

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, д-р физ.-мат. наук, член-корр. НАН Азербайджана (kamil_aydazade@rambler.ru)

(Институт систем управления НАН Азербайджана;
Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку),
Е.Р. АШРАФОВА, канд. физ.-мат. наук (ashrafova.yegana@gmail.com)

(Бакинский государственный университет;
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕСТ И ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ

Исследуется задача оптимизации мест размещения и значений параметров сосредоточенных источников, влияющих на функционирование сложного объекта. Объект состоит из большого числа одномерных объектов, состояние каждого из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными краевыми условиями. Получены необходимые условия оптимальности как по параметрам, так и местам сосредоточения источников. На примере модельной задачи приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: источники, размещение источников, нелокальные условия, условия оптимальности, градиент функционала.

DOI: 10.31857/S0005231021070060

1. Введение

В статье исследуется задача оптимизации мест размещения и значений параметров сосредоточенных источников [1–4], влияющих на функционирование сложного объекта. Объект состоит из большого числа одномерных объектов, состояние каждого из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобъекты связаны между собой в произвольном порядке лишь состояниями в своих начальных или конечных точках. В точках соединения смежных подобъектов выполняются условия, являющиеся аналогами физических законов, например законами сохранения энергии, материального баланса и т.п.

Такие сложные объекты будем называть динамическими объектами сетевой структуры, по аналогии с публикацией [5], а соответствующие математические модели — сетевыми. Они возникают при использовании методов декомпозиции [6–8] при математическом моделировании сложных объектов, состоящих из подобъектов, имеющих самостоятельное назначение. Предполагается, что математические модели каждого из подобъектов известны или их

получение несложно. Декомпозиция объекта может проводиться по пространственным переменным, если объект имеет пространственную протяженность, или по временной переменной, или же по обоим переменным одновременно.

На отдельные точки подобъектов и на точки их соединения воздействуют источники, влияющие на функционирование как отдельных подобъектов, так и всего объекта в целом. Точки воздействия источников на подобъекты и их параметры требуется оптимизировать, исходя из заданного целевого функционала задачи.

Таким образом, исследуемая задача оптимизации описывается большой системой дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Система уравнений имеет блочную структуру, сами блоки связаны между собой в произвольном порядке лишь неразделенными начальными или конечными значениями фазовых переменных. Это означает, что система дифференциальных уравнений не структурирована каким-либо специальным образом, а краевые условия являются нелокальными.

Структуру таких объектов удобно представлять в виде ориентированного графа [9]. Предполагается, что граф неполный, т.е. большая часть элементов матрицы связей равны нулю. Ненулевые элементы этой матрицы соответствуют наличию связи между начальными и конечными состояниями отдельных блоков, соответствующих смежным дугам графа.

В статье исследованы выпуклость функционала, его дифференцируемость, получены необходимые условия оптимальности как по параметрам, так и местам сосредоточения источников. Предложена двухуровневая схема численного решения задачи. На верхнем уровне используются методы оптимизации [10, 11] первого порядка с применением полученных формул для градиента целевого функционала по оптимизируемым местам воздействия и параметрам источников. На нижнем уровне решаются прямая и сопряженная системы дифференциальных уравнений большой размерности блочной структуры с краевыми условиями, включающими неразделенные начальные и конечные значения фазовых переменных смежных блоков и значения параметров внешних источников. Для решения этих краевых задач применяется предложенный в [12–14] подход, основанный на аналоге метода прогонки [15–18]. Данный подход и расчетные формулы дают возможность проводить процедуру прогонки для каждого условия каждого блока отдельно, независимо от других условий и блоков. Это позволяет распараллеливать [19, 20] этап решения прямой и сопряженной краевых задач, к которому приходится многократно обращаться в процессе решения основной задачи оптимизации.

К рассматриваемой задаче, в частности, приводится задача оптимального управления переходным процессом неустановившегося движения жидкости (газа) в трубопроводных сетях сложной структуры [21, 22]. Математические модели этих процессов состоят из подсистем дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, каждая из которых описывает процесс движения на отдельном участке трубопровода. В местах соединения участков выполняются условия непрерывности потока и материального баланса, которые приводят к неразделенным краевым условиям. Применение метода прямых по временной или пространственной переменных (аналог

применения метода декомпозиции) приводит задачу управления режимами движения сырья в транспортной сети к задаче, исследуемой в данной статье.

2. Постановка задачи

Рассматривается сложный объект, состоящий из m звеньев (блоков), в произвольном порядке соединенных своими концами, структуру которого удобно представить в виде ориентированного графа. Каждой дуге графа сопоставляется независимый подобъект (блок), состояние которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Множество всех вершин графа обозначим через I , а множество дуг (звеньев) (k, s) длиной l^{ks} с началом в вершине $k \in I$ и концом в вершине $s \in I$ обозначим через $J = \{(k, s) : k, s \in I\}$, $|I| = N$, $|J| = m$, $|I|$ указывает на число элементов множества I .

Пусть $J_i^+ = \{(j, i) : j \in I_i^+\}$, $J_i^- = \{(i, j) : j \in I_i^-\}$ – множества дуг соответственно входящих и выходящих из i -й вершины, I_i^+ и I_i^- – множества вершин, смежных с i -й вершиной, являющихся соответственно концами и началами дуг из множества J_i , $J_i = J_i^+ \cup J_i^-$, $I_i = I_i^+ \cup I_i^-$. Обозначим $|J_i^+| = |I_i^+| = \bar{n}_i$, $|J_i^-| = |I_i^-| = \underline{n}_i$, $\bar{n}_i + \underline{n}_i = n_i$, $i \in I$.

Ясно, что

$$\sum_{i \in I} \underline{n}_i = \underline{n}, \quad \sum_{i \in I} \bar{n}_i = \bar{n}, \quad \underline{n} + \bar{n} = 2m, \quad \sum_{i \in I} n_i = 2m.$$

В практических приложениях, как правило, имеет место соотношение $n_i \ll N$, $i \in I$, т.е. число вершин, смежных с какой-либо вершиной, много меньше общего числа вершин.

Пусть состояние каждого из звеньев $(k, i) \in J$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, описывается системой \aleph -мерных линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.1) \quad \frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

с M_i , $M_i \leq n_i \cdot \aleph$, линейно независимыми краевыми условиями, заданными в неразделенном виде

$$(2.2) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I.$$

Здесь функция $u^{ki}(x) = u^{ki}(x; v) \in \mathbb{R}^{\aleph}$ характеризует состояние (k, i) -го звена длиной l^{ki} в точке $x \in [0, l^{ki}]$; $v = (w, v, \xi)$ – вектор оптимизируемых параметров, у которого параметры $w \in \mathbb{R}^\mu$, $w = (w^{ki} = (w_1^{ki}, \dots, w_{\mu_{ki}}^{ki}) \in \Omega_{w^{ki}} \subset \mathbb{R}^{\mu_{ki}} : k \in I_i^+, i \in I)$, w_j^{ki} – j -я компонента μ_{ki} -мерного (k, i) -го внешнего источника, воздействующего на (k, i) -ю подсистему в точке $\xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0, l^{ki}]$,

$\xi = (\xi^{ki} : k \in I_i^+, i \in I)$, $\xi \in \mathbb{R}^{\overline{m}}$, $\overline{m} \leq m$; $v \in \mathbb{R}^M$, $v = (v^i \in \Omega_{v^i} \subset \mathbb{R}^{M_i}, i \in I)$, $v^i = (v_1^i, \dots, v_{M_i}^i)^\top$, v_j^i — j -я компонента внешнего источника, действующего на i -ю вершину. Обозначим $\mu = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_k^+} \mu_{ki}$, $M = \sum_{i=1}^N M_i$. В задаче заданными являются: $A^{ki}(x) \neq \text{const}$, $f^{ki}(x)$ — соответственно \aleph -мерные квадратные матричные и векторные непрерывные при $x \in [0, l^{ki}]$ функции; B^{ki} — $(\aleph \times \mu_{ki})$ -мерные скалярные матрицы; строчные векторы $g_j^{iks} = (g_{j,1}^{iks}, \dots, g_{j,\aleph}^{iks})$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$, $q_j^{k_s i} = (q_{j1}^{k_s i}, \dots, q_{j\aleph}^{k_s i})$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1, \overline{n}_i}$, $j = \overline{1, M_i}$, $i \in I$.

Если $B^{ki} = 0_{\aleph \times \mu_{ki}}$, то это означает, что на (k, i) -м участке источников нет.

В уравнениях системы (2.1) участвует $\delta(\cdot)$ -функция Дирака такая, что для произвольной непрерывной функции $\varphi(x)$ и точки ξ^{ki} : $x, \xi^{ki} \in [0, l^{ki}]$ имеет место равенство [23, с. 270]

$$(2.3) \quad \int_0^{l^{ks}} \varphi(x) \delta(x - \xi^{ki}) dx = \varphi(\xi^{ki}).$$

Под решением системы (2.1) понимается вектор-функция $u^{ki}(x)$, которая непрерывно дифференцируема при $x \in (0; \xi^{ki}) \cup (\xi^{ki}, l^{ki})$, а при $x = \xi^{ki}$ имеет место равенство

$$u^{ki}(\xi^{ki} + 0) - u^{ki}(\xi^{ki} - 0) = B^{ki} w^{ki}, \quad (k, i) \in J.$$

В уравнениях системы (2.1) относительно каждого (k, i) -го звена, содержащего источник, можно исключить второе слагаемое с $\delta(\cdot)$ -функцией, разбив ее на две системы:

$$\begin{aligned} \frac{du_1^{ki}(x)}{dx} &= A_1^{ki}(x) u_1^{ki}(x) + f_1^{ki}(x), \quad x \in (0, l_1^{ki}), \\ \frac{du_2^{ki}(x)}{dx} &= A_2^{ki}(x) u_2^{ki}(x) + f_2^{ki}(x), \quad x \in (0, l_2^{ki}) \end{aligned}$$

с краевыми неразделенными условиями типа скачка:

$$u_1^{ki}(l_1^{ki}) = u_2^{ki}(0) + B^{ki} w^{ki}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{aligned} A_1^{ki}(x) &= A^{ki}(x), & f_1^{ki}(x) &= f^{ki}(x), & l_1^{ki} &= \xi^{ki}, \\ A_2^{ki}(x) &= A^{ki}(x + \xi^{ki}), & f_2^{ki}(x) &= f^{ki}(x + \xi^{ki}), & l_2^{ki} &= l^{ki} - \xi^{ki}. \end{aligned}$$

Общее число подсистем (2.1) равно числу звеньев m , текущие состояния которых связаны со смежными звеньями (блоками) в произвольном порядке лишь посредством неразделенных (нелокальных) краевых условий (2.2). Отметим, что общее число дифференциальных уравнений в системе (2.1) равно $m\aleph$ и число краевых условий в (2.2), равное M , должны быть равны между собой: $M = m\aleph$.

