# Интеллектуальные системы управления, анализ данных

## © 2021 г. В.В. КОНЕВ, д-р физ.-мат. наук, А.В. ПУПКОВ (andrewpupkov@gmail.com) (Томский государственный университет)

### ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИИ ПО ЗАШУМЛЕННЫМ ДАННЫМ<sup>1</sup>

Рассматривается задача оценивания параметров процесса авторегрессии по наблюдениям с аддитивным шумом. Разработан последовательный метод построения доверительной области фиксированных размеров с заданным коэффициентом доверия для вектора неизвестных параметров по конечной выборке. Получены формулы для длительности процедуры, при которой достигается требуемое качество оценок неизвестных параметров в случае гауссовских шумов. Построение доверительных оценок параметров основано на использовании специальной последовательной модификации классических оценок Юла–Уокера, позволяющей оценить коэффициент доверия при малых и умеренных объемах выборки. Приводятся результаты численного моделирования предлагаемых оценок и их сравнение с оценками Юла–Уокера на примере доверительного оценивания спектральной плотности.

*Ключевые слова*: идентификация авторегрессии по зашумленным наблюдениям, последовательные оценки Юла–Уокера, доверительное оценивание, гарантированная точность.

**DOI:** 10.31857/S0005231021060052

### 1. Введение

Известно, что в теоретических и прикладных исследованиях, связанных с задачами адаптивного управления и регулирования, фильтрации и прогнозирования, анализа спектров и обработки временны́х рядов, большое внимание уделяется проблеме идентификации параметров динамических систем, описываемых стохастическими разностными и стохастическими дифференциальными уравнениями [1–3]. При этом для широкого круга используемых моделей неизвестные параметры входят линейно в уравнения системы, а идентификация параметров системы заключается в оценивании параметров детерминированной или стохастической регрессии [4–7]. Для идентификации линейных динамических систем разработаны различные эффективные методы: наименьших квадратов (МНК), максимального правдоподобия (МП),

 $<sup>^1</sup>$ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект\$17-11-01049).

стохастической аппроксимации и др. Теория оценивания параметров детерминированной регрессии разработана с исчерпывающей полнотой, позволяя строить оптимальные оценки по имеющимся данным и контролировать их точность в момент прекращения наблюдений динамической системы (см., например, [8]). Методы классической теории оценивания параметров стохастической регрессии, типичным примером которой являются временные ряды типа авторегрессии, позволили установить важные асимптотические свойства оценок при неограниченной длительности наблюдений. При практическом использовании оценок обычно исходят из того, что эти свойства сохраняются при малых и умеренных объемах данных. В последние годы в теоретических и прикладных исследованиях статистики случайных процессов возрастает роль последовательных методов анализа, которые отличаются тем, что объем данных, используемых в оценках, не фиксируется заранее, а определяется специальными правилами остановки наблюдений. Впервые целесообразность применения последовательного анализа для процессов с зависимыми значениями была установлена в публикациях [9, 10] в задаче оценивания коэффициента сноса диффузионного процесса. Было доказано, что оценка максимального правдоподобия, вычисленная в специальный (случайный) момент времени, превосходит классическую оценку максимального правдоподобия: она является несмещенной и гарантирует заданную среднеквадратическую точность. В дальнейшем последовательный анализ стал успешно применяться в задачах идентификации стохастических динамических систем с дискретным временем и более сложных моделей с непрерывным временем, позволяя улучшить как асимптотические [11, 12], так и неасимптотические свойства [13–16] классических оценок МНК и МП. Одним из важнейших результатов последовательных методов идентификации является построение точечных оценок неизвестных параметров уравнений с гарантированной среднеквадратической точностью в момент прекращения наблюдений. Последовательные оценки обычно строятся на основе классических оценок МНК и МП, используя специальные правила прекращения наблюдений и проводя дополнительные структурные изменения классических оценок. При этом конструкция последовательных оценок существенно зависит от числа неизвестных параметров: она использует одну классическую оценку МНК, если число неизвестных параметров не превышает размерности процесса, описывающего динамику системы [13, 14], и она включает целую серию базовых оценок (случайной длины) в случае, когда число неизвестных параметров больше, чем размерность процесса [15, 16].

В данной статье рассматривается задача идентификации параметров авторегрессии по наблюдениям, искаженным аддитивным шумом. Такая модель широко используется в задачах фильтрации и прогнозирования, при обработке сигналов в информационно-измерительных комплексах, анализе речи и др. Проблеме идентификации параметров зашумленной авторегрессии посвящено много публикаций [17–22] и др. Основные методы идентификации можно разбить на две группы. К первой группе относятся методы, использующие для описания зашумленной авторегрессии, модели авторегрессии и скользящего среднего. Затем параметры оцениваются применением модифицированных оценок Юла–Уокера, метода максимального правдоподобия или метода рекуррентного прогноза опшбок. К другой группе методов относят улучшенные методы МНК [21]. Теоретические исследования свойств оценок носят асимптотический характер. Они позволили определить потенциальные возможности построения авторегрессионных моделей в условиях, когда авторегрессионный процесс недоступен прямым наблюдениям. При этом вопросы о точности оценок при малых и умеренных объемах данных остаются открытыми.

Цель данной статьи — разработать метод неасимптотического доверительного оценивания параметров зашумленной авторегрессии. Предполагается, что шумы, задающие динамику процесса авторегрессии, и шумы в канале измерений являются гауссовскими. Последовательная процедура идентификации строится на основе одной классической оценки Юла–Уокера, используя специальные правила остановки наблюдений и дополнительную модификацию структуры оценки с помощью весовых коэффициентов. Конструкция последовательных оценок параметров зашумленной авторегрессии и ее анализ существенно опираются на недавние результаты по последовательной идентификации гауссовской авторегрессии по прямым наблюдениям [23, 24]. Задача неасимптотического доверительного оценивания линейных параметров в многомерных динамических системах с условно-гауссовскими шумами изучалась в [25] в предположении, что число неизвестных параметров не превышает размерности процесса, а сам процесс доступен прямому наблюдению. Другие подходы к построению последовательных процедур идентификации динамических систем исследованы в [26, 27]. Отметим, что, помимо задач идентификации динамических систем, последовательные методы играют ключевую роль в теории оптимальной остановки [28] и в задачах скорейшего оптимального обнаружения разладок [29].

### 2. Постановка задачи. Построение доверительной оценки для авторегрессии первого порядка

Рассмотрим модель зашумленной авторегрессии AR(p) *p*-го порядка, описываемого уравнениями

(2.1)  $x_k = \theta_1 x_{k-1} + \dots + \theta_p x_{k-p} + \varepsilon_k,$ 

$$(2.2) y_k = x_k + \eta_k, \quad k \ge 1,$$

где  $\{\varepsilon_k\}$  и  $\{\eta_k\}$  — независимые последовательности гауссовских случайных величин (шумы) с нулевыми средними  $\mathbf{E}\varepsilon_k = \mathbf{E}\eta_k = 0$  и дисперсиями  $\mathbf{E}\varepsilon_k^2 = \sigma^2$ и  $\mathbf{E}\eta_k^2 = \Delta^2$ . Параметры  $\theta_1, \ldots, \theta_p$  неизвестны, и их требуется оценить по наблюдениям процесса  $\{y_k\}$ . Предполагается, что вектор начальных значений  $x_0, \ldots, x_{1-p}$  процесса AR(p) является случайным, не зависящим от процессов  $\{\varepsilon_k\}$  и  $\{\eta_k\}$ .

Из (2.1), (2.2) получаем уравнение для наблюдаемого процесса

(2.3) 
$$y_k = Y_{k-1}^{\mathrm{T}} \theta + \xi_k,$$

где  $Y_k = (y_k, \ldots, y_{k-p+1})^{\mathrm{T}}, \quad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_k = \varepsilon_k + \eta_k - \theta_1 \eta_{k-1} - \ldots$  $\cdots - \theta_p \eta_{k-p}; {}^{\mathrm{T}}$  обозначает транспонирование. Поскольку оценка МНК для вектора  $\theta$  является смещенной, для оценивания  $\theta$  часто используют оценку Юла-Уокера, которая вычисляется по наблюдениям  $y_p, \ldots, y_n$  по формуле

(2.4) 
$$\hat{\theta}(n) = G_n^{-1} \sum_{k=2p+1}^n Y_{k-p-1} y_k, \quad G_n = \sum_{k=2p+1}^n Y_{k-p-1} Y_{k-1}^{\mathrm{T}}.$$

Подставляя  $y_k$  из (2.3) в (2.4), получаем уклонение оценки

(2.5) 
$$\hat{\theta}(n) - \theta = G_n^{-1}\zeta(n), \quad \zeta(n) = \sum_{k=2p+1}^n Y_{k-p-1}\xi_k.$$

Оценка (2.4) является нелинейной функцией от наблюдений, ее свойства исследованы только при асимптотическом предположении, что объем выборки сколь угодно велик [2, 3]. Вопрос о качестве оценок (2.4) при малых и умеренных объемах данных остается открытым.

Цель статьи — получить решение задачи доверительного оценивания параметров  $\theta_1, \ldots, \theta_p$  в системе (2.1), (2.2) в неасимптотической постановке. На основе оценки Юла–Уокера (2.4), используя подход последовательного анализа, построим доверительные оценки для  $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^T$ , выбрав вместо n специальное правило остановки наблюдений в зависимости от требуемой точности оценки и проведя дополнительную модификацию структуры самой оценки (2.4).

