

© 2021 г. Ю.Г. КОКУНЬКО (juliakokunko@gmail.com),  
С.А. КРАСНОВА, д-р техн. наук (skrasnova@list.ru),  
В.А. УТКИН, д-р. техн. наук (viktorutkin013@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ ДИФФЕРЕНЦИАТОРОВ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ КОРРЕКТИРУЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ<sup>1</sup>

На основе теории наблюдателей состояния динамических объектов, функционирующих в условиях неопределенности, для сигнала, поступающего в реальном времени (например, задающего воздействия в системе слежения), предложен метод восстановления его производных высокого порядка, не требующий ни численного дифференцирования, ни наличия аналитического описания данного сигнала. Динамический дифференциатор строится как реплика виртуальной канонической модели с неизвестным, но ограниченным входом. Использование ограниченных корректирующих воздействий и специальной структуры дифференциатора позволяет уменьшить выбросы получаемых оценок в начале переходного процесса по сравнению с линейным дифференциатором с большими коэффициентами. В качестве приложения рассмотрена задача отслеживания центром масс беспилотного летательного аппарата пространственной траектории, приведены результаты моделирования.

*Ключевые слова:* динамический дифференциатор, наблюдатель состояния, неопределенный вход, каскадный синтез, слежение, БПЛА.

DOI: 10.31857/S0005231021070035

### 1. Введение

Во многих практических задачах возникает необходимость в дифференцировании сигналов. Например, для функционирования следящих систем с автоматическим управлением, как правило, требуется текущая информация не только о задающих воздействиях, но и об их производных до  $n$ -го порядка включительно, где  $n$  — относительный порядок одноканальной системы (или максимальный элемент вектора относительного порядка многоканальной системы) [1, 2]. В некоторых системах слежения можно обойтись без непосредственной генерации производных задающих воздействий и полагать их, как и внешние возмущения, неизвестными ограниченными функциями времени. Тогда при определенных условиях можно использовать для синтеза выходное отображение и комплексный подход к задаче наблюдения неизмеряемых сигналов. В этом случае наблюдатель строится как реплика системы “вход–выход”, записанной относительно ошибки слежения, и по ее измерениям оцениваются смешанные переменные (линейные комбинации функций от

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00363А).

переменных состояния, внешних возмущающих воздействий и задающих сигналов, а также их производных), по которым формируется обратная связь [3–5]. Для подавления внешних возмущений в рамках этого подхода могут использоваться глубокие обратные связи, скользящие режимы или их допредельные аналоги в наблюдателе смешанных переменных с последующим синтезом комбинированной обратной связи по получаемым оценкам. Другая альтернатива связана с использованием указанных методов непосредственно в законе управления, когда производные задающих и возмущающих воздействий неизвестны и не подлежат оцениванию [6, 7]. При этом возмущение непосредственно действует на регулируемую переменную и не может быть полностью подавлено из-за физических ограничений на управление, что приводит к большей ошибке слежения, чем в первом случае. Таким образом, для создания высокоточных систем слежения в общем случае необходима текущая информация о производных задающих воздействий до  $n$ -го порядка включительно.

Для объектов управления с однотипными режимами работы и простым контуром движения, описываемым одним аналитическим выражением, эта проблема решается с помощью составления динамического генератора задающих воздействий или аналитического описания желаемой траектории, что дает информацию о производных целевых сигналов требуемого порядка. Однако в системах управления автономными движущимися объектами на плоскости или в пространстве полное аналитическое описание сложной траектории, которая представлена разными функциями на разных временных интервалах, является достаточно трудоемким процессом, требующим привлечения теории графов, сплайновой интерполяции и других методов [8–12]. С другой стороны, численное дифференцирование задающих воздействий приводит к нежелательному возбуждению помех и появлению запаздывания, причем погрешности увеличиваются с ростом порядка производной, получаемой численными методами [13].

В данной статье представлен метод получения информации о производных задающих воздействий по их текущим значениям, основанный на теории наблюдателей состояния объектов управления при действии внешних возмущений. Эти алгоритмы, реализуемые в вычислительной среде в реальном времени, не требуют ни численного дифференцирования данных сигналов, ни их аналитического описания. Суть заключается в построении виртуального (т.е. реально не существующего) генератора задающего воздействия в виде динамической модели с неизвестным входом и последующим синтезом наблюдателя состояния этого генератора с использованием в корректирующих воздействиях наблюдателя реального задающего воздействия, поступающего из автономного источника. Особенности построения указанного наблюдателя: при его синтезе реализуется метод разделения движений с помощью непрерывных, ограниченных по модулю корректирующих воздействий, что позволяет избежать больших выбросов в получаемых оценках; наблюдатель не имеет собственной динамики, что также способствует снижению выбросов и упрощает процедуру синтеза параметров корректирующих воздействий [14–16].

Отметим, что и целевые сигналы, и возмущения являются внешними воздействиями для объекта управления. Но в задачах получения оценок производных задающих воздействий и внешних возмущений есть принципиальные отличия. Во-первых, в отличие от внешних возмущений целевые сигналы не действуют непосредственно на объект управления, а поступают в контроллер, где используются для формирования управления. Во-вторых, обычно задающие воздействия полагаются известными, что позволяет построить автономный наблюдатель для оценивания их производных, который не зависит от процессов, протекающих в объекте управления. Внешние возмущения, как правило, неизвестны и оцениваются по их воздействию на объект управления с использованием для построения наблюдателя возмущений модели объекта управления [15, 16]. В случае когда наблюдатель возмущений строится на основе виртуальной динамической модели возмущений, он функционирует совместно с объектом управления, сигналы которого используются для коррекции такого наблюдателя [17]. В-третьих, задача получения оценок производных задающих воздействий, как показано в данной статье, всегда имеет решение и не зависит от постановки задачи управления. В то же время задача получения оценок возмущений и их производных не всегда разрешима, в частности, когда для измерения доступны только выходы объекта управления, как правило, удается получить оценки только смешанных сигналов (комбинации переменных состояния объекта управления и внешних возмущений) [3–5].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 для восстановления  $n$  производных сигнала, поступающего в реальном времени, предложен дифференциатор в виде наблюдателя состояния, построенного на основе виртуальной канонической модели  $(n + 1)$ -го порядка с неизвестным ограниченным входом. Выходом такой модели полагается данный сигнал, его текущие значения известны, аналитическое описание отсутствует, предполагается, что его производные до  $(n + 1)$ -го порядка ограничены известными константами на рассматриваемом интервале времени. В результате целенаправленного синтеза переменные наблюдателя с заданной точностью воспроизводят неизвестные производные данного сигнала. В публикации [18] рассматривалась аналогичная постановка для гладких сигналов из класса алгебраических полиномов любых конечных степеней с непрерывными производными. Настройка наблюдателя стандартно выполнялась с помощью линейных глубоких обратных связей. В данной статье, во-первых, класс допустимых сигналов расширяется за счет кусочно-дифференцируемых составных функций, производные которых имеют точки разрыва первого рода в моменты изменения вида функций. Во-вторых, для настройки наблюдателя используются ограниченные, непрерывные, но негладкие кусочно-линейные корректирующие воздействия [3, 4, 16], которые являются гибридом линейных и разрывных управлений и имеют по два настраиваемых параметра: полку (амплитуду) и угол наклона (большой коэффициент). Они привносят в замкнутую систему положительные свойства обоих методов и исключают их недостатки. Идея заключается в том, чтобы выбором амплитуд последовательно, по каскадному принципу обеспечить попадание за конечное время аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны, границы которых и соответственно точность оце-

нивания определяются выбором больших коэффициентов. Заметим, что в отличие от обычных линейных наблюдателей [18] в данном подходе настройка больших коэффициентов осуществляется на основе неравенств и не требует составления эталонных характеристических полиномов. В-третьих, помимо стандартного наблюдателя, который строится как реплика объектов оценивания, в данной статье рассматривается также наблюдатель без собственных движений [14–16]. При этом в системе относительно ошибок наблюдения оцениваемые сигналы присутствуют в явном виде, что существенно упрощает процедуру настройки параметров корректирующих воздействий по сравнению с базовыми алгоритмами [3, 4].

В разделе 3 разработанный метод восстановления производных применяется в системе управления движением центра масс беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Демонстрируется также возможность оценивания внешних возмущений, действующих на объект [15, 16], с помощью наблюдателя с кусочно-линейной коррекцией, построенного как реплика модели объекта управления. Приводятся результаты численного моделирования.

## 2. Синтез динамических дифференциаторов в виде наблюдателей состояния

Представим два способа построения дифференциаторов задающего сигнала для выходной переменной следящей одноканальной системы. Без ограничения общности данные методы могут быть использованы в многоканальных системах, где для каждой компоненты вектора задающих воздействий строится свой дифференциатор соответствующего порядка, а также могут найти применение в других прикладных задачах, требующих получения производных сигналов, аналитическое описание которых неизвестно.

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим случай управляемого объекта с одним входом и одним выходом  $y_1(t) \in Y \subset \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ , где  $Y$  — открытая рабочая область изменения регулируемой переменной. Предположим, что для данного объекта в рамках тех или иных методов синтезирован закон управления, обеспечивающий отслеживание выходной переменной заданного сигнала, который зависит и от производных задающего воздействия до  $n$ -го порядка включительно. Задающее воздействие поступает в систему управления в реальном времени в виде непрерывного детерминированного сигнала  $g_1(t)$ , его аналитическое описание как функции времени не известно. Задающий сигнал является допустимым для обработки, т.е.  $g_1(t) \in G_1 \subset Y$ ,  $t \geq 0$ , и его производные до  $(n + 1)$ -го порядка включительно ограничены

$$(2.1) \quad \left| g_1^{(i)}(t) \right| \leq G_{i+1}, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad t \geq 0,$$

где  $G_{i+1}$  — известные положительные константы, отвечающие проектным ограничениям конкретного объекта управления.

Ставится задача оценивания с заданной точностью производных задающего сигнала до  $n$ -го порядка включительно с помощью динамического на-

блюдателя состояния, который выполняет функции дифференциатора. В качестве основы для построения наблюдателя введем динамическую модель  $(n + 1)$ -го порядка, имеющую канонический вид

$$(2.2) \quad \dot{g}_i = g_{i+1}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Выходом системы (2.2) полагается измеряемый сигнал  $g_1(t)$ ; переменными состояния являются задающий сигнал и его производные  $g_1^{(i)}(t) = g_{i+1}(t)$  до  $n$ -го порядка включительно; вход  $g_1^{(n+1)}(t) = g_{n+2}(t)$  — производная  $(n + 1)$ -го порядка — является неизвестной ограниченной функцией времени. В силу канонической структуры система (2.2) является наблюдаемой относительно выхода, что является предпосылкой решения задачи оценивания ее состояния.

Естественно предположить, что  $g_1(t)$  как функция времени является непрерывной и кусочно-дифференцируемой, т.е. допускается, что на разных временных интервалах она описывается разными аналитическими выражениями. Как следствие, ее производные в общем случае являются кусочно-непрерывными, ограниченными на интервалах и имеют конечное число точек разрыва первого рода, в которых форма сигнала меняется и в которых ограничения (2.1) следует понимать как односторонние. Применительно к модели (2.2) это означает, что входной виртуальный сигнал  $g_{n+2}(t)$  является неизвестной кусочно-непрерывной ограниченной функцией, которая имеет различный вид на различных временных интервалах.

Таким образом, динамическая модель (2.2) порождает достаточно широкий класс функций  $g_1(t)$ , а именно множество решений канонической системы  $(n + 1)$ -го порядка с произвольным входом  $g_{n+2}(t)$ . Допускаемые точки конечного разрыва производных можно трактовать как моменты изменения скачком начальных условий в системе (2.2).

Обратим внимание, что в рассматриваемой постановке модель (2.2) является виртуальной и не используется в контуре обратной связи в качестве генератора задающего сигнала, она служит для определения структуры и размерности наблюдателя производных данного сигнала. В других постановках входной сигнал  $g_{n+2}(t)$  может зависеть от вектора состояния модели (2.2), а также и от внешних по отношению к модели (2.2) сигналов, в частности от вектора состояния модели объекта управления. В этом смысле (2.2) является обобщением и расширением динамических моделей, используемых для имитации и генерации внешних воздействий в виде экзогенных систем с неизвестными начальными условиями [1, 17]. В [19] рассматривался генератор заданий с неопределенными параметрами. В робастной постановке задача наблюдения его состояний дополнялась решением задачи идентификации неизвестных параметров с привлечением методов теории систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме.

