

© 2021 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, канд. техн. наук (a.glushchenko@sf-misis.ru),  
В.А. ПЕТРОВ, канд. техн. наук (petrov.va@misis.ru),  
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)  
(Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)  
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический  
университет «МИСиС»)

## I-DREM: ОСЛАБЛЕНИЕ УСЛОВИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ<sup>1</sup>

Исследование посвящено ослаблению в процедуре DREM условия квадратичной интегрируемости регрессора  $\omega(t) \notin L_2$  для обеспечения монотонной асимптотической сходимости параметрической ошибки в задаче оценки постоянных параметров линейной регрессионной зависимости.

*Ключевые слова:* линейная регрессия, идентификация параметров, постоянное возбуждение, начальное возбуждение, квадратичная интегрируемость, коэффициент усиления закона оценки.

DOI: 10.31857/S0005231021070084

### 1. Введение. Постановка задачи.

В последние годы в отечественной и зарубежной литературе появилось множество публикаций [1–11], посвященных ослаблению требования постоянного возбуждения (в зарубежной литературе *Persistent Excitation* — *PE*) для экспоненциальной сходимости ошибки  $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$  в градиентных схемах идентификации постоянных параметров линейной регрессии

$$(1.1) \quad y(t) = \varphi^T(t)\theta,$$

где  $y(t) \in \mathbb{R}$  — функция регрессионной зависимости,  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор регрессора,  $\theta \in \mathbb{R}^n$  — вектор неизвестных параметров,  $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор оценок параметров  $\theta$ .

*Определение 1.* Регрессор  $\varphi(t) \in L_\infty$ , где  $t \in [0; \infty)$ , постоянно возбужден ( $\varphi(t) \in PE$ ), если  $\exists T_0 > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что  $\forall t \geq 0$  верно неравенство

$$(1.2) \quad \int_t^{t+T_0} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha I,$$

где  $I$  — единичная матрица, а  $\alpha$  — степень возбуждения.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-47-310003 p\_a).

*Предположение.* Неизвестные параметры регрессии (1.1) таковы, что  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\theta = \text{const} \forall t \geq 0$ .

Не претендуя на полноту обзора и не учитывая весьма частные решения [1, 2] и другие, выделим некоторые основные методы [3–6], позволяющие ослабить условие (1.2). Для более полного ознакомления с существующими решениями рекомендуем обратиться к обзору [7].

Во-первых, это схемы расширения и фильтрации регрессора DRE [12] и MRE [13] при применении автоколебательных [3] и интегральных [4] фильтров. Использование фильтров такого рода позволяет ослабить требование постоянного возбуждения до требования начального возбуждения (в зарубежной литературе *Initial Excitation — IE*).

*Определение 2.* Регрессор  $\varphi(t) \in L_\infty$ , где  $t \in [0; \infty)$ , возбужден ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) на начальном интервале времени  $[0; T_0]$ , если для  $T_0 > 0 \exists \alpha > 0$  такое, что

$$(1.3) \quad \int_0^{T_0} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha I,$$

где  $I$  — единичная матрица, а  $\alpha$  — степень возбуждения.

Однако, несмотря на ослабление условия  $\varphi(t) \in \text{PE}$  до  $\varphi(t) \in \text{IE}$ , упомянутые решения не являются универсальными, поскольку в уравнениях фильтров содержатся незамкнутые отрицательной обратной связью интеграторы, чувствительные к шумам и начальным условиям [7]. Для решения этой проблемы в [8] был предложен новый фильтр, свободный от данного недостатка и в отличие от фильтра Крейссельмейера [13] позволяющий в схеме расширения и фильтрации регрессора MRE обеспечить экспоненциальную сходимость при выполнении условия  $\varphi(t) \in \text{IE}$ .

Во-вторых, это процедура DREM [5, 6], в которой используются исключительно устойчивые фильтры в виде апериодических звеньев первого порядка или операторов задержки. В отличие от рассмотренных методов [3, 4, 12, 13], подход DREM позволяет преобразовать уравнение регрессии (1.1) с матричным регрессором  $\varphi(t)$  к  $n$  скалярным уравнениям, что влечет за собой как получение нового условия асимптотической сходимости, оказывающегося слабее  $\varphi(t) \in \text{PE}$  и отличающегося от него, так и монотонную сходимость к нулю в отдельности по каждой ошибке из вектора  $\tilde{\theta}(t)$ . Чтобы более детально проанализировать этот подход, применим его к регрессии (1.1).

Для этого в количестве  $n - 1$  введем устойчивые операторы

$$(1.4) \quad (\cdot)_{f_i(t)} := [H_i(\cdot)](t); \quad H_i(p) = \frac{\alpha_i^f}{p + \beta_i^f}; \quad i \in \{1, 2, \dots, n - 1\},$$

где  $\alpha_i^f > 0$  и  $\beta_i^f > 0$ .

Пропуская через операторы (1.4) функцию  $y(t)$  и регрессор  $\varphi(t)$ , сформируем расширенное уравнение регрессии

$$(1.5) \quad \begin{aligned} Y_f(t) &= \Phi_f(t)\theta, \\ Y_f(t) &= [y(t) \quad y_{f_1}(t) \quad \dots \quad y_{f_{n-1}}(t)]^T; \\ \Phi_f(t) &= [\varphi^T(t) \quad \varphi_{f_1}^T(t) \quad \dots \quad \varphi_{f_{n-1}}^T(t)]^T. \end{aligned}$$

Домножив уравнение (1.5) слева на присоединенную матрицу алгебраических дополнений  $\text{adj}\{\Phi_f(t)\}$  матрицы расширенного регрессора  $\Phi_f(t)$ , а также пользуясь равенством  $\text{adj}\{\Phi_f(t)\}\Phi_f(t) = \det\{\Phi_f(t)\}I$  ( $I$  – единичная матрица), получим уравнение

$$(1.6) \quad Y(t) = \text{adj}\{\Phi_f(t)\}Y_f(t) = \text{adj}\{\Phi_f(t)\}\Phi_f(t)\theta = \det\{\Phi_f(t)\}I\theta = \omega(t)\theta,$$

где  $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega(t) \in \mathbb{R}$ .

Уравнение (1.6) может быть преобразовано к  $n$  скалярным уравнениям вида

$$(1.7) \quad Y_i(t) = \omega(t)\theta_i.$$

На основе скалярных уравнений (1.7) может быть получен закон градиентной оценки неизвестных параметров

$$(1.8) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \omega(\omega\hat{\theta}_i - Y_i),$$

где  $\gamma_i > 0$  – коэффициент усиления закона настройки.

В силу уравнения (1.7) решение дифференциального скалярного уравнения (1.8) имеет вид

$$(1.9) \quad \tilde{\theta}_i(t) = e^{-\gamma_i \int_{t_0}^t \omega^2(\tau) d\tau} \tilde{\theta}_i(t_0),$$

где  $t_0$  – момент времени, в который достигается неравенство нулю регрессора  $\omega(t)$ .

