\ 0_{n_x \times n_x} & -pC_y \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1(k) = \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k)\tilde{\mathcal{A}}_1^1(k),$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_1^1(k) = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times n_x} \\ -C_y & 0_{p_y \times n_x} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}(k) = \mathcal{P}(k+1)\tilde{\mathcal{B}}^0(k) + \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k)\tilde{\mathcal{B}}^1(k),$$

$$\tilde{\mathcal{B}}^0(k) = \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}^1(k) = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times m_w} \\ -D_y \end{pmatrix},$$

$$(4.41) \quad Q(k) = \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k).$$

Применим замену переменных (4.39)–(4.41) к неравенствам (4.34)–(4.37) и получим выражения следующего вида:

$$(4.42) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\tilde{\mathcal{A}}_0^0(k) + Q(k)\tilde{\mathcal{A}}_0^1(k) & \mathcal{P}(k+1)\tilde{\mathcal{B}}^0(k) + Q(k)\tilde{\mathcal{B}}^1(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * \\ \sqrt{p(1-p)}Q(k)\tilde{\mathcal{A}}_1^1(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{C}(k) & \mathcal{D}(k) & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(4.43) \quad \begin{pmatrix} \eta I_{m_w} - \bar{\Psi}(k) & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\tilde{\mathcal{B}}^0(k) & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{D}(k) & 0_{p_z \times 2n_x} & I_{p_z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{m_w \times m_w} & * & * \\ Q(k)\tilde{\mathcal{B}}^1(k) & 0_{2n_x \times 2n_x} & * \\ 0_{p_z \times m_w} & 0_{p_z \times 2n_x} & 0_{p_z \times p_z} \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * \\ 0_{m_w \times 2n_x} & \eta I_{m_w} & * \\ \mathcal{C}(N) & \mathcal{D}(N) & I_{2p_z} \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{pmatrix} \eta I_{m_w} - \bar{\Psi}(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$\prod_{k=0}^N \det \bar{\Psi}(k) \geq e^{2a}(\eta - \gamma^2)^{m_w(N+1)},$$

$$\mathcal{P}(k) \succ 0, \quad k = N-1, \dots, 0.$$

Вместо неизвестных матриц фильтра $W(k)$, $H(k)$ переменными системы линейных матричных неравенств становятся матрицы $\mathcal{X}(k)$ и $Q(k)$. Стоит обратить внимание, что при решении неравенств (4.42)–(4.43) необходимо учитывать условия (4.39)–(4.41), ограничивающие область значений матриц $\mathcal{X}(k)$, $Q(k)$. Численный пример решения задачи анизотропийной фильтрации для системы с отказами представлен в разделе Пример.

4.2.2. Фильтр с $H(k) = 0$

Заданы система вида (3.1) и фильтр (3.3). Если матрица $H(k) = 0$, то с учетом условия $\hat{x}(0) = x(0) = 0$ получаем

$$\hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k), \quad \hat{x}(0) = 0 \Rightarrow \hat{x}(k) \equiv 0.$$

Следовательно, оценка выхода системы $z(k)$ имеет вид $\hat{z}(k) = G(k)y(k)$. Имеем статический фильтр с одной неизвестной матрицей $G(k)$.

Матрицы фильтра в терминах ошибок имеют следующий вид:

$$(4.44) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}(k) &= A(k), \quad \mathcal{B}(k) = B(k), \\ \mathcal{C}(k) &= C_z(k) - G(k)C_y(k), \quad \mathcal{D}(k) = D_z(k) - G(k)D_y(k). \end{aligned}$$

Подставив (4.44) в (4.25)–(4.29), получим систему линейных матричных неравенств относительно матриц $\mathcal{P}(k)$, $\bar{\Psi}(k)$ и матрицы фильтра $G(k)$, для которых не требуется дополнительных замен переменных.

4.2.3. Фильтр с $G(k) = 0$

Заданы система вида (3.1) и фильтр (3.3). Если $G(k) = 0$, то оценка выхода системы $\hat{z}(k)$ имеет вид

$$(4.45) \quad \hat{z}(k) = F(k)\hat{x}(k).$$

Если исходная система (3.1) с учетом (4.45) является детерминированной, то можно принять $F(k) = C_z(k)$. В противном случае можно принять $F(k) = \mathbf{E}[C_z(k)]$. Таким образом, задача анизотропийной фильтрации сводится к поиску матриц фильтра $W(k)$, $H(k)$. В зависимости от вида матриц $A(k)$ и $B(k)$ будет необходимо ввести замену переменных для устранения произведений компонент неизвестной матрицы $\mathcal{P}(k+1)$ и искомых матриц фильтра $W(k)$, $H(k)$.

4.2.4. Фильтр с $\Gamma(k) = 0$

Заданы система вида (3.1) и фильтр (3.3). Рассмотрим случай $\Gamma(k) = 0$. Поскольку необходимо, чтобы система в ошибках фильтрации принадлежала классу систем с мультипликативными шумами, матрицы (4.8) должны удовлетворять условиям (4.12)–(4.13). Поэтому запишем матрицу $\mathcal{A}(k)$ в следующем виде:

$$(4.46) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}(k) &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(k) & \mathcal{A}_{12}(k) \\ \mathcal{A}_{21}(k) & \mathcal{A}_{22}(k) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_i(k), \\ \mathcal{A}_i(k) &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{i11}(k) & \mathcal{A}_{i12}(k) \\ \mathcal{A}_{i21}(k) & \mathcal{A}_{i22}(k) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, M}. \end{aligned}$$

Далее запишем условия для каждой компоненты матрицы (4.46) с учетом выражений матриц системы в ошибках фильтрации вида (4.8):

$$(4.47) \quad A(k) = \mathcal{A}_{011}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i11}(k),$$

$$(4.48) \quad 0 = \mathcal{A}_{012}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i12}(k),$$

$$(4.49) \quad A(k) - W(k) - H(k)C_y(k) = \mathcal{A}_{021}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i21}(k),$$

$$(4.50) \quad W(k) = \mathcal{A}_{022}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i22}(k).$$

Из равенства (4.47) видно, что $A(k)$ является матрицей специального вида. Из (4.50) и того факта, что матрица фильтра $W(k)$ не может быть случайной, следует, что у уравнения (4.50) нет решений. Следовательно, условием наличия решения является равенство нулю всех матриц $\mathcal{A}_{i22}(k)$ при случайных величинах $\lambda_{1i}(k)$. Предположим, что $W(k) = \mathcal{A}_{022}(k)$.