## 2.2. Наблюдатель производных стандартной структуры

В данном подразделе для системы (2.2) вводится стандартный наблюдатель состояния. Рассматриваются частные случаи, при которых можно по-

лучить асимптотические оценки производных с помощью обычной линейной коррекции. Мотивируется использование в общем случае наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями.

Стандартный наблюдатель состояния строится как реплика объекта, переменные которого подлежат оцениванию, т.е. в данном случае повторяет структуру виртуальной модели (2.2) и имеет вид

$$(2.3) \quad \dot{z}_i = z_{i+1} + v_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad \dot{z}_{n+1} = v_{n+1},$$

где  $z = (z_1, \dots, z_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  – вектор состояний наблюдателя,  $v_i$  ( $i = \overline{1, n+1}$ ) – корректирующие воздействия, которые формируются на основе измерений  $g_1(t)$  и переменных наблюдателя так, чтобы обеспечить стабилизацию системы относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_i = g_i - z_i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , которая в силу (2.2), (2.3) имеет вид:

$$(2.4) \quad \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \dot{\varepsilon}_{n+1} = g_{n+2} - v_{n+1}.$$

Особенность системы (2.4) заключается в наличии неизвестного ограниченного сигнала  $g^{(n+1)}(t) = g_{n+2}(t)$ , который трактуется как внешнее возмущение. Сначала выделим частные случаи, при которых возможна асимптотическая стабилизация системы (2.4).

Если функция  $g_{n+2}(t)$  известна, то с использованием этой информации последние уравнения систем (2.3) и (2.4) примут соответственно вид:  $\dot{z}_{n+1} = g_{n+2} + v_{n+1}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{n+1} = -v_{n+1}$ . Тогда применение обычной линейной коррекции

$$(2.5) \quad v_1 = a_1 \varepsilon_1, \quad v_2 = a_2 \varepsilon_1, \quad \dots, \quad v_{n+1} = a_{n+1} \varepsilon_1,$$

параметры которой являются коэффициентами гурвицева полинома  $\lambda^{n+1} + a_1 \lambda^n + a_2 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \lambda + a_{n+1}$ , обеспечит асимптотическую сходимость в нуль ошибок наблюдения и, следовательно, асимптотическую сходимость переменных наблюдателя к неизмеряемым производным:

$$(2.6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_i(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} z_i(t) = g_i(t), \quad t = \overline{1, n+1}.$$

Если есть основание полагать, что задающий сигнал описывается алгебраическим полиномом с максимальной степенью  $\bar{n} = n$ , то тогда  $g_1^{(n+1)}(t) \equiv 0$ , внешнее возмущение в системе (2.4) отсутствует и линейная коррекция (2.5) также обеспечит асимптотическое оценивание производных (2.6). Если известно, что максимальная степень полиномов  $1 \leq \bar{n} < n$ , то тогда все производные начиная с  $(\bar{n} + 1)$ -й тождественно равны нулю. Соответственно порядок наблюдателя (2.3) следует понизить на  $n - \bar{n}$ . Если  $n < \bar{n} < \infty$ , то, наоборот, можно повысить порядок наблюдателя на  $\bar{n} - n$ , чтобы обеспечить асимптотические оценки (2.6). При этом попутно полученная избыточная информация о  $(n + 1)$ -й производной и выше не используется в законе управления.

В общем случае, когда о “внешнем возмущении”  $g_{n+2}(t)$  предполагается только его ограниченность по модулю (2.1), для его подавления с

необходимостью требуется применять методы теории скользящих режимов [6, 14, 15, 19, 20] или линейных систем с глубокими обратными связями. В последнем случае линейная коррекция (2.5) дополняется большим коэффициентом  $l > 1$  [21] следующим образом:

$$(2.7) \quad v_1 = a_1 l \varepsilon_1, \quad v_2 = a_2 l^2 \varepsilon_1, \quad \dots, \quad v_{n+1} = a_{n+1} l^{m+1} \varepsilon_1,$$

что обеспечивает в замкнутой системе (2.4), (2.7) стабилизацию ошибок наблюдения с заданной точностью. Известным недостатком линейных наблюдателей с большими коэффициентами является большое перерегулирование в начале переходных процессов [5, 18, 21–23], что приводит к перерегулированию и в объекте управления, обратная связь в котором формируется по сигналам наблюдателя.

Чтобы избежать указанной проблемы, в данной статье используется другой метод подавления возмущений — каскадный синтез наблюдателей с кусочно-линейными, всюду ограниченными корректирующими воздействиями [3, 4, 16] вида

$$(2.8) \quad v_1 = p_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \begin{cases} p_1 \text{sign}(\varepsilon_1), & |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ p_1 l_1 \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| \leq 1/l_1; \end{cases}$$

$$v_i = p_i \text{sat}(l_i v_{i-1}) = \begin{cases} p_i \text{sign}(v_{i-1}), & |v_{i-1}| > 1/l_i, \\ p_i l_i v_{i-1}, & |v_{i-1}| \leq 1/l_i, \quad i = \overline{2, n+1}. \end{cases}$$

Каждое корректирующее воздействие (2.8) имеет по два настраиваемых параметра:  $p_i > 0$  — амплитуду, которая отвечает за скорость оценивания, и  $l_i > 0$  — угол наклона, который играет роль большого коэффициента и отвечает за точность оценивания. Будем говорить, что если  $|\varepsilon_1| \leq 1/l_1$ ,  $|v_{i-1}| \leq 1/l_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , то соответствующие корректирующие воздействия  $v_i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , (2.8) находятся в “линейной зоне”.

В [3] в рамках синтеза одноканальной системы слежения при действии внешних возмущений наблюдатель, аналогичный (2.3), (2.8), применялся для оценивания смешанных переменных (функций от переменных состояния, внешних воздействий и их производных) по измерениям ошибки слежения. Были получены иерархические системы неравенств для выбора параметров кусочно-линейных корректирующих воздействий, при которых за заданное время  $T > 0$  с заданной точностью  $\delta > 0$  обеспечивается оценивание неизменяемых сигналов канонической системы, аналогичной (2.1)–(2.2). Соответственно в терминах решаемой задачи использование этого подхода обеспечит

$$(2.9) \quad |\varepsilon_i(t)| = |g_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad |g_{n+2}(t) - v_{n+1}(t)| \leq \delta, \quad t \geq T.$$

Первая группа неравенств (2.9) означает, что переменные наблюдателя (2.3) служат оценками соответствующих производных задающего сигнала, последнее неравенство (2.9) показывает, что корректирующее воздействие последнего уравнения может служить оценкой неизвестного входа. Как следствие, для оценивания  $n$  производных можно использовать наблюдатель, порядок которого по сравнению с (2.3) понижен на единицу, при этом  $n$ -я производная

будет трактоваться как возмущение, а ее оценкой будет служить корректирующее воздействие  $v_n(t)$  [3].

*Замечание.* Для простоты изложения в оценках (2.9) и далее области сходимости различных ошибок наблюдения, имеющих различные единицы измерения, будем единообразно обозначать  $\delta$  и придавать им одинаковые числовые значения  $\delta > 0$ , но в соответствующих единицах измерения по умолчанию.

Основное преимущество наблюдателя (2.3), (2.8) по сравнению с наблюдателем с глубокими обратными связями заключается в том, что корректирующие воздействия (2.8) всюду ограничены, следовательно, будут существенно ограничены всплески оценочных сигналов в начале всех переходных процессов, которые порождаются сменой формы выходного кусочно-дифференцируемого сигнала. Результаты моделирования показали [23], что всплески оценочных сигналов производных, полученные с помощью линейного наблюдателя с большими коэффициентами, каждый раз увеличиваются на порядок с ростом порядка производной (что обусловлено иерархией большого коэффициента (2.7)), в отличие от оценочных сигналов наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, которые заведомо ограничены амплитудами корректирующих воздействий. Таким образом, применение наблюдателя (2.3), (2.8) существенно расширяет класс допустимых функций, оценочные сигналы производных которых могут быть непосредственно использованы в практических приложениях без дополнительных ограничений.

К преимуществам наблюдателя (2.3), (2.8) можно также отнести каскадную процедуру настройки на основе иерархии неравенств, не требующую составления эталонных характеристических полиномов (в отличие от (2.5)). Заметим, что в указанных выше частных случаях применение корректирующих воздействий (2.8) не только обеспечит асимптотические оценки (2.6), но и даст возможность последовательно управлять темпами сходимости каждой переменной замкнутой системы. Однако для настройки амплитуд и в частных, и в общем случаях требуется определять области изменения ошибок наблюдения в процессе регулирования [3, 4], что усложняет вычислительный аспект, а также приводит к завышенным расчетным оценкам для выбора параметров. Соответствующая процедура будет продемонстрирована в подразделе 3.4 на примере оценивания производных задающих сигналов БПЛА.

В подразделе 2.3 представлен основной результат. Для снятия указанной проблемы предложена другая структура наблюдателя производных с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, который обеспечивает такое же качество оценивания (2.9), как и наблюдатель (2.3), (2.8), но имеет более простую первичную настройку благодаря исключению из анализа собственных движений ошибок наблюдения.

### *2.3. Наблюдатель производных без собственных движений*

В данном подразделе представлен основной результат. Для системы (2.2) вводится наблюдатель состояния специальной структуры без собственных движений. Выделяются особенности каскадного синтеза кусочно-линейных корректирующих воздействий, при котором реализуется разделение движе-



ний в пространстве ошибок наблюдения. Формализуются особенности оценивания кусочно-непрерывных сигналов, с учетом которых формулируется теорема о существовании решения задачи оценивания производных предложенным методом.

На основе модели (2.2) построим наблюдатель-дифференциатор специального вида

$$(2.10) \quad \dot{z}_i = v_i, \quad i = \overline{1, n+1},$$

что приведет к системе относительно ошибок наблюдения

$$(2.11) \quad \dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{1, n+1},$$

и следующему виду кусочно-линейных корректирующих воздействий:

$$(2.12) \quad v_1 = p_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \begin{cases} p_1 \text{sign}(\varepsilon_1), & |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ p_1 l_1 \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| \leq 1/l_1; \end{cases}$$

$$v_i = p_i \text{sat}(l_i(v_{i-1} - z_i)) = \begin{cases} p_i \text{sign}(v_{i-1} - z_i), & |v_{i-1} - z_i| > 1/l_i, \\ p_i l_i (v_{i-1} - z_i), & |v_{i-1} - z_i| \leq 1/l_i, \quad i = \overline{2, n+1}. \end{cases}$$

Отметим, что в отличие от стандартного наблюдателя (2.3), приводящего к системе (2.4), в системе (2.11)–(2.12) асимптотическая сходимость ошибок наблюдения (2.6) может быть обеспечена только тогда, когда все  $n+1$  производных затухают со временем. Но даже в этом частном случае с помощью обычной линейной коррекции (2.5) невозможно обеспечить асимптотическую стабилизацию нейтральной системы (2.11) из-за наличия неустраимых нулевых собственных значений. Таким образом, синтез наблюдателя (2.10) требует применения специальных подходов, основанных на методе разделения движений ошибок наблюдения в замкнутой системе.

В силу структуры системы (2.11) сигналы, на основе которых формируются корректирующие воздействия  $v_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , (2.12), можно представить в виде

$$(2.13) \quad v_{i-1} - z_i = g_i - \dot{\varepsilon}_{i-1} - z_i = \varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}, \quad i = \overline{2, n+1},$$

что совпадает с детализацией соответствующих корректирующих воздействий (2.8) системы (2.4), а именно

$$(2.14) \quad v_{i-1} = \varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}, \quad i = \overline{2, n+1}.$$

Отличие состоит в том, что в системе (2.11) оцениваемые сигналы присутствуют в явном виде и области их изменения априори известны (2.1), что позволяет достаточно просто обеспечить стабилизацию с заданной точностью ошибок наблюдения.