Из уравнения (1.9) следует: 1) сохранение после применения процедуры DREM требования постоянного возбуждения (1.2) для экспоненциальной сходимости параметрической ошибки; 2) возникновение нового условия *квадратичной интегрируемости*  $\omega(t) \notin L_2$ , необходимого для асимптотической сходимости  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_i| = 0$ .

*Определение 3.* Для регрессора  $\omega(t)$  выполняется условие квадратичной интегрируемости ( $\omega(t) \notin L_2$ ), если верно равенство

$$(1.10) \quad \|\omega\|_2 = \sqrt{\int_0^t \omega^2(\tau) d\tau} = \infty.$$

В [5], не ограничивая общности, на примере  $n = 2$  был установлен класс исходных регрессоров  $\varphi(t)$ , отличных от  $\varphi(t) \in \text{PE}$ , для которых скалярные регрессоры, полученные с помощью процедуры (1.5)–(1.7), удовлетворяют условию  $\omega(t) \notin L_2$ .

*Утверждение 1. Если исходный регрессор задан как  $\varphi^T(t) = [c \ g(t) + \dot{g}(t)]$ , где  $c$  — произвольная постоянная, и в процедуре (1.5)–(1.7) используются операторы (1.4), то  $\varphi(t) \notin \text{PE}$  и  $\omega(t) \notin L_2$ , если и только если для функции  $g(t)$  и ее производной выполняются условия*

$$(1.11) \quad \begin{aligned} g(t) \in L_\infty, \quad \dot{g}(t) \in L_\infty, \quad \dot{g}(t) \notin L_2, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{g}(t) = 0. \end{aligned}$$

На основе определения функции  $g(t)$  очевидно, что новое условие (1.11) слабее [5–7] требования постоянного возбуждения (1.2), но сильнее требования начального возбуждения (1.3). Так, например, существует исходный регрессор вида  $\varphi^T(t) = [1 \ e^{-t}] \in \text{IE}$  или скалярный регрессор вида  $\omega(t) = e^{-t} \in \text{IE}$  и  $\omega(t) = e^{-t} \in L_2$ , для которых в силу (1.11) и утверждения 1 закон оценки (1.8) не обеспечивает ни экспоненциальной, ни даже асимптотической параметрической сходимости.

Для решения этой проблемы и обеспечения сходимости  $\forall \omega(t) \in \text{IE}$  в [9–11] был предложен FTC (finite-time convergence) контур оценки:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \hat{\theta}_i^{FTC} = \frac{1}{1 - \phi_c} [\hat{\theta}_i - \phi_c \hat{\theta}_i(0)]; \quad \phi_c = \begin{cases} \sigma, & \text{если } \phi \geq \sigma, \\ \phi, & \text{если } \phi < \sigma, \end{cases} \\ \dot{\phi} = -\gamma_i \omega^2 \phi, \quad \phi(0) = 1. \end{aligned}$$

Контур оценки (1.12) обеспечивает сходимость оценки  $\hat{\theta}_i^{FTC}$  к  $\theta_i$  за конечное время  $t_c$ , если для регрессора  $\omega(t)$  выполняется условие

$$(1.13) \quad \int_0^{t_c} \omega^2(\tau) d\tau \geq -\frac{1}{\gamma_i} \ln(\sigma).$$

Недостатками контура оценки (1.12) является отсутствие доказательства робастности к возмущениям, потеря сходимости за конечное время при  $\omega(t) \notin L_2$  (решение этой проблемы предложено в [11]), а также высокая чувствительность к параметрам  $\sigma \in (0; 1)$  и  $\gamma_i$ , от выбора значений которых целиком зависит выполнение условия (1.13).

Поэтому задача обеспечения сходимости параметрической ошибки в случае  $\omega(t) \in \text{IE}$  является решенной не до конца, что позволяет сформулировать первую задачу настоящей статьи в следующем виде.

*Задача 1. Требуется построить закон оценки неизвестных параметров скалярных регрессий (1.7), обеспечивающий монотонную экспоненциальную сходимость ошибки  $\hat{\theta}_i(t)$  в случае  $\varphi(t) \in \text{IE}$  ( $\omega(t) \in \text{IE}$ ).*

*Замечание.* В силу устойчивости и различия  $i$ -х фильтров (1.4) если исходный регрессор  $\varphi(t) \in \text{IE}$ , то и скалярный регрессор  $\omega(t) \in \text{IE}$ . Доказательству этого утверждения посвящена публикация [14].

В законах оценки вида (1.8) важную роль выполняет экспериментально подбираемый параметр — коэффициент усиления  $\gamma_i$ , с помощью которого возможно повлиять на скорость сходимости параметрической ошибки (1.9). На практике, во многих приложениях, эксперименты по выбору данного коэффициента проведены быть не могут. Поэтому полезно было бы иметь закон настройки коэффициента усиления.

Такой закон настройки может быть построен с помощью применения для оценки параметров  $\theta$  не градиентного закона (1.8), а контура оценки, построенного согласно рекурсивному методу наименьших квадратов с коэффициентом забывания  $\lambda$ :

$$(1.14) \quad \begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \omega(\omega \hat{\theta}_i - Y_i), & \gamma_i(0) > 0; \\ \gamma_i = \lambda \gamma_i - \gamma_i^2 \omega^2, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Однако в [15] была доказана невозможность применения контура (1.14) для идентификации параметров скалярных регрессий (1.7), если: 1)  $\omega(t) \notin \text{PE}$ ; 2)  $\omega(t) \notin \text{L}_2$  и  $\omega(t) \rightarrow 0$ ; 3)  $\omega(t) \in \text{L}_2$ . В этих случаях  $\gamma_i(t) \rightarrow \infty$ . Поэтому вторую задачу настоящей статьи сформулируем в следующем виде:

*Задача 2.* Требуется построить контур оценки неизвестных параметров скалярных регрессий (1.7), использующий переменный коэффициент усиления закона оценки  $\gamma_i(t)$  и обеспечивающий  $\gamma_i(t) \in \text{L}_\infty$  и экспоненциальную сходимость ошибки  $\hat{\theta}_i(t)$  в случае  $\varphi(t) \in \text{IE}$  ( $\omega(t) \in \text{IE}$ ).

Для решения поставленных задач в данной статье предлагается сначала выполнить расширение скалярных регрессий (1.7) по методу MRE [13] с использованием упомянутого нового фильтра [8]. Затем на основе полученной модифицированной регрессии построить закон оценки по градиентному методу (задача 1) и рекурсивному методу наименьших квадратов (задача 2), а после доказать аналитически и экспериментально их требуемые свойства.