Будем предполагать, что краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение. Это, как известно из [24], зависит лишь от матриц $A^{ki}(x)$, $k \in I_i^+$, векторов g_j^{iks} , $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$, $q_j^{k_s i}$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1, \overline{n}_i}$, $j = \overline{1, \overline{M}_i}$, $i \in I$, и не зависит от других данных, участвующих в задаче, в частности от неизвестных векторов w, v, ξ .

На значения оптимизируемых в задаче параметров w^{ki} , ξ^{ki} , v^i , $k \in I_i^+$, $i \in I$, исходя из практических соображений, накладываются ограничения:

$$(2.4) \quad w^{ki} \in \Omega_{W^{ki}}, \quad v^i \in \Omega_{V^i}, \quad \xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0; l^{ki}], \quad k \in I_i^+, \quad i \in I, \\ \Omega^{ki} = \Omega_{W^{ki}} \times \Omega_{V^i} \times \Omega_{\xi^{ki}}.$$

Будем предполагать, что множества допустимых значений $\Omega_{W^{ki}}$, Ω_{V^i} являются выпуклыми компактными.

Требуется найти такие значения компонент вектора $v = (w, v, \xi)$, при которых функционал

$$(2.5) \quad \mathfrak{Z}(w, v, \xi) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x) dx + \Phi(\underline{u}, \overline{u}, w, v, \xi)$$

получает минимальное значение. Здесь заданные функции $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$, $\Phi^i(\underline{u}^i, \overline{u}^i, w, \xi, v)$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и использованы обозначения:

$$u = u(x) = (u^{ki}(x) : k \in I_i^+, i \in I), \\ \underline{u}^i = \left(u^{ik_1}(0), \dots, u^{ik_{\underline{n}_i}}(0) \right)^T \in \mathbb{R}^{\underline{n}_i \cdot \aleph}, \quad \underline{u} = (\underline{u}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\underline{n}}, \\ \overline{u}^i = \left(u^{k_1 i}(l^{k_1 i}), \dots, u^{k_{\overline{n}_i} i}(l^{k_{\overline{n}_i} i}) \right)^T \in \mathbb{R}^{\overline{n}_i \cdot \aleph}, \quad \overline{u} = (\overline{u}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\overline{n}}.$$

Сформулированную задачу (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) можно отнести к классу параметрических задач оптимального управления. Оптимизируемый конечномерный вектор (w, ξ, v) , определяющий параметры и месторасположения внешних источников, в реальных задачах имеет небольшую размерность, несмотря на большую размерность самой системы дифференциальных уравнений (2.1). Определенную вычислительную сложность представляет решение краевой задачи (2.1), (2.2) при заданных значениях вектора (w, ξ, v) . Сложность обусловлена неразделенными (нелокальными) краевыми условиями и, конечно, размерностью самой системы дифференциальных уравнений (2.1), так как при численном решении задачи оптимизации необходимо многократно определять значение функционала при текущих значениях оптимизируемого вектора (w, ξ, v) , а следовательно, решать краевую задачу (2.1), (2.2). Поэтому важно использовать как эффективные методы решения оптимизационной задачи, так и уделить особое внимание решению краевой задачи (2.1), (2.2).

3. Необходимые условия оптимальности

Исследуем выпуклость и дифференцируемость функционала (2.5), получим формулы для градиента функционала и сформулируем необходимые условия оптимальности относительно оптимизируемых параметров.

Теорема 1. Пусть выполнены все условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Если функции $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$, $\Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$ при фиксированном допустимом векторе ξ выпуклы по другим своим аргументам, то функционал $\mathfrak{F}(w, v, \xi)$ является выпуклым по w, v , а если хотя бы одна из этих функций сильно выпукла, то и функционал является сильно выпуклым.

Доказательства теоремы 1 и всех последующих теорем приведены в Приложении.

Несложно доказать, что функционал $\mathfrak{F}(w, v, \xi)$ по ξ не является выпуклым, если хотя бы для одного участка $(k, i) \in J$ выполняется условие $B^{ki}w^{ki} \neq 0$, т.е. имеются дуги, на которые не воздействуют внешние источники.

Далее исследуем дифференцируемость функционала (2.5) и получим формулы для компонент его градиента по оптимизируемой тройке $v = (w, v, \xi)$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $\underline{c}_j^i = (g_j^{ik_1}, \dots, g_j^{ik_{n_i}})$, $\bar{c}_j^i = (q_j^{k_1 i}, \dots, q_j^{k_{n_i} i})$ — строчные векторы размерности соответственно $\underline{n}_i \cdot \aleph$ и $\bar{n}_i \cdot \aleph$, через $u^i = (\underline{u}^i, \bar{u}^i)^T$ — расширенный вектор размерности $n_i \cdot \aleph$. Пусть $C_i = (c_{js}^i)_{j=1, s=1}^{M_i, n_i \cdot \aleph}$, $i \in I$, есть расширенная матрица, каждая строка которой является расширенным строчным вектором $c_j^i = (\underline{c}_j^i, \bar{c}_j^i)$ размерности $n_i \cdot \aleph$. Согласно предположению о линейной независимости условий (2.2) имеет место

$$(3.1) \quad \text{rank } C_i = M_i.$$

Так как матрица C_i имеет размерность $M_i \times (n_i \cdot \aleph)$, $M_i \leq n_i \cdot \aleph$, $i \in I$, то из матрицы C_i можно извлечь обратимую подматрицу (минор) \widehat{C}_i с рангом, равным M_i . Изменив порядок столбцов, расширенную матрицу вновь обозначим через $C_i = [\widehat{C}_i, \widetilde{C}_i]$. Здесь \widetilde{C}_i — матрица, составленная из столбцов расширенной матрицы C_i , не включенных в матрицу \widehat{C}_i . Аналогично этому вектор u^i разбивается на M_i -мерный вектор $\widehat{u}^i = (\widehat{u}_1^i, \dots, \widehat{u}_{M_i}^i)^T$, соответствующий матрице \widehat{C}_i , и $(n_i \cdot \aleph - M_i)$ -мерный вектор $\widetilde{u}^i = (\widetilde{u}_1^i, \dots, \widetilde{u}_{(n_i \cdot \aleph) - M_i}^i)^T$. Пусть $\widehat{\mu}_j$, $j = 1, \dots, M_i$ — номера столбцов матрицы C_i , включенные в матрицу \widehat{C}_i , а $\widetilde{\mu}_j$, $j = 1, \dots, (n_i \cdot \aleph - M_i)$ — номера столбцов матрицы C_i , включенные в матрицу \widetilde{C}_i .

Здесь и далее производные $\partial f_0^{ki} / \partial u^{ki}$, $\partial \Phi / \partial \underline{u}$, $\partial \Phi / \partial \bar{u}$, $\partial \Phi / \partial w$, $\partial \Phi / \partial v$, $\partial \Phi / \partial \xi$ будут пониматься как строчные векторы соответствующей размерности. Из расширенных векторов $\partial \Phi / \partial u^i = [\partial \Phi / \partial \underline{u}^i, \partial \Phi / \partial \bar{u}^i]$, $\psi^i =$

$= \left((-\underline{\psi}^i)^\top, (\bar{\psi}^i)^\top \right)^\top$ размерности $n_i \cdot \aleph$ выделим векторы $\partial\Phi/\partial\widehat{u}^i =$
 $= \left(\partial\Phi/\partial\widehat{u}_1^i, \dots, \partial\Phi/\partial\widehat{u}_{M_i}^i \right), \bar{\psi}^i = \left(\bar{\psi}_1^i, \dots, \bar{\psi}_{M_i}^i \right)^\top$ с номерами компонент, со-
 ответствующих номерам столбцов из C_i , включенных в матрицу \widehat{C}_i .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Тогда функционал (2.5) дифференцируем, а компоненты его градиента по оптимизируемым параметрам $w^{ki}, \xi^{ki}, v^i, k \in I_i^+, i \in I$, определяются формулами:

$$(3.2) \quad \text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{S}(w, v, \xi) = - \left(B^{ki} \right)^\top \psi^{ki}(\xi^{ki}) + \frac{\partial\Phi}{\partial w^{ki}},$$

$$(3.3) \quad \text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{S}(w, v, \xi) = - \left(B^{ki} \right)^\top \left. \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right|_{x=\xi^{ki}} w^{ki} + \frac{\partial\Phi}{\partial \xi^{ki}},$$

$$(3.4) \quad \text{grad}_{v^i} \mathfrak{S}(w, v, \xi) = \left(\widehat{C}_i^{-1} \right)^\top \left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \widehat{u}^i} \right)^\top + \bar{\psi}^i \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial v},$$

где непрерывно-дифференцируемые вектор-функции $\psi^{ki}(x) \in R^\aleph, x \in [0, l^{ki}], k \in I_i^+, i \in I$, являются решениями сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$(3.5) \quad \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} = \left(\frac{\partial f_0^{ki}(u^{ki}(x), w^{ki}, \xi^{ki}, v^i)}{\partial u^{ki}} \right)^\top - (A^{ki}(x))^\top \psi^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

с неразделенными краевыми условиями

$$(3.6) \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial \widehat{u}^i} \right)^\top + \bar{\psi}^i - \left(\bar{C}_i \right)^\top \left(\widehat{C}_i^{-1} \right)^\top \left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \widehat{u}^i} \right)^\top + \bar{\psi}^i \right) = 0, \quad i \in I.$$

Интересно отметить следующее. Во-первых, сопряженная задача (3.5), (3.6) имеет ту же специфику, что и прямая задача. А именно система (3.5) имеет блочную структуру, а краевые условия (3.6) во всех вершинах являются неразделенными. Во-вторых, в выражениях компонент градиента функционала по параметрам (k, i) -й подсистемы, как видно из (3.2), (3.3), участвует сопряженная функция только этой подсистемы. А в формулах для компонент градиента функционала по источникам, воздействующих на i -ю вершину, как видно из (3.4), участвуют краевые значения прямой и сопряженной переменных, определенных именно только в этой вершине.