Согласно идеологии метода разделения движений, реализуемой при каскадном синтезе наблюдателя с кусочно-линейной коррекцией [3, 4, 15, 16], в замкнутой системе (2.11)–(2.12) с учетом (2.13) выбором амплитуд  $p_i > 0$ ,

$i = \overline{1, n+1}$ , требуется последовательно обеспечить сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1, \quad t \geq t_1 \geq 0 &\Rightarrow |v_1(t) - z_2(t)| = |\varepsilon_2(t) - \dot{\varepsilon}_1(t)| \leq 1/l_2, \\ t \geq t_2 > t_1 &\Rightarrow |\varepsilon_3(t) - \dot{\varepsilon}_2(t)| \leq 1/l_3, \\ t \geq t_3 > t_2 &\Rightarrow \dots \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}(t) - \dot{\varepsilon}_n(t)| \leq 1/l_{n+1}, \quad t \geq t_{n+1} > t_n. \end{aligned}$$

Особенность каскадного синтеза заключается в том, что только в первом уравнении системы (2.11)–(2.12) равенство знаков регулируемой переменной и ее корректирующего воздействия имеет место на протяжении всего процесса:  $\text{sign}(\varepsilon_1(t)) = \text{sign}(v_1(t))$ ,  $t \geq 0$ . Для остальных уравнений совпадения знаков  $\text{sign}(\varepsilon_i(t)) = \text{sign}(v_i(t))$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , гарантируются только вне областей (2.15) при достаточном затухании производных ошибок наблюдения в предыдущих уравнениях.

Грубой (первичной) настройкой дифференциатора будем называть процедуру, в которой время оценивания  $T > 0$  априори не устанавливается. Выбором параметров корректирующих воздействий (2.12) обеспечивается последовательная сходимость ошибок наблюдения в заданные окрестности нуля, при этом не учитываются: скорости сходимости в линейные зоны (2.15) и затухания производных ошибок наблюдения, а также ошибки уравнений статики, т.е. полагается, что  $\dot{\varepsilon}_i(t) \approx 0$ ,  $t > t_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

В этих допущениях на основе (2.15) и достаточных условий сходимости имеем первичные нижние оценки для выбора параметров кусочно-линейной коррекции (2.12), обеспечивающих первую группу неравенств (2.9):

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i(g_{i+1} - p_i \text{sign}(\varepsilon_i)) \leq |\varepsilon_i| (G_{i+1} - p_i) < 0 &\Rightarrow p_i > G_{i+1}, \\ |\varepsilon_i| \leq 1/l_i < \delta &\Rightarrow l_i > 1/\delta, \quad i = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Заметим, что второе неравенство (2.16) можно использовать и для первичной настройки больших коэффициентов базового наблюдателя (2.3), (2.8) в силу (2.14). Однако и грубая ( $p_i > |\varepsilon_{i+1}(t, p_{i+1})|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $p_{n+1} > G_{n+2}$  [3]), и тонкая (т.е. с обеспечением заданного времени сходимости с учетом быстрых движений) настройки его амплитуд уже не являются автономными, как в первом выражении (2.16), а основаны на иерархии неравенств (как будет показано в подразделе 3.4, выбор допустимой величины  $p_i$ ,  $i = \overline{n, 1}$ , зависит от принятого значения  $p_{i+1}$ ). Преимущество дифференциатора (2.10), (2.12) по сравнению с наблюдателем (2.3), (2.8) заключается в том, что независимый выбор его амплитуд сохранится и при тонкой настройке с учетом заданного времени сходимости (см. Приложение). Кроме того, диапазоны изменения оценочных сигналов (2.1), как правило, меньше расчетных максимальных значений соответствующих ошибок наблюдения в начале переходного процесса, что позволит обеспечить заданное время оценивания с меньшими амплитудами и, как следствие, уменьшить перерегулирование.

Отметим, что порядок дифференциатора (2.10) также может быть понижен на единицу, если использовать корректирующее воздействие последнего уравнения в качестве оценочного сигнала для  $n$ -й производной (аналогично второму неравенству (2.9)). Более того, корректирующие воздействия при

выполнении уравнений статики могут служить оценками не только входного сигнала, но и всех остальных производных:

$$\dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - v_i \approx 0 \Rightarrow v_i(t) \approx g_{i+1}(t), \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Однако на практике в качестве оценочных сигналов производных до  $n$ -го порядка рекомендуется использовать соответствующие переменные дифференциатора:  $z_i(t) \approx g_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ ,  $t \geq T$ . Причина заключается в том, что при каждой смене формы задающего сигнала корректирующие воздействия  $v_i(t) \leq p_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , могут выходить на предельные значения (в отличие от переменных наблюдателя, которые в общем случае этих пиков не достигают), что приведет к большей ошибке оценивания и негладкости оценочных сигналов в начале переходных процессов. По указанным причинам для оценивания  $1 < n$  незатухающих производных целесообразно использовать полноразмерный дифференциатор (2.10), (2.12) порядка  $n+1$ , и далее будем рассматривать его тонкую настройку без соблюдения точности оценивания входного сигнала (т.е. без требования выполнения последнего неравенства (2.9)). При необходимости получения оценки ненулевой производной порядка  $n+1$  рекомендуется использовать дифференциатор порядка  $n+2$ .

Что касается установки начальных условий в дифференциаторе (2.10), то с учетом измерений  $g_1(t)$  и для сокращения времени оценивания целесообразно принять

$$z_1(0) = g_1(0) \Rightarrow \varepsilon_1(0) = 0, \quad z_i(0) = 0 \Rightarrow \varepsilon_i(0) = g_i(0), \quad |\varepsilon_i(0)| \leq G_i, \quad i = \overline{2, n+1}.$$

Соответствующие оценки начальных условий ошибок наблюдения являются опорными при тонкой настройке дифференциатора гладкого сигнала с непрерывными производными, которая в рамках используемого подхода обеспечит

$$|g_1(t) - z_1(t)| \leq \delta, \quad t \geq 0; \quad |g_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, \quad i = \overline{2, n+1}, \quad t \geq T.$$

Теперь формализуем особенности процесса оценивания кусочно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих (2.1). Наложим следующее условие на формирование задающего сигнала. Пусть минимальный интервал времени, на котором  $g_1(t)$  является  $n+1$  раз дифференцируемой функцией, равен  $\tau_{\min} \leq \tau_j - \tau_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , где  $[\tau_{j-1}; \tau_j)$  — текущий интервал времени, на котором сигнал является гладким. В точках  $\tau_1, \tau_2, \dots$ :  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$  его производные могут иметь конечные разрывы, которые трактуются как переустановка скачком начальных условий в виртуальной модели (2.2). Каждая следующая переустановка допускается не раньше, чем через  $\tau_{\min}$ . Соответственно при настройке параметров дифференциатора следует положить  $T \ll \tau_{\min}$ , тогда ошибки наблюдения будут находиться в заданной окрестности нуля в интервалах

$$(2.17) \quad |\varepsilon_i(t)| \leq \delta, \quad \tau_{j-1} + T \leq t < \tau_{\min} \leq \tau_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad i = \overline{2, n+1}; \\ |\varepsilon_1(t)| \leq \delta, \quad t \geq 0.$$

Максимальные величины скачков производных  $|g_i(\tau_j + 0) - g_i(\tau_j - 0)| \leq 2G_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , с учетом  $z_i(\tau_j - 0) \approx g_i(\tau_j - 0)$  можно принять в качестве консервативных расчетных оценок начальных условий системы (2.11) для всех

интервалов:

$$(2.18) \quad |\varepsilon_1(\tau_{j-1})| \leq \delta, \quad |\varepsilon_i(\tau_{j-1})| \leq 2G_i, \quad i = \overline{2, n+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Данные оценки позволяют не учитывать особые точки  $\tau_1, \tau_2, \dots$  и выполнить тонкую настройку параметров корректирующих воздействий (2.12), рассматривая только наименьший интервал  $t \in [0; \tau_{\min})$ , где  $g_1(t)$  является гладкой функцией с непрерывными производными. Параметры, выбранные исходя из расчетных начальных условий (2.18), а также выполнение  $T \ll \tau_{\min}$  обеспечат нахождение ошибок наблюдения в заданной окрестности нуля в указанное время (2.17). В сделанных предположениях имеет место следующая теорема.

*Теорема.* Если в системе (2.11)–(2.12) условия (2.1) выполняются, то тогда для любых начальных условий  $\varepsilon_i(0)$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , и сколь угодно малых  $\delta, T > 0$  найдутся такие положительные действительные числа  $p_i^*, l_i^*$ , что при любых  $p_i, l_i$ :  $p_i > p_i^*, l_i > l_i^*, i = \overline{1, n+1}$ , выполняются неравенства

$$(2.19) \quad |\varepsilon_i(t)| = |z_i(t) - g_i(t)| \leq \delta, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad t \geq T.$$

В Приложении приведено конструктивное доказательство теоремы, в ходе которого получены неравенства (П.8), (П.13) для выбора параметров (2.12) с учетом быстрых движений, обеспечивающие (2.19).

Заметим, что априори моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$  и  $\tau_{\min} > 0$  неизвестны. Если длина текущего интервала окажется меньше принятого при настройке времени оценивания  $T > \tau_j - \tau_{j-1}$ , то тогда на этом интервале заданная точность оценивания (2.17) в общем случае достигнута не будет, можно только гарантировать ограниченность ошибок оценивания:

$$|\varepsilon_i(\tau_j)| \leq 2G_i + (G_{i+1} + p_i)(\tau_j - \tau_{j-1}), \quad i = \overline{2, n+1}.$$

### 3. Синтез системы управления БПЛА без использования генераторов внешних воздействий

В данном разделе представленные методы построения дифференциаторов применяются в системе управления беспилотным летательным аппаратом (БПЛА) для оценивания производных задающих сигналов и внешних возмущений.

#### 3.1. Модель объекта управления. Постановка задач

Рассматривается математическая модель пространственного движения центра масс (материальной точки) БПЛА в траекторной системе координат, представленная в нормальной форме [12, 22]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ag + \eta + B(\theta, \Psi)u, \end{aligned}$$

где  $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T \in \mathbb{R}^3$  — вектор пространственных координат центра масс (выходные регулируемые переменные) с элементами  $x_{11} := L$  — продольная дальность,  $x_{12} := H$  — высота,  $x_{13} := Z$  — боковое смещение;  $x_2 =$

$= (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T \in \mathbb{R}^3$  — вектор скорости пространственных координат с элементами

$$(3.2) \quad x_{21} := V \cos \theta \cos \Psi, \quad x_{22} := V \sin \theta, \quad x_{23} := -V \cos \theta \sin \Psi,$$

где  $V$  — путевая скорость,  $\theta$  — угол наклона траектории,  $\Psi$  — путевой угол;  $g$  — ускорение свободного падения,  $a = (0; -1; 0)^T$ ;  $u = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbb{R}^3$  — вектор управления, элементы которого  $u_1 = gn_x$ ,  $u_2 = gn_y \cos \gamma$ ,  $u_3 = gn_y \sin \gamma$  выражены через продольную  $n_x$  и поперечную  $n_y$  перегрузки, а также угол крена  $\gamma$  вектора перегрузки,  $|\gamma(t)| < \pi$ ;  $\eta(t)$  — вектор внешних детерминированных возмущений;

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \Psi & -\sin \theta \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \Psi & \sin \theta \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix}, \quad \det B \equiv 1, \quad B^{-1} = B^T.$$

Рассматривается проблема синтеза обратной связи, обеспечивающей отслеживания выходными переменными  $x_1(t)$  заданных сигналов  $g_1(t) = (g_{11}, g_{12}, g_{13})^T$  в следующих предположениях:

— прямым измерениям доступны пространственные координаты  $x_1(t)$ , а также  $V(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\Psi(t)$ , через которые пересчитываются элементы вектора скорости  $x_2(t)$  (3.2);

— генераторы внешних воздействий в системе управления отсутствуют, сигналы  $g_1(t)$  поступают в нее в реальном времени из независимого источника, их аналитический вид неизвестен, но предполагается, что задающие воздействия корректны и могут быть отработаны конкретным БПЛА;

— элементы векторов  $\eta(t)$ ,  $\dot{g}_1(t) = g_2(t)$ ,  $\ddot{g}_1(t) = g_3(t)$ ,  $\ddot{\ddot{g}}_1(t) = g_4(t)$  являются неизвестными функциями времени, нормы векторов ограничены известными константами:

$$(3.3) \quad |\eta(t)| \leq H, \quad |g_1^{(j)}(t)| \leq G_j, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 3,$$

здесь и далее под обозначением  $|\ast|$  следует понимать евклидову норму вектора.