## 2. Расширение и фильтрация скалярного регрессора

Применим к скалярной регрессии (1.7) метод расширения регрессора MRE. Для этого умножим уравнение (1.7) слева и справа на регрессор  $\omega(t)$ :

$$\omega(t)Y_i(t) = \omega^2(t)\theta_i.$$

Воспользуемся предложенным в [8] фильтром<sup>2</sup>

$$(2.1) \quad u_f(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau,$$

где  $\mu > 0$  — коэффициент памяти,  $u_f(t)$  и  $u(t)$  — выход и вход фильтра.

<sup>2</sup> Фильтр представляет собой интегратор с экспоненциальным уменьшением вклада новых слагаемых, поэтому полученную в статье процедуру назовем I-DREM.

Утверждение 2. Если вход фильтра  $u(t) \in L_\infty$ , то выход фильтра  $u_f(t) \in L_\infty$ .

Доказательство утверждения 2 можно найти в [8].

Пропустим через фильтр (2.1) расширенный регрессор  $\omega^2(t)$  и функцию  $\omega(t)Y_i(t)$ :

$$(2.2) \quad \Omega(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau; \quad \Upsilon_i(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} \omega(\tau) Y_i d\tau.$$

Утверждение 3. Фильтрованный скалярный регрессор  $\Omega(t) \forall \omega(t) \in \text{IE}$  является таким, что:

1)  $\forall t \geq 0 \Omega(t) \geq 0$  и  $\Omega(t) \in L_\infty$ ;

2)  $\forall t \geq T_0 \Omega(t) > 0$ ;

3) а) если  $\omega(t) \in \text{IE}$  и  $\omega(t) \notin \text{PE} \forall t \geq T_0$ , верно  $\Omega(T_0) \leq \Omega(t) \leq \Omega(T_0) + \beta$ ;

б) если  $\omega(t) \in \text{PE} \forall t \geq T_\mu$ , верно  $\Omega(T_\mu) \leq \Omega(t) \leq \Omega(T_\mu) + \beta_1$  и  $\Omega(t) > 0$ , где  $T_\mu \geq T_0$ ;

4)  $\Omega(t) \notin L_2$ .

Доказательство. Для доказательства первой части утверждения найдем производную по времени регрессора  $\Omega(t)$ :

$$\dot{\Omega}(t) = e^{-\mu t} \omega^2(t).$$

Так как  $\forall t \geq 0 \text{sign}(e^{-\mu t} \omega^2(t)) \geq 0$ , то  $\dot{\Omega}(t) \geq 0$ , а следовательно,  $\Omega(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ . По условию  $\text{IE} - \omega(t) \in L_\infty$ , а согласно доказательству утверждения 2 этого достаточно для  $\Omega(t) \in L_\infty$ . Первая часть утверждения 3 доказана, перейдем к доказательству второй части.

Следуя определению 2, запишем условие начального возбуждения для регрессора  $\omega(t)$ :

$$(2.3) \quad \int_{t_0}^{T_0} \omega^2(\tau) d\tau \geq \alpha.$$

Тогда  $\forall t \geq T_0$  верно неравенство

$$\int_{t_0}^t \omega^2(\tau) d\tau > 0.$$

Откуда, так как  $e^{-\mu t} > 0 \forall t < \infty$ , следует

$$(2.4) \quad \Omega(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau > 0 \quad \forall t \geq T_0.$$

Что и требовалось доказать во второй части утверждения 3.

Для доказательства п. За утверждения 3 перепишем выражение (2.4), разбив всю ось времени на два интервала:

$$(2.5) \quad \Omega(t) = \int_{t_0}^{T_0} e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau + \int_{T_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau.$$

Первый интеграл в (2.5), согласно  $\omega(t) \in \text{IE}$  (2.3) и в силу п. 1 утверждения 3, ограничен своим значением на правой границе

$$(2.6) \quad \int_{t_0}^{T_0} e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau \leq \Omega(T_0).$$

Согласно определению 2 при  $\omega(t) \in \text{IE}$  и  $\omega(t) \notin \text{PE}$  можно предположить, что  $\forall t \geq T_0$   $\omega(t) \rightarrow 0$ , тогда  $\forall t \geq T_0$  для второго интеграла в (2.5) справедливо неравенство

$$(2.7) \quad \Omega(t) = \int_{T_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau \leq \beta,$$

где  $\beta \geq 0$ .

С учетом (2.5)–(2.7) имеем

$$\Omega(T_0) \leq \Omega(t) \leq \Omega(T_0) + \beta \quad \forall t \geq T_0,$$

что завершает доказательство п. За утверждения 3.

Для доказательства п. Зб утверждения 3 введем момент времени  $T_\mu \geq T_0$ . Тогда так как  $e^{-\mu t} \rightarrow 0$ , то аналогично анализу (2.5)–(2.7), используя  $T_\mu$  вместо  $T_0$ , можно показать, что

$$\Omega(T_\mu) \leq \Omega(t) \leq \Omega(T_\mu) + \beta_1 \quad \forall t \geq T_\mu,$$

где  $\beta_1 \geq 0$ .

По п. 2 утверждения 3, в силу  $T_\mu \geq T_0$ , ясно, что  $\Omega(t) > 0$ , что завершает доказательство п. Зб утверждения 3.

Согласно доказательству п. 3 утверждения 3 введем понятия максимального и минимального  $\forall t \geq T_0$  значений регрессора  $\Omega(t)$  и моментов времени, в которые эти значения достигаются:

$$(2.8) \quad \Omega_{\max} = \Omega(t \rightarrow \infty) = \begin{cases} \Omega(T_0) + \beta, & \text{если } [\omega(t) \in \text{IE} \wedge \omega(t) \notin \text{PE}], \\ \Omega(T_\mu) + \beta_1, & \text{если } \omega(t) \in \text{PE}, \end{cases}$$

$$\Omega_{\min}(T_{\min}) = \begin{cases} \Omega(T_0), & \text{если } [\omega(t) \in \text{IE} \wedge \omega(t) \notin \text{PE}], \\ \Omega(T_\mu), & \text{если } \omega(t) \in \text{PE}. \end{cases}$$

Тогда проверить условие квадратичной интегрируемости (1.10) для регрессора  $\Omega(t)$  представляется возможным, используя определения  $\Omega_{\min}(T_{\min})$  и  $T_{\min}$ ,

$$\begin{aligned} \|\Omega(t)\|_2 &= \sqrt{\int_0^{\infty} \Omega^2(\tau) d\tau} \geq \sqrt{\int_0^{T_{\min}} \Omega^2(\tau) d\tau + \int_{T_{\min}}^{\infty} \Omega^2(\tau) d\tau} = \\ &= \sqrt{C + \int_{T_{\min}}^{\infty} \Omega_{\min}^2(T_{\min}) d\tau} \geq \sqrt{C + \Omega_{\min}^2(T_{\min}) (\infty - T_{\min})} = \infty, \end{aligned}$$

где  $C > 0$ .