Сформулируем необходимые условия оптимальности в вариационной форме [25–29] для задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Для оптимальности

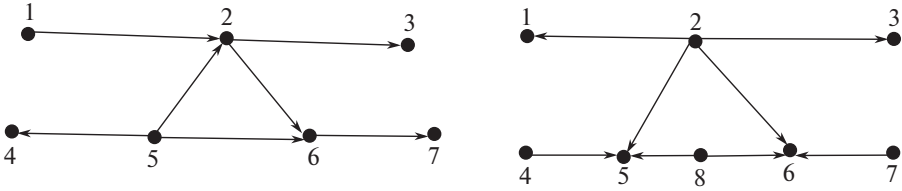


Рис. 1. Исходный граф – а, преобразованный граф – б.

параметров $(w^{ki*}, v^{i*}, \xi^{ki*}) \in \Omega^{ki}$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} (\text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{F}(w, v, \xi), w^{ki} - w^{ki*}) &\geq 0, & (\text{grad}_{v^i} \mathfrak{F}(w, v, \xi), v^i - v^{i*}) &\geq 0, \\ (\text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{F}(w, v, \xi), \xi^{ki} - \xi^{ki*}) &\geq 0 \end{aligned}$$

выполнялись для всех допустимых значений параметров $(w^{ki*}, v^{i*}, \xi^{ki*}) \in \Omega^{ki}$, $k \in I_i^+$, $i \in I$.

Отметим следующее. Рассматриваемые в статье многосвязные объекты произвольной структуры можно за счет изменения направления дуг, а в случае необходимости введением дополнительных вершин привести к виду, когда все вершины из I разбиваются на два непересекающихся подмножества: вершины, у которых все ребра являются входящими ($I^{\text{вх}}$), и вершины, у которых все ребра — исходящие ($I^{\text{исх}}$), т.е. $I = I^{\text{вх}} \cup I^{\text{исх}}$. Например, на рис. 1, а ребро (5, 6) введением новой вершины (8) разбито на две дуги (8, 5) и (8, 6) (рис. 1, б), и тогда $I^{\text{вх}} = \{1, 3, 5, 6\}$, $I^{\text{исх}} = \{2, 4, 7\}$.

В этом случае условия (2.2) разбиваются на две группы условий

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \underline{C}_i \underline{u}^i &= \underline{v}^i, & i \in I^{\text{вх}}, & & \underline{u}^i &= \{u^{ki} : k \in I_i^+, i \in I^{\text{вх}}\}, \\ \overline{C}_i \overline{u}^i &= \overline{v}^i, & i \in I^{\text{исх}}, & & \overline{u}^i &= \{u^{ki} : k \in I_i^-, i \in I^{\text{исх}}\}. \end{aligned}$$

Однако замена условий (2.2) условиями (3.7) в исследовании задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) никаких преимуществ с теоретической точки зрения не дает.

Во многих практических приложениях внешние источники участвуют не на всех звеньях и в вершинах объекта или же на некоторых звеньях или вершинах их значения могут быть заданы и не оптимизироваться. В этих случаях соответствующие компоненты градиентов функционала $\text{grad}_w \mathfrak{F}(w, v, \xi)$, $\text{grad}_v \mathfrak{F}(w, v, \xi)$, $\text{grad}_\xi \mathfrak{F}(w, v, \xi)$ не вычисляются и принимаются равными нулю.

Замечание 1. Если в результате численного решения задачи для достаточно малого ε будет получено или $\|w^{ki}\|_{R^{\mu_{ki}}} < \varepsilon$, или $|\xi^{ki}| < \varepsilon$, или $|\xi^{ki} - l^{ki}| < \varepsilon$, то это означает, что внутри (k, i) -го звена внешнего источника нет. Если же $\|w^{ki}\|_{R^{\mu_{ki}}} > \varepsilon$, а $|\xi^{ki}| < \varepsilon$ или $|\xi^{ki} - l^{ki}| < \varepsilon$, то это означает, что источник с параметрами w^{ki} воздействует на k -ю или i -ю вершину и соответственно значения параметров w^{ki} надо добавить к параметрам v^k или v^i .

В практических задачах в зависимости от знака параметров источника w^{ki} , $k \in I_i^+$, $i \in I$, внешний источник в точке ξ^{ki} называется “оттоком” или “притоком”.

4. Схема численного решения задачи

В этом разделе предлагается численная схема решения задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Отметим, что решение задачи требует рассмотрения задач двух уровней: задачи минимизации функционала (верхний уровень) [10, 11, 21, 22, 25–29] и краевой задачи (прямой и сопряженной) относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений блочной структуры с неразделенными краевыми условиями (нижний уровень) [12–14, 16].

Верхний уровень. Пусть допустимые множества $\Omega_{w^{ki}}$, $\Omega_{\xi^{ki}}$, Ω_{v^i} имеют простую структуру (шар, параллелепипед и т.п.). Для определения оптимальных значений $v = (w, v, \xi)$, применяя формулы (3.2), (3.3), (3.4) для вычисления компонент градиента функционала задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), можно использовать эффективные методы оптимизации первого порядка, например метод проекции градиента [10, 11]:

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} w^{ki} \\ v^i \\ \xi^{ki} \end{pmatrix}^{t+1} = P_{\Omega^{ki}} \left[\begin{pmatrix} w^{ki} \\ v^i \\ \xi^{ki} \end{pmatrix}^t - \alpha_t \begin{pmatrix} \text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{S}(w^t, v^t, \xi^t) \\ \text{grad}_{v^i} \mathfrak{S}(w^t, v^t, \xi^t) \\ \text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{S}(w^t, v^t, \xi^t) \end{pmatrix} \right],$$

$$k \in I_i^+, \quad i \in I, \quad t = 1, 2, \dots$$

Здесь $P_{\Omega^{ki}}[\bullet]$ – оператор проектирования произвольной точки (w^{ki}, ξ^{ki}, v^i) на допустимое множество Ω^{ki} , $\alpha_t \geq 0$ – шаг одномерной минимизации.

На каждой итерации процедуры (4.1) требуется вычисление компонент градиента функционала $\mathfrak{S}(w, v, \xi)$ при текущих значениях вектора $v = (w, v, \xi)$. Для этого сначала решается прямая краевая задача (2.1), (2.2), далее – сопряженная краевая задача (3.5), (3.6). Результаты решения подставляются в формулы (3.2), (3.3), (3.4) для вычисления компонент градиента функционала.

Нижний уровень. Прямая (2.1), (2.2) и сопряженная (3.5), (3.6) краевые задачи являются двухточечными задачами специфической блочной структуры большой размерности. Для их решения далее предлагается подход, основанный на использовании предложенной в [12–14] операции переноса неразделенных краевых условий, учитывающий специфику (большую размерность и блочную структуру) прямой и сопряженной начально-краевых задач. Приведем соответствующие формулы, схемы, не требующие одновременного решения всех подсистем систем (2.1) или (3.5). Подход позволяет проводить прогонку каждого значения переменной из одного конца в другой в каждом условии отдельно и поблочно. В результате потребуются решение алгебраической системы уравнений со слабо и произвольно заполненной матрицей относительно значений всех переменных задачи в одном из концов, а далее решаются задачи Коши в отдельности для каждой подсистемы.

Сначала рассмотрим решение прямой задачи. Предлагаемый подход, как и все подобные методы переноса условий, заключается в замене условий (2.2)

относительно вершин $i \in I$, содержащих значение $u^{ik}(0)$, на эквивалентные условия со значением $u^{ki}(l^{ki})$ при переносе вправо (при переносе влево — в замене условий, содержащих $u^{ki}(l^{ki})$, на условия со значением $u^{ik}(0)$). В результате вместо условий вида (2.2) будут получены все M условий в виде

$$(4.2) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{n_i} \tilde{q}_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = r_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I,$$

при переносе условий (2.2) вправо или в виде

$$(4.3) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{n_i} \tilde{g}_j^{i k_s} u^{i k_s}(0) = r_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I,$$

при переносе условий (2.2) влево. Получение условий вида (4.2) или (4.3) будем осуществлять поэтапно. Чтобы избежать матричных операций, значение каждого состояния на одном из концов в каждом условии из (2.2) будем переносить в другой конец отдельно и по блоку.

Условия (4.2) и (4.3) представляют собой систему M алгебраических уравнений с M неизвестными относительно соответственно $u(l) \in \mathbb{R}^M$ и $u(0) \in \mathbb{R}^M$. После решения одной из этих систем относительно подсистемы системы дифференциальных уравнений (2.1) получаем m задач Коши, которые решаются независимо друг от друга.