Отложив до раздела 3 построение последовательных оценок Юла–Уокера и их анализ в общей модели (2.1), (2.2), рассмотрим сначала задачу оценивания параметра  $\theta$  в зашумленном процессе авторегрессии первого порядка

(2.6) 
$$x_k = \theta x_{k-1} + \varepsilon_k, \quad y_k = x_k + \eta_k, \quad k \ge 1.$$

При этом из (2.4)–(2.6) получаем, что

(2.7) 
$$\hat{\theta}(n) = \frac{1}{\sum_{k=3}^{n} y_{k-2}y_{k-1}} \sum_{k=3}^{n} y_{k-2}y_k, \quad \hat{\theta}(n) - \theta = \frac{\zeta(n)}{\sum_{k=3}^{n} y_{k-2}y_{k-1}}, \quad n \ge 3,$$

(2.8) 
$$\zeta(n) = \sum_{k=3}^{n} y_{k-2}\xi_k, \quad \xi_k = \eta_k - \theta\eta_{k-1} + \varepsilon_k.$$

Точечная последовательная оценка для  $\theta$  строится в два этапа.

Этап 1. Представление процесса  $\zeta(n)$  в виде суммы двух мартингалов.

Этап 2. Построение момента остановки наблюдений и выбор весовых коэффициентов в модифицированной оценке Юла–Уокера. Множество индексов суммирования в (2.8)  $T(n) = \{3, 4, \ldots, n\}$  разобьем на нечетные и четные:  $T(n) = T_1(n) \cup T_2(n)$ , где

(2.9) 
$$T_1(n) = \{k = 2j + 1 : j = 1, 2, \dots; k \leq n\},\$$
$$T_2(n) = \{k = 2(j+1) : j = 1, 2, \dots; k \leq n\}.$$

Заметим, что количества индексов во множествах  $T_1(n)$  и  $T_2(n)$  определяются величинами  $d_1(n) = [(n-1)/2], d_2(n) = [(n-2)/2], n \ge 3$ , где [a] обозначает целую часть числа a. Далее запишем сумму (2.8) в виде  $\zeta(n) = \zeta_1(n) + \zeta_2(n)$ , где

(2.10) 
$$\zeta_i(n) = \sum_{k=3}^n \chi_{\{k \in T_i(n)\}} y_{k-2} \xi_k, \quad i = 1, 2;$$

 $\chi_A$  обозначает индикатор события A.

Обозначим через  $m_1(n)$  и  $m_2(n)$  максимальные индексы в  $T_1(n)$  и  $T_2(n)$ , т.е.

$$m_1(n) = \max \{2j+1 : j = 1, 2, \dots; 2j+1 \le n\},\$$
  
$$m_2(n) = \max \{2(j+1) : j = 1, 2, \dots; 2(j+1) \le n\}.$$

Введем две фильтрации  $\{\mathcal{F}_n^{(1)}\}_{n \ge 0}$  и  $\{\mathcal{F}_n^{(2)}\}_{n \ge 0}$ , где

(2.11) 
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^{(i)} &= \sigma\{x_0\}, \\ \mathcal{F}_n^{(i)} &= \sigma\{x_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_i(n)}, \eta_1, \dots, \eta_{m_i(n)}\}, \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \quad n \ge 1. \end{aligned}$$

Первый этап завершается следующим результатом.

Лемма 1. Процессы  $\left(\zeta_1(n), \mathcal{F}_n^{(1)}\right)_{n \ge 3}$  и  $\left(\zeta_2(n), \mathcal{F}_n^{(2)}\right)_{n \ge 3}$  в разложении (2.10) являются мартингалами.

Доказательство леммы 1 приводится в Приложении.

Построим теперь последовательную оценку Юла-Уокера.

Пусть h > 0. Введем два момента остановки по нечетным и четным наблюдениям процесса  $y_k$ :

(2.12)  
$$\tau_{1}(h) = \inf \left\{ n \ge 3 : \sum_{j=1}^{d_{1}(n)} y_{2j-1}^{2} \ge \frac{h}{\Delta^{2} + \sigma^{2}} \right\}$$
$$\tau_{2}(h) = \inf \left\{ n \ge 1 : \sum_{j=1}^{d_{2}(n)} y_{2j}^{2} \ge \frac{h}{\Delta^{2} + \sigma^{2}} \right\}.$$

Замечание 1. Известно (см., например, [11, 13]), что при построении последовательных оценок параметра AR(1) по прямым наблюдениям моменты остановки наблюдений определяются с помощью выборочной информации Фишера. В модели (2.6) с дополнительной аддитивной помехой моменты  $au_1(h)$  и  $au_2(h)$  выбираются так, чтобы выборочные информации по Фишеру  $\sum_{j=1}^{d_1(n)} y_{2j-1}^2$  и  $\sum_{j=1}^{d_2(n)} y_{2j}^2$ , содержащиеся отдельно в нечетных и четных наблюдениях, достигли заданного порога  $h/(\Delta^2 + \sigma^2)$ .

Длительность наблюдений в последовательной процедуре оценивания  $\theta$ определим равенством

(2.13) 
$$\tau(h) = \max(\tau_1(h), \tau_2(h)).$$

Кроме замены в оценке (2.7) n на  $\tau(h)$ , потребуется некоторая модификация самой оценки, используя специальные весовые коэффициенты. Сначала найдем корректирующие множители  $\alpha_1(h)$  и  $\alpha_2(h)$ , компенсирующие перескоки в (2.12), из уравнений

$$\sum_{j=1}^{d_1(\tau_1(h))-1} y_{2j-1}^2 + \alpha_1(h) y_{2d_1(\tau_1(h))-1}^2 = \frac{h}{\Delta^2 + \sigma^2},$$
$$\sum_{j=1}^{d_2(\tau_2(h))-1} y_{2j}^2 + \alpha_2(h) y_{2d_2(\tau_2(h))} = \frac{h}{\Delta^2 + \sigma^2}.$$

Заметим, что  $0 < \alpha_i(h) \leqslant 1, i = 1, 2$ . Положим

$$\beta_{1,k} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 2j - 1 \text{ и } j < d_1(\tau_1(h)); \\ \alpha_1(h), & \text{если } k = 2d_1(\tau_1(h)) - 1; \\ 0, & \text{если } k > 2d_1(\tau_1(h)) - 1; \end{cases}$$
$$\beta_{2,k} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 2j + 2 \text{ и } j < d_2(\tau_2(h)); \\ \alpha_2(h), & \text{если } k = 2d_2(\tau_2(h)); \\ 0, & \text{если } k > 2d_2(\tau_2(h)). \end{cases}$$

Построим точечную последовательную оценку Юла-Уокера в виде

(2.14) 
$$\hat{\theta}_{\tau(h)} = \left(\sum_{k=3}^{\tau(h)} \sqrt{\gamma_k} y_{k-2} y_{k-1}\right)^{-1} \sum_{k=3}^{\tau(h)} \sqrt{\gamma_k} y_{k-2} y_k,$$

где весовые коэффициенты  $\gamma_k$  определяются по формуле

(2.15) 
$$\gamma_{k} = \begin{cases} \beta_{1,k}, & \text{если } k \in T_{1}(\tau_{1}(h)); \\ \beta_{2,k}, & \text{если } k \in T_{2}(\tau_{2}(h)); \\ 0, & \text{если } k \notin T(\tau(h)). \end{cases}$$

Заметим, что весовые коэффициенты  $\gamma_k$  в оценке (2.14) равны единице для наблюдений с нечетными номерами до момента остановки  $\tau_1(h)$ , а также для наблюдений с четными номерами до момента  $\tau_2(h)$ ; наблюдения в эти

моменты используются в суммах с корректирующими множителями  $\alpha_1(h)$ и  $\alpha_2(h)$ ; остальные коэффициенты в обеих суммах равны нулю.

Покажем, что последовательная оценка (2.14) дает возможность решить задачу доверительного оценивания параметра heta в зашумленной авторегрессии AR(1) в неасимптотической постановке. Подставляя  $y_k$  из (2.6) в (2.14), получаем

(2.16)  
$$\hat{\theta}_{\tau(h)} - \theta = \frac{\zeta(h)}{s(h)};$$
$$s(h) = \sum_{k=3}^{\tau(h)} \sqrt{\gamma_k} y_{k-2} y_{k-1}, \qquad \zeta(h) = \sum_{k=3}^{\tau(h)} \sqrt{\gamma_k} y_{k-2} \xi_k.$$

Обозначим:

(17)  

$$\tilde{\zeta}(h) = \varkappa_{\theta} \zeta(h) = \sum_{k=3}^{\tau(h)} \sqrt{\gamma_k} y_{k-2} \tilde{\xi}_k,$$

$$\tilde{\xi}_k = \varkappa_{\theta} \xi_k, \qquad \varkappa_{\theta} = \sqrt{\frac{\Delta^2 + \sigma^2}{\Delta^2 (1 + \theta^2) + \sigma^2}}.$$

(2.

Подставляя в (2.17) весовые коэффициенты (2.15), получаем разложение

(2.18) 
$$\tilde{\zeta}(h) = \tilde{\zeta}_1(h) + \tilde{\zeta}_2(h);$$

$$\tilde{\zeta}_1(h) = \sum_{k=3}^{\tau_1(h)} \chi_{\{k \in T_1(\tau_1(h))\}} \sqrt{\beta_{1,k}} y_{k-2} \tilde{\xi}_k,$$

(2.19)

$$\tilde{\zeta}_2(h) = \sum_{k=3}^{\tau_2(h)} \chi_{\{k \in T_2(\tau_2(h))\}} \sqrt{\beta_{2,k}} y_{k-2} \tilde{\xi}_k.$$

Благодаря специальному выбору весовых коэффициентов (2.15) справедлив следующий результат.