Отсюда следует  $\Omega(t) \notin L_2$ , что и требовалось доказать в части 4 утверждения 3.

С учетом обозначений (2.2) регрессия (1.7) может быть переписана в виде

$$(2.9) \quad \Upsilon_i(t) = \Omega(t)\theta_i.$$

### 3. Градиентный закон оценки

Градиентный закон оценки, построенный на основе уравнений регрессии (2.9), имеет вид

$$(3.1) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \Omega \left( \Omega \hat{\theta}_i - \Upsilon_i \right).$$

По аналогии с (1.9) решение уравнения (3.1) приобретает вид

$$(3.2) \quad \tilde{\theta}_i(t) = e^{-\gamma_i \int_{t_0}^t \Omega^2(\tau) d\tau} \tilde{\theta}_i(t_0).$$

Согласно части 4 утверждения 3  $\forall \omega(t) \in \text{IE}$   $\Omega(t) \notin L_2$ , а значит, согласно уравнению (3.2) гарантируется асимптотическая сходимость  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_i(t)| = 0$ .

Таким образом, относительно классической процедуры DREM получено ослабление требования  $\omega(t) \notin L_2$  для сходимости параметрической ошибки до требования  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ).

В следующей теореме 1 докажем, что при  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) сходимость параметрической ошибки (3.2) не только асимптотическая, но и экспоненциальная.

*Теорема 1. 1. Параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}_i$  при  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) монотонно экспоненциально сходится к нулю со скоростью больше чем  $0,5\kappa_{\min}$ ; 2. Минимальная  $0,5\kappa_{\min}$  и максимальная  $0,5\kappa_{\max}$  скорости сходимости могут быть произвольно увеличены выбором коэффициента  $\gamma_i$ .*



Доказательство теоремы 1, а также выражения для оценок  $\kappa_{\min}$  и  $\kappa_{\max}$  приведены в Приложении.

Согласно доказательству теоремы 1 полученный закон оценки (3.1), как и закон оценки (1.8), обеспечивает монотонность для каждой параметрической ошибки  $\tilde{\theta}_i$ , но при этом требует более слабого условия  $\omega(t) \in \text{IE}$  для ее асимптотической и экспоненциальной сходимости по сравнению с законом (1.8). Отсюда следует решение поставленной задачи 1.

#### 4. Контур идентификации с настраиваемым коэффициентом усиления

Теперь для идентификации неизвестных параметров регрессии (2.9) воспользуемся формулами рекурсивного метода наименьших квадратов. В этом случае контур оценки примет вид

$$(4.1) \quad \begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \Omega \left( \Omega \hat{\theta}_i - \Upsilon_i \right), & \gamma_i(0) > 0; \\ \dot{\gamma}_i = \lambda \gamma_i - \gamma_i^2 \Omega^2, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Свойства контура оценки (4.1) опишем теоремой 2.

*Теорема 2. При  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) контур оценки (4.1) обладает следующими свойствами:*

1) коэффициент усиления  $\gamma_i(t)$  ограничен так, что  $\forall t \geq 0$  верно неравенство

$$(4.2) \quad \gamma_{i.\min} \leq \gamma_i(t) \leq \gamma_{i.\max};$$

2) для коэффициента усиления  $\gamma_i(t)$  справедлив предел:

$$(4.3) \quad \gamma_{i.\lim} = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_i(t) = \lambda \Omega_{\max}^{-2};$$

3) параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}_i$  монотонно экспоненциально сходится к нулю со скоростью больше чем  $0,5\eta_{\min}$ ;

4) минимальная  $0,5\eta_{\min}$  и максимальная  $0,5\eta_{\max}$  скорости сходимости могут быть произвольно увеличены выбором коэффициента  $\lambda$ .

Доказательство теоремы 2, а также выражения для оценок  $\gamma_{i.\min}$ ,  $\gamma_{i.\max}$  и  $\eta_{\min}$ ,  $\eta_{\max}$  приведены в Приложении.

Согласно доказательству теоремы 2 контур оценки (4.1) использует коэффициент усиления  $\gamma_i(t) \in L_{\infty}$ , настраиваемый по формулам рекурсивного метода наименьших квадратов с фактором забывания, и при этом обеспечивает монотонную экспоненциальную сходимость при  $\varphi(t) \in \text{IE}$ , что было невозможно в исходной схеме DREM [15] и свидетельствует о решении поставленной задачи 2.

#### 5. Рассуждение о потере идентифицирующей способности

Из выражения (2.2) следует, что через  $5\mu^{-1}$  регрессор  $\Omega(t)$  и функция  $\Upsilon_i(t)$ , а значит, и контуры оценки (3.1) и (4.1) станут нечувствительными

к новым значениям регрессора  $\omega(t)$  и функции  $Y_i(t)$ . Однако при выполнении предположения по доказанному в теоремах 1 и 2 это обстоятельство не оказывает влияния на экспоненциальную параметрическую сходимость, которая гарантируется  $\forall t \geq T$ .

Если же допустить, что параметры регрессии (1.1), вопреки принятому предположению, изменили свое значение в любой момент времени  $t \geq 5\mu^{-1}$ , то контуры оценки (3.1) и (4.1) не смогут произвести переидентификацию, поскольку оперируют “старыми данными” о регрессоре  $\omega(t)$  и функции  $Y_i(t)$ .

Необходимо отметить, что обойти описанную потерю идентифицирующей способности возможно двумя способами. Во-первых, устремив значение параметра  $\mu$  к нулю, приближая тем самым предложенный фильтр к интегральному [4], но сохраняя при этом свойство робастности к возмущениям (доказательство сохранения робастности при  $\mu \rightarrow 0$  и  $\mu \neq 0$  можно найти на рис. 6 и в Приложении публикации [8]) и, во-вторых, “привязавшись” к конкретному типу регрессора  $\varphi(t)$ . В частности, если регрессор  $\varphi(t)$  — это координаты состояния объекта управления, работающего по ступенчатому задающему воздействию, то возможно проводить переидентификацию начиная отсчет  $t$  с нуля в моменты времени изменения задающего воздействия. В целом случай потери идентифицирующей способности выходит за рамки настоящей статьи, поскольку согласно предположению идентификацию параметров регрессии (1.1) достаточно провести один раз.