Замечание 2. Во многих конкретных практических задачах большая часть условий из (2.2) вместо общего вида (2.2), как указывалось, в целом могут быть заданы в виде (3.7) или, более того, совпадают с условиями Коши на левом или правом концах. Поэтому выбор направления переноса условий влево или вправо следует осуществлять исходя из того, в каком из концов локальных условий больше, в тот конец и переносить оставшиеся условия.

Изложим процесс переноса вправо граничного значения k -й функции $u^{ik}(x)$ в j -м условии для i -го узла из (2.2), предполагая, что среди компонент вектора $g_j^{i k_s} = (g_{j,1}^{i k_s}, \dots, g_{j,\aleph}^{i k_s})$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, n_i}$, имеются ненулевые. В противном случае j -е условие прогонять вправо не надо, так как относительно этой функции в этом условии участвует только значение $u^{ki}(l^{ki})$. Пусть отличный от нуля коэффициент есть $g_j^{id} \neq 0_{\aleph}$, $d \in I_i^-$ (0_{\aleph} — \aleph -мерный вектор, все компоненты которого равны нулю).

Отметим, что порядок выбора отличных от нуля коэффициентов непринципиален. Перенос значений решений подсистем из левого конца в правый можно осуществлять в произвольной последовательности выбора как подсистем, так и самих ограничений.

Определение. Будем говорить, что \aleph -мерная строчная вектор-функция $\alpha_j^{id}(x) = (\alpha_{j,1}^{id}(x), \dots, \alpha_{j,\aleph}^{id}(x))$ и скалярная функция $\gamma_j^i(x)$ такие, что

$$(4.4) \quad \alpha_j^{id}(0) = g_j^{id}(0), \quad \gamma_j^i(0) = v_j^i, \quad d \in I_i^-, \quad i \in I,$$

осуществляют перенос слева направо граничного значения решения (i, d) -й подсистемы (2.1) в j -м условии для i -го узла из (2.2) вправо, если для произвольного решения $u^{id}(x)$ этой подсистемы во всех точках $x \in [0, l^{id}]$ выполняется равенство

$$(4.5) \quad \alpha_j^{id}(x)u^{id}(x) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^- \setminus \{d\}}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \gamma_j^i(x).$$

Ясно, что условие (4.5), учитывая (4.4), при $x = 0$ совпадает с j -м условием для i -го узла из (2.2). Функции $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ будем называть прогоночными. Подставляя значения функций $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ при $x = l^{id}$ в (4.4), получим равенство, эквивалентное j -му условию для i -го узла из (2.2):

$$(4.6) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^- \setminus \{d\}}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) + \alpha_j^{id}(l^{id})u^{id}(l^{id}) = \gamma_j^i(l^{id}).$$

Прогоночные функции $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$, используемые для переноса с одного конца в другой граничных значений решений подсистем, участвующих в краевых условиях (2.2), не единственны. В частности, конструктивное их построение предложено в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $g_j^{id} \neq 0_{\mathbb{N}}$ для $d \in I_i^-$ и \mathbb{N} -мерная вектор-функция $\alpha_j^{id}(x)$ и скалярная функция $\gamma_j^i(x)$ при $x \in (0, l^{id})$ являются решением следующих задач Коши:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_j^{id}(x)}{dx} &= -\alpha_j^{id}(x)A^{id}(x), \quad \alpha_j^{id}(0) = g_j^{id}, \\ \frac{d\gamma_j^i(x)}{dx} &= \alpha_j^{id}(x) \left(f^{id}(x) + B^{ki} w^{ki} \delta(x - \xi^{ki}) \right), \quad \gamma_j^i(0) = v_j^i. \end{aligned}$$

Тогда эти функции являются прогоночными коэффициентами для переноса слева направо граничного значения $u^{id}(0)$ решения (i, d) -й подсистемы (2.1) в j -м условии для i -го узла.

Указанная выше процедура переноса повторяется для значения следующей функции $u^{ik_s}(x)$, $k_s \in I_i^- \setminus \{d\}$, у которой в новом полученном условии вида (4.6) коэффициент $g_j^{id} \neq 0_{\mathbb{N}}$. Это повторяется, пока в j -м условии для i -го узла не перестанет участвовать какая-либо компонента вектора $u^{ik_s}(0)$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$, с ненулевым коэффициентом. После этого необходимо перейти к $(j + 1)$ -му условию для i -го узла из (2.2). Эта процедура повторяется до тех пор, пока все условия (2.2) не будут приведены к виду (4.2).

Далее, решая систему алгебраических уравнений (4.2) (или (4.3)) M -го порядка, определяются векторы $u^{k_s i}(l^{k_s i})$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1, \bar{n}_i}$ (при переносе влево определяются $u^{ik_s}(0)$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \underline{n}_i}$).

Для определения искомых вектор-функций $u^{ik}(x)$, $x \in [0, l^{ki}]$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, компоненты $u^{ki}(l^{ki})$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, найденного вектора используются в качестве начальных значений для соответствующих задач Коши относительно каждой отдельной подсистемы системы (2.1), решаемых в обратном порядке: от $x = l^{ki}$ до $x = 0$, $k \in I_i^+$, $i \in I$.

Перенос условий может осуществляться также справа налево. Получение вспомогательных задач Коши относительно прогоночных коэффициентов в этом случае проводится аналогично.

Численное решение сопряженной краевой задачи (3.5), (3.6) большой размерности и блочной структуры проводится вполне аналогично изложенному выше решению прямой задачи (2.1), (2.2).

Таким образом, выше приведена схема решения прямой и сопряженной краевых задач большой размерности блочной структуры с произвольно связанными блоками посредством только начальных и конечных значений фазовых переменных. Видно, что приведенная схема решения этих краевых задач позволяет легко распараллеливать вычислительный процесс по каждой переменной в каждом условии (2.2), (3.6), причем эти процессы проводятся поблочно, т.е. отдельно для каждой подсистемы (2.1), (3.5).

5. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении задачи оптимизации значений параметров и мест расположения источников для объекта (рис. 2), в котором

$$\begin{aligned} N &= 4, \quad m = 3, \quad \aleph = 2, \quad M = 6, \quad J = \{(1, 2), (3, 2), (2, 4)\}, \\ I &= \{1, 2, 3, 4\}, \quad I_1^+ = \emptyset, \quad I_1^- = \{2\}, \quad I_2^+ = \{1, 3\}, \quad I_2^- = \{4\}, \\ I_3^+ &= \emptyset, \quad I_3^- = \{2\}, \quad I_4^+ = \{2\}, \quad I_4^- = \emptyset, \quad l^{ki} = 1, \quad k \in I_i^+, \quad i \in I. \end{aligned}$$

Состояние каждого из трех подобъектов (блоков) описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{du_1^{1,2}}{dx} = u_2^{1,2} + x^2 - 3x - 2, & \frac{du_2^{1,2}}{dx} = xu_1^{1,2} - 2u_2^{1,2} + 5x + 3, \\ \frac{du_1^{3,2}}{dx} = u_2^{3,2} + 2 - 4x^2 + x + w^{3,2}\delta(x - \xi^{3,2}), & \frac{du_2^{3,2}}{dx} = u_1^{3,2} - xu_2^{3,2} + 5 + 3x^2 - 2x, \\ \frac{du_1^{2,4}}{dx} = u_2^{2,4} - x - 2 - w^{2,4}\delta(x - \xi^{2,4}), & \frac{du_2^{2,4}}{dx} = u_1^{2,4} - u_2^{2,4} + 5. \end{cases}$$

Ребра (блоки) (1, 2), (3, 2), (2, 4) связаны между собой начальными и/или конечными (краевыми) значениями состояний в виде (2.2). В вершинах {1}, {3}, {4} задано по одному условию, а в вершине {2} заданы три условия: $M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $M_3 = 1$, $M_4 = 1$. В целом заданы 6 условий, из них три являются неразделенными:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u_1^{1,2}(0) &= v^1, & u_2^{3,2}(1) - u_2^{2,4}(0) &= v_1^2, & u_2^{1,2}(1) - u_2^{3,2}(1) &= v_2^2, \\ u_1^{1,2}(1) + u_1^{3,2}(1) + u_1^{2,4}(0) &= v_3^2, & u_1^{2,3}(0) &= v^3, & u_2^{4,2}(1) &= 0. \end{aligned}$$

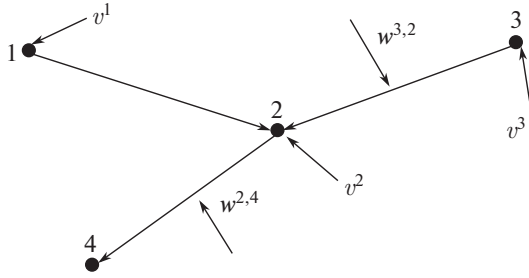


Рис. 2. Граф рассматриваемого объекта.

Таким образом, в условиях (5.2) матрицы C_i , $i = 1, 3, 4$, имеют размерность $M_1 \times \aleph = 1 \times 2$, а размерность C_2 равна $M_2 \times n_2 \aleph = 3 \times 6$,

$$C_1 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{1,2} & g_{1,2}^{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,4} & g_{1,2}^{2,4} & q_{1,1}^{1,2} & q_{1,2}^{1,2} & q_{1,1}^{3,2} & q_{1,2}^{3,2} \\ g_{2,1}^{2,4} & g_{2,2}^{2,4} & q_{2,1}^{1,2} & q_{2,2}^{1,2} & q_{2,1}^{3,2} & q_{2,2}^{3,2} \\ g_{3,1}^{2,4} & g_{3,2}^{2,4} & q_{3,1}^{1,2} & q_{3,2}^{1,2} & q_{3,1}^{3,2} & q_{3,2}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.3) \quad C_3 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,3} & g_{1,2}^{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} q_{1,1}^{4,2} & q_{1,2}^{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видно из (5.1), (5.2), источники, воздействующие на звенья (3;2), (2;4) и вершины $\{1\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, являются однопараметрическими, на вершину $\{3\}$ – трехпараметрическим, а вершина $\{4\}$ внешних источников не имеет: $v^4 \equiv 0$, т.е. $w^{3,2}, w^{2,4} \in \mathbb{R}^1$, $v^1, v^3 \in \mathbb{R}^1$, $v^2 \in \mathbb{R}^3$.