Лемма 2. Пусть шумы  $\{\varepsilon_k\}$  и  $\{\eta_k\}$  в (2.6) являются гауссовскими, а случайные величины  $\tilde{\zeta}_1(h)$  и  $\tilde{\zeta}_2(h)$  определяются равенствами (2.19).

Тогда для любого h>0 случайные величины  $h^{-1/2}\tilde{\zeta}_1(h)$  и  $h^{-1/2}\tilde{\zeta}_2(h)$  являются стандартными гауссовскими.

Доказательство леммы 2, основанное на теореме П.1, приводится в Приложении.

Построим доверительный интервал для  $\theta$  с заданным коэффициентом доверия  $0 < \rho < 1$ . Используя (2.16), (2.18), получаем неравенство

(2.20) 
$$h^{-1/2}\varkappa_*|\hat{\theta}_{\tau(h)} - \theta|s(h) \leqslant h^{-1/2} \left( |\tilde{\zeta}_1(h)| + |\tilde{\zeta}_2(h)| \right), \quad \varkappa_* = \min_{|\theta| \leqslant L} \varkappa_{\theta}.$$

Применяя лемму 2, находим оценку вероятности

(2.21)  

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_{\theta}\left(\frac{|\tilde{\zeta}_{1}(h)|}{\sqrt{h}} + \frac{|\tilde{\zeta}_{2}(h)|}{\sqrt{h}} \ge \mu^{*}\right) &\leqslant \\
&\leqslant \mathsf{P}_{\theta}\left(\frac{|\tilde{\zeta}_{1}(h)|}{\sqrt{h}} \ge \frac{\mu^{*}}{2}\right) + \mathsf{P}_{\theta}\left(\frac{|\tilde{\zeta}_{2}(h)|}{\sqrt{h}} \ge \frac{\mu^{*}}{2}\right) = \\
&= 2\,\mathsf{P}_{\theta}\left(\frac{|\tilde{\zeta}_{1}(h)|}{\sqrt{h}} \ge \frac{\mu^{*}}{2}\right) = 4\left(1 - \Phi\left(\frac{\mu^{*}}{2}\right)\right), \\
&\qquad \text{rge } \Phi(z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^{2}}{2}} du.
\end{aligned}$$

Из уравнения  $4(1 - \Phi(\mu^*/2)) = 1 - \rho$  определяем  $\mu^* = \mu^*(\rho) = 2\Phi^{-1} \times ((3 + \rho)/4)$ .

Используя неравенства (2.20), (2.21), приходим к следующему результату.

Теорема 1. Пусть шумы  $\{\varepsilon_k\}$  и  $\{\eta_k\}$  в (2.6) являются гауссовскими и точечная последовательная оценка  $\hat{\theta}_{\tau(h)}$  определяется формулой (2.14). Тогда для любых  $0 < \rho < 1$  и h > 0

(2.22) 
$$\inf_{|\theta| \leq L} \mathsf{P}_{\theta} \left\{ \varkappa_* \frac{|s(h)|}{\sqrt{h}} |\hat{\theta}_{\tau(h)} - \theta| < \mu^* \right\} \geqslant \rho.$$

Неравенство (2.22) позволяет по заданным коэффициенту доверия  $\rho$  и параметру h > 0 построить доверительный интервал для  $\theta$ . При этом ширина доверительного интервала зависит от уровней шумов  $\sigma^2$  и  $\Delta^2$ , а также от статистики s(h).

Асимптотические свойства длительности последовательной процедуры  $\tau(h)$  и статистики s(h) при  $h \to \infty$  для устойчивого процесса авторегрессии (2.6) сформулируем в виде следующего утверждения.

Предложение 1. Пусть  $|\theta| < 1$ ,  $\tau(h)$  и s(h) определяются равенствами (2.13), (2.16). Тогда

(2.23) 
$$\lim_{h \to \infty} \frac{\tau(h)}{h} = \frac{2(1-\theta^2)}{(\Delta^2 + \sigma^2)((1-\theta^2)\Delta^2 + \sigma^2)} \quad \text{normu hasephoe} \ (n.h.),$$

(2.24) 
$$\lim_{h \to \infty} \frac{s(h)}{h} = \frac{2\sigma^2 \theta}{(\Delta^2 + \sigma^2)((1 - \theta^2)\Delta^2 + \sigma^2)} \quad n.n.$$

Утверждение предложения 1 следует из предложения 2, приведенного в разделе 3.

# 3. Доверительное оценивание параметров AR(p) по зашумленным наблюдениям

Рассмотрим теперь общую задачу неасимптотического оценивания параметров  $\theta_1, \ldots, \theta_p$  в модели (2.1), (2.2). На основе оценки Юла–Уокера (2.4) построим последовательную процедуру, гарантирующую точность оценок в момент прекращения наблюдений. При этом развивается подход, использованный в разделе 2. Во-первых, заметим, что шумовая часть  $\zeta(n)$  в уклонении оценки (2.5) не является мартингалом, как и в случае одного неизвестного параметра.

На первом шаге покажем, что процесс  $\zeta(n)$  допускает представление в виде суммы мартингалов. Начнем с разбиения множества индексов суммирования в (2.5):

(3.1) 
$$T(n) = \{2p+1, 2p+2, \dots, n\} = \bigcup_{i=1}^{p+1} T_i(n),$$
$$T_i(n) = \{k = (p+1)j + p + i - 1 : j = 1, 2, \dots; k \leq n\}.$$

Обозначим через  $d_i(n)$  число элементов в множестве  $T_i(n)$ :

$$d_i(n) = [(n-p-i+1)/(p+1)],$$
если  $T_i \neq \varnothing,$ и  
 $d_i(n) = 0,$ если  $T_i = \varnothing.$ 

При этом максимальный номер  $t_i(n)$  в (3.1), если  $T_i(n) \neq \emptyset$ , есть  $t_i(n) = 3d_i(n) + i + 1$ .

Для каждого  $i = \overline{1, p+1}$  введем фильтрацию  $F^{(i)} = \left\{ \mathcal{F}_n^{(i)} \right\}_{n \ge 0}$ , где

(3.2) 
$$\mathcal{F}_{0}^{(i)} = \sigma\{x_{0}, x_{-1}, \dots, x_{-p+1}\}, \text{ если } t_{i}(n) = 0,$$
$$\mathcal{F}_{n}^{(i)} = \sigma\{x_{0}, x_{-1}, \dots, x_{-p+1}; \varepsilon_{1}, \dots, \varepsilon_{t_{i}(n)}, \eta_{1}, \dots, \eta_{t_{i}(n)}\}, \text{ если } t_{i}(n) \ge 1.$$

Далее векторный процесс  $\zeta(n)$  в (2.5) представим в виде

(3.3) 
$$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{p+1} \zeta^{(i)}(n), \quad \zeta^{(i)}(n) = \sum_{k=2p+1}^{n} \chi_{\{k \in T_i(n)\}} Y_{k-p-1} \xi_k.$$

Используя координаты p-мерного вектора  $\zeta^{(i)}(n)$ , т.е.

(3.4) 
$$\langle \zeta^{(i)}(n) \rangle_l = \sum_{k=2p+1}^n \chi_{\{k \in T_i(n)\}} y_{k-p-l} \xi_k, \quad l = 1, \dots, p,$$

введем процессы

(3.5) 
$$M_l^{(i)}(n) = \varkappa_{\theta} \langle \zeta^{(i)}(n) \rangle_l = \sum_{k=2p+1}^n \chi_{\{k \in T_i(n)\}} y_{k-p-l} \tilde{\xi}_k;$$

(3.6) 
$$\tilde{\xi}_k = \varkappa_{\theta} \xi_k, \quad \varkappa_{\theta} = (\Delta^2 + \sigma^2)^{1/2} / \left( \sigma^2 + \Delta^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_p^2) \right)^{1/2}.$$

Учитывая (2.3) и гауссовость шумов  $\varepsilon_k$  и  $\eta_k$  в (2.1), (2.2), отметим, что случайная величина  $\tilde{\xi}_k$  имеет гауссовское распределение с параметрами  $(0, \Delta^2 + \sigma^2)$ . Следующие свойства процессов (3.5) играют ключевую роль при анализе рассматриваемой процедуры в Приложении.

 $\underline{\mathcal{M}e}\,{}_{M}\,{}_{M}\,{}_{A}$ а 3. Для каждого  $i = \overline{1, p+1}$  случайные процессы  $M_l^{(i)}(n), l = \overline{1, p},$  являются квадратично-интегрируемыми мартингалами с условногауссовскими приращениями, т.е.

Law 
$$\left(\Delta M_l^{(i)}(n) | \mathcal{F}_{n-1}^{(i)}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_{i,l}^2(n-1)),$$

причем

$$\sigma_{i,l}^2(n-1) = \mathbf{E}_{\theta} \left( \left( \Delta M_l^{(i)}(n) \right)^2 | \mathcal{F}_{n-1}^{(i)} \right) = \chi_{\{n \in T_i(n)\}} (\sigma^2 + \Delta^2) y_{n-p-l}^2.$$

Доказательство леммы 3 дано в Приложении.