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей стабилизацию ошибок слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g_1(t)$ , которая включает решение следующих подзадач:

1) синтез базового (т.е. в предположении, что все внешние сигналы известны) закона комбинированного управления, обеспечивающего экспоненциальную сходимость в нуль ошибки слежения с заданной скоростью:

$$(3.4) \quad |e_1(t)| \Big|_{t \rightarrow +\infty} = O(\exp(-k_1 t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e_1(t) = 0, \quad k_1 = \text{const} > 0;$$

2) синтез наблюдателя внешних возмущений, построенный как реплика редуцированной модели объекта управления (3.1), с получением оценок

$$(3.5) \quad |\eta(t) - v_0(t)| \leq \delta, \quad t \geq T > 0,$$

где  $v_0 \in \mathbb{R}^3$  — корректирующие воздействия наблюдателя возмущений;

3) синтез наблюдателя производных задающих воздействий, построенный как реплика виртуальной канонической модели (2.2), с получением оценок

$$(3.6) \quad |g_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, \quad t \geq T > 0, \quad i = 2, 3,$$

где  $z_i \in \mathbb{R}^3$  — переменные состояния наблюдателя производных.

Как будет показано далее, данные наблюдатели функционируют и настраиваются автономно друг от друга, поэтому имеется возможность реализовать процесс оценивания внешних сигналов за заданное время  $T > 0$  с одинаковой точностью  $\delta > 0$  (см. замечание). Как следствие, использование оценочных сигналов в базовом законе управления обеспечит экспоненциальную сходимость ошибок слежения с заданной скоростью в некоторую окрестность нуля

$$(3.7) \quad |e_1(t)| \leq \bar{\delta} + O(\exp(-k_1 t)), \quad t > T.$$

Приведем последовательно решение указанных подзадач.

### 3.2. Синтез базового закона управления

Модель объекта управления (3.1) представлена в блочно-канонической форме “вход–выход” и является управляемой. Для синтеза базового закона управления целесообразно использовать блочный подход [4–7, 22], который в отличие от стандартных методов позволяет непосредственно установить заданную скорость стабилизации ошибок слежения (3.4) на этапе синтеза.

Согласно идеологии блочного принципа запишем первое уравнение системы (3.1) относительно ошибки слежения  $\dot{e}_1 = x_2 - g_2$ , где переменная  $x_2$  трактуется как фиктивное управление и выбирается в виде  $x_2 = -k_1 e_1 + g_2$ , где  $k_1 = \text{const} > 0$  — заданный коэффициент усиления (3.4). Задача синтеза заключается в выборе истинного управления, обеспечивающего стабилизацию невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением:

$$(3.8) \quad e_2 = x_2 - g_2 + k_1 e_1, \quad e_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})^T.$$

Относительно ошибки слежения и невязки (3.8) получим следующую систему:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \\ \dot{e}_2 &= q(x_2, g_2, g_3, \eta) + B(\theta, \Psi)u, \end{aligned}$$

где

$$(3.10) \quad q(x_2, g_2, g_3, \eta) = ag - g_3 + k_1 \dot{e}_1 + \eta = ag - g_3 + k_1(x_2 - g_2) + \eta.$$

В предположении, что не только все внутренние, но и внешние сигналы известны, в терминах системы (3.7) сформируем закон комбинированного управления с линейной стабилизирующей составляющей

$$(3.11) \quad u = -B^T(\theta, \Psi)(k_2 e_2 + q(x_2, g_2, g_3, \eta)), \quad k_2 = \text{const} > 0$$

и получим замкнутую линейную виртуальную систему (3.7), (3.9) вида

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \\ \dot{e}_2 &= -k_2 e_2.\end{aligned}$$

При  $k_2 \geq k_1$  переменные этой системы стремятся к нулю с заданной скоростью

$$|e_2(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\exp(-k_2 t)) \Rightarrow |e_1(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\exp(-k_1 t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = g_1(t),$$

поставленная задача (3.4) выполняется.

При реализации закона управления (3.11) по оценочным сигналам внешних воздействий (3.5), (3.6) с учетом (3.8), (3.10) имеем

$$\begin{aligned}\bar{u} &= -B(\theta, \Psi)^T(k_2(x_2 - z_2 + k_1(x_1 - g_1)) + ag - z_3 + k_1(x_2 - z_2) + v_0) = \\ (3.12) \quad &= -B^T(\theta, \Psi)(k_2 e_2 + q(x_2, g_2, g_3, \eta) + \varphi(t)),\end{aligned}$$

где  $\varphi(t)$  — суммарный сигнал ошибок оценивания,  $|\varphi(t)| \leq \delta(k_2 + k_1 + 2)$ ,  $t > T$ , с учетом которого замкнутая виртуальная система (3.9), (3.12) принимает вид

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -k_2 e_2 + \varphi(t),$$

а ее переменные при  $t > T$  последовательно сходятся в указанные окрестности нуля:

$$\begin{aligned}|e_2(t)| &\leq \frac{\delta(k_2 + k_1 + 2)}{k_2} + O(\exp(-k_2 t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow |e_1(t)| &\leq \frac{\delta(k_2 + k_1 + 2)}{k_2 k_2} + O(\exp(-k_1 t)).\end{aligned}$$

Для решения задачи слежения с заданной точностью (3.7) потребуется обеспечить при решении задач наблюдения (3.5), (3.6) следующую точность оценивания:

$$(3.13) \quad \frac{\delta(k_2 + k_1 + 2)}{k_2 k_2} \leq \bar{\delta} \Rightarrow \delta \leq \bar{\delta} \frac{k_2 k_2}{k_2 + k_1 + 2}.$$

### 3.3. Синтез наблюдателя возмущений

Используем возможности наблюдателей с кусочно-линейными корректирующими воздействиями восстанавливать при определенных условиях внешние ограниченные сигналы (входы) без наличия их динамической модели (см. второе неравенство (2.9)) и будем оценивать внешние возмущения по их воздействию на объект в процессе управления. В качестве основы для наблюдателя возмущений примем второе уравнение исходной системы (3.1)

$$\dot{x}_2 = ag + \eta + B(\theta, \Psi)\bar{u},$$

где все параметры и сигналы, кроме  $\eta(t)$ , известны. Наблюдатель-дифференциатор строится как реплика этой системы с использованием всех известных сигналов в виде

$$(3.14) \quad \dot{z}_0 = ag + B(\theta, \Psi)\bar{u} + v_0, \quad z_0, \quad v_0 \in \mathbb{R}^3,$$

что приведет к следующей системе относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_0 = x_2 - z_0 \in \mathbb{R}^3$ :

$$(3.15) \quad \dot{\varepsilon}_0 = \eta - v_0.$$

Для решения поставленной задачи (3.5) используем кусочно-линейные корректирующие воздействия

$$(3.16) \quad v_{0j} = p \operatorname{sat}(l\varepsilon_{0j}) = \begin{cases} p \operatorname{sign}(\varepsilon_{0j}), & |\varepsilon_{0j}| > 1/l; \\ pl\varepsilon_{0j}, & |\varepsilon_{0j}| \leq 1/l, \quad j = \overline{1, 3}, \end{cases}$$

с одинаковыми (для простоты изложения) параметрами  $p, l = \operatorname{const} > 0$ .

Установим в наблюдателе (3.14) следующие начальные условия

$$z_0(0) = x_2(0) \Rightarrow \varepsilon_0(0) = \vec{0},$$

что сразу обеспечит нахождение ошибки наблюдения в линейной зоне.

Чтобы обеспечить  $|\varepsilon_0(t)| \leq 1/l$  на протяжении всего процесса при  $t \geq 0$ , выберем амплитуду корректирующих воздействий на основе достаточных условий сходимости в линейную зону, аналогичных первому выражению (2.16). В силу (3.3) имеем:

$$(3.17) \quad \varepsilon_0^T \dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0(\eta - p \operatorname{sign}(\varepsilon_0)) \leq |\varepsilon_0| (H - p) < 0 \Rightarrow p > H.$$

Аналогично второму неравенству (2.16) получим первичную оценку для выбора второго параметра, обеспечивающего заданную точность стабилизации ошибки наблюдения:

$$|\varepsilon_0(t)| \leq 1/l < \delta \Rightarrow l > 1/\delta.$$

Более детально: в линейной зоне система (3.15)–(3.16) имеет вид  $\dot{\varepsilon}_0 = \eta - pl\varepsilon_0$ , тогда

$$(3.18) \quad \varepsilon_0^T \dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0^T (\eta - pl\varepsilon_0) \leq |\varepsilon_0| (H - pl\delta) < 0 \Rightarrow l > H/(p\delta).$$

С учетом (3.17) нижняя оценка (3.18) меньше, чем первичная. Однако основная цель построения наблюдателя (3.14) — обеспечить заданную точность оценивания внешнего возмущения (3.5). С этой целью оценим решение системы (3.15), (3.16) на интервале  $[0; T]$ :

$$|\varepsilon_0(T)| \leq \frac{|\eta(t)|}{pl} (1 + e^{-plT}) \leq \frac{H}{pl} + \frac{H}{pl} e^{-plT} \Rightarrow pl |\varepsilon_0(T)| \leq H + H e^{-plT}.$$



Из данного выражения с учетом  $v_0(t) = pl\varepsilon_0(t)$  следует, что при  $t \geq T$  корректирующее воздействие сходится к оцениваемому сигналу с заданной точностью, если

$$|\eta_2(t) - v_0(t)| \leq \delta \Leftrightarrow He^{-plT} \leq \delta \Rightarrow l > \frac{1}{pT} \ln \frac{H}{\delta}.$$

В итоге имеем нижнюю оценку для выбора большого коэффициента, при котором обеспечивается стабилизация ошибок наблюдения и их производных за заданное время

$$(3.19) \quad l > \frac{1}{p} \max \left\{ \frac{H}{\delta}; \frac{1}{T} \ln \frac{H}{\delta} \right\},$$

что в совокупности с (3.18) и решает поставленную задачу (3.5). Заметим, что для получения менее консервативных оценок следует рассматривать систему (3.15)–(3.16) покомпонентно.

#### 3.4. Синтез наблюдателя производных задающих воздействий

Основой для построения наблюдателя производных задающих воздействий является виртуальная модель (2.2), которая в данном случае имеет три блока третьей размерности:

$$\dot{g}_1 = g_2, \quad \dot{g}_2 = g_3, \quad \dot{g}_3 = g_4(t),$$

где  $g_1(t) \in \mathbb{R}^3$  — измеряемый выход,  $g_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = \overline{2,4}$ , — неизвестные ограниченные сигналы (3.3). Для получения оценок первых  $g_2(t)$  и вторых  $g_3(t)$  производных задающих сигналов с заданными показателями (3.6) используем стандартный наблюдатель с целью продемонстрировать процедуру его настройки [3]. Выражения (2.3), (2.4), (2.8) в данном случае принимают вид:

$$(3.20) \quad \dot{z}_1 = z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = z_3 + v_2, \quad \dot{z}_3 = v_3, \quad z_i \in \mathbb{R}^3,$$

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 - v_1, & \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_3 - v_2, & \dot{\varepsilon}_3 &= g_4(t) - v_3, \\ \varepsilon_i &= g_i - z_i = (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \varepsilon_{i3})^T; \end{aligned}$$

$$(3.22) \quad v_{1j} = p_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_{1j}) = \begin{cases} p_1 \text{sign}(\varepsilon_{1j}), & |\varepsilon_{1j}| > 1/l_1; \\ p_1 l_1 \varepsilon_{1j}, & |\varepsilon_{1j}| \leq 1/l_1, \end{cases} \quad p_1, l_1 = \text{const} > 0;$$

$$(3.22) \quad v_{ij} = p_j \text{sat}(l_j \varepsilon_{ij}) = \begin{cases} p_j \text{sign}(v_{i-1,j}), & |v_{i-1,j}| > 1/l_i; \\ p_j l_j v_{i-1,j}, & |v_{i-1,j}| \leq 1/l_i, \end{cases} \quad p_i, l_i = \text{const} > 0, \\ i = 2, 3, \quad j = \overline{1,3}.$$

Установим в наблюдателе начальные условия  $z_1(0) = g_1(0)$ ,  $z_i(0) = \vec{0}$ ,  $i = 2, 3$ . Допуская смену формы непрерывных задающих сигналов  $g_1(t)$  в процессе управления, для настройки параметров принимаются оценки начальных условий системы (3.21), аналогичные (2.18):

$$(3.23) \quad |\varepsilon_1(0)| \leq \delta, \quad |\varepsilon_i(0)| \leq 2G_i, \quad i = 2, 3.$$