В задаче имеются ограничения на значения параметров источников и их месторасположения: $|w^{3,2}| \leq 1$, $|w^{2,4}| \leq 1$, $0 \leq \xi^{3,2} \leq 1$, $0 \leq \xi^{2,4} \leq 1$.

Предположим, что параметры источников и места их воздействия на заранее заданных двух участках множества J и трех вершинах множества I неизвестны и требуется их определить, минимизируя функционал

$$(5.4) \quad \mathfrak{S}(v) = \int_0^{l^{1,2}} \left[u_2^{1,2}(x; v) - \tilde{u}_2^{1,2}(x) \right]^2 dx + \int_0^{l^{3,2}} \left[u_2^{3,2}(x; v) - \tilde{u}_2^{3,2}(x) \right]^2 dx + \\ + \int_0^{l^{2,4}} \left[u_2^{2,4}(x; v) - \tilde{u}_2^{2,4}(x) \right]^2 dx.$$

Для построения модельной задачи предполагалось, что функции $\tilde{u}_2^{1,2}(x)$, $\tilde{u}_2^{3,2}(x)$, $\tilde{u}_2^{2,4}(x)$, определяющие желаемые значения первых компонент состояния подобъектов, заданы, и их графики приведены на рис. 3. Эти функции были получены численным решением краевой задачи (5.1)–(5.4) для следующих параметров $v^* = (w^*, v^*, \xi^*)$: $v^{1*} = (1)$, $v^{2*} = (0; 0; -1)$, $v^{3*} = (-2)$,

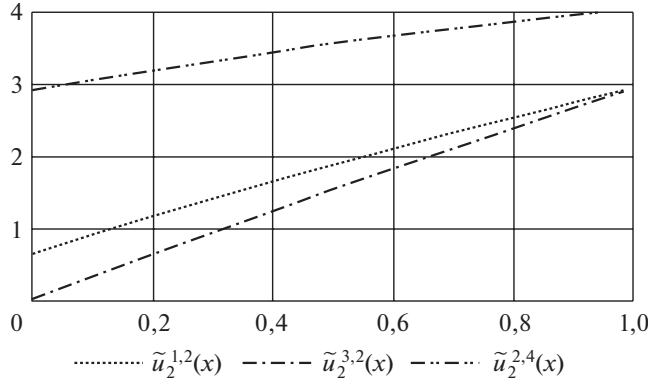


Рис. 3. Графики функций $\tilde{u}_2^{1,2}(x)$, $\tilde{u}_2^{3,2}(x)$, $\tilde{u}_2^{2,4}(x)$.

$w^{3,2} = (0, 2)$, $w^{2,4} = (0, 3)$, $\xi^{3,2} = 0,5$, $\xi^{2,4} = 0,6$, значения которых требовалось определить минимизацией функционала (5.4).

Задача оптимизации (5.1)–(5.4) решалась для разных начальных значений вектора v^0 с использованием описанной выше численной схемы. На верхнем уровне для решения задачи оптимизации был использован метод проекции градиента [10, 11].

Согласно формулам (3.6) сопряженная краевая задача имеет вид

$$(5.5) \quad \begin{cases} \frac{d\psi_1^{1,2}}{dx} = -x\psi_2^{1,2}, & \frac{d\psi_2^{1,2}}{dx} = 2[u_2^{1,2}(x) - \tilde{u}_2^{1,2}(x)] - \psi_1^{1,2} + 2\psi_2^{1,2}, \\ \frac{d\psi_1^{3,2}}{dx} = -\psi_2^{3,2}, & \frac{d\psi_2^{3,2}}{dx} = 2[u_2^{3,2}(x) - \tilde{u}_2^{3,2}(x)] - \psi_1^{3,2} + x\psi_2^{3,2}, \\ \frac{d\psi_1^{2,4}}{dx} = -\psi_2^{2,4}, & \frac{d\psi_2^{2,4}}{dx} = 2[u_2^{2,4}(x) - \tilde{u}_2^{2,4}(x)] - \psi_1^{2,4} + \psi_2^{2,4}. \end{cases}$$

Учитывая (5.3), подматрицы матрицы C_i , $i = 1, 3, 4$, состоят из одного элемента. Тогда обратные матрицы к одноэлементным матрицам $\widehat{C}_1 = (1)$, $\widehat{C}_3 = (1)$, $\widehat{C}_4 = (1)$ совпадают с самими матрицами \widehat{C}_i , $P_i = 1, 3, 4$, а $\widetilde{C}_1 = (0)$, $\widetilde{C}_3 = (0)$, $\widetilde{C}_4 = (0)$. Из матрицы C_2 можно выделить подматрицу \widehat{C}_2 ранга $M_2 = 3$, например,

$$\widehat{C}_2 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,4} & q_{1,2}^{1,2} & q_{1,2}^{3,2} \\ g_{2,1}^{2,4} & q_{2,2}^{1,2} & q_{2,2}^{3,2} \\ g_{3,1}^{2,4} & q_{3,2}^{1,2} & q_{3,2}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{C}_2 = \begin{pmatrix} g_{1,2}^{2,4} & q_{1,1}^{1,2} & q_{1,1}^{3,2} \\ g_{2,2}^{2,4} & q_{2,1}^{1,2} & q_{2,1}^{3,2} \\ g_{3,2}^{2,4} & q_{3,1}^{1,2} & q_{3,1}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда компонентами векторов \widehat{u}^i , $i = 1, 3, 4$, соответствующими столбцам подматриц \widehat{C}_i , $i = 1, 3, 4$, являются: $\widehat{u}^1 = \begin{pmatrix} u_1^{1,2}(0) \end{pmatrix}$, $\widehat{u}^3 = \begin{pmatrix} u_1^{2,3}(0) \end{pmatrix}$, $\widehat{u}^4 = \begin{pmatrix} u_1^{4,2}(1) \end{pmatrix}$, а векторы, соответствующие столбцам подматриц \check{C}_i , $i = 1, 3, 4$, являются векторы: $\check{u}^1 = \begin{pmatrix} u_2^{1,2}(0) \end{pmatrix}$, $\check{u}^3 = \begin{pmatrix} u_2^{2,3}(0) \end{pmatrix}$, $\check{u}^4 = \begin{pmatrix} u_2^{4,2}(1) \end{pmatrix}$. Столбцам подматриц \widehat{C}_2 соответствует вектор $\widehat{u}^2 = \begin{pmatrix} u_1^{2,4}(0), u_2^{1,2}(1), u_2^{3,2}(1) \end{pmatrix}^T$, а вектор, соответствующий столбцам подматрицы \check{C}_2 , есть $\check{u}^2 = \begin{pmatrix} u_2^{2,4}(0), u_1^{1,2}(1), u_1^{3,2}(1) \end{pmatrix}^T$. Тогда краевые условия во всех вершинах для сопряженной системы (5.5) можно получить согласно (3.6) из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} & (\check{C}_1)^T (\widehat{C}_1^{-1})^T \psi_1^{1,2}(0) = \psi_2^{1,2}(0), \\ & (\check{C}_2)^T (\widehat{C}_2^{-1})^T \begin{pmatrix} -\psi_1^{2,4}(0) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ \psi_2^{3,2}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_2^{2,4}(0) \\ \psi_1^{1,2}(1) \\ \psi_1^{3,2}(1) \end{pmatrix}, \quad (\check{C}_2)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & (\widehat{C}_2^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\check{C}_3)^T (\widehat{C}_3^{-1})^T \psi_1^{2,3}(0) = \psi_2^{2,3}(0), \\ & (\check{C}_4)^T (\widehat{C}_4^{-1})^T \psi_1^{4,2}(1) = \psi_2^{4,2}(1). \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} & \psi_2^{1,2}(0) = 0, \quad \psi_2^{2,3}(0) = 0, \quad \psi_2^{4,2}(1) = 0, \\ & -\psi_2^{1,2}(1) - \psi_2^{3,2}(1) = -\psi_2^{2,4}(0), \quad -\psi_1^{2,4}(0) = \psi_1^{1,2}(1), \quad -\psi_1^{2,4}(0) = \psi_1^{3,2}(1). \end{aligned}$$

Градиент функционала согласно (3.2)–(3.4) определяется формулами:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} & \text{grad}_{w^{3,2}} \mathfrak{F}(w, v, \xi) = -\psi^{3,2}(\xi^{3,2}), \\ & \text{grad}_{w^{2,4}} \mathfrak{F}(w, v, \xi) = \psi^{2,4}(\xi^{2,4}), \\ & \text{grad}_{v^1} \mathfrak{F}(w, v) = -\psi_1^{1,2}(0), \\ & \text{grad}_{v^2} \mathfrak{F}(w, v) = (\widehat{C}_2^{-1})^T \begin{pmatrix} -\psi_1^{2,4}(0) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ \psi_2^{3,2}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^{1,2}(1) + \psi_2^{3,2}(1) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ -\psi_1^{2,4}(0) \end{pmatrix}, \\ & \text{grad}_{v^3} \mathfrak{F}(w, v) = -\psi_1^{2,3}(0), \\ & \text{grad}_{\xi^{3,2}} \mathfrak{F}(w, v, \xi) = -w^{3,2} \frac{d\psi^{3,2}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{3,2}}, \\ & \text{grad}_{\xi^{2,4}} \mathfrak{F}(w, v, \xi) = w^{2,4} \frac{d\psi^{2,4}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{2,4}}. \end{aligned}$$

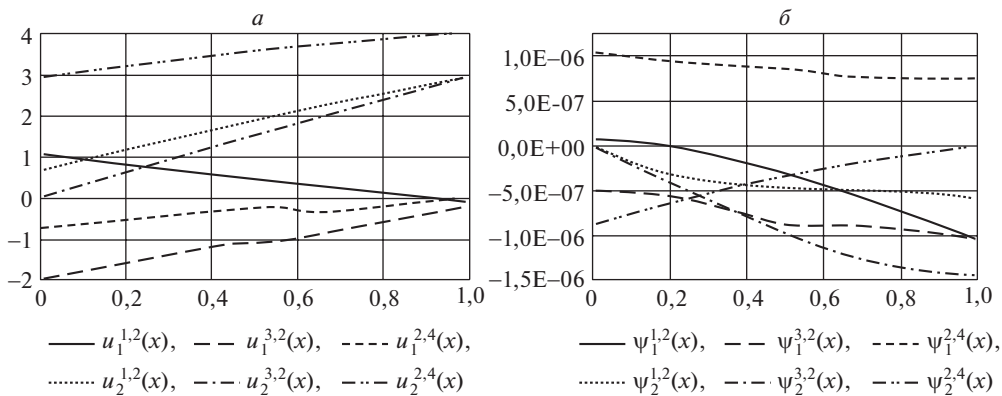


Рис. 4. Графики функций, полученные в результате решения задачи (5.1)–(5.4).

