*Автоматика и телемеханика, № 8, 2021*

*Линейные системы*

© 2021 г. **Д.В. БАЛАНДИН, д-р физ.-мат. наук (dbalandin@yandex.ru)**
**(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),**
**Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (biryukovrs@gmail.com),**
**М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)**
**(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)**

# МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ МИНИМАКСНЫЕ ЗАДАЧИ: ЛОКАЛИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО И СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ[1]

Рассматриваются задачи многокритериальной минимаксной оптимизации с критериями вида максимумов функционалов, к которым относятся индуцированные нормы линейных операторов, отображающих входы системы и/или ее начальное состояние в выходы. Показано, что замена трудновыполнимой минимизации линейной свертки таких критериев на минимизацию максимума линейной свертки соответствующих им функционалов приводит к субоптимальным решениям с оценкой степени субоптимальности по отношению к оптимальным по Парето решениям. Этот подход применяется к синтезу субоптимальных по Парето законов управления линейными нестационарными на конечном горизонте и стационарными на бесконечном горизонте непрерывными и дискретными системами при неопределенных начальных состояниях и/или возмущениях. Приводятся результаты численного моделирования.

*Ключевые слова*: многокритериальное управление, множество Парето, обобщенная $H_\infty$ норма, линейные матричные неравенства.

**DOI:** 10.31857/S000523102108002X

## 1. Введение

Реальные задачи управления всегда многокритериальны. Нахождение множества Парето, а следовательно, и оптимальных по Парето решений, т.е. неулучшаемых одновременно для всех критериев, представляет собой сложную задачу. Известно, что замена многокритериальной задачи на однокритериальную с критерием в виде линейной комбинации исходных критериев обеспечивает в общем случае нахождение некоторого подмножества множества Парето (Парето-оптимального фронта). Но и такая замена в многокритериальных минимаксных задачах, в которых отдельные критерии являются максимумами некоторых функционалов по неопределенным переменным

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00289), Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0055) и Научно-образовательного математического центра "Математика технологий будущего" (соглашение № 075-02-2021-1394).

или функциям, приводит к трудной задаче оптимизации линейной комбинации максимумов некоторых функционалов. Можно привести лишь несколько многокритериальных задач управления, в которых удалось описать оптимальные по Парето решения: линейно-квадратичные гауссовские управления [1] и $H_2$ оптимальные управления [2] на основе $Q$-параметризации стабилизирующих регуляторов линейных стационарных систем на бесконечном интервале времени, а также обобщенные $H_2$ оптимальные управления [3, 4] для линейных нестационарных систем на конечном горизонте и стационарных систем на бесконечном горизонте.

В [5] для задач многокритериальной оптимизации с критериями в виде $H_\infty$ и $\gamma_0$ норм в детерминированной и стохастической постановках были найдены субоптимальные по Парето законы управления, относительные потери которых по сравнению с оптимальными по Парето не превышают $1 - \sqrt{N}/N$, где $N$ – число критериев. В многокритериальных задачах управления с критериями, включающими $H_\infty$ норму, удавалось синтезировать субоптимальные управления, как правило, только при дополнительном ограничении типа равенства матриц функций Ляпунова [6–11], которое неявно присутствует и в концепции так называемого смешанного $H_2/H_\infty$ управления, или типа равенства вспомогательных матричных переменных [12, 13], налагаемых на матричные уравнения или линейные матричные неравенства, характеризующие каждый из критериев. В [14] для синтеза двукритериального управления применялся подход, состоящий в получении конечномерных $Q$-аппроксимаций оптимальных по Парето регуляторов. При этом до сих пор остается без ответа вопрос о том, в какой мере значения отдельных критериев при многокритериальных законах управления, синтезируемых с учетом дополнительных ограничений или на основе аппроксимаций, превышают соответствующие значения критериев при оптимальных по Парето законах управления.

Результаты, полученные в данной статье, в каком-то смысле проливают свет на эту проблему. А именно показано, как в многокритериальных минимаксных задачах, к которым, в частности, относятся и задачи с критериями типа обобщенной $H_\infty$ нормы, можно оценивать границы области критериального пространства, в которой расположены точки, отвечающие минимумам линейной свертки критериев и, следовательно, принадлежащие множеству Парето. При этом определяются субоптимальные по Парето решения многокритериальной задачи, которым соответствует одна из получаемых границ, и оценивается степень их субоптимальности. В двукритериальных задачах эти границы суть верхняя и нижняя кривые, между которыми находится указанное множество. Наличие этих границ позволяет оценить, в какой мере значения отдельных критериев при многокритериальных законах управления, получаемых при дополнительных предположениях и ограничениях, отличаются от значений критериев при оптимальных по Парето управлениях. Далее в статье получены характеризации обобщенной $H_\infty$ нормы в терминах линейных матричных неравенств для линейных непрерывных и дискретных нестационарных систем на конечном горизонте и стационарных систем на бесконечном горизонте и синтезированы субоптимальные по Парето управления в многокритериальных задачах с обобщенными $H_\infty$ нормами в качестве критериев. Приводятся иллюстративные примеры, в которых для различных двукритериальных задач управления находятся субоптимальные решения и строятся границы области, содержащей точки множества Парето.