С учетом вышесказанного, перепишем (4.49) в следующем виде:

$$(4.51) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_{011}(k) - W(k) &= \mathcal{A}_{021}(k), \\ \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i11}(k) - H(k)C_y(k) &= \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i21}(k). \end{aligned}$$

В общем случае $\mathbf{E}[C_y(k)] \neq 0$. Следовательно, равенство (4.49) является уравнением относительно случайных величин с разными математическими ожиданиями. Необходимо свести (4.49) к уравнению относительно случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Для этого проведем следующие преобразования (4.51):

$$(4.52) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i11}(k) - H(k)C_y(k) + H(k)\mathbf{E}[C_y(k)] - \\ - H(k)\mathbf{E}[C_y(k)] = \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i21}(k). \end{aligned}$$

Видно, что слагаемые $H(k)C_y(k)$ и $H(k)\mathbf{E}[C_y(k)]$ можно сгруппировать, получив при матрице $H(k)$ случайную матрицу с нулевым математическим ожиданием. Перепишем (4.52) в виде

$$(4.53) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_{021}(k) &= \mathcal{A}_{011}(k) - W(k) - H(k)\mathbf{E}[C_y(k)], \\ \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i21}(k) &= \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i11}(k) + H(k)(\mathbf{E}[C_y(k)] - C_y(k)). \end{aligned}$$

Равенство (4.53) выполняется, если матрица $C_y(k)$ имеет следующий вид:

$$(4.54) \quad C_y(k) = C_{y_0}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) C_{y_i}(k),$$

где

$$C_{y_0}(k) = \mathbf{E}[C_y(k)], \quad H(k)C_{y_i}(k) = \mathcal{A}_{i11}(k) - \mathcal{A}_{i21}(k).$$

Предположив, что все матрицы $A_i(k)$, $C_{y_i}(k)$, $i = \overline{0, M}$ известны, имеем

$$(4.55) \quad \mathcal{A}(k) = \begin{pmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_0(k) - W(k) - H(k)C_{y_0}(k) & W(k) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \begin{pmatrix} A_i(k) & 0 \\ A_i(k) - H(k)C_{y_i}(k) & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, в соответствии с условиями (4.8), (4.12) для матриц системы с мультипликативными шумами матрица $\mathcal{B}(k)$ должна удовлетворять выражению

$$(4.56) \quad \mathcal{B}(k) = \mathcal{B}_0(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{2i}(k) \mathcal{B}_i(k).$$

Предположим, что выполняются соотношения

$$(4.57) \quad \begin{aligned} B(k) &= B_0(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{2i}(k) B_i(k), \\ D_y(k) &= D_{y_0}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{2i}(k) D_{y_i}(k), \end{aligned}$$

$$H(k)D_{y_i}(k) = \mathcal{B}_{1i} - \mathcal{B}_{2i},$$

где все матрицы $B_i(k)$, $D_{y_i}(k)$, $i = \overline{0, M}$ известны. Таким образом, (4.56) с учетом (4.57) имеет вид

$$(4.58) \quad \mathcal{B}(k) = \begin{pmatrix} B_0(k) \\ B_0(k) - H(k)D_{y_0}(k) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^M \lambda_{2i}(k) \begin{pmatrix} B_i(k) \\ B_i(k) - H(k)D_{y_i}(k) \end{pmatrix}.$$

При выполнении (4.54), (4.55) и (4.58) система в ошибках фильтрации является системой с мультипликативными шумами. Запишем теорему об условиях ограниченности анизотропийной нормы этой системы для случая $\Gamma(k) = 0$:

Теорема 2. Заданы линейная дискретная нестационарная система T_{zw} с реализацией в пространстве состояний (4.7) и вещественные числа $a > 0$ и $\gamma > 0$. Тогда a -анизотропийная норма системы на интервале $[0, N]$ удовлетворяет неравенству $|||T_{zw}|||_a \leq \gamma$, если существуют $q = \eta^{-1} > 0$ и матрицы $\mathcal{P}(k)$, $\Psi(k)$, $\mathcal{Y}(k)$, которые являются решением системы линейных матричных неравенств

$$(4.59) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & 0 & \mathcal{A}_0^{0\top} \mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{A}}^0(k) \mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{C}}(k) \\ * & \eta I & \mathcal{B}_0^{0\top}(k) \mathcal{P}(k+1) & 0 & 0 \\ * & * & \mathcal{P}(k+1) & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{A}_0^{1\top} \mathcal{Y}(k) & \overline{\mathcal{A}}^1(k) \mathcal{Y}(k) & 0 \\ * & 0 & \mathcal{B}_0^{1\top}(k) \mathcal{Y}(k) & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(4.60) \quad \begin{bmatrix} \eta I - \overline{\Psi}(k) & \mathcal{B}_0^{0\top}(k) \mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{B}}^0(k) \mathcal{P}(k+1) \\ * & \mathcal{P}(k+1) & 0 \\ * & * & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B}_0^{1\top}(k) \mathcal{Y}(k) & \overline{\mathcal{B}}^1(k) \mathcal{Y}(k) \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(4.61) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & 0 & \overline{\mathcal{C}}(N) \\ * & \eta I & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(4.62) \quad \begin{bmatrix} \eta I - \overline{\Psi}(N) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(4.63) \quad \prod_{k=0}^N \det \overline{\Psi}(k) \geq e^{2a} (\eta - \gamma^2)^{m_w(N+1)},$$

$$\mathcal{Y}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении 2.