На втором шаге построим последовательную модификацию оценки Юла– Уокера. Сначала для каждого вектора  $\zeta^{(i)}(n)$  в разложении (3.3) введем pмоментов остановки, связанных с мартингалами (3.5). Пусть h > 0. Положим  $\tau_0^{(i)}(h) = 2p$ ,

(3.7) 
$$\tau_{l}^{(i)}(h) = \inf\left\{n > \tau_{l-1}^{(i)}(h): \sum_{k=\tau_{l-1}^{(i)}(h)+1}^{n} \chi_{\{k\in T_{i}(n)\}} y_{k-p-l}^{2} \ge \frac{h}{\Delta^{2}+\sigma^{2}}\right\},\ l = \overline{1, p}.$$

Длительность наблюдений в последовательной процедуре определим по формуле

(3.8) 
$$\tau(h) = \max_{1 \le i \le p+1} \tau_p^{(i)}(h).$$

Введенные моменты остановки (3.7) дают возможность контролировать процесс накопления информации о неизвестных параметрах  $\theta_1, \ldots, \theta_p$ . С их помощью выберем весовые коэффициенты в последовательной оценке Юла– Уокера. Во-первых, найдем корректирующие множители  $\alpha_l^{(i)}(h), 1 \leq l \leq p$ , компенсирующие перескоки в (3.7), из уравнений

$$\sum_{k=\tau_{l-1}^{(i)}+1}^{\tau_l^{(i)}(h)-1} \chi_{\{k\in T_i(\tau_l^{(i)}(h))\}} y_{k-p-l}^2 + \alpha_l^{(i)}(h) y_{\tau_l^{(i)}(h)-p-l}^2 = \frac{h}{\Delta^2 + \sigma^2},$$
$$\tau_0^{(i)}(h) = 2p.$$

Отметим, что моменты остановки  $\tau_1^{(i)}(h), \ldots, \tau_p^{(i)}(h)$  для каждого  $i = \overline{1, p+1}$  образуют возрастающую последовательность, причем каждый из моментов строится по квадратичной характеристике  $\sigma_{i,l}^2(n-1)$  своего мартингала (3.5).

Положим

(3.9) 
$$\beta_{l,k}^{(i)}(h) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau_{l-1}^{(i)}(h) < k < \tau_{l}^{(i)}(h), \\ \alpha_{1}^{(i)}(h), & \text{если } k = \tau_{l}^{(i)}(h), \end{cases}$$

и определим весовые коэффициенты  $\gamma_{l,k}$  равенствами

(3.10) 
$$\gamma_{l,k} = \sum_{i=1}^{p+1} \mu_{k,l}^{(i)} \sqrt{\beta_{l,k}^{(i)}}, \quad \mu_{k,l}^{(i)} = \chi_{\{k \in T_i(k)\}} \chi_{\left(\tau_{l-1}^{(i)}(h), \tau_l^{(i)}(h)\right]}(k).$$

Построение последовательной оценки Юла–Уокера завершим определением.

Определение 1. Для каждого h > 0 последовательный план оценивания вектора параметров  $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^T$  в модели (2.1), (2.2) задается парой  $(\tau(h), \theta^*(h))$ , где  $\tau(h) -$ длительность процедуры, определенная в (3.8),  $\theta^*(h) = (\theta_1^*(h), \ldots, \theta_p^*(h))^T -$ вектор оценок, задаваемый формулами

(3.11) 
$$\theta^*(h) = G^{-1}(h)\vartheta(h).$$

Здесь  $\vartheta(h) = (\vartheta_1(h), \dots, \vartheta_p(h))^{\mathrm{T}} - p$ -мерный вектор с координатами

(3.12) 
$$\vartheta_l(h) = \sum_{k=2p+1}^{\tau(h)} \gamma_{l,k} y_{k-p-l} y_k, \quad 1 \leq l \leq p;$$

G(h) — матрица размера  $p \times p$  с элементами

(3.13) 
$$\langle G(h) \rangle_{l,s} = \sum_{k=2p+1}^{\tau(h)} \gamma_{l,k} y_{k-p-l} y_{k-s}.$$

Отметим, что в отличие от оценки (2.4) последовательная оценка (3.11) строится по выборке случайного объема. При этом длительность процедуры  $\tau(h)$  и весовые коэффициенты  $\gamma_{l,k}$  зависят от выбора значения параметра h, который позволяет контролировать точность оценивания. Используя точечную оценку (3.11), получаем решение задачи доверительного оценивания в неасимптотической постановке.

Теорема 2. Пусть шумы  $\{\varepsilon_k\}$  и  $\{\eta_k\}$  в уравнениях (2.1), (2.2) являются гауссовскими,  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$  и последовательный план оценивания вектора параметров  $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^{\mathrm{T}}$  определяется формулами (3.8), (3.11). Тогда для любого  $0 < \rho < 1$  и h > 0

$$\inf_{\theta \in \Theta} \mathsf{P}_{\theta} \left( \frac{\varkappa_{*}}{\sqrt{h}} \| G(h)(\theta^{*}(h) - \theta) \| < \mu^{*} \right) \ge \rho,$$

где

$$\varkappa_* = \inf_{\theta \in \Theta} \varkappa_{\theta},$$

(3.14)  
$$\mu^* = (p+1) \Phi_p^{-1} \left(\frac{p+\rho}{p+1}\right),$$
$$\Phi_p(a) = \frac{1}{2^{\frac{p}{2}-1} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \int_0^a z^{p-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad a \ge 0$$

Доказательство теоремы 2, приведенное в Приложении, опирается на теорему П.2 о свойствах остановленных квадратично-интегрируемых мартингалов с условно-гауссовскими приращениями, установленных в [24]. Согласно теореме 2 для построения доверительной области для вектора параметров  $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^{\mathrm{T}}$  по заданному коэффициенту доверия  $\rho$  сначала находится пороговое значение  $\mu^*$  по формуле (3.14). Размеры доверительной области для  $\theta$  можно сократить, увеличивая параметр h, определяющий длительность наблюдений в процедуре.

Предложение 2. Пусть AR(p) процесс (2.1) устойчив, моменты остановки  $\tau(h)$  и матрица G(h) определяются равенствами (3.8) и (3.13). Тогда

(3.15) 
$$\lim_{h \to \infty} \frac{\tau(h)}{h} = \frac{p(p+1)}{(\Delta^2 + \sigma^2) \left(\langle F \rangle_{11} + \Delta^2\right)} \quad n.n.,$$
$$\lim_{h \to \infty} \frac{G(h)}{h} = \frac{(p+1)F(A^{\mathrm{T}})^p}{(\Delta^2 + \sigma^2)(\langle F \rangle_{11} + \Delta^2)} \quad n.n.,$$

где

$$F = \sum_{j \ge 0} A^j B(A^{\mathrm{T}})^j, \quad B = \|\sigma^2 \delta_{1,i} \delta_{1,j}\|, \quad A = \begin{pmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_p \\ I_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство предложения 2 приводится в Приложении.

Замечание 2. Из предложения 2 следует, что в случае устойчивого процесса (2.1) диаметр доверительного эллипсоида, определяемый теоремой 2, уменьшается с ростом h как const/ $\sqrt{h}$ .

### 4. Численные результаты

Рассмотрим выборочные свойства построенных оценок и оценок Юла– Уокера для параметра  $\theta$  в модели (2.6) с гауссовским шумами { $\varepsilon_k$ } и { $\eta_k$ } с  $\mathbf{E}\varepsilon_k = \mathbf{E}\eta_k = 0$ ,  $\mathbf{E}\varepsilon_k^2 = 1$  и  $\mathbf{E}\eta_k^2 = 0,01$ . Заметим, что при  $|\theta| < 1$  наблюдаемый процесс { $y_k$ } имеет спектральную плотность [2]

(4.1) 
$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2 + \Delta^2 \left(-2\theta \cos \lambda + 1 + \theta^2\right)}{2\pi \left(-2\theta \cos \lambda + 1 + \theta^2\right)}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

если  $\{x_k\}$  в (2.6) является стационарным. На рис. 1 для длительности  $\tau(h)$  предлагаемой последовательной процедуры (2.14) приводится выборочное поведение отношения  $\tau(h)/h$  в зависимости от параметра  $-1 < \theta < 1$  при h = 300.



Рис. 1. Выборочное поведение отношения  $\tau(h)/h$  (серая линия) и асимптотическая кривая (2.23) (черная линия).