Для решения прямой и сопряженной краевых задач использовался метод прогонки, основанный на теореме 1. Задачи Коши (5.1), (5.2) и (5.5), (5.6) решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0,01$ [30]. Для аппроксимации $\delta(\cdot)$ -функции Дирака использовалась функция Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\xi^{ki})^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma = 2h \text{ [21, 31].}$$

В таблице приведены значения оптимальных параметров v_* , полученные методом проекции градиента для четырех различных начальных значений параметров v^0 .

На рис. 4, а и 4, б приведены графики соответственно решения прямой и сопряженных задач для полученного значения параметров $v_* = (w_*, v_*, \xi_*)$ методом проекции градиента.

Таблица. Результаты численного решения задачи (5.1)–(5.4)

	$v^0 = (w^0, v^0, \xi^0)$	$v_* = (w_*, v_*, \xi_*)$	$\mathfrak{Z}(v^0)$	$\mathfrak{Z}(v_*)$
1	$((0,2; 0,72);$ $(-1,7; (0; 1; -2,8); 0);$ $(0,2; 0,36))$	$(0,1998; 0,2999); (0,9999; (0,0001;$ $0; -1); -1,999); (0,5; 0,5999)$	0,7713	$2 \cdot 10^{-9}$
1	$((0,3; 0,8);$ $(-0,7; (0; 1,7; -2,7); 0,7);$ $(0,43; 0,5))$	$((0,2033; 0,2960); (1,0001; -0,0038;$ $-0,0002; -0,997); -2,0011);$ $(0,5001; 0,6001))$	1,2894	$1,4 \cdot 10^{-6}$
2	$((0,6; 0,12);$ $(-1; (0; 1,7; -2,7); 0,7);$ $(0,43; 0,5));$	$((0,2051; 0,3362); (0,9928; (-0,001;$ $0,0063; -1,008); -2,0013); (0,49943;$ $0,5957)$	1,5060	0,0001
3	$((0,28; 0,2);$ $(-1; (0; 1,7; 0,7); -2,7);$ $(0,43; 0,45));$	$((0,2002; 0,3005); (1,0002; (-0,0016;$ $-0,0001; -1) -1,9999); (0,4998;$ $0,5999))$	1,1639	$4,4 \cdot 10^{-8}$
4	$((0,28; 0,2);$ $(-1,8; (0; 1,7; 0); -2);$ $(0,3; 0,6))$	$((0,20004; 0,2999); (1; (0; 0,0002;$ $-0,9999) -2); (0,5; 0,59999))$	0,2221	$6,4 \cdot 10^{-10}$

6. Заключение

Исследуется задача оптимизации, описываемая системой дифференциальных уравнений с обыкновенными производными большой размерности. Система уравнений имеет блочную структуру, сами блоки связаны между собой в произвольном порядке лишь неразделенными начальными или конечными значениями фазовых переменных. В статье исследованы выпуклость функционала, его дифференцируемость, получены необходимые условия оптимальности как по параметрам, так и местам сосредоточения источников. Показано, что сопряженная задача имеет ту же специфику, что и прямая задача, а в выражениях компонент градиента функционала по параметрам источников участвуют краевые значения прямой и сопряженной переменных, определенных только в соответствующих вершинах и блоках. Это позволяет легко распараллеливать решение прямой и сопряженной краевых задач, что существенно повышает эффективность решение задачи оптимизации в целом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть w_1^{ki} , v_1^i и w_2^{ki} , v_2^i – произвольные допустимые параметры из $W^{ki} \times V^i$, а $u_1^{ki}(x)$ и $u_2^{ki}(x)$ – соответствующие решения краевых задач (2.1), (2.2), т.е.

$$(II.1) \quad \frac{du_1^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u_1^{ki}(x) + B^{ki}w_1^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

$$(II.2) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} u_1^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u_1^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_{1j}^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I,$$

$$(II.3) \quad \frac{du_2^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u_2^{ki}(x) + B^{ki}w_2^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

$$(II.4) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} u_2^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u_2^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_{2j}^i,$$

$$j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I.$$

В силу выпуклости допустимого множества Ω_{v^i} для произвольного $\lambda \in [0; 1]$ имеет место $w_1^{ki} = \lambda w_1^{ki} + (1 - \lambda)w_1^{ki} \in \Omega_{w^{ki}}$. Обозначим $u^{ki}(t) = \lambda u_1^{ki}(x) + (1 - \lambda)u_2^{ki}(x)$.

Умножим обе части (II.1) на λ , а (II.3) — на $(1 - \lambda)$, почленно сложим полученные равенства и сгруппируем

$$\lambda \frac{du_1^{ki}(x)}{dx} + (1 - \lambda) \frac{du_2^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x) \left[\lambda u_1^{ki}(x) + (1 - \lambda)u_2^{ki}(x) \right] +$$

$$+ B^{ki} \left[\lambda w_1^{ki} + (1 - \lambda)w_2^{ki} \right] \delta(x - \xi^{ki}) + \left[\lambda f^{ki}(x) + (1 - \lambda)f^{ki}(x) \right], \quad x \in (0, l^{ki}).$$

Отсюда следует, что пара $(u^{ki}(x), w^{ki})$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I.$$

Умножая обе части (П.2) на λ , а (П.4) – на $(1 - \lambda)$, складывая и группируя, получим:

$$\sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} \left[\lambda u_1^{ik_s}(0) + (1 - \lambda) u_2^{ik_s}(0) \right] +$$

$$+ \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} \left[\lambda u_1^{k_s i}(l^{k_s i}) + (1 - \lambda) u_2^{k_s i}(l^{k_s i}) \right] =$$

$$= \lambda v_{1j}^i + (1 - \lambda) v_{2j}^i, \quad j = \overline{1, \bar{M}_i}, \quad i \in I.$$

Отсюда следует, что пара $(u^{ki}(x), v^i)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_j^i, \quad j = \overline{1, \bar{M}_i}, \quad i \in I.$$

В силу выпуклости функций $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$ и $\Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$ по аргументам u, w, v имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(w, v, \xi) &= \mathfrak{S}(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2, \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2, \xi) = \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(\lambda u^{ki}(x) + (1 - \lambda)u^{ki}(x), x) dx + \\ (П.5) \quad &+ \Phi(\lambda \underline{u} + (1 - \lambda)\underline{u}, \lambda \bar{u} + (1 - \lambda)\bar{u}, \lambda w + (1 - \lambda)w, \lambda v + (1 - \lambda)v, \xi) \leq \\ &\leq \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left(\lambda \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x) dx + (1 - \lambda) \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x) dx \right) + \\ &+ \lambda \Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi) + (1 - \lambda) \Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi) \leq \\ &\leq \lambda \mathfrak{S}(w, v, \xi) + (1 - \lambda) \mathfrak{S}(w, v, \xi). \end{aligned}$$

Отсюда следует выпуклость функционала $\mathfrak{S}(w, v, \xi)$ по w и v . Ясно, что в случае если одна из функций $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$ и $\Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$ будет строго выпуклой, то знак неравенства в (П.5) будет строгим. Следовательно, и функционал задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) по w, v будет строго выпуклым. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Используя метод приращения оптимизируемого вектора, докажем дифференцируемость и определим линейные части приращения функционала [10, 11].

В системе уравнений (2.1) введем обозначения для оптимизируемых слагаемых $W^{ki} = W^{ki}(x; w^{ki}, \xi^{ki}) = w^{ki} \delta(x - \xi^{ki})$, $(k, i) \in J$, $W = W(x; w, \xi) = (W^{ki}(x, w^{ki}, \xi^{ki}) : (k, i) \in J)$ и запишем систему (2.1) так

$$\frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}W^{ki}(x; w^{ki}, \xi^{ki}) + f^{ki}(x), \quad (k, i) \in J.$$

Пусть оптимизируемая тройка параметров $v = (w, v, \xi)$ получила приращение $\Delta v = (\Delta w, \Delta v, \Delta \xi)$. Обозначим: $\tilde{v} = v + \Delta v$, $\tilde{w} = w + \Delta w$, $\tilde{v} = v + \Delta v$, $\tilde{\xi} = \xi + \Delta \xi$.