Разделим интервал оценивания на отрезки  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$  и формализуем желаемое поведение переменных виртуальной системы (3.21)–(3.22), обеспечивающее решение поставленной задачи (3.6):

$$(3.24) \quad \begin{aligned} & 1) |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1 \leq \delta, \quad t \geq 0; \\ & 2) |\varepsilon_2(t) - v_1(t)| \leq \Delta_2 < \delta \Leftrightarrow v_1(t) = \varepsilon_2(t) - \alpha_2(t), \quad |\alpha_2(t)| \leq \Delta_2, \quad t \geq t_1; \\ & 3) |v_1(t)| \leq 1/l_2 \Leftrightarrow |\varepsilon_2(t)| \leq \Delta_2 + 1/l_2 \leq \delta, \quad t \geq t_2; \\ & 4) |\varepsilon_3(t) - v_2(t)| \leq \Delta_3 < \delta \Leftrightarrow v_2(t) = \varepsilon_3(t) - \alpha_3(t), \quad |\alpha_3(t)| \leq \Delta_3, \quad t \geq t_3; \\ & 5) |v_2(t)| \leq 1/l_3 \Leftrightarrow |\varepsilon_3(t)| \leq \Delta_3 + 1/l_3 \leq \delta, \quad t \geq t_4. \end{aligned}$$

Нечетные неравенства в (3.24), которые означают попадание (и нахождение) в линейные зоны аргументов соответствующих корректирующих воздействий (3.22), обеспечиваются выбором амплитуд  $p_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Вне линейных зон система (3.21), (3.22) представима в виде:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - p_1 \text{sign}(\varepsilon_1), \quad \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - p_2 \text{sign}(\varepsilon_2 - \alpha_2), \quad \dot{\varepsilon}_3 = g_4(t) - p_3 \text{sign}(\varepsilon_3 - \alpha_3).$$

Достаточные условия для выбора амплитуд, аналогичные (2.16), в данном случае имеют вид:

$$(3.25) \quad \varepsilon_i^T \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^T (\varepsilon_{i+1} - p_i \text{sign}(\varepsilon_i)) \leq |\varepsilon_i| (|\varepsilon_{i+1}| - p_i) < 0 \Rightarrow p_i > |\varepsilon_{i+1}|, \\ i = \overline{1, 3}, \quad \varepsilon_4 := g_4.$$

Учитывая, что сходимость ошибок наблюдения  $\varepsilon_i(t)$ ,  $i = 2, 3$ , в указанные области (3.24) гарантируется только при  $t > t_{2i-3}$  (3.24), определим области их изменения с учетом (3.23):

$$|\varepsilon_2(t)| \leq E_2 = 2G_2 + (E_3 + p_2)t_1, \quad |\varepsilon_3(t)| \leq E_3 = 2G_3 + (G_4 + p_3)t_3, \quad t \geq 0.$$

С учетом (3.25) и данных оценок получим неравенства для последовательного (снизу вверх) выбора амплитуд, которые обеспечивают на интервалах  $[t_3; t_4]$ ,  $[t_1; t_2]$  сходимость ошибок наблюдения  $\varepsilon_3(t)$ ,  $\varepsilon_2(t)$  соответственно в указанные области нуля (3.24), а также выполнение первого неравенства (3.24):

$$(3.26) \quad \begin{aligned} & p_3 > G_4 + \frac{E_3 - \delta}{t_4 - t_3} = G_4 + \frac{2G_3 + (G_4 + p_3)t_3 - \delta}{t_4 - t_3} \Rightarrow \\ & \Rightarrow p_3 > \frac{2G_3 + G_4 t_4 - \delta}{t_4 - 2t_3}, \quad t_2 < t_3 < \frac{t_4}{2}; \\ & p_2 > E_3 + \frac{E_2 - \delta}{t_2 - t_1} = E_3 + \frac{2G_2 + (E_3 + p_2)t_1 - \delta}{t_2 - t_1} \Rightarrow p_2 > \\ & > \frac{2G_2 + E_3 t_2 - \delta}{t_2 - 2t_1} = \frac{2G_2 + (2G_3 + (G_4 + p_3)t_3)t_2 - \delta}{t_2 - 2t_1}, \quad 0 < t_1 < \frac{t_2}{2}; \\ & p_1 > E_2 = 2G_2 + (E_3 + p_2)t_1. \end{aligned}$$

В неравенствах (3.26) продемонстрирована указанная в разделе 2 зависимость выбора амплитуд в верхних уравнениях от принятых значений амплитуд в нижних уравнениях.

В линейных зонах в указанных интервалах система (3.21), (3.22) представима в виде:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 - p_1 l_1 \varepsilon_1, & t \geq 0; \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_3 - p_2 l_2 (\varepsilon_2 - \alpha_2), & t \geq t_2; \\ \dot{\varepsilon}_3 &= g_4(t) - p_3 l_3 (\varepsilon_3 - \alpha_3), & t \geq t_4. \end{aligned}$$

Из достаточных условий устойчивости аналогично (3.18) получим неравенства для выбора больших коэффициентов наблюдателя, обеспечивающих заданную точность стабилизации ошибок наблюдения (3.21):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 &\leq |\varepsilon_1| (E_2 - p_1 l_1 |\varepsilon_1|) < 0 \Rightarrow l_1 > E_2 / (p_1 \delta), \\ \varepsilon_2^T \dot{\varepsilon}_2 &\leq |\varepsilon_2| (E_3 - p_2 l_2 (|\varepsilon_2| - \Delta_2)) < 0 \Rightarrow l_2 > E_3 / (p_2 (\delta - \Delta_2)), \\ \varepsilon_3^T \dot{\varepsilon}_3 &\leq |\varepsilon_3| (G_4 - p_3 l_3 (|\varepsilon_3| - \Delta_3)) < 0 \Rightarrow l_3 > G_4 / (p_3 (\delta - \Delta_3)). \end{aligned}$$

Для оценок больших коэффициентов, обеспечивающих выполнение четных неравенств (3.24) (т.е. стабилизацию производных ошибок наблюдения  $\dot{\varepsilon}_1(t), \dot{\varepsilon}_2(t)$ ), оценим решения первого и второго уравнения системы (3.27) на интервалах  $[0; t_1]$ ,  $[t_2; t_3]$  соответственно:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(t_1)| &\leq \frac{E_2}{p_1 l_1} + \frac{p_1 - E_2}{p_1 l_1} e^{-p_1 l_1 t_1} \Rightarrow |\varepsilon_2(t) - v_1(t)| \leq \Delta_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (p_1 - E_2) e^{-p_1 l_1 t_1} \leq \Delta_2 \Rightarrow l_1 > \frac{1}{t_1 p_1} \ln \frac{p_1 - E_2}{\Delta_2}; \\ |\varepsilon_2(t_3)| &\leq \frac{E_3}{p_2 l_2} + \Delta_2 + \frac{p_2 - E_3}{p_2 l_2} e^{-p_2 l_2 (t_3 - t_2)} \Rightarrow |\varepsilon_3(t) - v_2(t)| \leq \Delta_3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (p_2 - E_3) e^{-p_2 l_2 (t_3 - t_2)} \leq \Delta_3 \Rightarrow l_2 > \frac{1}{(t_3 - t_2) p_2} \ln \frac{p_2 - E_3}{\Delta_3}. \end{aligned}$$

С учетом данных оценок приведем последовательность действий при настройке параметров наблюдателя (3.21), (3.22), обеспечивающих (3.24) и, следовательно, цель наблюдения (3.6):

- 1) исходя из заданного времени оценивания  $T > 0$ , с учетом  $t_1 < t_2/2$ ,  $t_3 < t_4/2$  зафиксировать моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$ ;
- 2) выбрать значения амплитуд  $p_i$ ,  $i = \overline{3, 1}$ , на основе нижних оценок (3.26);
- 3) принять значение  $0 < \Delta_3 < \delta$  и на основе нижней оценки выбрать

$$(3.28) \quad l_3 > \frac{G_4}{p_3 (\delta - \Delta_3)};$$

- 4) принять значение  $0 < \Delta_2 < \delta$  и на основе нижней оценки выбрать

$$(3.29) \quad l_2 > \frac{1}{p_2} \max \left\{ \frac{E_3}{\delta - \Delta_2}; \frac{1}{t_3 - t_2} \ln \frac{p_2 - E_3}{\Delta_3} \right\};$$

- 5) на основе нижней оценки выбрать

$$(3.30) \quad l_1 > \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{E_2}{\delta}; \frac{1}{t_1} \ln \frac{p_1 - E_2}{\Delta_2} \right\}.$$

### 3.5. Результаты моделирования

Для численного моделирования разработанных алгоритмов (которое проводилось в среде MATLAB-Simulink с методом интегрирования Эйлера с постоянным шагом 0,001) были использованы параметры микро БПЛА весом до 5 кг, поднимающегося на высоту до 5 км. Электрический двигатель может обеспечить ему скорость до 95 км/ч (26 м/с), в воздухе способен находиться до одного часа. Подобные летательные аппараты выполняют разведывательные функции и предоставляют информацию о текущей обстановке.

Для системы (3.1) с начальными условиями  $x_1(0) = (0; 100; 1)^T$  метров при действии внешних возмущений

$$\eta_1(t) = 0,2 \sin(t), \quad \eta_2(t) = 0,24 \sin(t), \quad \eta_3(t) = 0,9 \cos(t)$$

ставилась задача вывода центра масс БПЛА на пространственную траекторию:

$$(3.31) \quad g_{11}(t) = 3 \sin(\pi t/3), \quad g_{12}(t) = t + 100, \quad g_{13}(t) = 3 \cos(\pi t/3), \quad t = [0; 3] \text{ с}; \\ g_{11}(t) = t^2 - 9, \quad g_{12}(t) = t + 100, \quad g_{13}(t) = t - 6, \quad t \geq 3 \text{ с}.$$

В законе управления (3.11) были приняты следующие коэффициенты усиления:  $k_1 = \text{diag}(64; 66; 65)$ ,  $k_2 = \text{diag}(67; 66; 65)$ .

Для наблюдателя возмущений (3.14) на основе (3.18)–(3.19) были приняты следующие параметры корректирующих воздействий (3.16):  $p = 4$ ,  $l = 180$ .

Для наблюдателя производных задающих сигналов (3.20) на основе (3.26), (3.28)–(3.30) были приняты следующие параметры корректирующих воздействий (3.22):  $p_1 = 13$ ,  $l_1 = 100$ ;  $p_2 = 8$ ,  $l_2 = 100$ ;  $p_3 = 4$ ,  $l_3 = 100$ .

На рис. 1–6 показаны графики первых  $g_{2i}(t)$  и вторых  $g_{3i}(t)$  производных задающих воздействий и их оценок  $z_{2i}(t)$ ,  $z_{3i}(t)$ , полученных с помощью дифференциатора (3.20), а также ошибок наблюдения  $\varepsilon_{2i}(t)$  метров в секунду,  $\varepsilon_{3i}(t)$  метров за секунду в квадрате,  $i = 1, 2, 3$ .

Как видно из рис. 1–2 и 5–6, в момент  $t = 3$  с при смене формы задающих сигналов  $g_{11}(t)$ ,  $g_{13}(t)$ , приводящей к точкам конечного разрыва производных, имеют место небольшие всплески оценочных сигналов, ошибки наблюдения в установившемся режиме составляют  $|\varepsilon_{2i}| \leq 10^{-7}$  метров в секунду,  $|\varepsilon_{3i}| \leq 5 \cdot 10^{-5}$  метров за секунду в квадрате.

Заметим, что результаты моделирования дифференциатора (2.10), (2.12) с выходом (3.31) практически не отличаются от представленных на рис. 1–6. При использовании наблюдателя (2.3) с глубокой обратной связью (2.7), обеспечивающего такую же точность оценивания, всплески оценочных сигналов вторых производных оказались на порядок больше [23].