Аналогично рассмотренным выше частным случаям фильтров, при решении неравенств (4.59)–(4.63) необходимо учитывать вид неизвестной матрицы $\mathcal{Y}(k)$ в соответствии с заменой переменных (см. док-во теоремы в Приложении). Решив полученные неравенства относительно матриц $\mathcal{P}(k)$, $\bar{\Psi}(k)$ и $\mathcal{Y}(k)$, используем обратную замену переменных и находим матрицы фильтра $W(k)$ и $H(k)$.

4.2.5. Фильтр с $\Gamma(k) \neq 0$

Заданы система вида (3.1) и фильтр (3.3). Рассмотрим случай $\Gamma(k) \neq 0$. Матрицы системы и фильтра должны удовлетворять следующим условиям:

$$(4.64) \quad A(k) = \mathcal{A}_{011}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i11}(k),$$

$$(4.65) \quad 0 = \mathcal{A}_{012}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i12}(k),$$

$$(4.66) \quad A(k) - W(k) + H(k)(\Gamma(k) - C_y(k)) = \mathcal{A}_{021}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i21}(k),$$

$$(4.67) \quad W(k) - H(k)\Gamma(k) = \mathcal{A}_{022}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i22}(k),$$

$$(4.68) \quad B(k) = \mathcal{B}_{01}(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{2i}(k) \mathcal{B}_{i1}(k).$$

Так же, как и в случае $\Gamma(k) = 0$, равенство (4.66) имеет место, если математические ожидания случайных величин обеих сторон выражения (4.66) равны. Предположив, что $\Gamma(k) = \mathbf{E}[C_y(k)]$, преобразуем (4.66)–(4.67) к следующему виду:

$$\mathcal{A}_{021}(k) = \mathcal{A}_{011}(k) - W(k),$$

$$(4.69) \quad \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i21}(k) = \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) \mathcal{A}_{i11}(k) + H(k)(\mathbf{E}[C_y(k)] - C_y(k)).$$

Если условие (4.69) выполняется, то условия ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации (4.7) выводятся тем же образом, как и в случае $\Gamma(k) = 0$. Применив аналогичные преобразования и замены переменных, получим условия ограниченности анизотропийной нормы для рассматриваемого частного случая фильтра:

Теорема 3. Заданы линейная дискретная нестационарная система $T_{\bar{z}w}$ с мультипликативными шумами и реализацией в пространстве состояний (4.7) и вещественные числа $a \geq 0$, $\gamma \geq 0$. Тогда a -анизотропийная норма системы на интервале $k \in [0, N]$ удовлетворяет условию $\|T_{\bar{z}w}\|_a \leq \gamma$, если

существуют $q = \eta^{-1} > 0$ и матрицы $\mathcal{P}(k)$, $\Psi(k)$, $\mathcal{Y}(k)$, при которых выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & 0 & \mathcal{A}_0^{0\top} \mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{A}}^0(k) \mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{C}}(k) \\ * & \eta I & \mathcal{B}_0^{0\top}(k) \mathcal{P}(k+1) & 0 & 0 \\ * & * & \mathcal{P}(k+1) & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{A}_0^{1\top} \mathcal{Y}(k) & \overline{\mathcal{A}}^1(k) \mathcal{Y}(k) & 0 \\ * & 0 & \mathcal{B}_0^{1\top}(k) \mathcal{Y}(k) & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} \succ 0, \\
& \begin{bmatrix} \eta I - \overline{\Psi}(k) & \mathcal{B}_0^{0\top}(k) \mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{B}}^0(k) \mathcal{P}(k+1) \\ * & \mathcal{P}(k+1) & 0 \\ * & * & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B}_0^{1\top}(k) \mathcal{Y}(k) & \overline{\mathcal{B}}^1(k) \mathcal{Y}(k) \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \succ 0, \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & 0 & \overline{\mathcal{C}}(N) \\ * & \eta I & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} \succ 0, \\
& \begin{bmatrix} \eta I - \overline{\Psi}(N) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \succ 0, \\
& \prod_{k=0}^N \det \overline{\Psi}(k) \geq e^{2a} (\eta - \gamma^2)^{m_w(N+1)}, \\
& \mathcal{Y}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Стоит отметить, что единственным отличием частных случаев фильтров $\Gamma(k) = 0$ и $\Gamma(k) \neq 0$ является компонента $H(k)\mathbf{E}[C_y(k)]$ в матрице $\mathcal{A}_{021}(k)$. Даже при отсутствии в фильтре слагаемых $H(k)\Gamma(k)$ компонента $H(k)\mathbf{E}[C_y(k)]$ все равно появляется для центрирования случайной матрицы $C_y(k)$ и тем самым обеспечения выполнения ограничений на матрицы системы с мультипликативными шумами. В следующем разделе приведен численный пример решения задачи анизотропной фильтрации для системы с отказами в измерениях.

5. Пример

Рассматривается система с отказами в измерениях вида

$$(5.1) \quad F : \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k) + r(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_z(k)w(k), \\ y(k) = \lambda(k)C_y(k)x(k) + D_y(k)w(k), \end{cases}$$



Рис. 1. Ошибка оценивания $e_1(t)$.



Рис. 2. Ошибка оценивания $e_2(t)$.



Рис. 3. Оцениваемый выход $z_1(t)$.