## 6. Иллюстративный пример

В качестве иллюстрации эффективности предлагаемого подхода приведем результаты математического моделирования контуров оценки (1.8), (3.1) и (4.1) при идентификации параметров линейной регрессии (1.1) для случая  $n = 2$ . Моделирование проводилось в Matlab/Simulink на основе численного интегрирования методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации  $\tau_s = 10^{-6}$  с. Регрессор  $\varphi(t)$ , вектор неизвестных параметров  $\theta$  и параметры фильтра (1.4) в DREM процедуре были заданы такими:

$$(6.1) \quad \varphi^T(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{1}{4}t} \end{bmatrix}; \quad \theta^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}; \quad \alpha_1^f = \beta_1^f = 1.$$

Как следует из выражения (6.1), для регрессора  $\varphi(t)$  не выполняются требования (1.2) и (1.11), необходимые соответственно для асимптотической и экспоненциальной сходимости параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$  при использовании контура оценки (1.8), что в ходе эксперимента должно продемонстрировать эффективность разработанного подхода.

Параметры контура оценки (1.8) были выбраны в соответствии со значениями

$$(6.2) \quad \hat{\theta}^T(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 50.$$

Параметры фильтра (2.1) и контура идентификации (3.1) были выбраны в соответствии со значениями, приведенными в выражении

$$\hat{\theta}^T(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 50; \quad \mu = \frac{1}{8}.$$

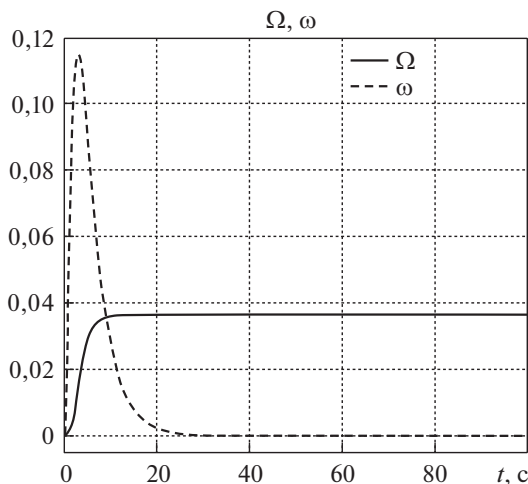


Рис. 1. Переходные процессы по DREM и I-DREM регрессорам  $\omega(t)$  и  $\Omega(t)$ .

Для контура (4.1) использовались начальные значения  $\gamma_1(0)$  и  $\gamma_2(0)$ , совпадающие со значениями для контура (3.1). Коэффициент забывания был принят  $\lambda = 0,1$ .

На рис. 1 изображены переходные процессы по регрессору  $\omega(t)$ , полученному по (1.4)–(1.7) из  $\varphi(t)$ , и фильтрованному регрессору  $\Omega(t)$ , полученному в соответствии с (2.1) из  $\omega(t)$ .

Результаты моделирования, приведенные на рис. 1, полностью подтверждают все аналитические выкладки, полученные в утверждении 3. Благодаря применению разработанной процедуры I-DREM из исходного регрессора  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) действительно можно получить фильтрованный регрессор  $\Omega(t) \notin L_2$ .

На рис. 2 приведены переходные процессы по параметрическим ошибкам  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  при использовании закона оценки (1.8) — рис. 2,а и (3.1) — рис. 2,б.

Из сравнения переходных процессов на рис. 2,а и рис. 2,б следует, что контур оценки (3.1), в отличие от (1.8), обеспечивает экспоненциальную сходимость параметрических ошибок  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$ , что подтверждает выводы, сделанные при доказательстве теоремы 1, и свидетельствует о решении задачи 1. Для контура оценки (3.1) увеличения скорости сходимости ошибок  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  согласно части 2 теоремы 1 и замечанию П.2 (см. Приложение) возможно добиться, увеличивая коэффициенты  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  или уменьшая параметр фильтра  $\mu$ .

На рис. 3,а изображены переходные процессы по коэффициентам усиления  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  при использовании контура оценки (4.1), а также их верхние и нижние оценки (4.2) и предел (4.3). Так как для контуров настройки  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  использовались одинаковые параметры  $\lambda$ ,  $\gamma_1(0)$  и  $\gamma_2(0)$ , то графики для  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$ , как и их верхние и нижние оценки и пределы, совпадают.

Из рис. 3,а следует, что  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  являются  $L_\infty$  ограниченными (4.2) для регрессора (6.1), что было невозможно в схеме (1.12) [15].

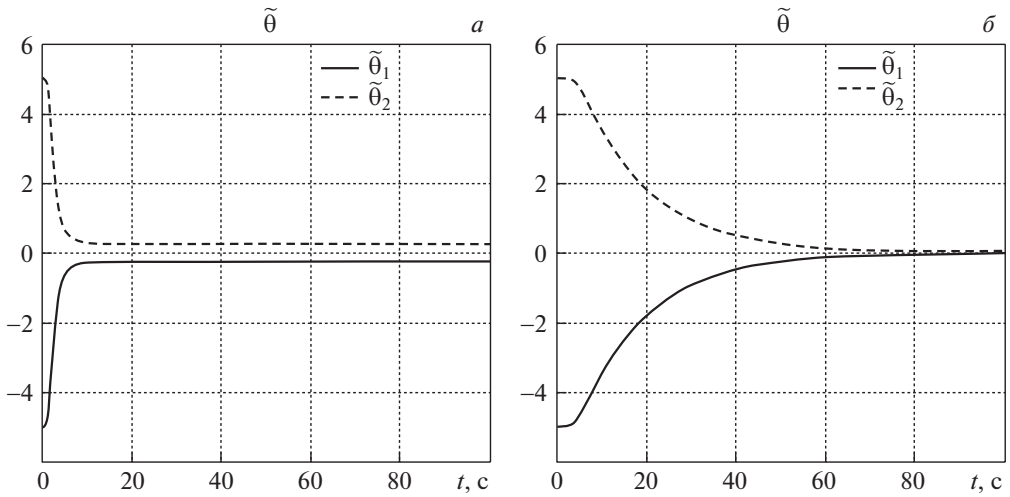


Рис. 2. Переходные процессы по параметрическим ошибкам  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  для законов оценки (1.8) и (3.1).

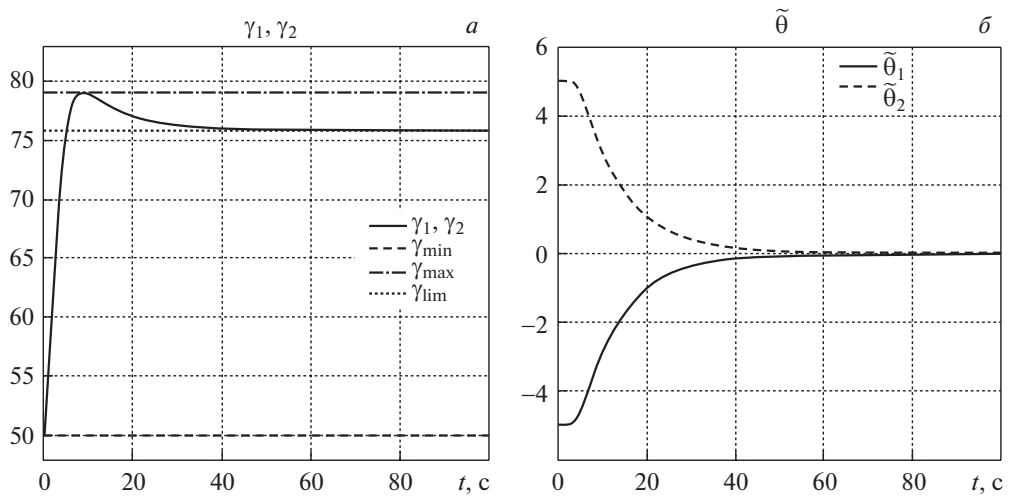


Рис. 3. Переходные процессы по коэффициентам усиления  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (а) и по параметрическим ошибкам  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  для контура (4.1) (б).