Следует отметить, что на практике задающие воздействия должны быть допустимыми для конкретного объекта управления (2.1), в частности, достаточно гладкими, что обеспечивается на этапе планировании траекторий. С целью продемонстрировать работоспособность дифференциатора производных кусочно-дифференцируемых функций рассмотрена нештатная ситуация с использованием непрерывных, но негладких задающих воздействий (3.31). Учитывая, что в законах управления (3.11), (3.12) используется линейная стаби-

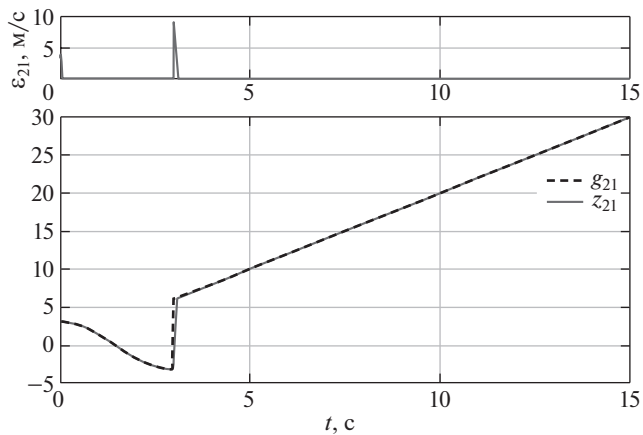


Рис. 1. Графики  $g_{21}(t)$ ,  $z_{21}(t)$ ,  $\varepsilon_{21}(t)$  м/с.

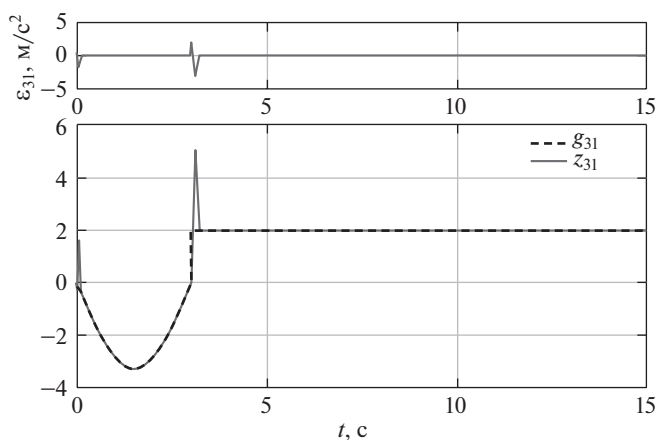


Рис. 2. Графики  $g_{31}(t)$ ,  $z_{31}(t)$ ,  $\varepsilon_{31}(t)$  м/с<sup>2</sup>.

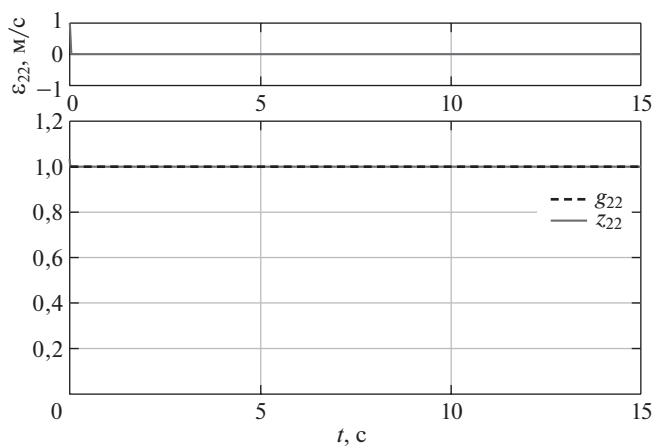


Рис. 3. Графики  $g_{22}(t)$ ,  $z_{22}(t)$ ,  $\varepsilon_{22}(t)$  м/с.

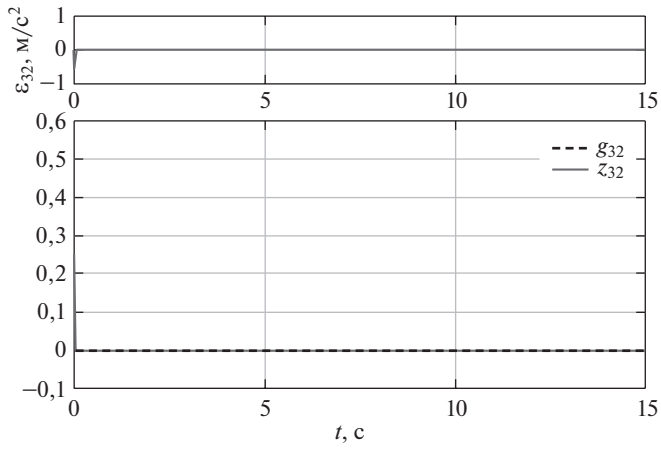


Рис. 4. Графики  $g_{32}(t)$ ,  $z_{32}(t)$ ,  $\varepsilon_{32}(t)$  м/с<sup>2</sup>.

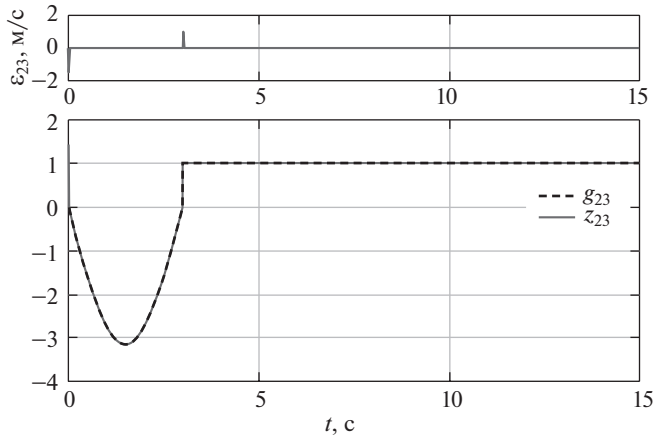


Рис. 5. Графики  $g_{23}(t)$ ,  $z_{23}(t)$ ,  $\varepsilon_{23}(t)$  м/с.

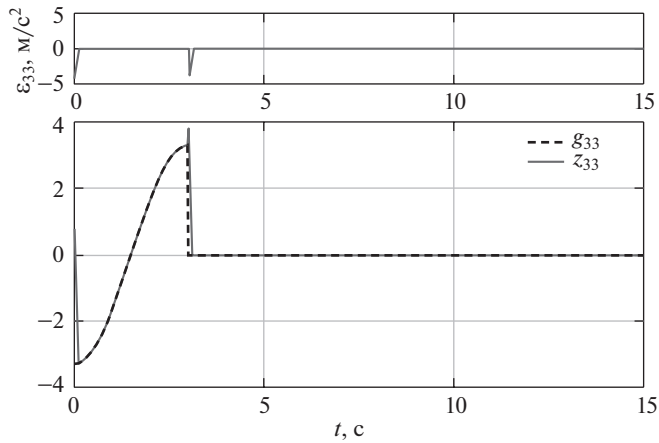


Рис. 6. Графики  $g_{33}(t)$ ,  $z_{33}(t)$ ,  $\varepsilon_{33}(t)$  м/с<sup>2</sup>.

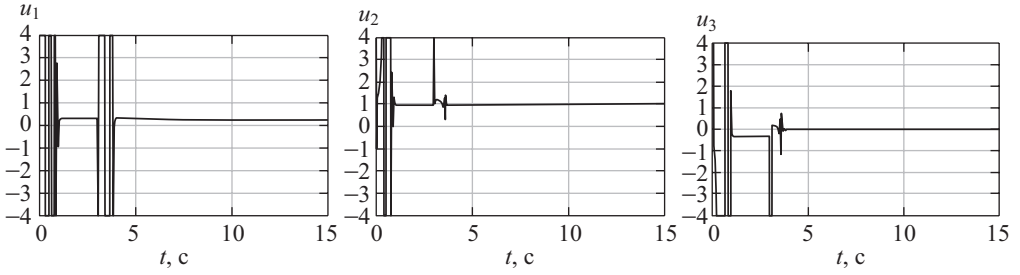


Рис. 7. Графики управлений для системы с динамической обратной связью.

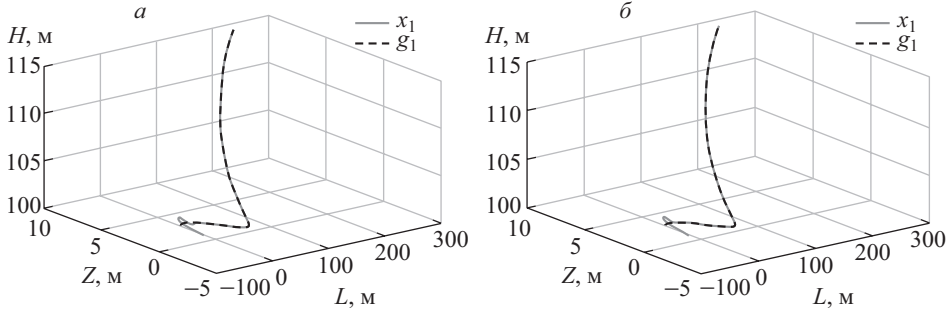


Рис. 8. Пространственные графики заданной траектории  $g_1(t)$  и изображающей точки  $x_1(t)$ : эталонной системы (а); системы с динамической обратной связью (б).

лизирующая составляющая, для снижения перегрузок в начале переходных процессов при моделировании управляющие воздействия были ограничены:

$$(3.32) \quad U_i = 4\text{sat}(u_i), \quad \bar{U}_i = 4\text{sat}(\bar{u}_i), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Графики управлений с указанными ограничениями для системы с динамической обратной связью представлены на рис. 7.

На рис. 8,а показан эталонный процесс отслеживания центром масс  $x_1(t)$  заданной пространственной траекторией  $g_1(t)$  с базовым законом управления (3.11), (3.32) в предположении, что все внешние сигналы и их производные известны. На рис. 8,б показан график изображающей точки замкнутой системы (3.1) с динамической обратной связью (3.12), (3.32) с наблюдателями возмущений (3.14) и производных заданий (3.20).

В таблице для ошибок слежения  $e_{1i} = x_{1i} - g_{1i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , эталонной системы и системы с динамической обратной связью на интервалах  $t \in [0; 3)/t \geq 3$  с представлены: величина перерегулирования  $e_{1\max, i} \geq |e_{1i}(t)|$ ; время регулирования  $t_i: |e_{1i}(t)| \leq 0,01$  м,  $t \geq t_i$ , а также точность в установившемся режиме  $\Delta_i \geq |e_{1i}(t)|$  при  $t \rightarrow 3 - 0/t \geq 10$  с. Показатели системы с наблюдателями практически не отличаются от показателей эталонной системы, что подтверждает эффективность разработанных алгоритмов оценивания внешних сигналов.

**Таблица.** Показатели регулирования ошибок слежения

Сигнал	Эталонная система (3.1), (3.11) $t \in [0; 3]/t \geq 3$ с		
	$e_{1 \max, i}$ , М	$t_i$ , с	$\Delta_i$ , м
$e_{11} = x_{11} - g_{11}$	0,35/0,7	0,97/3,83	$6 \cdot 10^{-4}/8 \cdot 10^{-4}$
$e_{12} = x_{12} - g_{12}$	0,3/0,083	0,84/3,77	$3,5 \cdot 10^{-4}/3,2 \cdot 10^{-5}$
$e_{13} = x_{13} - g_{13}$	0,6/0,095	0,97/3,77	$3,15 \cdot 10^{-4}/3,1 \cdot 10^{-5}$
Сигнал	Система (3.1) с динамической обратной связью (3.12), (3.14), (3.20) $t \in [0; 3]/t \geq 3$ с		
	$e_{1 \max, i}$ , М	$t_i$ , с	$\Delta_i$ , м
$e_{11} = x_{11} - g_{11}$	0,36/0,78	1/3,837	$6 \cdot 10^{-4}/8 \cdot 10^{-4}$
$e_{12} = x_{12} - g_{12}$	0,35/0,084	0,85/3,79	$3,5 \cdot 10^{-4}/3,2 \cdot 10^{-5}$
$e_{13} = x_{13} - g_{13}$	0,6/0,092	1/3,79	$3,6 \cdot 10^{-4}/3,1 \cdot 10^{-5}$

#### 4. Заключение

Использование теории наблюдателей состояния на основе виртуальных моделей является конструктивной альтернативой по отношению к численному дифференцированию сигналов. При этом пространство состояний замкнутой системы расширяется только за счет порядка наблюдателей и не требует построения реальных динамических генераторов внешних воздействий и задающих сигналов. Предложенный подход, с одной стороны, обобщает случай, когда дифференцируемый сигнал порождается известной динамической моделью, до робастной постановки. С другой стороны, введение виртуальной динамической модели и получение оценок ее вектора состояния на основе теории робастных наблюдателей позволяют исключить или по крайней мере не учитывать динамику такого дифференциатора при синтезе обратной связи, что является важным преимуществом по сравнению с использованием устройств непосредственного дифференцирования.