## 2. Двусторонние границы области, содержащей подмножество Парето-фронта

Задача состоит в нахождении оптимальных по Парето решений в многокритериальной задаче минимизации с критериями $J_i(\Theta)$, $i = 1, \ldots, N$, каждый из которых представляет собой максимум некоторой неотрицательной функции $F_i(\Theta, \omega) \geqslant 0$ по отношению к некоторым переменным $\omega$ из множества $\Omega$, т.е.

$$J_i(\Theta) = \sup_{\omega \in \Omega} F_i(\Theta, \omega), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.1}$$

Напомним, что решение $\Theta_P$ называется оптимальным по Парето, если не существует такого решения $\Theta$, что выполняются неравенства $J_i(\Theta) \leqslant J_i(\Theta_P)$, $i = 1, \ldots, N$, в которых по меньшей мере одно является строгим. Множество точек в $N$-мерном критериальном пространстве, соответствующее всем таким решениям, называется множеством Парето

$$\mathcal{P} = \left\{J(\Theta_P) = (J_1(\Theta_P), \ldots, J_N(\Theta_P))\right\}.$$

Оптимальные по Парето решения — это множество неулучшаемых решений в том смысле, что для каждого из них не существует решения, при котором значения всех критериев были бы не больше, чем при данном, а значение хотя бы одного критерия было бы строго меньше.

Самым распространенным методом нахождения оптимальных по Парето решений многокритериальной задачи является метод скаляризации, т.е. выбора единого критерия в виде, например, линейной свертки этих критериев

$$J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta), \quad \alpha \in \mathcal{S} = \left\{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) : \alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1\right\}.$$

Назовем линейную свертку $J_\alpha(\Theta)$ оптимальной целевой функцией. Как известно [15], параметры $\Theta_\alpha$, для которых выполняется

$$\min_{\Theta} J_\alpha(\Theta) = J_\alpha(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha),$$

являются оптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Обозначим соответствующее им множество точек в критериальном пространстве через

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \left\{J(\Theta_\alpha) = (J_1(\Theta_\alpha), \ldots, J_N(\Theta_\alpha)) \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{S}\right\}.$$

В общем случае ими может не исчерпываться все множество Парето, т.е. $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}$.

Непосредственное нахождение параметров $\Theta_\alpha$ для многокритериальных минимаксных задач представляется затруднительным, так как оптимальная

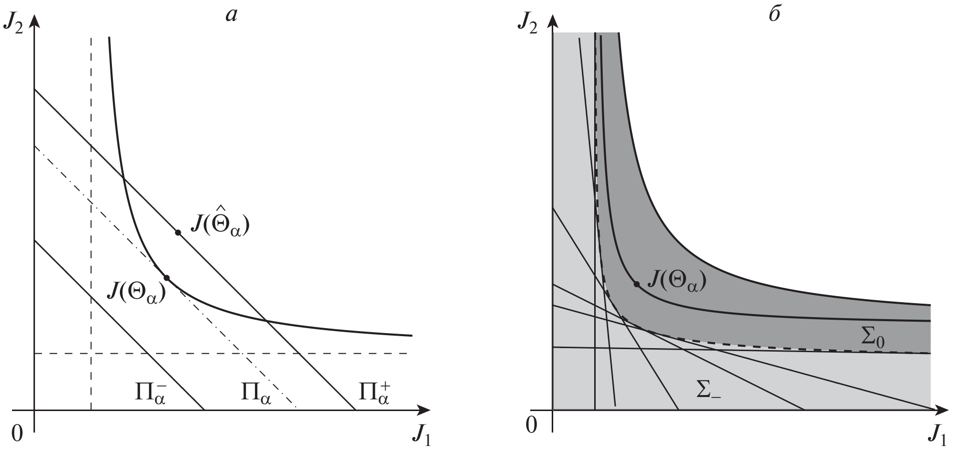


Рис. 1. Построение области $\Sigma_0$, содержащей точки множества Парето.

целевая функция для таких задач оказывается линейной комбинацией максимумов разных функций. В связи с этим оценим ее снизу, заменяя сумму максимумов на максимум суммы

$$(2.2)\quad J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sup_{\omega\in\Omega} F_i(\Theta,\omega) \geqslant \sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i F_i(\Theta,\omega) = \sup_{\omega\in\Omega} F_\alpha(\Theta,\omega) = \widehat{J}_\alpha(\Theta).$$

Назовем $\widehat{J}_\alpha(\Theta) = \sup_{\omega\in\Omega} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i F_i(\Theta,\omega)$ субоптимальной целевой функцией, а параметры $\widehat{\Theta}_\alpha$, оптимальные по отношению к $\widehat{J}_\alpha(\Theta)$, при которых

$$(2.3)\qquad \min_{\Theta} \widehat{J}_\alpha(\Theta) = \widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha) = \mu_-(\alpha),$$

назовем субоптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Покажем, что для рассматриваемых задач можно указать границы области критериального пространства, в которой находится подмножество $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, и тем самым оценить степень субоптимальности решений $\widehat{\Theta}_\alpha$.