В табл. 1 представлены средние значения последовательных оценок  $\hat{\theta}_{\tau(h)}$ , полученные с помощью процедуры (2.14) с h = 1000, а также средние значения классических оценок Юла–Уокера  $\theta_n$ . Средние в обоих случаях вычислялись по 1000 повторений каждой процедуры. При этом объем выборки для оценок Юла–Уокера выбирался равным соответствующей средней длительности последовательной процедуры, указанной в столбце  $\bar{\tau}$ . Доверительный интервал на основе последовательной оценки (2.14) строился с помощью теоремы 1. При уровне доверия  $\rho = 0,9$  и  $|\theta| < 1$ , используя (2.22), получаем

**Таблица 1.** Усредненные оценки параметра AR(1) (h = 1000)

| θ         | $\hat{\theta}_{\tau(h)}$ | $\theta_n$ | $\bar{	au}$ | θ       | $\hat{\theta}_{\tau(h)}$ | $\theta_n$ | $\bar{	au}$ |
|-----------|--------------------------|------------|-------------|---------|--------------------------|------------|-------------|
| $^{-1,0}$ | -1,0002                  | -0,9798    | 91,5450     | 0,3     | 0,2979                   | 0,2979     | 1832,2460   |
| -0,8      | -0,7969                  | -0,7976    | 736,0060    | $0,\!4$ | 0,3985                   | 0,3987     | 1693,9700   |
| -0,6      | -0,6005                  | -0,5974    | 1291,7620   | $0,\!6$ | 0,5966                   | 0,5992     | 1293,2380   |
| $^{-0,4}$ | -0,3972                  | -0,3998    | 1690,6190   | $0,\!8$ | 0,7984                   | 0,7973     | 729,5970    |
| -0,3      | -0,2994                  | -0,2991    | 1829,6720   | $1,\!0$ | 0,9993                   | $0,\!9817$ | $94,\!9450$ |

**Таблица 2.** Выборочное поведение отношения |s(h)|/h и предела  $\lim |s(h)|/h$  в зависимости от  $\theta$  (h = 300)

| θ               | -1   | -0,8 | -0,6 | -0,4 | -0,2     | 0    | 0,2  | $0,\!4$ | 0,6  | 0,8      | 1    |
|-----------------|------|------|------|------|----------|------|------|---------|------|----------|------|
| $\lim  s(h) /h$ | 1,98 | 1,58 | 1,18 | 0,79 | 0,39     | 0    | 0,39 | 0,79    | 1,18 | 1,58     | 1,98 |
| s(h) /h         | 1,74 | 1,48 | 1,25 | 0,66 | $0,\!54$ | 0,10 | 0,34 | 0,82    | 1,26 | $1,\!65$ | 1,81 |

Таблица 3. Усредненная ширина полуинтервала интервальной оценки (4.2)

| $\theta$ h | -1    | -0,8  | $-0,\!6$ | -0,4  | -0,2      | 0         | $^{0,2}$  | $^{0,4}$ | 0,6   | 0,8   | 1     |
|------------|-------|-------|----------|-------|-----------|-----------|-----------|----------|-------|-------|-------|
| 500        | 0,099 | 0,113 | 0,151    | 0,228 | 0,464     | 20,1      | $0,\!465$ | 0,227    | 0,152 | 0,113 | 0,100 |
| 1000       | 0,068 | 0,080 | 0,106    | 0,161 | 0,326     | $13,\!5$  | 0,330     | 0,160    | 0,106 | 0,080 | 0,068 |
| 2000       | 0,047 | 0,056 | 0,075    | 0,113 | 0,226     | 27,9      | 0,224     | 0,112    | 0,075 | 0,056 | 0,047 |
| 3000       | 0,038 | 0,046 | 0,061    | 0,092 | $0,\!185$ | $69,\! 6$ | $0,\!183$ | 0,092    | 0,061 | 0,046 | 0,038 |
| 5000       | 0,029 | 0,035 | 0,047    | 0,071 | $0,\!140$ | 10,7      | $0,\!143$ | 0,071    | 0,047 | 0,035 | 0,029 |



Рис. 2. Доверительные области для оценки спектральной плотности (4.1).

доверительный интервал для  $\theta$ 

(4.2) 
$$\left(\hat{\theta}_{\tau(h)} - 3,94\frac{h}{|s(h)|}\frac{1}{\sqrt{h}}, \hat{\theta}_{\tau(h)} + 3,94\frac{h}{|s(h)|}\frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Здесь множитель |s(h)|/h выделен, учитывая равенство (2.24). В табл. 2 указаны значения модуля асимптотической кривой (2.24) из предложения 1 для различных значений  $\theta$ , а также выборочное поведение этого отношения при h = 300.

В табл. 3 приводятся выборочные средние для ширины полуинтервала  $\bar{\mu} = 3.94\sqrt{h}/|s(h)|$  доверительного интервала (4.2), полученные по 100 повторениям процедуры, для различных значений  $\theta$  и h. Как видно из табл. 3, качество доверительных последовательных оценок существенно зависит от значений параметра  $\theta$ , если параметр h, определяющий длительность наблюдений  $\tau(h)$ , остается постоянным. При значениях  $\theta$ , близких к нулю, что соответствует ослаблению авторегрессионного сигнала  $x_k$ , требуется значительно увеличивать порог h, чтобы сохранить приемлемую точность оценивания  $\theta$ . Это вполне объяснимо, если учесть в (4.2) асимптотическую зависимость (2.24) от  $\theta$  в предложении 1. При отсутствии условия отделимости  $|\theta|$ от нуля порог h, обеспечивающий приемлемое качество доверительного интервала (4.2), нельзя выбрать априорно, и его приходится подбирать эмпирически, повторяя процедуру оценивания (2.14) для больших значений h. На рис. 2 представлены доверительные области для оценки спектральной плотности (4.1), полученные с помощью доверительных оценок для значений  $\theta = -0.5$  и  $\theta = 0.5$  при  $\rho = 0.9$  и h = 5000.

### 5. Заключение

В разделах 2 и 3 предложены и исследованы последовательные процедуры доверительного оценивания параметров гауссовской авторегрессии по наблюдениям с аддитивным гауссовским шумом. Последовательная оценка вектора неизвестных параметров для авторегрессии любого порядка строится на основе одной классической оценки Юла–Уокера, вводя специальное правило прекращения наблюдений и используя весовые коэффициенты в структуре оценки. В теоремах 1 и 2 устанавливается, что предлагаемые последовательные оценки Юла–Уокера дают решение задачи идентификации зашумленной авторегрессии в неасимптотической постановке, позволяя определить длительность наблюдений в зависимости от требуемого качества оценивания. В разделе 4 рассматривается численный пример доверительного оценивания спектральной плотности зашумленной авторегрессии. Результаты могут использоваться в задачах идентификации и управления.

Авторы выражают признательность анонимным рецензентам за конструктивные замечания.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем теорему П.1 и теорему П.2 о свойствах остановленных мартингалов с условно-гауссовскими приращениями из публикаций [23] и [24], использованных в разделах 2 и 3 при выборе весовых коэффициентов (2.15) и (3.9), (3.10) в последовательных оценках Юла–Уокера (2.14) и (3.11), а также при определении длительности процедуры. Дадим доказательства некоторых технических результатов.

Teopema II.1. Пусть  $(M_k, \mathcal{F}_k)_{k \ge 0}$  — квадратично интегрируемый мартингал [23] такой, что

а) его квадратическая характеристика удовлетворяет условию

$$\mathsf{P}_{\theta}\left(\langle M\rangle_{\infty}=+\infty\right)=1;$$

б) Law $(\Delta M_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathcal{N}(0, \sigma_{k-1}^2), k = 1, 2, ..., m.e. \mathcal{F}_{k-1} - условное pacnpe$  $деление <math>\Delta M_k = M_k - M_{k-1}$  является гауссовским с параметрами 0 и  $\sigma_{k-1}^2 = \mathbf{E}\left((\Delta M_k)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\right).$ 

Для каждого h определим момент остановки

(II.1) 
$$\tau = \tau(h) = \inf\left\{n > 0 : \sum_{k=1}^{n} \sigma_{k-1}^2 \ge h\right\}, \quad \inf\{\varnothing\} = \infty,$$

и случайную величину

$$m(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{k=1}^{\tau(h)} \sqrt{\beta_k(h)} \Delta M_k, \quad \beta_k(h) = \begin{cases} 1, & ecnu \ 1 \le k < \tau(h), \\ \alpha(h), & ecnu \ k = \tau(h); \end{cases}$$

 $\alpha(h)$  — множитель, определяемый из уравнения

$$\sum_{k=1}^{\tau(h)-1} \sigma_{k-1}^2 + \alpha(h)\sigma_{\tau(h)-1}^2 = h.$$

Тогда для любого h > 0 величина m(h) является стандартной гауссовской. Доказательство леммы 1. Проверим, что  $(\zeta_1(n), \mathcal{F}_n^{(1)})_{n \ge 3}$  — мартингал. Измеримость  $\zeta_1(n)$  относительно  $\mathcal{F}_n^{(1)}$  следует из определений (2.10), (2.11). Покажем, что  $\mathbf{E}(\zeta_1(n+1)|\mathcal{F}_n^{(1)}) = \zeta_n^{(1)}$ . Рассмотрим, например, случай четного n. Пусть n = 2l, тогда

$$\zeta_1(2l+1) = \sum_{k=3}^{2l+1} \chi_{\{k \in T_1(2l+1)\}} y_{k-2} \xi_k.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\left(\zeta_{1}(2l+1)|\mathcal{F}_{2l-1}^{(1)}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=3}^{2l+1}\chi_{\{k\in T_{1}(2l+1)\}}y_{k-2}\xi_{k}|\mathcal{F}_{2l-1}^{(1)}\right) =$$
$$= \sum_{k=3}^{2l}\chi_{\{k\in T_{1}(2l+1)\}}y_{k-2}\xi_{k} + \chi_{\{(2l+1)\in T_{1}(2l+1)\}}y_{2l-1}\mathbf{E}\left(\xi_{2l+1}|\mathcal{F}_{2l-1}^{(1)}\right) = \zeta_{1}(2l).$$

Проверка мартингальности  $\zeta_2(n)$  проводится аналогично.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Покажем, что требуемый результат следует из теоремы П.1. Введем случайные процессы

(II.2) 
$$M_n^{(1)} = \sum_{k=3}^n \chi_{\{k \in T_1(n)\}} y_{k-2} \tilde{\xi}_k, \quad M_n^{(2)} = \sum_{k=3}^n \chi_{\{k \in T_2(n)\}} y_{k-2} \tilde{\xi}_k, \quad n \ge 3.$$

Процессы  $\left(M_n^{(1)}, \mathcal{F}_n^{(1)}\right)_{n \ge 3}$  и  $\left(M_n^{(2)}, \mathcal{F}_n^{(2)}\right)_{n \ge 3}$  являются мартингалами, причем