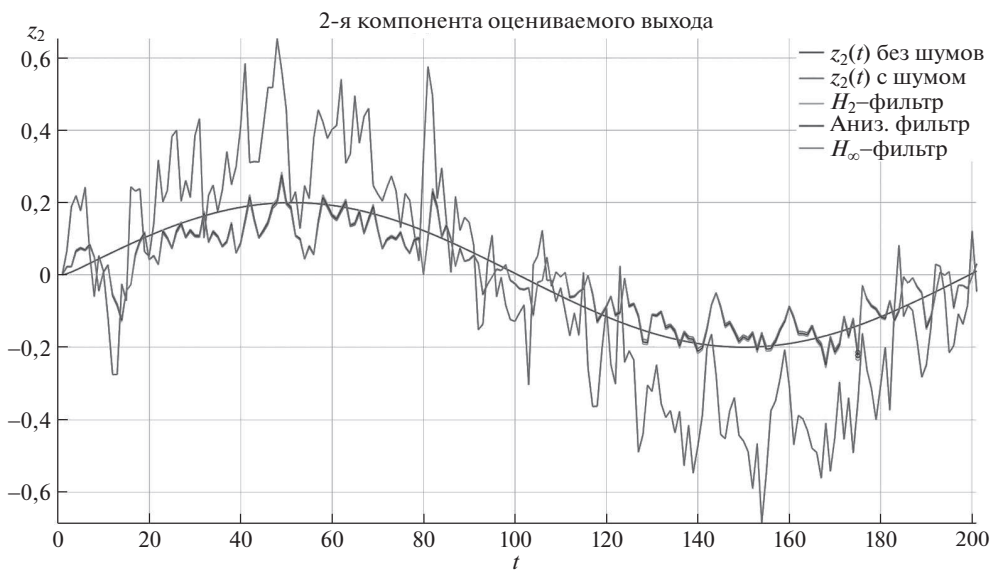


Рис. 4. Оцениваемый выход $z_2(t)$.

с матрицами

$$\begin{aligned}
 A &= A_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 4 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}, & B &= B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 C_z &= C_{z_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_z &= D_{z_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 C_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma(\lambda_k) &= \sqrt{p(1-p)}, & D_y &= D_{y_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0,64 \end{pmatrix}, \\
 N &= 200, & r(k) &= \left(0, 0, 2 \sin \left(\frac{k}{5} \frac{1}{2\pi} \right) \right)^\top,
 \end{aligned}$$

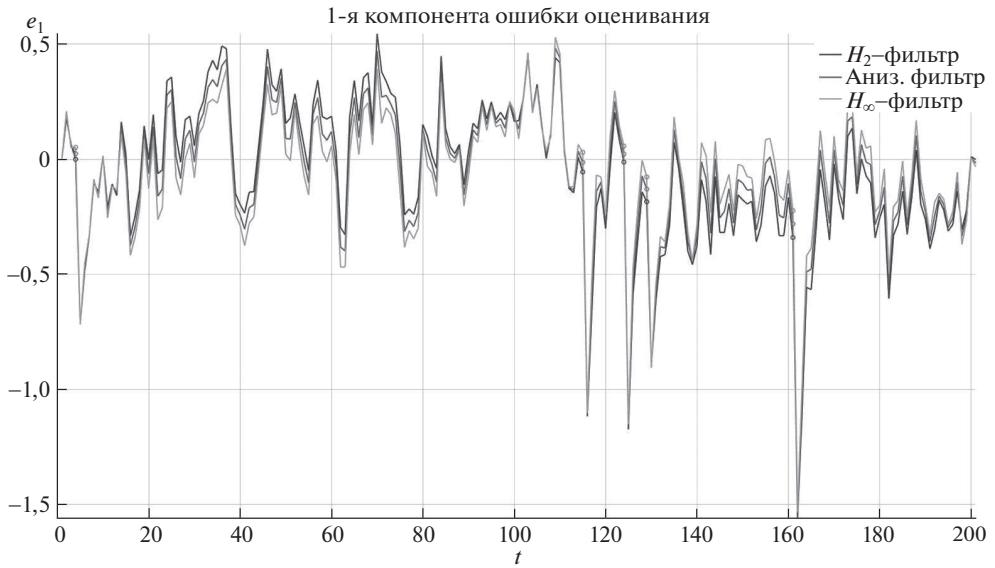


Рис. 5. Ошибка оценивания $e_1(t)$.



Рис. 6. Ошибка оценивания $e_2(t)$.

где $\sigma(\lambda_k)$ — среднеквадратичное отклонение случайной величины $\lambda(k)$ при матрице C_y , $r(k)$ — синусоидальное задающее воздействие, подаваемое на вход системы. По предложенному алгоритму для данной системы синтезированы три a -анизотропных фильтра при фиксированном параметре анизотропии a и различных значениях вероятности отказа $1 - p$. Каждый из этих анизотропных фильтров сравнивается с субоптимальным $\mathcal{H}_2$ -фильтром и субоптимальным $\mathcal{H}_\infty$ -фильтром, построенными для той же системы с соответствующими параметрами вероятности отказа.