Предложенный подход апробирован на примере синтеза системы управления беспилотным летательным аппаратом пространственной траектории, заданной в виде вектора целевых сигналов для путевых координат. Предлагаемый подход к получению информации о производных задающего сигнала обобщает случаи, когда траектория движения задается и когда задание формируется в текущий момент времени (последнее актуально, например, в задачах преследования, наведения и т.п.). Результаты моделирования подтверждают эффективность использования предложенного подхода.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы.* Учитывая специфику решаемой задачи, без ограничения общности примем в системе (2.11) начальные условия в виде (2.18), а именно:

$$(П.1) \quad |\varepsilon_1(0)| \leq \delta, \quad |\varepsilon_i(0)| \leq 2G_i, \quad 2G_i \gg \delta, \quad i = \overline{2, n+1}.$$

Разделим отрезок времени  $[0; T]$  на  $2n$  отрезков с помощью точек  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{2n-1} < t_{2n} = T$  и формализуем во времени желаемое



поведение ошибок наблюдения и их производных, обеспечивающих выполнение (2.19):

$$\begin{aligned}
& |\varepsilon_1(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_0, \quad |\dot{\varepsilon}_1(t)| \leq \Delta_{1,1}, \quad t \geq t_1, \quad |\ddot{\varepsilon}_1(t)| \leq \Delta_{1,2}, \quad t \geq t_2, \dots \\
& \dots, \quad |\varepsilon_1^{(n)}(t)| \leq \Delta_{1,n}, \quad t \geq t_n, \\
& |\varepsilon_2(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_2, \quad |\dot{\varepsilon}_2(t)| \leq \Delta_{2,1}, \quad t \geq t_3, \quad |\ddot{\varepsilon}_2(t)| \leq \Delta_{2,2}, \quad t \geq t_4, \dots \\
& \dots, \quad |\varepsilon_2^{(n-1)}(t)| \leq \Delta_{2,n-1}, \quad t \geq t_{n+1}, \\
& |\varepsilon_3(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_4, \quad |\dot{\varepsilon}_3(t)| \leq \Delta_{3,1}, \quad t \geq t_5, \quad |\ddot{\varepsilon}_3(t)| \leq \Delta_{3,2}, \quad t \geq t_6, \dots \\
& \dots, \quad |\varepsilon_3^{(n-2)}(t)| \leq \Delta_{3,n-2}, \quad t \geq t_{n+2}, \\
(\text{П.2}) \quad & \dots \\
& |\varepsilon_{n-1}(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_{2(n-1)-2}, \quad |\dot{\varepsilon}_{n-1}(t)| \leq \Delta_{n-1,1}, \quad t \geq t_{2(n-1)-1}, \\
& \quad \quad \quad |\ddot{\varepsilon}_{n-1}(t)| \leq \Delta_{n-1,2}, \quad t \geq t_{2(n-1)}; \\
& |\varepsilon_n(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_{2n-2}, \quad |\dot{\varepsilon}_n(t)| \leq \Delta_{n,1}, \quad t \geq t_{2n-1}; \\
& \quad \quad \quad \Delta_{i,j} < \delta, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n+1-i}; \\
& |\varepsilon_{n+1}(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_{2n}.
\end{aligned}$$

С учетом (2.13), (2.15) конкретизируем первые неравенства в строках (П.2), предполагая, что на предыдущих интервалах указанные соотношения были выполнены:

$$\begin{aligned}
& |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1 \leq \delta, \quad t \geq t_0; \\
(\text{П.3}) \quad & |v_{i-1}(t) - z_i(t)| = |\varepsilon_i(t) - \dot{\varepsilon}_{i-1}(t)| \leq 1/l_i \Leftrightarrow |\varepsilon_i(t)| \leq 1/l_i + \Delta_{i-1,1} \leq \delta, \\
& \quad \quad \quad t \geq t_{2i-2}, \quad i = \overline{2, n+1}.
\end{aligned}$$

Сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны (П.3) обеспечивается выбором амплитуд  $p_i > 0$ , а размеры линейных зон и выполнение остальных, вспомогательных неравенств (П.2) — выбором больших коэффициентов  $l_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ .

Как было отмечено, в системе (2.11)–(2.12) по построению  $|\varepsilon_1(0)| \leq \delta$  и  $\text{sign}(v_1(t)) = \text{sign}(\varepsilon_1(t))$ ,  $t \geq 0$ , требуется обеспечить первое неравенство (П.3) выбором  $p_1 > 0$ , который совпадает с первичной настройкой (первое неравенство (2.16)), а именно

$$(\text{П.4}) \quad \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1(g_2 - p_1 \text{sign}(\varepsilon_1)) \leq |\varepsilon_1|(G_2 - p_1) < 0 \Rightarrow p_1 > G_2.$$

В остальных уравнениях системы (2.11) совпадение знаков  $\text{sign}(v_i(t)) = \text{sign}(\varepsilon_i(t))$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , может не иметь места при  $0 \leq t \leq t_{2(i-1)-1}$  и гарантируется только при  $t > t_{2(i-1)-1}$  вне окрестности  $|\varepsilon_i| \leq \Delta_{i-1,1}$ . Это означает, что в общем случае значения  $\varepsilon_i(t)$  растут по модулю на интервале  $[0; t_{2(i-1)-1}]$ , нужно обеспечить их сходимость в области (П.3) за время  $t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}$  выбором  $p_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ . Детализируем первичную настройку амплитуд с уче-

том начальных условий (П.1) и заданного времени сходимости:

$$p_i \geq \frac{|\varepsilon_i(t_{2(i-1)-1})|}{t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}} + G_{i+1},$$

$$|\varepsilon_i(t_{2(i-1)-1})| \leq 2G_i + (G_{i+1} + p_i)t_{2(i-1)-1}, \quad i = \overline{2, n+1}, t \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$(П.5) \quad p_i \geq \frac{2G_i + (G_{i+1} + p_i)t_{2(i-1)-1}}{t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}} + G_{i+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_i \geq \frac{2G_i + G_{i+1}t_{2(i-1)}}{t_{2(i-1)} - 2t_{2(i-1)-1}}, \quad i = \overline{2, n+1},$$

где  $2t_{2(i-1)-1} < t_{2(i-1)}$ . Положим, например, все нечетные временные интервалы одинаковыми  $\Delta t = t_{2i-1} - t_{2i-2} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а для четных установим  $\Delta t = t_{2(i-1)} - 2t_{2(i-1)-1}$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , тогда

$$(П.6) \quad t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1} = (3 \cdot 2^{i-2} - 1)\Delta t, \quad i = \overline{2, n+1},$$

откуда имеем верхнюю оценку для выбора  $\Delta t > 0$ :

$$(П.7) \quad t_{2n} = 3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1})\Delta t \leq T \Rightarrow 0 < \Delta t \leq \frac{T}{3(2^n - 1)}.$$

С учетом (П.4)–(П.7) имеем нижние оценки для выбора амплитуд, обеспечивающих сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны (П.3) за заданное время:

$$(П.8) \quad p_1^* = G_2, \quad p_i^* = \frac{2G_i + G_{i+1}3(2^{i-1} - 1)\Delta t}{\Delta t} = \frac{2G_i}{\Delta t} + 3(2^{i-1} - 1)G_{i+1},$$

$$i = \overline{2, n+1}.$$

Еще раз отметим, что в отличие от (3.26) в дифференциаторе (2.10), (2.12) амплитуды выбираются независимо друг от друга.

Для настройки больших коэффициентов рассмотрим уравнения системы (2.11)–(2.12) с учетом (2.13) в линейных зонах, куда они попадают в указанные интервалы времени:

$$(П.9) \quad \dot{\varepsilon}_1 = g_2 - p_1 l_1 \varepsilon_1, \quad |\varepsilon_1| \leq 1/l_1, \quad t \geq 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - p_i l_i (\varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}), \quad |\varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}| \leq 1/l_i, \quad t \geq t_{2i-2}, \quad i = \overline{2, n+1}.$$

Из достаточных условий сходимости  $\varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i < 0$  найдем нижние оценки для выбора  $l_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , обеспечивающих заданную точность оценивания (2.19), а также установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации первых производных ошибок оценивания, разделив заданную величину  $\delta$

на две части, например пополам:

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon_1(t)| \leq \delta(t \geq 0) &\Rightarrow l_1 \geq \frac{G_2}{p_1 \delta}; \\
 |\varepsilon_i(t)| \leq \underbrace{\frac{G_{i+1}}{p_i l_i}}_{\delta/2} + \underbrace{|\dot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/2} &\leq \delta(t \geq t_{2i-2}) \Rightarrow l_i \geq \frac{2G_{i+1}}{p_i \delta}, \\
 |\dot{\varepsilon}_{i-1}| \leq \Delta_{i-1,1} = \frac{\delta}{2}, \quad i = \overline{2, n+1}. &
 \end{aligned}
 \tag{П.10}$$

Далее для обеспечения стабилизации с заданной точностью за заданное время производных ошибок наблюдения (П.2) рассмотрим итерационную процедуру, состоящую из  $n$  шагов, где  $n$  — максимальный порядок учитываемых производных.

*Шаг 1.* Выбором  $l_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , нужно также обеспечить сходимость первых производных ошибок наблюдения  $\dot{\varepsilon}_i(t)$  в установленные области (П.10) за время  $t_{2i-1} - t_{2i-2} = \Delta t$  (П.2) из начальных условий  $|\dot{\varepsilon}_i(t_{2i-2})| = G_{i+1} + p_i$  (П.9). С этой целью оценим на указанных интервалах решения вспомогательной системы

$$\ddot{\varepsilon}_1 = g_3 - p_1 l_1 \dot{\varepsilon}_1; \quad \ddot{\varepsilon}_i = g_{i+2} - p_i l_i (\dot{\varepsilon}_i - \ddot{\varepsilon}_{i-1}), \quad i = \overline{2, n},
 \tag{П.11}$$

и установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации вторых производных ошибок оценивания, разделив величины  $\Delta_{i,1} = \delta/2$  на части, например указанным образом:

$$\begin{aligned}
 |\dot{\varepsilon}_1(t)| &\leq \underbrace{(G_2 + p_1)e^{-p_1 l_1 \Delta t}}_{\delta/4} + \underbrace{\frac{G_3}{p_1 l_1}}_{\delta/4} \leq \Delta_{1,1} = \frac{\delta}{2} (t \geq t_1) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_1 \geq \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{4G_3}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{4(G_2 + p_1)}{\delta} \right\}; \\
 |\dot{\varepsilon}_i(t)| &\leq \underbrace{(G_{i+1} + p_i)e^{-p_i l_i \Delta t}}_{\delta/8} + \underbrace{\frac{G_{i+2}}{p_i l_i}}_{\delta/8} + \underbrace{|\ddot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/4} \leq \Delta_{i,1} = \frac{\delta}{2} (t \geq t_{2i-1}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_i \geq \frac{1}{p_i} \max \left\{ \frac{8G_{i+2}}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{8(G_{i+1} + p_i)}{\delta} \right\}, \\
 |\ddot{\varepsilon}_{i-1}| &\leq \Delta_{i-1,2} = \frac{\delta}{4}, \quad i = \overline{2, n}.
 \end{aligned}
 \tag{П.12}$$

*Шаг 2.* Выбором  $l_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , нужно также обеспечить сходимость вторых производных ошибок наблюдения  $\ddot{\varepsilon}_i(t)$  в установленные области (П.12) за время  $t_{2i} - t_{2i-1} = (3 \cdot 2^{i-1} - 1)\Delta t$  (П.2), (П.6) из начальных условий  $|\ddot{\varepsilon}_i(t_{2i-1})| = G_{i+2} + p_i$  (П.11). С этой целью оценим на указанных интервалах решения вспомогательной системы

$$\ddot{\varepsilon}_1 = g_4 - p_1 l_1 \ddot{\varepsilon}_1; \quad \ddot{\varepsilon}_i = g_{i+3} - p_i l_i (\ddot{\varepsilon}_i - \ddot{\varepsilon}_{i-1}), \quad i = \overline{2, n-1},$$