(II.3) 
$$\mathbf{E}_{\theta} \left( \left( \Delta M_{n}^{(1)} \right)^{2} | \mathcal{F}_{n-1}^{(1)} \right) = y_{n-2}^{2} \mathbf{E}_{\theta} \tilde{\xi}_{n}^{2} \chi_{\{n \in T_{1}(n)\}}, \\
\mathbf{E}_{\theta} \left( \left( \Delta M_{n}^{(2)} \right)^{2} | \mathcal{F}_{n-1}^{(2)} \right) = y_{n-2}^{2} \mathbf{E}_{\theta} \tilde{\xi}_{n}^{2} \chi_{\{n \in T_{2}(n)\}}; \quad \mathbf{E} \tilde{\xi}_{n}^{2} = \Delta^{2} + \sigma^{2}.$$

Проверим эти свойства для  $M_n^{(1)}$ . По определению  $T_1(n)$  и  $T_2(n)$  в (2.9) получаем

$$M_n^{(1)} = \sum_{k=3}^{n-1} \chi_{\{k \in T_1(n)\}} y_{k-2} \tilde{\xi}_k + \chi_{\{n \in T_1(n)\}} y_{n-2} \tilde{\xi}_n =$$
$$= M_{n-1}^{(1)} + \chi_{\{n \in T_1(n)\}} y_{n-2} \tilde{\xi}_n.$$

Отсюда  $\Delta M_n^{(1)} = \chi_{\{n \in T_1(n)\}} y_{n-2} \tilde{\xi}_n$ . Поэтому

$$\mathbf{E}_{\theta}\left(\left(\Delta M_{n}^{(1)}\right)^{2}|\mathcal{F}_{n-1}^{(1)}\right) = \chi_{\{n \in T_{1}(n)\}}\mathbf{E}_{\theta}\left(y_{n-2}^{2}\tilde{\xi}_{n}^{2}|\mathcal{F}_{n-1}^{(1)}\right).$$

Заметим, что если  $n \in T_1(n)$ , то  $\mathcal{F}_{n-1}^{(1)} = \mathcal{F}_{n-2}^{(1)}$ . Если, например, n нечетно, то число n-1 четно. Следовательно,  $m_1(n) = n$ ,  $m_1(n-1) = m_1(n-2)$ . По определению  $\mathcal{F}_{n-1}^{(1)} = \mathcal{F}_{n-2}^{(1)}$ . Так как  $\xi_n^2$  не зависит от  $\mathcal{F}_{n-2}^{(1)}$ , то

$$\mathbf{E}_{\theta}\left(\left(\Delta M_{n}^{(1)}\right)^{2}|\mathcal{F}_{n-1}^{(1)}\right) = y_{n-2}^{2}\mathbf{E}_{\theta}\left(\tilde{\xi}_{n}^{2}\chi_{\{n\in T_{1}(n)\}}\right).$$

Далее заметим, что мартингалы  $(M_n^{(1)}, \mathcal{F}_n^{(1)})$  и  $(M_n^{(2)}, \mathcal{F}_n^{(2)})$ , определяемые равенствами (П.2), и их квадратические характеристики (П.3) удовлетворяют условиям теоремы П.1. При этом момент остановки  $\tau_1(h)$  в (2.12) совпадает с (П.1). В силу теоремы П.1 случайные величины  $\tilde{\zeta}_1(h)/\sqrt{h}$  и  $\tilde{\zeta}_2(h)/\sqrt{h}$  являются стандартными гауссовскими. Лемма 2 доказана.

Доказательство предложения 2. Модель (2.1), (2.2) в векторной форме записывается в виде

(II.4) 
$$X_k = AX_{k-1} + \nu_k, \quad Y_k = X_k + \zeta_k,$$

где  $X_k = (x_k, \dots, x_{k-p+1})^{\mathrm{T}}, \nu_k = (\varepsilon_k, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}, \zeta_k = (\eta_k, \dots, \eta_{k-p+1})^{\mathrm{T}},$  $A = \begin{pmatrix} \theta_1 & \dots & \theta_p \\ I_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$ 

Для анализа  $\tau(h)$  потребуется асимптотическое поведение суммы

$$C_n^{(i)} = \sum_{k=2p+1}^n \chi_{\{k \in T_i(n)\}} Y_{k-p-1} Y_{k-p-1}^{\mathrm{T}}.$$

Подставив  $Y_k$  из (П.4), имеем разложение

$$(\Pi.5) \qquad C_n^{(i)} = U_n^{(i)} + V_n^{(i)} + R_n^{(i)};$$

$$U_n^{(i)} = \sum_{k=2p+1}^n \chi_{\{k \in T_i(n)\}} X_{k-p-1} X_{k-p-1}^{\mathrm{T}},$$

$$V_n^{(i)} = \sum_{k=2p+1}^n \chi_{\{k \in T_i(n)\}} \zeta_{k-p-1} \zeta_{k-p-1}^{\mathrm{T}},$$

$$R_n^{(i)} = \sum_{k=2p+1}^n \chi_{\{k \in T_i(n)\}} \zeta_{k-p-1} X_{k-p-1}^{\mathrm{T}} + \sum_{k=2p+1}^n \chi_{\{k \in T_i(n)\}} X_{k-p-1} \zeta_{k-p-1}^{\mathrm{T}}.$$

Учитывая (3.1), получаем

(II.6) 
$$U_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{d_i(n)} Z_j Z_j^{\mathrm{T}}, \quad Z_j = X_{(p+1)j+i-2}.$$

140

Последовательность  $\{Z_j\}$ удовлетворяет векторному уравнению авторег<br/>рессии

$$Z_j = A^{p+1}Z_{j-1} + w_j, \quad w_j = \sum_{s=1}^{p+1} A^{p+1-s} \nu_{(p+1)(j-1)+i-2+s},$$

причем

$$\mathbf{E}w_j = 0, \quad \mathbf{E}w_j w_j^{\mathrm{T}} = \sum_{l=0}^p A^l B(A^{\mathrm{T}})^l = \tilde{B}, \quad B = \|\sigma^2 \delta_{1,i} \delta_{1,j}\|.$$

Поскольку процесс  $Z_j$  устойчив, то (см., например, [2])

(II.7)  
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Z_j Z_j^{\mathrm{T}} = \tilde{F} \quad \text{п.н.};$$
$$\tilde{F} = \sum_{j \ge 0} A^{(p+1)j} \tilde{B} (A^{\mathrm{T}})^{(p+1)j} = \sum_{j \ge 0} A^j B (A^{\mathrm{T}})^j =: F.$$

Из (П.6) и (П.7) с учетом (3.1) находим

(II.8) 
$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_n^{(i)}}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{U_n^{(i)}}{d_i(n)} \frac{d_i(n)}{n} = \frac{F}{p+1} \quad \text{II.H}$$

Далее непосредственно проверяется, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{V_n^{(i)}}{n} = \frac{\Delta^2}{p+1} I_p, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{R_n^{(i)}}{n} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Отсюда и из (П.5), (П.8) получаем

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} C_n^{(i)} = (p+1)^{-1} \left( F + \Delta^2 I_p \right).$$

Так как

$$\sum_{k=2p+1}^{n} \chi_{\{k \in T_i(n)\}} y_{k-p-l}^2 = \langle C_n^{(i)} \rangle_{ll},$$

то

(II.9) 
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2p+1}^{n} \chi_{\{k \in T_i(n)\}} y_{k-p-l}^2 = \frac{1}{p+1} \left( \langle F \rangle_{11} + \Delta^2 \right), \quad l = \overline{1, p}$$

Найдем теперь асимптотику для моментов остановки  $\tau_l^{(i)}(h).$  По определению  $\tau_1^{(i)}(h)$  в (3.7) имеем

$$\sum_{k=2p+1}^{\tau_1^{(i)}(h)-1} \chi_{\left\{k \in T_i\left(\tau_1^{(i)}\right)\right\}} y_{k-p-1}^2 < \frac{h}{\Delta^2 + \sigma^2} \leqslant \sum_{k=2p+1}^{\tau_1^{(i)}(h)} \chi_{\left\{k \in T_i\left(\tau_1^{(i)}\right)\right\}} y_{k-p-1}^2.$$

Отсюда, используя (П.9), получаем

$$\lim_{h \to \infty} \frac{h}{(\Delta^2 + \sigma^2)\tau_1^{(i)}(h)} = \frac{1}{p+1} \left( \langle F \rangle_{11} + \Delta^2 \right),$$

т.е.

$$\lim_{h \to \infty} \frac{\tau_1^{(i)}(h)}{h} = \frac{p+1}{\left(\Delta^2 + \sigma^2\right)\left(\langle F \rangle_{11} + \Delta^2\right)}.$$

Аналогично находим, что

(II.10) 
$$\lim_{h \to \infty} \frac{\tau_l^{(i)}(h)}{h} = \frac{l(p+1)}{(\Delta^2 + \sigma^2)\left(\langle F \rangle_{11} + \Delta^2\right)}, \quad 2 \leqslant l \leqslant p.$$

Принимая во внимание (3.8), получаем соотношение (3.15) для длительности последовательной процедуры. Далее рассмотрим асимптотическое поведение матрицы G(h), определенной в (3.13). Для устойчивого процесса (2.1) справедливо свойство [2]

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2p+1}^{n} Y_{k-p-1} Y_{k-1}^{\mathrm{T}} = F(A^{\mathrm{T}})^{p}.$$