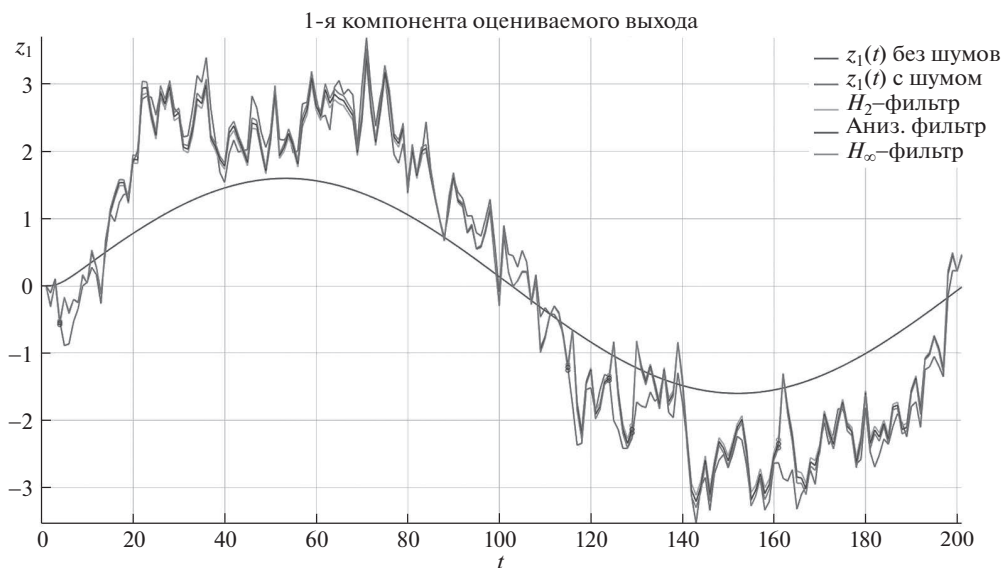


Рис. 7. Оцениваемый выход $z_1(t)$.

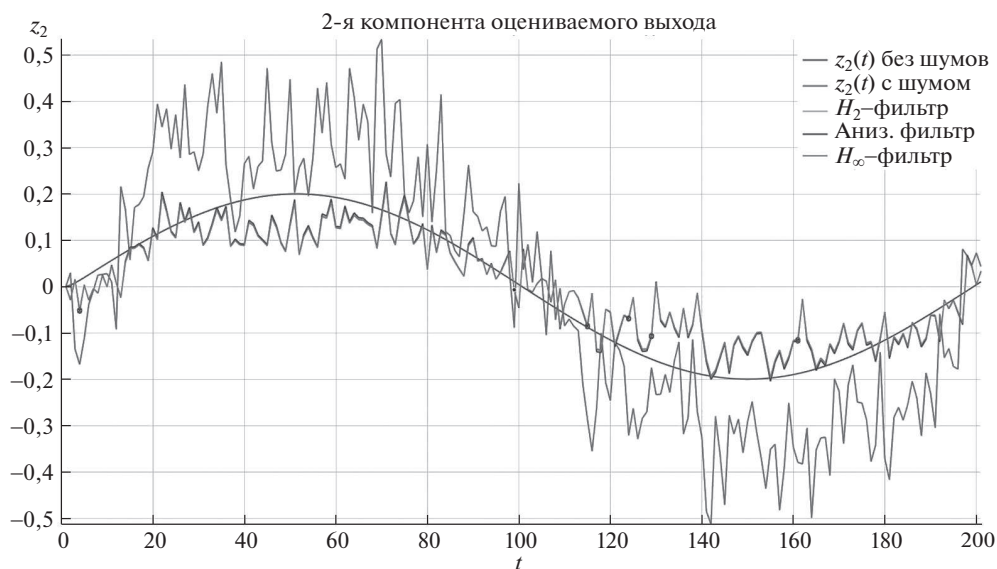


Рис. 8. Оцениваемый выход $z_2(t)$.

В результате решения системы линейных матричных неравенств (4.39)–(4.40) для системы (5.1) были получены последовательности значений матриц фильтра $W(k)$ и $H(k)$. При решении системы линейных матричных неравенств использовались пакеты Yalmip Matlab toolbox и SeDuMi optimization package.

Результаты моделирования представлены в виде графиков значений оцениваемого выхода $z(t)$ и ошибок оценивания выхода $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ для трех значений параметра p . Точками на графиках обозначены моменты отказа в



Рис. 9. Ошибка оценивания $e_1(t)$.



Рис. 10. Ошибка оценивания $e_2(t)$.

измерениях, т.е. $\lambda(k) = 0$. Ниже приведены значения параметра вероятности отказа, при которых производилось численное решение поставленной задачи фильтрации:

- Вероятность отказа в измерениях $1 - p = 0,01$. Графики ошибки фильтрации и оцениваемого выхода представлены на рис. 1–4.
- Вероятность отказа в измерениях $1 - p = 0,03$. Графики ошибки фильтрации и оцениваемого выхода представлены на рис. 5–8.

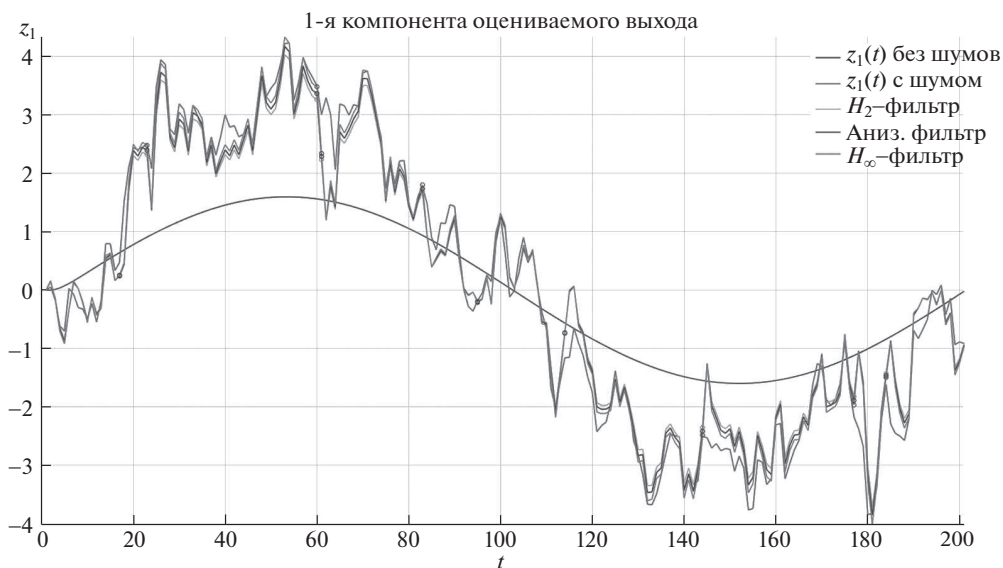


Рис. 11. Оцениваемый выход $z_1(t)$.