а также установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации третьих производных ошибок оценивания, разделив величины  $\Delta_{i,2} = \delta/4$ , например, аналогично (П.12):

$$\begin{aligned}
 |\ddot{\varepsilon}_1(t)| &\leq \underbrace{(G_3 + p_1)e^{-p_1 l_1 2\Delta t}}_{\delta/8} + \underbrace{\frac{G_4}{p_1 l_1}}_{\delta/8} \leq \frac{\delta}{4} (t \geq t_2) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_1 \geq \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{8G_4}{\delta}; \frac{1}{2\Delta t} \ln \frac{8(G_3 + p_1)}{\delta} \right\}; \\
 |\ddot{\varepsilon}_i(t)| &\leq \underbrace{(G_{i+2} + p_i)e^{-p_i l_i (3 \cdot 2^{i-1} - 1)\Delta t}}_{\delta/16} + \underbrace{\frac{G_{i+3}}{p_i l_i}}_{\delta/16} + \underbrace{|\ddot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/8} \leq \Delta_{i,2} = \frac{\delta}{4} (t \geq t_{2i}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_i \geq \frac{1}{p_i} \max \left\{ \frac{16G_{i+3}}{\delta}; \frac{1}{(3 \cdot 2^{i-1} - 1)\Delta t} \ln \frac{16(G_{i+2} + p_i)}{\delta} \right\}, \\
 |\ddot{\varepsilon}_{i-1}| &\leq \Delta_{i-1,3} = \frac{\delta}{8}, \quad i = \overline{2, n-1},
 \end{aligned}$$

и т.д. На каждом шаге количество рассматриваемых больших коэффициентов и размерность вспомогательных систем понижаются на единицу. Таким образом, на последнем  $n$ -м шаге выбором  $l_1$  нужно обеспечить сходимость  $\varepsilon_1^{(n)}(t)$  в область, установленную на предыдущем шаге, например, указанным выше образом  $\Delta_{1,n} = \delta/2^n$  за время  $t_n - t_{n-1}$  (П.2) из начальных условий  $|\varepsilon_1^{(n)}(t_{n-1})| = G_{n+1} + p_1$ . Оценка решения вспомогательного уравнения

$$\varepsilon_1^{(n+1)} = g_{n+2} - p_1 l_1 \varepsilon_1^{(n)}$$

дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
 \left| \varepsilon_1^{(n)}(t) \right| &\leq \underbrace{(G_{n+1} + p_1)e^{-p_1 l_1 (t_n - t_{n-1})\Delta t}}_{\delta/2^{n+1}} + \underbrace{\frac{G_{n+2}}{p_1 l_1}}_{\delta/2^{n+1}} \leq \frac{\delta}{2^n} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_1 \geq \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta}; \frac{1}{(t_n - t_{n-1})\Delta t} \ln \frac{2^{n+1}(G_{n+1} + p_1)}{\delta} \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь если  $n$  — нечетное число, то  $t_n - t_{n-1} = \Delta t$ , если четное, то  $t_n - t_{n-1} = (3 \cdot 2^{n/2-1} - 1)\Delta t$ .

Учитывая, что логарифмическая функция очень медленно возрастает, множитель при  $\Delta t$ , определяющий длину четного интервала (П.6), есть натуральное число и  $1/\Delta t > 1/((3 \cdot 2^{i-1} - 1)\Delta t)$ , можно упростить конечный результат, полагая этот множитель равным единице в формулах, полученных на четных шагах.

Неравенства для выбора больших коэффициентов (П.10) и типа (П.12), полученные на разных шагах процедуры, должны выполняться одновременно. С учетом указанного упрощения объединим их и получим итоговые нижние оценки, при которых поставленная задача (2.19) обеспечивается с учетом

быстрых движений и погрешностей уравнений статики:

$$\begin{aligned}
 \text{(П.13)} \quad l_{n+1}^* &= \frac{2G_{n+2}}{p_{n+1}\delta}, \quad l_n^* = \frac{1}{p_n} \max \left\{ \frac{2G_{n+1}}{\delta}; \frac{8G_{n+2}}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{8(G_{n+1} + p_n)}{\delta} \right\}, \\
 l_{n-1}^* &= \frac{1}{p_{n-1}} \max \left\{ \frac{2G_n}{\delta}; \frac{8G_{n+1}}{\delta}; \frac{16G_{n+2}}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{8(G_n + p_{n-1})}{\delta}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{16(G_{n+1} + p_{n-1})}{\delta} \right\}, \\
 &\dots \\
 l_3^* &= \frac{1}{p_3} \max \left\{ \frac{2G_4}{\delta}; \frac{2^3G_5}{\delta}; \frac{2^4G_6}{\delta}; \dots; \frac{2^nG_{n+2}}{\delta}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^3(G_4 + p_3)}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^4(G_5 + p_3)}{\delta}; \dots; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^n(G_{n+1} + p_3)}{\delta} \right\}, \\
 l_2^* &= \frac{1}{p_2} \max \left\{ \frac{2G_3}{\delta}; \frac{2^3G_4}{\delta}; \frac{2^4G_5}{\delta}; \dots; \frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^3(G_3 + p_2)}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^4(G_4 + p_2)}{\delta}; \dots; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^{n+1}(G_{n+1} + p_2)}{\delta} \right\}, \\
 l_1^* &= \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{G_2}{\delta}; \frac{2^2G_3}{\delta}; \frac{2^3G_4}{\delta}; \dots; \frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^2(G_2 + p_1)}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^3(G_3 + p_1)}{\delta}; \dots; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^{n+1}(G_{n+1} + p_1)}{\delta} \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, существуют такие  $p_i^*$  (П.8) и  $l_i^*$  (П.13), что для любых  $p_i, l_i: p_i > p_i^*, l_i > l_i^*, i = \overline{1, n+1}$ , неравенства (2.19) будут выполнены. Теорема доказана.

Следует отметить, что оценки для выбора больших коэффициентов (П.13), полученные из достаточных условий, могут оказаться достаточно консервативными, особенно для систем (2.11) большой размерности. При практическом применении данной процедуры рекомендуется опираться на заданные значения  $G_i, i = \overline{2, n+2}, \delta > 0, T > 0$  и при необходимости снижения расчетных оценок:

— учитывать множители при  $\Delta t$  в формулах, полученных на четных шагах процедуры;

— использовать другой способ разделения  $\Delta_{i,j}$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n+1-i}$ ) на части, отводя меньшую долю при оценке затухающих собственных движений производных.

Обратим внимание, что введенный прием с разделением на части областей сходимости производных ошибок наблюдения позволил сделать независимым друг от друга выбор больших коэффициентов (П.13). Можно использовать другую, связную процедуру настройки, в ходе которой последовательно (снизу вверх) из достаточных условий фиксируются значения  $l_i^*, i = \overline{n+1, 1}$ , с учетом которых области сходимости старших производных определяются по остаточному принципу. Такая процедура будет более трудоемкой, но может привести к менее консервативным расчетным оценкам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. N.Y.: Springer-Verlar, 1979.
2. *Фомичев В.В., Высоккий А.О.* Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // ДУ. 2019. Т. 55. № 4. С. 567–573.  
*Fomichev V.V., Vysotskii A.O.* Algorithm for Designing a Cascade Asymptotic Observer for a System of Maximal Relative Order // Differ. Equations. 2019. V. 55. No. 4. P. 553–560.
3. *Краснов Д.В., Уткин А.В.* Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // УБС. 2017. Вып. 69. С. 29–49.  
*Krasnov D.V., Utkin A.V.* Synthesis of a Multifunctional Tracking System in Conditions of Uncertainty // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 9. P. 1704–1716.
4. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // АиТ. 2017. № 12. С. 26–53.  
*Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V.* Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 12. P. 2120–2140.
5. *Антипов А.С., Краснов Д.В., Уткин А.В.* Декомпозиционный синтез системы управления электромеханическими объектами в условиях неполной информации // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 530–548.  
*Antipov A.S., Krasnov D.V., Utkin A.V.* Decomposition Synthesis of the Control System of Electromechanical Objects in Conditions of Incomplete Information // Mechanics of Solids. 2019. V. 54. No. 5. P. 47–60.
6. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // АиТ. 2001. № 11. С. 73–94.  
*Utkin V.A.* Invariance and Independence in Systems with Separable Motion // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 11. P. 1825–1843.
7. *Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S.* Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 1042–1047.
8. *LaValle S.M.* Planning Algorithms. Cambridge University Press, 2006.
9. *De Filippis L., Guglieri G., Quagliotti F.* Path Planning Strategies for UAVS in 3D Environments // J. of Intelligent and Robotic Systems. 2012. V. 65. No. 1. P. 247–264.
10. *Гилимьянов Р.Ф., Рапопорт Л.Б.* Метод деформации пути в задачах планирования движения роботов при наличии препятствий // ПУ. 2012. № 1. С. 70–76.  
*Gilimyanov R.F., Rapoport L.B.* Path Deformation Method for Robot Motion Planning Problems in the Presence of Obstacles // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 12. P. 2163–2172.
11. *Kamyar K., Taheri E.* Aircraft Optimal Terrain/Threat-Based Trajectory Planning and Control // J. of Guidance, Control, and Dynamics. 2014. V. 37. No. 2. P. 466–483.
12. *Ткачев С.Б., Крищенко А.П., Канатников А.Н.* Автоматическая генерация сложных пространственных траекторий БПЛА и синтез управлений // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 01. С. 1–17.  
*Tkachev S.B., Krishenko A.P., Kanatnikov A.N.* Automatic Generation of Complex Spatial Trajectories of the UAV and Synthesis of Control // Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU. 2015. No. 01. P. 1–17.

13. *Емельянов С.В., Афанасьев А.П.* Дифференцирование сигнала в системах автоматического регулирования // *АиТ.* 2015. № 12. С. 27–42.  
*Emel'yanov S.V., Afanas'ev A.P.* Signal Differentiation in Automatic Control Systems // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 12. P. 2110–2123.
14. *Utkin V.A., Krasnova S.A.* Improving the Accuracy of the Estimated Signals in the State and Disturbance Observer // *Proc. of the Twelfth Int. Conf. "Management of large-scale system development" (MLSD).* 1–3 October, 2019. Moscow, Russia, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences. IEEE Xplore, 2019. 4 p.
15. *Краснова С.А., Кузнецов С.И.* Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных системах // *АиТ.* 2005. № 10. С. 54–69.  
*Krasnova S.A., Kuznetsov S.I.* Incontrollable Perturbations on Nonlinear Dynamic Systems: Estimation on Moving Modes // *Autom. Remote Control.* 2005. V. 66. No. 10. P. 1580–1593.
16. *Краснова С.А.* Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // *УБС.* 2018. Вып. 76. С. 6–25.  
*Krasnova S.A.* Estimating the Derivatives of External Perturbations Based on Virtual Dynamic Models // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 5. P. 897–910.
17. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. Ч. 2. Объекты с неизвестными параметрами // *АиТ.* 2004. № 11. С. 40–48.  
*Nikiforov V.O.* Observers of External Deterministic Disturbances. P. II. Objects with Unknown Parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.
18. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов // *АиТ.* 1999. № 9. С. 13–20.  
*Dylevskii A.V., Lozgachev G.I.* State Space Approach to the Design of Differentiators // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 9. P. 1222–1229.
19. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // *АиТ.* 2014. № 9. С. 62–81.  
*Utkin V.A., Utkin A.V.* Problem of Tracking in Linear Systems with Parametric Uncertainties under Unstable Zero Dynamics // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 9. P. 1577–1592.
20. *Levant A.* Higher-Order Sliding Modes, Differentiation and Output-Feedback Control // *Int. J. Control.* 2003. V. 76. No. 9. P. 924–941.
21. *Khalil H.K., Praly L.* High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control // *Int. J. Robust and Nonlinear Control.* 2014. V. 24. No. 6. P. 993–1015.
22. *Кожунько Ю.Г., Краснов Д.В., Уткин А.В.* Два метода синтеза наблюдателей состояния и возмущений для беспилотного летательного аппарата // *ПУ.* 2020. № 1. С. 3–16.
23. *Кожунько Ю.Г., Антипов А.С., Краснова С.А.* Наблюдатели состояния как средство оценивания производных детерминированных сигналов // *Матер. XXXII конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова, 13-я Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2020), Санкт-Петербург, 6–8 октября 2020 г. СПб.: АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2020. С. 312–315.*

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.*

Поступила в редакцию 09.08.2020

После доработки 20.01.2021

Принята к публикации 16.03.2021