Аналогично (П.8) устанавливается, что матрица

$$D^{(i)}(n) = \sum_{k=2p+1}^{n} \chi_{\{k \in T_i(n)\}} Y_{k-p-1} Y_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

удовлетворяет предельному соотношению

(II.11) 
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} D^{(i)}(n) = \frac{1}{p+1} F(A^{\mathrm{T}})^{p}.$$

Далее, подставляя коэффициенты (3.10) в элемент матрицы (3.13) и учитывая, что  $y_{k-p-l} = \langle Y_{k-p-1} \rangle_l, y_{k-s} = \langle Y_{k-1} \rangle_s$ , получаем

(II.12) 
$$\langle G(h) \rangle_{l,s} = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{k=\tau_{l-1}^{(i)}(h)+1}^{\tau_l^{(i)}(h)} \chi_{\{k \in T_i(k)\}} \sqrt{\beta_{l,k}^{(i)}} \langle Y_{k-p-1} Y_{k-1}^{\mathrm{T}} \rangle_{l,s}.$$

Учитывая определение коэффициентов (3.9), заметим, что внутренняя сумма с точностью до одного слагаемого, отвечающего моменту  $\tau_l^{(i)}(h)$ , совпадает с суммой

$$\sum_{k=\tau_{l-1}^{(i)}(h)+1}^{\tau_{l}^{(i)}(h)} \chi_{\{k\in T_{i}(k)\}} \langle Y_{k-p-1}Y_{k-1}^{\mathrm{T}} \rangle_{l,s} = \\ = \left\langle D^{(i)} \left(\tau_{l}^{(i)}(h)\right) \right\rangle_{l,s} - \left\langle D^{(i)} \left(\tau_{l-1}^{(i)}(h)\right) \right\rangle_{l,s}.$$

142

Отсюда и из (П.10), (П.11) следует, что

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \sum_{k=\tau_{l-1}^{(i)}(h)+1}^{\tau_{l}^{(i)}(h)} \chi_{\{k \in T_{i}(k)\}} \langle Y_{k-p-1} Y_{k-1}^{\mathrm{T}} \rangle_{l,s} =$$

$$= \lim_{h \to \infty} \left( \frac{\tau_{l}^{(i)}(h)}{h} \frac{\left\langle D^{(i)}\left(\tau_{l}^{(i)}(h)\right) \right\rangle_{l,s}}{\tau_{l}^{(i)}(h)} - \frac{\tau_{l-1}^{(i)}(h)}{h} \frac{\left\langle D^{(i)}\left(\tau_{l-1}^{(i)}(h)\right) \right\rangle_{l,s}}{\tau_{l-1}^{(i)}(h)} \right) =$$

$$= \frac{\left\langle F(A^{\mathrm{T}})^{p} \right\rangle_{l,s}}{(\Delta^{2} + \sigma^{2})\left(\langle F \rangle_{11} + \Delta^{2}\right)}.$$

Используя это равенство в (П.12), получаем

$$\lim_{h \to \infty} \frac{G(h)}{h} = \frac{(p+1)F(A^{\mathrm{T}})^p}{(\Delta^2 + \sigma^2)(\langle F \rangle_{11} + \Delta^2)}.$$

Предложение 2 доказано.

Теорема П.2. Пусть заданы [24]:

- 1) вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$  с фильтрацией  $(\mathcal{F})_{k \geq 0}$ ;
- 2) семейство  $\left(M_k^{(l)}, \mathcal{F}_k\right)_{k\geq 0}, \ l = \overline{1, p}, \ \kappa вадратично интегрируемых мар$ тингалов с квадратическими характеристиками  $\{\langle M^{(l)}\rangle_n\}_{n\geq 1}, l=\overline{1,p}, ma-$
- кими, что
  - a)  $\mathsf{P}\left(\langle M^{(l)} \rangle_{\infty} = +\infty\right) = 1, \quad l = \overline{1, p};$ 6) Law  $\left(\Delta M_{k}^{(l)} | \mathcal{F}_{k-1}\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_{l}^{2}(k-1)), \ k = 1, 2, \dots, \ l = \overline{1, p}, \ m.e. \ \mathcal{F}_{k-1} \mathcal{F}_{k-1}$

условное распределение приращения  $\Delta M_k^{(l)} = M_k^{(l)} - M_{k-1}^{(l)}$  является гауссовским с параметрами 0 и  $\sigma_l^2(k-1) = \mathbf{E}\left(\left(\Delta M_k^{(l)}\right)^2 | \mathcal{F}_{k-1}\right).$ 

Для каждого h > 0 определим момент остановки

$$\tau_{l} = \tau_{l}(h) = \inf\left\{n > \tau_{l-1}(h) : \sum_{k=\tau_{l-1}+1}^{n} \sigma_{l}^{2}(k-1) \ge h\right\}, \quad l = \overline{1, p},$$
  
$$\tau_{0} = \tau_{0}(h) = 0, \quad \inf\{\varnothing\} = +\infty,$$

и случайные величины

$$m_{l}(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{k=\tau_{l-1}+1}^{\tau_{l}} \sqrt{\beta_{k}(h,l)} \Delta M_{k}^{(l)}, \quad l = \overline{1,p};$$
  
$$\beta_{k}(h,l) = \begin{cases} 1, & ec_{\mathcal{A}\mathcal{U}} \tau_{l-1}(h) < k < \tau_{l}(h), \\ \alpha_{l}(h), & ec_{\mathcal{A}\mathcal{U}} k = \tau_{l}(h); \end{cases}$$

 $\alpha_l(h),\ l=\overline{1,p},\ -$  корректирующие множители, определяемые из уравнений

$$\sum_{k=\tau_{l-1}+1}^{\tau_l-1} \sigma_l^2(k-1) + \alpha_l(h)\sigma_l^2(\tau_l(h)-1) = h.$$

Тогда для любого h > 0 случайный вектор  $m(h) = (m_1(h), \ldots, m_p(h))^T$  имеет стандартное нормальное распределение, т.е.  $m(h) \sim \mathcal{N}(0, I_p)$ , где  $I_p$  – единичная матрица размерности p.

Доказательство леммы 3. Запишем (3.4) в виде

$$M_{l}^{(i)}(n) = \sum_{k=2p+1}^{n-1} \chi_{\{k \in T_{i}(n)\}} y_{k-p-l} \tilde{\xi}_{k} + \chi_{\{n \in T_{i}(n)\}} y_{n-p-l} \tilde{\xi}_{n} = M_{i}^{(l)}(n-1) + \chi_{\{n \in T_{i}(n)\}} y_{n-p-l} \tilde{\xi}_{n},$$

т.е.

(II.13) 
$$\Delta M_l^{(i)}(n) = \chi_{\{n \in T_i(n)\}} y_{n-p-l} \tilde{\xi}_n$$

Отсюда имеем

(II.14) 
$$\sigma_{i,l}^2(n-1) = \mathbf{E}_{\theta} \left( \left( \Delta M_l^{(i)}(n) \right)^2 | \mathcal{F}_{n-1}^{(i)} \right) =$$
$$= \chi_{\{n \in T_i(n)\}} \mathbf{E}_{\theta} \left( y_{n-p-l}^2 \tilde{\xi}_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}^{(i)} \right),$$

где  $\mathcal{F}_{n-1}^{(i)}$  —  $\sigma$ -алгебра, определенная в (3.2). Далее заметим, что если  $n \in T_i(n)$ , то  $t_i(n) = n$ ,  $t_i(n-1) = n-p-1$ . Поэтому  $\mathcal{F}_{n-1}^{(i)} = \mathcal{F}_{n-p-1}^{(i)}$  и случайная величина  $y_{n-p-l}^2$  измерима относительно  $\mathcal{F}_{n-p-1}^{(i)}$ , а  $\tilde{\xi}_n$  не зависит от  $\mathcal{F}_{n-p-1}^{(i)}$ . В силу (3.6) и гауссовости  $\tilde{\xi}_n$  приращение (П.13) имеет  $\mathcal{F}_{n-1}^{(i)}$  — условно-гауссовское распределение, причем, учитывая (П.14),  $\sigma_{i,l}^2(n-1) = \chi_{\{n \in T_i(n)\}}(\sigma^2 + \Delta^2)y_{n-p-l}^2$ . Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Подставляя  $y_k$  из (2.1) в (3.12) и учитывая (3.13), получаем

$$(\Pi.15) \qquad \vartheta_{l}(h) = \sum_{k=2p+1}^{\tau(h)} \gamma_{l,k} y_{k-p-l} \left( \sum_{s=1}^{p} y_{k-s} \theta_{s} + \xi_{k} \right) = \\ = \sum_{s=1}^{p} \left( \sum_{k=2p+1}^{\tau(h)} \gamma_{l,k} y_{k-p-l} y_{k-s} \right) \theta_{s} + \sum_{k=2p+1}^{\tau(h)} \gamma_{l,k} y_{k-p-l} \xi_{k} = \langle G(h) \theta \rangle_{l} + \zeta_{l}(n),$$

где

(II.16) 
$$\zeta_l(h) = \sum_{k=2p+1}^{\tau(h)} \gamma_{l,k} y_{k-p-l} \xi_k, \quad 1 \leq l \leq p.$$

144

В векторной форме система уравнений (П.15) имеет вид

(II.17) 
$$\vartheta(h) = G(h)\theta + \zeta(h); \quad \zeta(h) = (\zeta_1(h), \dots, \zeta_p(h))^{\mathrm{T}}.$$