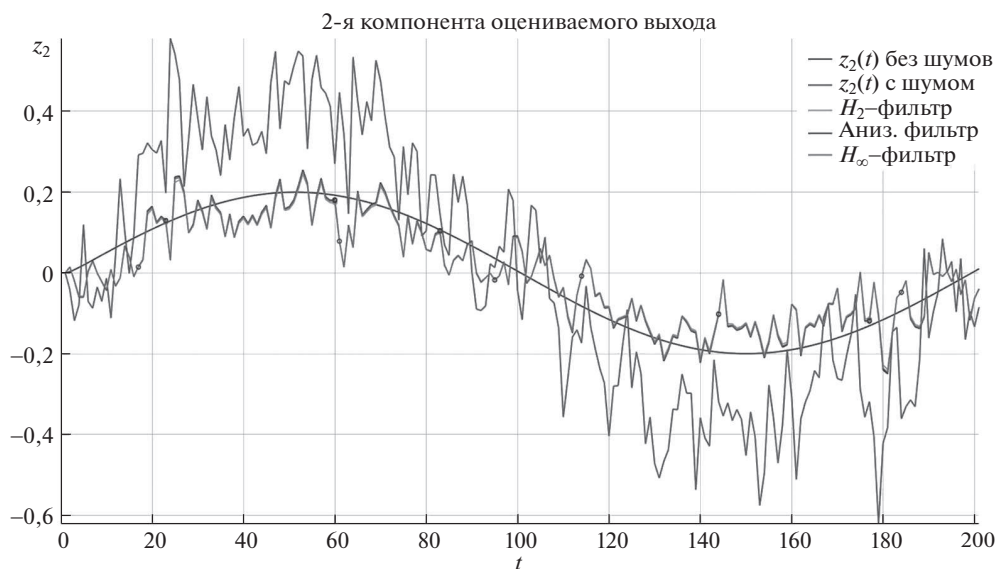


Рис. 12. Оцениваемый выход $z_2(t)$.

- Вероятность отказа в измерениях $1 - p = 0,05$. Графики ошибки фильтрации и оцениваемого выхода представлены на рис. 9–12.

На графиках видно, как при увеличении числа отказов в измерениях увеличивается ошибка оценивания выходов $z(t)$ рассматриваемой системы. Но после каждого отказа оценка постепенно сходится к реальному значению выхода системы, т.е. ошибка оценивания продолжает колебаться около нуля. Также видно, что субоптимальный анизотропный фильтр эффективнее

$\mathcal{H}_2$ -субоптимального фильтра, но менее эффективен, чем $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимальный фильтр, что обусловлено свойствами анизотропийной нормы. Однако, как было сказано ранее, анизотропийный фильтр может менять свои свойства в зависимости от параметра a , что позволяет решать задачу фильтрации для конкретного случая входного возмущения менее энергозатратно с технической точки зрения, чем с помощью $\mathcal{H}_\infty$ -субоптимального фильтра.

6. Заключение

Решена задача анизотропийной фильтрации на конечном временном интервале для линейной дискретной нестационарной системы с мультипликативными шумами. Качество решения задачи фильтрации характеризуется анизотропийной нормой системы в ошибках оценивания наблюдаемого выхода исходной системы. На основании леммы об ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами выведены линейные матричные неравенства относительно неизвестных матриц искомого фильтра. Рассмотрены частные случаи задачи анизотропийной фильтрации, включая задачу фильтрации для системы с отказами в измерениях. Использование предложенного метода решения задачи анизотропийной фильтрации продемонстрировано с помощью численного примера задачи для системы с отказами в измерениях с различными значениями вероятности отказа.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1. Приведем выражение (4.22) к виду неравенства с учетом положительной определенности матрицы $\mathcal{S}(k)$:

$$\begin{aligned} \Theta(k) \succ 0 : \Theta(k) \succ \mathcal{S}(k), \quad \Theta^{-1}(k) \prec \mathcal{S}^{-1}(k), \\ \text{(П.1.1)} \quad \Theta^{-1}(k) = \Psi(k) \prec I_{m_w} - \\ - \left(q \sum_{i=0}^M \mathcal{D}_i^\top(k) \mathcal{D}_i(k) + \sum_{i=0}^M \mathcal{B}_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) \mathcal{B}_i(k) \right), \\ \Psi^{-1}(k) \succ \mathcal{S}(k). \end{aligned}$$

Применив (П.1.1) к системе (4.21)–(4.24), получим систему неравенств следующего вида:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}(k) \succ \mathcal{R}(k), \quad \widehat{\mathcal{R}}(N+1) = 0, \\ \text{(П.1.2)} \quad \widehat{\mathcal{R}}(k) \succ \mathcal{A}_0^\top(k) \widehat{\mathcal{R}}(k+1) \mathcal{A}_0(k) + \\ + \sum_{i=1}^M a_i \mathcal{A}_i^\top(k) \widehat{\mathcal{R}}(k+1) \mathcal{A}_i(k) + q \sum_{i=0}^M c_i \mathcal{C}_i^\top(k) \mathcal{C}_i(k) + \\ + \left(\mathcal{B}_0^\top \widehat{\mathcal{R}}(k+1) \mathcal{A}_0 + q \mathcal{D}_0^\top \mathcal{C}_0 \right)^\top \Psi^{-1}(k) \left(\mathcal{B}_0^\top \widehat{\mathcal{R}}(k+1) \mathcal{A}_0 + q \mathcal{D}_0^\top \mathcal{C}_0 \right), \end{aligned}$$

$$(П.1.3) \quad \Psi(k) \prec I_{m_w} - \left(q \sum_{i=0}^M \mathcal{D}_i^\top(k) \mathcal{D}_i(k) + \sum_{i=0}^M \mathcal{B}_i^\top(k) \widehat{\mathcal{R}}(k+1) \mathcal{B}_i(k) \right),$$

$$(П.1.4) \quad \sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + m_w(N+1) \ln(1 - q\gamma^2).$$