На рис. 3,б приведены переходные процессы по параметрическим ошибкам при использовании закона оценки с настраиваемым коэффициентом усиления (4.1).

Из сравнения переходных процессов рис. 2,а и рис. 3,б следует, что контур оценки (4.1), в отличие от (1.8), обеспечивает экспоненциальную сходимость параметрических ошибок  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  и использует настраиваемый коэффициент усиления, что подтверждает выводы, сделанные при доказательстве теоремы 2, и в совокупности с показанной на рис. 3,а ограниченностью  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$

свидетельствует о решении задачи 2. Для контура оценки (4.1) увеличения скорости сходимости ошибок  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  согласно части 4 теоремы 2 и замечанию П.3 (см. Приложение) можно добиться, увеличивая коэффициент  $\lambda$  или уменьшая параметр фильтра  $\mu$ .

## 7. Заключение

В статье для процедуры DREM предложена модификация, ослабляющая требование квадратичной интегрируемости для асимптотической сходимости процесса оценки до требования начального возбуждения регрессора. Кроме того, предложенный подход позволил обеспечить процессу оценки не только асимптотическую, но и экспоненциальную сходимость при выполнении требования начального возбуждения регрессора, что слабее требования постоянного возбуждения в исходной схеме DREM.

Результатом статьи являются контуры идентификации (3.1) и (4.1), которые могут быть использованы во многих задачах теории адаптивного управления, требующих идентификации постоянных параметров линейной регрессии (1.1).

В дальнейших исследованиях планируется ослабить принятое предположение и распространить полученные результаты на интервально заданные параметры регрессии (1.1).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Чтобы осуществить доказательство теоремы 1 с учетом предположения, перепишем уравнение (3.1):

$$(П.1) \quad \dot{\tilde{\theta}}_i = -\gamma_i \Omega^2 \tilde{\theta}_i.$$

Так как  $\text{sign}(-\gamma_i \Omega^2) \leq 0$ , то  $\dot{\tilde{\theta}}_i \leq 0$ , а следовательно,  $\tilde{\theta}_i$  монотонна.

Для доказательства экспоненциальной сходимости ошибки  $\tilde{\theta}_i$  выберем кандидата в функции Ляпунова в виде квадратичной формы

$$(П.2) \quad V_i = 0,5 \tilde{\theta}_i^2.$$

Производная квадратичной формы (П.2) в силу действия уравнения (П.1) имеет вид

$$(П.3) \quad \dot{V}_i = \tilde{\theta}_i \dot{\tilde{\theta}}_i = \tilde{\theta}_i \left[ -\gamma_i \Omega^2 \tilde{\theta}_i \right] = -\gamma_i \Omega^2 \tilde{\theta}_i^2 \leq 0.$$

Найдем наименьшую отрицательную верхнюю границу производной (П.3). Для этого введем момент времени  $T \leq T_0$ , определяющий верхнюю границу наименьшего интервала времени, на котором выполняется  $\omega(t) \in \text{IE}$ . В этом случае условие (1.3) может быть переписано в виде

$$\int_t^T \omega^2(\tau) d\tau \geq \alpha.$$

Тогда  $\forall t \geq T$  верно неравенство

$$\int_{t_0}^t \omega^2(\tau) d\tau > 0.$$

Откуда, так как  $e^{-\mu t} > 0 \forall t < \infty$ , следует, что

$$(П.4) \quad \begin{aligned} \Omega(t) &= \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau > 0, \\ \Omega(t) &\geq \Omega(T) > 0 \quad \forall t \geq T, \end{aligned}$$

где  $\Omega(T)$  — наименьшее  $\forall t$  отличное от нуля значение регрессора  $\Omega(t)$ .

Если справедлива оценка (П.4), то справедлива и оценка

$$(П.5) \quad \Omega^2(t) \geq \Omega^2(T).$$

Тогда верхняя оценка производной (П.3)  $\forall t \geq T$  приобретает вид

$$(П.6) \quad \dot{V}_i \leq -\gamma_i \Omega^2(T) \tilde{\theta}_i^2 = -2\gamma_i \Omega^2(T) (0,5 \tilde{\theta}_i^2) = -\kappa_{\min} V_i.$$

*Замечание П.1.* В силу действия утверждения 3 время  $T$  и величина  $\Omega^2(T)$  на практике могут быть определены в момент времени выполнения равенства

$$(П.7) \quad \Omega(t) = c,$$

где  $c$  выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < c < \mu^{-1} \text{ess sup}_{t \geq t_0} |\omega^2(t)|.$$

Получим  $\forall t \geq T$  решение дифференциального неравенства (П.6) с учетом определения функции Ляпунова (П.2)

$$(П.8) \quad \tilde{\theta}_i \leq \sqrt{2e^{-\kappa_{\min}(t-T)} V_i(T)}.$$

Из уравнения (П.8) следует монотонная экспоненциальная сходимость параметрической ошибки  $\tilde{\theta}_i \forall t \geq T$  со скоростью больше чем  $0,5\kappa_{\min}$ , что и следовало доказать в первой части теоремы 1.

Чтобы доказать вторую часть теоремы 1, определим миноранту для ошибки  $\tilde{\theta}_i$ . В силу свойств регрессора  $\Omega(t)$ , доказанных в утверждении 3, а также определения  $\Omega_{\max}$  в (2.8) нижняя оценка производной функции Ляпунова примет вид

$$(П.9) \quad \dot{V}_i \geq -\gamma_i \Omega_{\max}^2 \tilde{\theta}_i^2 = -2\gamma_i \Omega_{\max}^2 (0,5 \tilde{\theta}_i^2) = -\kappa_{\max} V_i.$$

Тогда с учетом (П.8) для  $\tilde{\theta}_i$  справедливо неравенство

$$(П.10) \quad \sqrt{2e^{-\kappa_{\max}(t-T)}V_i(T)} \leq \tilde{\theta}_i \leq \sqrt{2e^{-\kappa_{\min}(t-T)}V_i(T)}.$$

Откуда по определению  $\kappa_{\min}$  и  $\kappa_{\max}$  следует возможность их увеличения с помощью выбора коэффициента усиления  $\gamma_i$ , что и требовалось доказать во второй части теоремы 1. Теорема 1 доказана.