При этом получают приращения функция $W(x; w, \xi)$ и решение краевой задачи (2.1), (2.2):

$$\Delta W(x; w, \xi) = W(x; w + \Delta w, \xi + \Delta \xi) - W(x; w, \xi),$$

$$\Delta u^{ki}(x; v) = u^{ki}(x; v + \Delta v) - u^{ki}(x; v) = \tilde{u}^{ki}(x; \tilde{v}) - u^{ki}(x; v), \quad (k, i) \in J,$$

где $u^{ki}(x; v)$ и $\tilde{u}^{ki}(x; \tilde{v})$, $(k, i) \in J$ – решения краевых задач (2.1), (2.2) при оптимизируемых параметрах соответственно v и $\tilde{v} = v + \Delta v$.

Несложно показать, что $\Delta u^{ki}(x; v)$, $(k, i) \in J$ являются решениями следующей системы краевых задач:

$$(II.6) \quad \frac{d\Delta u^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)\Delta u^{ki}(x) + B^{ki}\Delta W^{ki}(x; w^{ki}, \xi^{ki}), \quad (k, i) \in J,$$

$$(II.7) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} \Delta u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} \Delta u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \Delta v_j^i, \\ j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I.$$

Тогда для приращения функционала (2.5) будем иметь:

$$(II.8) \quad \Delta \mathfrak{S}(w, v, \xi) = \mathfrak{S}(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\xi}) - \mathfrak{S}(w, v, \xi) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} \Delta u^{ki}(x) + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}} \Delta \bar{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Delta \xi + \eta,$$

$$(II.9) \quad \eta = o \left(\|\Delta u(x)\|_{L_2^M[0, l]}, \|\Delta \underline{u}\|_{\mathbb{R}^{\underline{n}}}, \|\Delta \bar{u}\|_{\mathbb{R}^{\bar{n}}}, \|\Delta w\|_{\mathbb{R}^\mu}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M} \right).$$

Здесь обозначено: $f_0^{ki} = f_0^{ki}(u^{ki}(x), x)$, $\Phi = \Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$, η – остаточный член в соответствующих пространствах функций и конечномерных векторов.

Как известно из теории дифференциальных уравнений [24], при сделанных предположениях на данные, участвующие в задаче, имеет место оценка:

$$\|\Delta u(x)\|_{L_2^M[0, l]} \leq O(\|\Delta w\|_{\mathbb{R}^\mu}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M}),$$

а следовательно, имеют место оценки:

$$\begin{aligned}\|\Delta \underline{u}\|_{\mathbb{R}^{\underline{n}}} &= \|\Delta u(0)\|_{\mathbb{R}^{\underline{n}}} \leq O(\|\Delta w\|_{\mathbb{R}^{\mu}}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M}), \\ \|\Delta \bar{u}\|_{\mathbb{R}^{\bar{n}}} &= \|\Delta u(l)\|_{\mathbb{R}^{\bar{n}}} \leq O(\|\Delta w\|_{\mathbb{R}^{\mu}}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M}).\end{aligned}$$

Тогда из (П.9) имеем основную оценку

$$\eta = o(\|\Delta w\|_{\mathbb{R}^{\mu}}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M}),$$

откуда следует дифференцируемость функционала $\mathfrak{F}(w, v, \xi)$ по всем своим аргументам.

Теперь получим формулы для компонентов градиента функционала задачи по w, v, ξ . Для этого перенесем правые части уравнений (П.6) влево и умножим равенства на пока произвольные непрерывно дифференцируемые по своим аргументам \aleph -мерные вектор-функции $\psi^{ki}(x) \in \mathbb{R}^{\aleph}$, $x \in (0, l^{ki})$, $k \in I_i^+$, $i \in I$. Просуммируем полученные выражения, равные нулю, и проинтегрируем эту сумму по частям:

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left[(\psi^{ki}(x))^T \left(\frac{d\Delta u^{ki}(x)}{dx} - A^{ki}(x)\Delta u^{ki}(x) - B^{ki}\Delta W^{ki}(x, \Delta w, \Delta \xi) \right) \right] dx = \\ (П.10) \quad &= \sum_{i \in I} \left\{ \left[\sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(l^{ki}))^T \Delta u^{ki}(l^{ki}) - \sum_{k \in I_i^-} (\psi^{ik}(0))^T \Delta u^{ik}(0) \right] - \right. \\ &\quad - \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left[\left(\left(\frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right)^T + (\psi^{ki}(x))^T A^{ki}(x) \right) \Delta u^{ki}(x) - \right. \\ &\quad \left. \left. - (\psi^{ki}(x))^T B^{ki} \Delta W^{ki}(x, \Delta w, \Delta \xi) \right] dx \right\}.\end{aligned}$$

Прибавим правую часть (П.10) к (П.8), группируя, получим:

$$\begin{aligned}\Delta \mathfrak{F}(w, v, \xi) &= \\ (П.11) \quad &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left\{ \left[\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} - \left(\frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right)^T - (\psi^{ki}(x))^T A^{ki}(x) \right] \Delta u^{ki}(x) - \right. \\ &\quad \left. - (\psi^{ki}(x))^T B^{ki} \Delta W^{ki}(x, \Delta w, \Delta \xi) \right\} dx + \\ &\quad + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}} - (\underline{\psi})^T \right) \Delta \underline{u} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}} + (\bar{\psi})^T \right) \Delta \bar{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Delta \xi + \eta,\end{aligned}$$

где $\underline{\psi} = (\underline{\psi}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\underline{n}}$, $\bar{\psi} = (\bar{\psi}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$, $\underline{\psi}^i = (\psi^{ik_1}(0), \dots, \psi^{ik_{n_i}}(0))^T$, $\bar{\psi}^i = (\psi^{k_1 i}(l^{k_1 i}), \dots, \psi^{k_{n_i} i}(l^{k_{n_i} i}))^T$.

Преобразуем второе слагаемое в подынтегральном выражении (П.11) без учета членов меньше первого порядка малости:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} (\psi^{ki}(x))^T B^{ki} \Delta W^{ki}(x, \Delta w, \Delta \xi) dx = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} (\psi^{ki}(x))^T B^{ki} \left[(w^{ki} + \Delta w^{ki}) \delta(x - (\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki})) - w^{ki} \delta(x - \xi^{ki}) \right] dx = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left(\int_0^{l^{ki}} (\psi^{ki}(x))^T \delta(x - (\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki})) dx \right) B^{ki} (w^{ki} + \Delta w^{ki}) - \\
& \quad - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left(\int_0^{l^{ki}} (\psi^{ki}(x))^T \delta(x - \xi^{ki}) dx \right) B^{ki} w^{ki} = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki}))^T B^{ki} (w^{ki} + \Delta w^{ki}) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} w^{ki} = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki}))^T B^{ki} w^{ki} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki}))^T B^{ki} \Delta w^{ki} - \\
& \quad - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} w^{ki} = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left(\frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{ki}} \right)^T B^{ki} w^{ki} \Delta \xi^{ki} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} \Delta w^{ki}.
\end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в (П.11), после группировки получим

$$\begin{aligned}
& \Delta \mathfrak{S}(w, v, \xi) = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left[\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} - \left(\frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right)^T - (\psi^{ki}(x))^T A^{ki}(x) \right] \Delta u^{ki}(x) dx - \\
(П.12) \quad & - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left[\left(\frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{ki}} \right)^T B^{ki} w^{ki} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^{ki}} \right] \Delta \xi^{ki} - \\
& - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left[(\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} - \frac{\partial \Phi}{\partial w^{ki}} \right] \Delta w^{ki} + \sum_{i \in I} \frac{\partial \Phi}{\partial v^i} \Delta v^i + \\
& + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}} - (\underline{\psi})^T \right) \Delta \underline{u} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}} + (\bar{\psi})^T \right) \Delta \bar{u} \right] + \eta.
\end{aligned}$$

Займемся выражением в последней квадратной скобке.

Для простоты изложения приводимых далее выкладок вместо матричных и векторных операций будем использовать и покомпонентную их запись. Условия (П.7) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} g_{11}^{ik_1} \cdots g_{1\aleph}^{ik_1} & \cdots & g_{1\underline{n}_i}^{ik_{\underline{n}_i}} \cdots g_{1\underline{n}_i, \aleph}^{ik_{\underline{n}_i}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{M_i, 1}^{ik_1} \cdots g_{M_i, \aleph}^{ik_1} & \cdots & g_{M_i, \underline{n}_i}^{ik_{\underline{n}_i}} \cdots g_{M_i, \underline{n}_i, \aleph}^{ik_{\underline{n}_i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \underline{u}_1^i \\ \cdots \\ \Delta \underline{u}_{\underline{n}_i, \aleph}^i \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} q_{11}^{ik_1} \cdots q_{1\aleph}^{ik_1} & \cdots & q_{1\overline{n}_i}^{ik_{\overline{n}_i}} \cdots q_{1\overline{n}_i, \aleph}^{ik_{\overline{n}_i}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{M_i, 1}^{ik_1} \cdots q_{M_i, \aleph}^{ik_1} & \cdots & q_{M_i, \overline{n}_i}^{ik_{\overline{n}_i}} \cdots q_{M_i, \overline{n}_i, \aleph}^{ik_{\overline{n}_i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \overline{u}_1^i \\ \cdots \\ \Delta \overline{u}_{\overline{n}_i, \aleph}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_1^i \\ \cdots \\ \Delta v_{M_i}^i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя обозначения, сделанные выше, соотношения (П.7) примут вид:

$$(П.13) \quad \begin{pmatrix} c_{1,1}^i & \cdots & c_{1,(n_i \cdot \aleph)}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{M_i,1}^i & \cdots & c_{M_i,(n_i \cdot \aleph)}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_1^i \\ \cdots \\ \Delta u_{n_i \cdot \aleph}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_1^i \\ \cdots \\ \Delta v_{M_i}^i \end{pmatrix}, \quad i \in I,$$