Заметим, что в неравенстве (П.1.4) есть произведение двух переменных системы $q\gamma^2$. Для решения системы неравенств необходимо устранить данную нелинейную компоненту с помощью преобразования самого выражения или замены переменных. Следовательно, введем следующие новые переменные:

$$(П.1.5) \quad \eta = q^{-1}, \quad \overline{\Psi} = \eta \Psi, \\ \mathcal{P}(k) = \eta \widehat{\mathcal{R}}(k), \quad \mathcal{P}(N+1) = \eta \widehat{\mathcal{R}}(N+1).$$

Для компактности записи дальнейших выкладок с линейными матричными неравенствами введем обозначения

$$(П.1.6) \quad \overline{\mathcal{A}}(k) = (\mathcal{A}_1^\top \dots \mathcal{A}_M^\top), \quad \overline{\mathcal{B}}(k) = (\mathcal{B}_1^\top \dots \mathcal{B}_M^\top),$$

$$(П.1.7) \quad \overline{\mathcal{C}}(k) = (\mathcal{C}_1^\top \dots \mathcal{C}_M^\top), \quad \overline{\mathcal{D}}(k) = (\mathcal{D}_1^\top \dots \mathcal{D}_M^\top).$$

Для приведения неравенств (П.1.2), (П.1.3) к форме системы линейных матричных неравенств (ЛМН) потребуется лемма Шура (в англоязычной литературе — Schur complement lemma). Формулировку данной леммы можно найти в [20].

Применим лемму Шура к системе неравенств Риккати (П.1.2)–(П.1.3) с учетом замены переменных (П.1.5) и обозначений (П.1.6)–(П.1.7):

$$(П.1.8) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \mathcal{A}_0(k) & \mathcal{B}_0(k) & \mathcal{P}^{-1}(k+1) & * & * & * \\ \overline{\mathcal{A}}^\top(k) & 0 & 0 & \ddots & * & * \\ \mathcal{C}_0(k) & \mathcal{D}_0(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}^{-1}(k+1) & * \\ \overline{\mathcal{C}}^\top(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(П.1.9) \quad \begin{pmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \overline{\mathcal{C}}(N) & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(П.1.10) \quad \begin{pmatrix} \eta I_{m_w} - \overline{\Psi}(k) & * & * & * & * \\ \mathcal{B}_0^\top(k) & \mathcal{P}^{-1}(k+1) & * & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & * & * \\ \mathcal{B}_M^\top(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}^{-1}(k+1) & * \\ \overline{\mathcal{D}}^\top(k) & 0 & \dots & 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(П.1.11) \quad \begin{pmatrix} \eta I_{m_w} - \overline{\Psi}(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{pmatrix} \succ 0,$$

$$(П.1.12) \quad \prod_{k=0}^N \det \overline{\Psi}(k) \geq e^{2a} (\eta - \gamma^2)^{m_w(N+1)},$$

$$\mathcal{P}(k) \succ 0, \quad k = N-1, \dots, 0.$$

Для устранения обратных матриц в неравенствах (П.1.8), (П.1.10) сделаем конгруэнтные преобразования неравенств с помощью блочно-диагональных матриц вида

$$\text{blockdiag} (I_{2n_x}, I_{m_w}, \mathcal{P}(k+1), \dots, \mathcal{P}(k+1), I_{p_z(M)}) \quad \text{и}$$

$$\text{blockdiag} (I_{2n_x}, \mathcal{P}(k+1), \dots, \mathcal{P}(k+1), I_{p_z(M)}).$$

Для упрощения записи преобразованных ЛМН введем обозначения

$$(П.1.13) \quad \overline{\mathcal{A}}(k)\mathcal{P}(k+1) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^\top \mathcal{P}(k+1) & \dots & \mathcal{A}_M^\top \mathcal{P}(k+1) \end{pmatrix},$$

$$(П.1.14) \quad \overline{\mathcal{B}}(k)\mathcal{P}(k+1) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1^\top \mathcal{P}(k+1) & \dots & \mathcal{B}_M^\top \mathcal{P}(k+1) \end{pmatrix}.$$

Применив обозначения (П.1.13)–(П.1.14) и необходимые конгруэнтные преобразования к неравенствам (П.1.8)–(П.1.12), получим искомые линейные матричные неравенства (4.25)–(4.29).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2. Запишем условия ограниченности анизотропийной нормы для системы в ошибках фильтрации с учетом приведенных выше выкладок:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & 0 & \mathcal{A}_0^\top \mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{A}}(k)\mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{C}}(k) \\ * & \eta I & \mathcal{B}_0^\top(k)\mathcal{P}(k+1) & 0 & 0 \\ * & * & \mathcal{P}(k+1) & 0 & 0 \\ * & * & * & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) & 0 \\ * & * & * & * & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I - \overline{\Psi}(k) & \mathcal{B}_0^\top(k)\mathcal{P}(k+1) & \overline{\mathcal{B}}(k)\mathcal{P}(k+1) \\ * & \mathcal{P}(k+1) & 0 \\ * & * & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & 0 & \overline{\mathcal{C}}(N) \\ * & \eta I & 0 \\ * & * & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I - \overline{\Psi}(N) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\prod_{k=0}^N \det \bar{\Psi}(k) \geq e^{2a(\eta - \gamma^2)m_w(N+1)}.$$

С учетом (4.55), (4.58) очевидно, что в неравенствах есть нелинейные компоненты в виде произведений неизвестных матриц в произведениях $\mathcal{A}_i(k)\mathcal{P}(k+1)$ и $\mathcal{B}_i^\top(k)\mathcal{P}(k+1)$.