*Замечание П.2.* Поскольку  $\Omega(T)$  и  $\Omega_{\max}$  зависят от постоянной фильтра  $\mu$  (см. (2.8), (П.4)), то увеличить  $\kappa_{\min}$  и  $\kappa_{\max}$  можно и с помощью выбора (уменьшения) значения параметра  $\mu$ .

*Доказательство теоремы 2.* Чтобы доказать первую часть теоремы 2, введем вспомогательное равенство

$$(П.11) \quad \frac{d}{dt}1 = \frac{d}{dt}[\gamma_i^{-1}\gamma_i] = \gamma_i \frac{d\gamma_i^{-1}}{dt} + \gamma_i^{-1} \frac{d\gamma_i}{dt} = 0.$$

Откуда, подставляя из (4.1) закон настройки  $\gamma_i(t)$ , имеем закон настройки  $\gamma_i^{-1}(t)$ :

$$(П.12) \quad \frac{d\gamma_i^{-1}}{dt} = -\gamma_i^{-2} \frac{d\gamma_i}{dt} = \Omega^2 - \lambda\gamma_i^{-1}.$$

Решим дифференциальное уравнение (П.12):

$$(П.13) \quad \gamma_i^{-1}(t) = \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \Omega^2(\tau) d\tau.$$

По доказанному в теореме 1  $\exists T > t_0$ , такая что для  $\Omega(t)$  верна оценка снизу (П.4), поэтому ограниченность  $\gamma_i^{-1}(t)$  удобно рассматривать на интервалах  $0 \leq t < T$  и  $t \geq T$ . Тогда  $\forall t < T$  полагаем  $\Omega(t) = 0$  и из (П.13) получаем неравенство на интервале  $t < T$  для  $\gamma_i^{-1}(t)$ :

$$(П.14) \quad \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T} \leq \gamma_i^{-1}(t) \leq \gamma_i^{-1}(0).$$

Перейдем к рассмотрению интервала  $t \geq T$ . Поскольку первое слагаемое функции (П.13) строго убывающее  $\forall t > 0$ , а второе, по доказанным в утверждении 3 свойствам функции  $\Omega(t)$ , — возрастающее  $\forall t \geq T$ , то минимум функции их суммы (П.13) будет достигнут при равенстве нулю суммы их производных при  $t < \infty$ . Тогда  $\forall t \geq T$  будет верна оценка снизу

$$(П.15) \quad \begin{aligned} \gamma_i^{-1}(t) &\geq \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T_{extr.\gamma_i}} + \int_0^{T_{extr.\gamma_i}} e^{-\lambda(T_{extr.\gamma_i}-\tau)} \Omega^2(\tau) d\tau \geq \\ &\geq \underbrace{\gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T_{extr.\gamma_i}}}_{\gamma_i^{-1}(T_{extr.\gamma_i})}, \end{aligned}$$

где  $T \leq T_{extr.\gamma_i} < \infty$  — априорно неизвестный момент времени равенства модулей производных слагаемых в функции (П.13).

Также из свойств функции  $\Omega(t)$  и по теореме о среднем следует  $\forall t \geq T$  оценка сверху для  $\gamma_i^{-1}(t)$ :

$$(П.16) \quad \gamma_i^{-1}(t) \leq \Omega_{\max}^2 \int_T^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \Omega_{\max}^2 \frac{1 - e^{-\lambda(t-T)}}{\lambda} \leq \frac{\Omega_{\max}^2}{\lambda}.$$

Объединяя оценки (П.14) и (П.15)–(П.16), получим глобальные оценки для  $\gamma_i^{-1}(t)$ :

$$(П.17) \quad \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{extr.\gamma_i}) \right\} \leq \\ \leq \gamma_i^{-1}(t) \leq \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\max}^2 \right\}.$$

Откуда можно перейти к оценкам для  $\gamma_i(t)$ :

$$(П.18) \quad \underbrace{\min \left\{ \gamma_i(0), \lambda \Omega_{\max}^{-2} \right\}}_{\gamma_i. \min} \leq \gamma_i(t) \leq \underbrace{\max \left\{ \gamma_i(0) e^{\lambda T}, \gamma_i(T_{extr.\gamma_i}) \right\}}_{\gamma_i. \max}.$$

Что и требовалось доказать в первой части теоремы 2.

Чтобы доказать существование предела (4.3) для уравнения настройки коэффициента усиления  $\gamma_i(t)$ , введем кандидата в функции Ляпунова

$$(П.19) \quad V_i = 0,5\gamma_i^2.$$

Производная функции (П.19) примет вид

$$(П.20) \quad \dot{V}_i = \gamma_i \dot{\gamma}_i = 2 \cdot 0,5 \cdot \lambda \gamma_i^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^{0,5} \cdot 0,5^{-0,5} \cdot \gamma_i^3 \Omega^2 = \\ = 2\lambda V_i - 2 \cdot 0,5^{-0,5} \cdot V_i \sqrt{V_i} \Omega^2 = -2V_i \left[ \sqrt{\frac{V_i}{0,5}} \Omega^2 - \lambda \right].$$

При  $t \rightarrow \infty$ , учитывая (2.8), производная (П.20) примет вид

$$(П.21) \quad \dot{V}_i = -2V_i \left[ \sqrt{\frac{V_i}{0,5}} \Omega_{\max}^2 - \lambda \right].$$

Как следует из выражения (П.21), производная квадратичной формы (П.19) при  $t \rightarrow \infty$  отрицательна вне множества

$$(П.22) \quad B_r = \left\{ \gamma_i \in \mathbb{R} : \gamma_i \leq \lambda \Omega_{\max}^{-2} = \partial B_r \right\}.$$

Так как производная квадратичной формы (П.19) отрицательна вне множества  $B_r$ , а внутри  $B_r$  — положительна, то согласно теореме ЛаСалля [16]



множество  $\partial B_r$ , определяющее границу множества  $B_r$ , является притягивающим ( $\partial B_r = \gamma_{\text{lim}}$ ) для траекторий  $\gamma_i(t)$ . Откуда следует выполнение предельного равенства (4.3), что и требовалось доказать во второй части теоремы 2.