Подставляя весовые коэффициенты (3.10) в (П.16), получаем

$$(\Pi.18) \qquad \zeta_l(h) = \sum_{i=1}^{p+1} \zeta_l^{(i)}(h) ,$$
  
$$(\Pi.18) \qquad \zeta_l^{(i)}(h) = \sum_{k=\tau_{l-1}^{(i)}(h)+1}^{\tau_l^{(i)}(h)} \sqrt{\beta_{l,k}^{(i)}(h)} \chi_{\{k\in T_i(k)\}} y_{k-p-l} \xi_k$$

Введя векторы  $\zeta^{(i)}(h) = \left(\zeta_1^{(i)}(h), \dots, \zeta_p^{(i)}(h)\right)^{\mathrm{T}}, i = \overline{1, p+1}$ , имеем разложение

$$\zeta(h) = \sum_{i=1}^{p+1} \zeta^{(i)}(h).$$

Далее рассмотрим вектор

(II.19) 
$$m^{(i)}(h) = \left(m_1^{(i)}(h), \dots, m_p^{(i)}(h)\right)^{\mathrm{T}} := \varkappa_{\theta} h^{-1/2} \zeta^{(i)}(h).$$

Учитывая (3.5), координаты этого вектора запишем в виде

(II.20) 
$$m_l^{(i)}(h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{k=\tau_{l-1}^{(i)}(h)+1}^{\tau_l^{(i)}(h)} \sqrt{\beta_{l,k}^{(i)}(h)} \Delta M_l^{(i)}(k).$$

Используя (П.17), (П.18), (П.19), получаем

(II.21) 
$$G(h) \left(\theta^*(h) - \theta\right) = \frac{\sqrt{h}}{\varkappa_{\theta}} \sum_{i=1}^{p+1} m^{(i)}(h).$$

К векторам (П.19) применима теорема П.2, поскольку мартингалы (3.5) и моменты остановки (3.7) в (П.20) удовлетворяют в силу леммы 3 всем условиям этой теоремы. Согласно теореме П.2 все векторы (П.19) имеют стандартное *p*-мерное нормальное распределение  $\mathcal{N}(0, I_p)$ . Отсюда следует, что квадраты норм этих векторов  $||m^{(i)}(h)||^2$ ,  $i = \overline{1, p+1}$ , имеют  $\chi^2$  распределение с *p* степенями свободы, т.е. Р ( $||m^{(i)}(h)|| > a$ ) =  $1 - \Phi_p(a)$ , где  $\Phi_p(a)$  — функция распределения, определенная в (3.14). Построим доверительную область для  $\theta$  по заданной доверительной вероятности. Из (П.21) имеем неравенство

(II.22) 
$$\frac{\varkappa_{\theta}}{\sqrt{h}} \|G(h)(\theta^*(h) - \theta)\| \leqslant \sum_{i=1}^{p+1} \|m^{(i)}(h)\|$$

Используя оценку

(II.23) 
$$\mathsf{P}_{\theta}\left(\sum_{i=1}^{p+1} \|m^{(i)}(h)\| > \mu\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p+1} \mathsf{P}_{\theta}\left(\|m^{(i)}(h)\| > \frac{\mu}{p+1}\right) = (p+1)\mathsf{P}_{\theta}\left(\|m^{(1)}(h)\| > \frac{\mu}{p+1}\right) = (p+1)\left(1 - \Phi_{p}\left(\frac{\mu}{p+1}\right)\right),$$

найдем  $\mu$  по заданному  $\rho$  из уравнения  $(p+1)(1 - \Phi_p(\mu/(p+1))) = 1 - \rho$ . Корень этого уравнения  $\mu^*$  определяется формулой (3.14). Используя (П.22), (П.23), получаем

$$\mathsf{P}_{\theta}\left(\frac{\varkappa_{\theta}}{\sqrt{h}}\|G(h)(\theta^{*}(h)-\theta)\|\leqslant\mu^{*}\right)\geqslant\rho.$$

Теорема 2 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Ljung L., Söderstrom T. Theory and Practice of recursive Identification. Cambridge, Massachusetts: London The MIT Press, 1986.
- 2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.
- 3. Brockwell P.J., Davis R.A. Time Series: Theory and Methods. N.Y.: Springer Science+Business Media, 1991.
- 4. Васильев В.А., Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание функционалов от распределений стационарных последовательностей. М.: Наука, 2004.
- Кашковский Д.В., Конев В.В. Последовательная идентификация линейной динамической системы со случайными параметрами // АиТ. 2008. № 8. С. 82–95. Kashkovskii D.V., Konev V.V. Successive Identification of the Random-parameter Linear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 8. P. 1344–

Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Robust Model Selection for a Semimartingale

- Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Robust Model Selection for a Semimartingale Continuous Time Regression from Discrete Data // Stoch. Process. Their Appl. 2015. V. 125. No. 1. P. 294–326.
- Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров тригонометрической регрессии с непрерывным временем // АнТ. 2016. № 6. С. 61–80. Emel'yanova T.V., Konev V.V. On Sequential Estimation of the Parameters of Continuous-time Trigonometric Regression // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 992–1008.
- 8. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
- 9. Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16. № 2. С. 394–396.
- 10. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
- Lai T.L., Siegmund D. Fixed Accuracy Estimation of an Autoregressive Parameter // Ann. Statist. 1983. V. 11. P. 478–485.
- Galtchouk L., Konev V. On Asymptotic Normality of Sequential LS-estimate for Unstable Autoregressive Process AR(2) // J. Multivariate Anal., Academic Press. 2010. V. 101. No. 10. P. 2616–2636.

- Борисов В.З., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров дискретных процессов // АмТ. 1977. № 10. С. 58–64.
   Borisov V.Z., Konev V.V. On Sequential Parameter Estimation in Discrete-time Processes // Autom. Remote Control. 1977. V. 38. No. 10. P. 1475–1480.
- 14. Воробейчиков С.Э., Конев В.В. О последовательной идентификации стохастических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 4. С. 91–98.
- Конев В.В., Пергаменщиков С.М. Последовательные планы идентификации параметров динамических систем // АнТ. 1981. № 7. С. 84–92.
   Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. Sequential Plans of Parameter Identification in Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 1981. V. 42. No. 7. Part 1. P. 917–924.
- 16. Васильев В.А., Конев В.В. Последовательное оценивание параметров динамических систем при неполном наблюдении // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1982. № 6. С. 145–154.
- Xia Y., Zheng W.X. Novel Parameter Estimation of Autoregressive Signals in the Presence of Noise // Automatica. 2015. V. 62. P. 98–105.
- 18. Куликова М.В. Максимально правдоподобное оценивание линейных стохастических систем в классе последовательных квадратно-корневых ортогональных методов фильтрации // АнТ. 2011. № 4. С. 99–120. Kulikova M.V. Maximum Likelihood Estimation of Linear Stochastic Systems in the Class of Sequential Square-root Orthogonal Filtering Methods // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 4. P. 766–786.
- Diversi R., Guidorzi R., Soverini U. Identification of Autoregressive Models in the Presence of Additive Noise // Int. J. Adapt. Control Signal Process. 2008. V. 22. No. 5. P. 465–481.
- Labarre D., Grivel E., Berthoumieu Y., Todini E., Najim M. Consistent Estimation of Autoregressive Parameters from Noisy Observations Based on Two Interacting Kalman Filters // Signal Processing. 2006. V. 86. No. 10. P. 2863–2876.
- 21. Zheng W.X. Fast Identification of Autoregressive Signals from Noisy Observations // IEEE Trans. Circuits and Systems-II: Express Briefs. 2005. V. 52. No. 1. P. 43–48.
- 22. Pagano M. Estimation of Models of Autoregressive Signal Plus White Noise // Ann. Stat. 1974. V. 2. No. 1. P. 99–108.
- 23. Конев В.В. Об одном свойстве мартингалов с условно-гауссовскими приращениями и его применении в теории неасимптотических выводов // ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 523–527.

Konev V.V. On One Property of Martingales with Conditionally Gaussian Increments and Its Application in the Theory of Nonasymptotic Inference // Doklady Mathematics. 2016. V. 471. No. 5. P. 523–527.

- 24. Konev V., Nazarenko B. Sequential Fixed Accuracy Estimiton for Nonstationary Autoregressive Processes // AISM. 2020. V. 72. No. 1. P. 235–264.
- 25. Воробейчиков С.Э., Конев В.В. О доверительном последовательном оценивании параметров стохастических динамических систем с условно-гауссовскими шумами // АнТ. 2017. № 10. С. 90–108.

Vorobeichikov S.E., Konev V.V. On Sequential Confidence Estimation of Parameters of Stochastic Dynamical Systems with Conditionally Gaussian Noises // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1803–1818.

 Курэканский А.Б., Фурасов В.Д. Идентификация билинейных систем. Гарантированные псевдоэллипсоидальные оценки // АиТ. 2000. № 1. С. 41–53. *Kurzhanskii A.B., Furasov V.D.* Identification of Bilinear Systems. Guaranteed Pseudoellipsoidal Estimates // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 1. P. 38–49.

- 27. Konev V.V., Pergamenshchikov S.M. General Model Selection Estimation of a Periodic Regression with a Gaussian Noise // AISM. 2010. V. 62. No. 6. P. 1083–1111.
- 28. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
- 29. Tartakovsky A., Nikiforov I., Basseville M. Sequential Analysis: Hypothesis Testing and Changepoint Detection. Chapman & Hall/CRC Press, 2015.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 03.02.2020 После доработки 02.04.2020 Принята к публикации 15.01.2021