Для устранения нелинейных членов в неравенствах используется следующая замена переменных неравенств:

$$(П.2.1) \quad \mathcal{X}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ W(k) & H(k) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}(k) = \mathcal{X}(k)\mathcal{P}(k+1).$$

Применив замену переменных (П.2.1) к системе неравенств (4.55), (4.58), получим

$$(П.2.2) \quad \mathcal{A}(k) = \mathcal{A}_0^0(k) + \mathcal{X}(k)\mathcal{A}_0^1(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) (\mathcal{A}_i^0(k) + \mathcal{X}(k)\mathcal{A}_i^1(k)),$$

$$(П.2.3) \quad \mathcal{B}(k) = \mathcal{B}_0^0(k) + \mathcal{X}(k)\mathcal{B}_0^1(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) (\mathcal{B}_i^0(k) + \mathcal{X}(k)\mathcal{B}_i^1(k)),$$

где

$$(П.2.4) \quad \mathcal{A}_0^0(k) = \begin{pmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_0(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0^1(k) = \begin{pmatrix} -I & I \\ -C_{y_0}(k) & 0 \end{pmatrix},$$

$$(П.2.5) \quad \mathcal{A}_i^0(k) = \begin{pmatrix} A_i(k) & 0 \\ A_i(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_i^1(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -C_{y_i}(k) & 0 \end{pmatrix},$$

$$(П.2.6) \quad \mathcal{B}_0^0(k) = \begin{pmatrix} B_0(k) \\ B_0(k) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_0^1(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -D_{y_0} \end{pmatrix},$$

$$(П.2.7) \quad \mathcal{B}_i^0(k) = \begin{pmatrix} B_i(k) \\ B_i(k) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_i^1(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -D_{y_i} \end{pmatrix}.$$

Подставив (П.2.1)–(П.2.7) в матричные неравенства, устраняем нелинейные компоненты из системы матричных неравенств. В итоге получаем искомые линейные матричные неравенства (4.59)–(4.63).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal Filtering. New Jersey: Prentice Hall, 1979.
2. *Hassibi B., Sayed A., Kailath T.* Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Theories. Philadelphia: SIAM, 1999.
3. *Simon D.* Optimal State Estimation: Kalman, $\mathcal{H}_\infty$, and Nonlinear Approaches. New Jersey: Wiley, 2006.

4. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy Of Signals And The Entropy Of Linear Stationary Systems // Dokl. Math. 1995. V. 51. P. 388–390.
5. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing The Anisotropic Norm Of Linear Discrete-Time-Invariant Systems // Proc. 13 IFAC World Congress. 1996. P. 179–184.
6. *Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P.* Anisotropy-based robust performance analysis of linear discrete time varying systems. CADSMAP Research Report 01-01. The University of Queensland, Australia. 2001.
7. *Vladimirov I.G., Diamond P.* Robust Filtering in Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems by Minimum Anisotropic Norm Criterion. CADSMAP Res. Report 01-05. 2001 [completed in 2001].
8. *Maximov E.A., Kurdyukov A.P., Vladimirov I.G.* Anisotropic Norm Bounded Real Lemma for Linear Time-Varying System // Preprint 18th IFAC World Congr. Milano. 2011. P. 4701–4706.
9. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Субоптимальная анизотропная фильтрация на конечном горизонте // АиТ. 2016. № 1. С. 5–29.
Timin V.N., Kurdyukov A.P. Suboptimal Anisotropic Filtering in a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 1. P. 1–20.
10. *Yaesh I., Stoica A.-M.* Linear Time-varying Anisotropic Filtering its Application to Nonlinear Systems State Estimation // Proc. Eur. Control Conf. Strasbourg. 2014. June 24–27. P. 975–980.
11. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* $\mathcal{H}_\infty$ -control And Filtering Of Discrete-Time Stochastic Systems With Multiplicative Noise // Automatica. 2001. No. 37. P. 409–417.
12. *Todorov E., Weiwei Li.* Optimal Control Methods Suitable For Biomechanical Systems // Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Biology and Medicine Society. Mexico. 2003. P. 1758–1761.
13. *Todorov E.* Stochastic Optimal Control And Estimation Methods Adapted To The Noise Characteristics Of The Sensorimotor System // Neural Comput. 2005. No. 17. P. 1084–1108.
14. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P.* Stochastic approach to H-infinity optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
15. *Пахшин П.В.* Оценивание состояния и синтез управления для дискретных линейных систем с аддитивными и мультипликативными шумами // АиТ. 1978. № 4. С. 75–85.
Pakshin P. V. State Estimation And Control Design For Digital Linear Systems With Multiplicative Noises // Autom. Remote Control. 1978. V. 39. Is. 4. P. 526–636.
16. *Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.* Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // АиТ. 2003. № 10. С. 50–65.
Dombrovskii V. V., Lyashenko E. A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. Is. 10. P. 1558–1570.
17. *Belov I.R., Yurchenkov A. V., Kustov A. Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case. 27th Mediterranean Conference on Control and Automation. 2019.

18. *Freiling G., Ionescu V.* Monotonicity And Convexity Properties Of Matrix Riccati Equations // IMA Journal of Mathematical Control and Information. March 2001. V. 18. Is. 1. P. 61–72.
19. *Freiling G., Ionescu V.* Time-Varying Discrete Riccati Equation: Some Monotonicity Results // Linear Algebra and its Applications. 1999. No. 286. P. 135–148.
20. *Zhang F.* The Schur Complement and Its Applications // Springer, Boston, MA. 2005.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 27.07.2020

После доработки 03.01.2021

Принята к публикации 15.01.2021