Для доказательства третьей части теоремы 2 выберем кандидата в функции Ляпунова

$$(П.23) \quad \begin{aligned} V_i &= \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2, \\ \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} \tilde{\theta}_i^2 &\leq \\ &\leq \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2 \leq \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\} \tilde{\theta}_i^2. \end{aligned}$$

Найдем производную функции (П.23):

$$(П.24) \quad \begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{\gamma}_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2 + 2\gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i \dot{\tilde{\theta}}_i = [\Omega^2 - \lambda \gamma_i^{-1}] \tilde{\theta}_i^2 + 2\gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i [-\gamma_i \Omega^2 \tilde{\theta}_i] = \\ &= -[\lambda \gamma_i^{-1} + \Omega^2] \tilde{\theta}_i^2. \end{aligned}$$

С учетом выражений (П.5) и (П.18) получим  $\forall t \geq T$  оценку сверху производной (П.24)

$$(П.25) \quad \begin{aligned} \dot{V}_i &\leq - \left[ \lambda \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} + \Omega^2(T) \right] \tilde{\theta}_i^2 \leq \\ &\leq - \frac{\lambda \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} + \Omega^2(T)}{\max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\}} \times \\ &\quad \times \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\} \tilde{\theta}_i^2 \leq -\eta_{\text{min}} V_i. \end{aligned}$$

Решим  $\forall t \geq T$  дифференциальное неравенство (П.25), подставив при этом в левую часть полученного решения нижнюю оценку функции Ляпунова

$$(П.26) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}_i &\leq \sqrt{\max \left\{ \gamma_i(0) e^{\lambda T}, \gamma_i(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} e^{-\eta_{\text{min}}(t-T)} V_i(T)} = \\ &= \sqrt{\gamma_{i.\text{max}} e^{-\eta_{\text{min}}(t-T)} V_i(T)}. \end{aligned}$$

Из уравнения (П.25) следует монотонная экспоненциальная сходимость параметрической ошибки  $\tilde{\theta}_i \forall t \geq T$  со скоростью больше чем  $0,5\eta_{\text{min}}$ , что и следовало доказать в третьей части теоремы 2.

Для доказательства четвертой части теоремы 2, в силу свойств регрессора  $\Omega(t)$ , доказанных в утверждении 3, и определения  $\Omega_{\text{max}}$  в (2.8), получим нижнюю оценку производной (П.23):

$$(П.27) \quad \begin{aligned} \dot{V}_i &\geq - \left[ \lambda \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\} + \Omega_{\text{max}}^2 \right] \tilde{\theta}_i^2 = \\ &= - \frac{\lambda \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\} + \Omega_{\text{max}}^2}{\min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\}} \times \\ &\quad \times \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} \tilde{\theta}_i^2 = -\eta_{\text{max}} V_i. \end{aligned}$$

Решим  $\forall t \geq T$  дифференциальное неравенство (П.26), подставив при этом в левую часть полученного решения верхнюю оценку функции Ляпунова

$$(П.28) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}_i &\geq \sqrt{\min \{ \gamma_i(t_0), \lambda \Omega_{\max}^{-2} \} e^{-\eta_{\max}(t-T)} V_i(T)} = \\ &= \sqrt{\gamma_{i.\min} e^{-\eta_{\max}(t-T)} V_i(T)}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (П.26) для  $\tilde{\theta}_i$  справедливо неравенство

$$(П.29) \quad \sqrt{\gamma_{i.\min} e^{-\eta_{\max}(t-T)} V_i(T)} \leq \tilde{\theta}_i \leq \sqrt{\gamma_{i.\max} e^{-\eta_{\min}(t-T)} V_i(T)}.$$

Откуда по определению  $\eta_{\min}$  и  $\eta_{\max}$  следует возможность их увеличения с помощью выбора коэффициента  $\lambda$ , что и требовалось доказать в четвертой части теоремы 2. Теорема 2 доказана.

*Замечание П.3.* Поскольку  $\Omega(T)$ ,  $\Omega_{\max}$  и  $\gamma_i(T_{extr.\gamma_i})$  зависят (см. (2.8), (П.4), (П.15)) от постоянной фильтра  $\mu$ , то увеличить  $\eta_{\min}$  и  $\eta_{\max}$  можно и с помощью выбора (уменьшения) значения параметра  $\mu$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chowdhary G., Yucelen T., Muhlegg M., Johnson E.* Concurrent Learning Adaptive Control of Linear Systems with Exponentially Convergent Bounds // *Int. J. Adaptive Control Signal Process.* 2013. V. 27. No. 4. P. 280–301.
2. *Adetola V., Guay M.* Finite-Time Parameter Estimation in Adaptive Control of Nonlinear Systems // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2008. V. 53. No. 3. P. 807–811.
3. *Wang J., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Kolyubin S.A.* A Method to Provide Conditions for Sustained Excitation // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 2. P. 258–264.  
*Ванг Ц., Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А., Колубин С.А.* Метод обеспечения условий незатухающего возбуждения // *АиТ.* 2018. № 2. С. 71–79.
4. *Roy S.B., Bhasin S., Kar I.N.* Combined MRAC for Unknown MIMO LTI Systems with Parameter Convergence // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2017. V. 63. No. 1. P. 283–290.
5. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2016. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.
6. *Aranovskiy S., Belov A., Ortega R., Barabanov N., Bobtsov A.* Parameter Identification of Linear Time-Invariant Systems Using Dynamic Regressor Extension and Mixing // *Int. J. Adaptive Control Signal Process.* 2019. V. 33. No. 6. P. 1016–1030.
7. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On Modified Parameter Estimators for Identification and Adaptive Control. A Unified Framework and Some New Schemes // *Annual Reviews in Control.* 2020. V. 50. P. 1–16.
8. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Robust Method to Provide Exponential Convergence of Model Parameters Solving LTI Plant Identification Problem // *arXiv preprint arXiv:2009.14496.* 2020. P. 1–18.
9. *Gerasimov D., Ortega R., Nikiforov V.* Adaptive Control of Multivariable Systems with Reduced Knowledge of High Frequency Gain: Application of Dynamic Regressor Extension and Mixing Estimators. *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. No. 15. P. 886–890.

10. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S.* Adaptive State Observers Using Dynamic Regressor Extension and Mixing // *Syst. & Control Lett.* 2019. V. 133. No. 11. P. 1–8.
11. *Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A., Astolfi A., Bobtsov A.* New Results on Parameter Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing: Continuous and Discrete-Time Cases // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2020. P. 1–8.
12. *Lion P.M.* Rapid Identification of Linear and Nonlinear Systems // *AIAA J.* 1967. V. 5. No. 10. P. 1835–1842.
13. *Kreisselmeier G.* Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
14. *Yi B., Ortega R.* Conditions for Convergence of Dynamic Regressor Extension and Mixing Parameter Estimator Using LTI Filters // *arXiv preprint arXiv:2007.15224.* 2020. P. 1–6.
15. *Korotina M., Aranovskiy S., Ushirobira R., Vedyakov A.* On Parameter Tuning and Convergence Properties of the DREM Procedure // *ECC 18th Europ. Control Conf.* 2020. P. 1–7.
16. *Khalil H.K., Grizzle J.W.* Nonlinear systems. N.J.: Prentice-Hall, 2002.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.*

Поступила в редакцию 28.10.2020

После доработки 09.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021