или в матричной форме:

$$C_i \Delta u^i = \Delta v^i, \quad i \in I.$$

Тогда (П.13) можно записать так:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \widehat{c}_{1,1}^i & \cdots & \widehat{c}_{1,M_i}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{c}_{M_i,1}^i & \cdots & \widetilde{c}_{M_i,M_i}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \widehat{u}_1^i \\ \cdots \\ \Delta \widehat{u}_{M_i}^i \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{1,1}^i & \cdots & \widetilde{c}_{1,(n_i \cdot \aleph - M_i)}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{c}_{M_i,1}^i & \cdots & \widetilde{c}_{M_i,(n_i \cdot \aleph - M_i)}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \widetilde{u}_1^i \\ \cdots \\ \Delta \widetilde{u}_{(n_i \cdot \aleph) - M_i}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_1^i \\ \cdots \\ \Delta v_{M_i}^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или в виде:

$$(П.14) \quad \widehat{C}_i \Delta \widehat{u}^i + \widetilde{C}_i \Delta \widetilde{u}^i = \Delta v^i, \quad i \in I.$$

Учитывая (П.13), \widehat{C}_i имеет обратную матрицу. Тогда из (П.14) имеем:

$$(П.15) \quad \Delta \widehat{u}^i = - \left(\widehat{C}_i \right)^{-1} \widetilde{C}_i \Delta \widetilde{u}^i + \widehat{C}_i^{-1} \Delta v^i, \quad i \in I.$$

Согласно (П.15) примем M_i -мерный вектор приращений

$$\Delta \widehat{u}^i = (\Delta \widehat{u}_1^i, \dots, \Delta \widehat{u}_{M_i}^i)^T = \left(\Delta u_{\mu_1}^i, \dots, \Delta u_{\mu_{M_i}}^i \right)^T$$

зависимым, а $(n_i \aleph - M_i)$ -мерный вектор

$$\Delta \tilde{u}^i = (\Delta \tilde{u}_1^i, \dots, \Delta \tilde{u}_{n_i \aleph - M_i}^i)^T = \left(\Delta u_{\mu_1}^i, \dots, \Delta u_{\mu_{n_i \aleph - M_i}}^i \right)^T$$

— независимым. Учтем (П.15) в выражении последней квадратной скобки (П.12):

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}^i} - (\underline{\psi}^i)^T \right) \Delta \underline{u}^i + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^i} + (\bar{\psi}^i)^T \right) \Delta \bar{u}^i \right) = \\ & = \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u^i} + (\psi^i)^T \right) \Delta u^i = \\ & = \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \Delta \widehat{u}^i + \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \widetilde{u}^i} + (\widetilde{\psi}^i)^T \right) \Delta \widetilde{u}^i = \\ & = \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \widetilde{u}^i} + (\widetilde{\psi}^i)^T \right) \Delta \widetilde{u}^i - \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \widehat{C}_i^{-1} \widetilde{C}_i \Delta \widetilde{u}^i + \\ & \quad + \sum_{i \in I} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \widehat{C}_i^{-1} \Delta v^i. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство в (П.12), для приращения функционала окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \Delta \mathfrak{F}(w, v, \xi) = \\ & = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left[\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} - \left(\frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right)^T - (\psi^{ki}(x))^T A^{ki}(x) \right] \Delta u^{ki}(x) dx - \\ & \quad - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left[\left(\frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{ki}} \right)^T B^{ki} w^{ki} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^{ki}} \right] \Delta \xi^{ki} - \\ & \quad - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left[(\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} - \frac{\partial \Phi}{\partial w^{ki}} \right] \Delta w^{ki} + \\ & \quad + \sum_{i \in I} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial v^i} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \widehat{C}_i^{-1} \right] \Delta v^i + \\ & \quad + \sum_{i \in I} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \widetilde{u}^i} + (\widetilde{\psi}^i)^T - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \widehat{C}_i^{-1} \widetilde{C}_i \right] \Delta \widetilde{u}^i + \eta. \end{aligned} \tag{П.16}$$

Пользуясь произвольностью вектор-функций $\psi^{ki}(x) \in \mathbb{R}^{\aleph}$, $k \in I_i^k$, $i \in I$, потребуем от них равенства нулю выражений в квадратных скобках (множителей Δu^{ki} и $\Delta \widetilde{u}^i$). Получим краевую задачу (3.5), (3.6) относительно вектор-функций $\psi^{ki}(x)$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, которую будем называть сопряженной относительно задачи (2.1), (2.2). Искомые компоненты градиента функционала

$\mathfrak{Z}(w, \xi, v)$ будут определяться линейными частями приращения функционала (П.16) по приращениям Δw^{ki} , $\Delta \xi^{ki}$, Δv^i по формулам (3.2), (3.3), (3.4).

Таким образом, можно считать доказанной теорему 2.

Доказательство теоремы 3 следует из дифференцируемости функционала задачи, компактности допустимых множеств $\Omega_{w^{ki}} \times \Omega_{\xi^{ki}} \times \Omega_{v^i}$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, конечномерности оптимизируемого вектора параметров задачи и необходимых условий оптимальности в вариационной форме в задачах оптимизации [10, 11].

Доказательство теоремы 4. Пусть $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ – пока произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие (4.5) и условию (4.6). Продифференцируем условие (4.6), учитывая (i, d) -ю подсистему уравнений из (2.1). После группировки соответствующих слагаемых, при $d \in I_i^-$ получим

$$(П.17) \quad \left[\frac{d\alpha_j^{id}(x)}{dx} + \alpha_j^{id}(x)A^{id}(x) \right] u^{id}(x) + \\ + \left[-\frac{d\gamma_j^{id}(x)}{dx} + \alpha_j^{id}(x) \left(f^{id}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) \right) \right] = 0.$$

Учитывая произвольность функций $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ и необходимость выполнения равенства (П.9) для всех решений $u^{id}(x)$ (i, d) -й подсистемы уравнений (2.1), потребуем выполнения равенства нулю выражений в квадратных скобках. Отсюда следует, что $\alpha_j^{id}(x)$, $\gamma_j^i(x)$ являются решением задач Коши (4.5)–(4.6). Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions J.L. Controle des Systemes Distributes Singuliers, Gauthier-Villars, Paris, 1987.
2. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Задача импульсного управления с двумя типами импульсных воздействий // АиТ. 2009. № 11. С. 34–54.
Miller B.M., Rubinovich E.Y. Impulsive Control with Impulsive Actions of Two Types // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 11. P. 1795–1813.
3. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсным управлением. М.: Наука, 2005.
4. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Optimal Control of Sources on Some Classes of Functions // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. 2014. V. 63. No. 7. P. 1135–1152.
5. Aida-zade K.R. Investigation of Non-Linear Optimization Problems of Networks Structure // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 2. P. 135–145.
Айда-заде К.Р. Исследование нелинейных оптимизационных задач сетевой структуры // АиТ. 1990. № 2. С. 3–14.
6. Айда-заде К.Р., Али-заде Р.И., Новрузбеков И.Г., Калаушин М.А. Декомпозиционный метод анализа и синтеза плоских механизмов // Механика машин. 1980. Вып. 57. С. 26–30.

7. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981.
8. Geiser J. Decomposition Methods for Differential Equations: Theory and Applications. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2009.
9. Черноусько Ф.Л. Оптимальное перемещение многозвенной системы в среде с сопротивлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 240–255.
10. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002.
11. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. 3-е изд. М.: Наука, 2019.
12. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Solving Systems of Diferential Equations of Block Structure with Nonseparated Boundary Conditions // J. of Applied and Industrial Mathem. 2015. V. 9. No. 1. P. 1–10.
13. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Calculation of the State of a System of Discrete Linear Processes Connected by Nonseparated Boundary Conditions // J. of Applied and Industrial Mathematics. 2016. V. 10. No. 4. P. 1–13.
14. Ashrafova Y.R. On One Method of Block Transfer of Conditions for a System of Three-Step Discrete Processes Connected Only by Boundary Conditions // Informatics and Control Problems. 2019. V. 39. No. 2. P. 48–56.
15. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.
16. Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the Solution of Boundary Value Problems with Nonseparated Multipoint and Integral Conditions // Diff. Equations. 2013. V. 49. No. 9. P. 1114–1125.
17. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем, Новосибирск: ВО Наука, 1993.
18. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
19. Абрамов А.А., Бураго Н.Г. и др. Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач // Сообщения по программному обеспечению ЭВМ. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
20. Быков А.Н., Ерофеев А.М., Сизов Е.А., Федоров А.А. Метод распараллеливания прогонки на гибридных ЭВМ // Вычислительные методы и программирование. 2013. № 14. С. 43–47.
21. Aida-zade K.R., Bagirov A.H. On the Problem of Placement of Oil Wells and Control of Their Flow-rates // Autom. Remote Control. 2006. No. 1. P. 52–61.
Айда-заде К.Р., Багиров А.Г. О задаче размещения нефтяных скважин и управления их дебитами // АИТ. 2006. № 1. С. 52–62.
22. Aida-zade K.R., Ashrafova E.R. Numerical Solution to the Problem of Determination of Places and Volume of the Fluid Leakage under Non-stationary Regimes in a Pipeline Network // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. V. 57. No. 12. P. 1919–1934.
23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
24. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
25. Васильева О.О., Мизуками К. Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Изв. АН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 95–100.
26. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.

27. *Vasilieva O.O., Mizukami K.* Optimality Criterion for Singular Controllers: Linear Boundary Conditions // J. Math Anal. and Appl. 1997. V. 213. No. 2. P. 620–641.
28. *Sharifov Y.A., Mammadova N.B.* Optimal Control Problem Described by Impulsive Differential Equations With Nonlocal Boundary Conditions // Differ. Equations. 2014. V. 50. No. 3. P. 403–411.
29. *Abdullayev V.M.* Numerical Solution to Optimal Control Problems with Multipoint and Integral Conditions // Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics. 2018. V. 44. No. 2. P. 171–186.
30. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука. 1983.
31. *Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 07.06.2020

После доработки 13.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021