Равенство

$$J_\alpha(\Theta_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha)$$

означает, что в критериальном пространстве точка $J(\Theta_\alpha)$ принадлежит гиперплоскости $\Pi_\alpha$ с вектором нормали $n_\alpha^{\mathrm{T}} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$, уравнение которой $n_\alpha^{\mathrm{T}} J = \mu(\alpha)$ (см. рис. 1,*а*). Это плоскость отстоит от начала координат на расстояние $d_\alpha = |n_\alpha|^{-1}\mu(\alpha)$. Так как

$$(2.4)\qquad \mu_+(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\widehat{\Theta}_\alpha) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha),$$

то субоптимальным по Парето решениям $\widehat{\Theta}_\alpha$ соответствует точка $J(\widehat{\Theta}_\alpha)$, принадлежащая гиперплоскости $\Pi_\alpha^+$, уравнение которой $n_\alpha^{\mathrm{T}} J = \mu_+(\alpha)$. Эта плоскость отстоит от начала координат на расстояние $d_\alpha^+ = |n_\alpha|^{-1}\mu_+(\alpha) \geqslant \geqslant d_\alpha$.

Из справедливости неравенств

$$\mu(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) \geqslant \widehat{J}_\alpha(\Theta_\alpha) \geqslant \widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha) = \mu_-(\alpha) \tag{2.5}$$

следует, что точка $J(\Theta_\alpha)$ удалена от начала координат не меньше, чем на $d_\alpha^- = |n_\alpha|^{-1}\mu_-(\alpha)$ – расстояние от плоскости $\Pi_\alpha^-$ с уравнением $n_\alpha^{\mathrm{T}} J = \mu_-(\alpha)$ до начала координат, т.е. $d_\alpha \geqslant d_\alpha^-$. Таким образом, точка $J(\Theta_\alpha) \in \Pi_\alpha$ находится между двумя параллельными гиперплоскостями $\Pi_\alpha^-$ и $\Pi_\alpha^+$.

Определим в пространстве критериев для любого набора $\alpha \in \mathcal{S}$ следующие множества:

$$\Sigma_\alpha^- = \left\{ (J_1, \ldots, J_N) : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i < \widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha), \quad J_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N \right\},$$

$$\Sigma_\alpha^+ = \left\{ (J_1, \ldots, J_N) : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\widehat{\Theta}_\alpha), \quad J_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N \right\}, \tag{2.6}$$

$$\Sigma_- = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} \Sigma_\alpha^-, \quad \Sigma_+ = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}} \Sigma_\alpha^+, \quad \Sigma_0 = \Sigma_+ \backslash \Sigma_-.$$

Докажем, что точки $J(\Theta_\alpha) \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{P}$ принадлежат множеству $\Sigma_0$ (см. рис. 1,*б*).

Действительно, так как

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\widehat{\Theta}_\alpha) = \mu_+(\alpha),$$

то $J(\Theta_\alpha) \in \Sigma_+$. Покажем, что для произвольного фиксированного набора $\widehat{\alpha} \in \mathcal{S}$ точка $J(\Theta_{\widehat{\alpha}}) \notin \Sigma_-$, т.е. $J(\Theta_{\widehat{\alpha}}) \notin \Sigma_\alpha^-$ для любого $\alpha \in \mathcal{S}$. Из (2.5) следует, что $J(\Theta_{\widehat{\alpha}}) \notin \Sigma_{\widehat{\alpha}}^-$. Предположим, что для некоторого $\alpha \neq \widehat{\alpha}$ выполнено $J(\Theta_{\widehat{\alpha}}) \in \Sigma_\alpha^-$, т.е. $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_{\widehat{\alpha}}) < \mu_-(\alpha)$. Так как $\widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha) \leqslant \widehat{J}_\alpha(\Theta_\alpha) \leqslant \leqslant J_\alpha(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha)$, то

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_{\widehat{\alpha}}) < \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha),$$

т.е. $J_\alpha(\Theta_{\widehat{\alpha}}) < J_\alpha(\Theta_\alpha)$. Это противоречит тому, что $\Theta_\alpha$ обеспечивает минимум линейной свертки $J_\alpha(\Theta)$. Таким образом, $\Theta_\alpha \in \Sigma_0$, и можно сформулировать следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.1. *Множество точек $\mathcal{P}_L \subseteq \mathcal{P}$ критериального пространства, которые соответствуют оптимальным по Парето параметрам $\Theta_\alpha$, минимизирующим оптимальную целевую функцию $J_\alpha(\Theta) =$*

$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sup_{\omega\in\Omega} F_i(\Theta,\omega)$, *принадлежит множеству* $\Sigma_0$, *которое определено в* (2.2), (2.3), (2.6).

В двукритериальных задачах нижней и верхней границами области, которой принадлежит множество $\mathcal{P}_L$ в пространстве критериев $(J_1, J_2)$, являются "огибающие" семейства прямых

$$\alpha J_1 + (1-\alpha) J_2 = \widehat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha),$$
$$\alpha J_1 + (1-\alpha) J_2 = \alpha J_1(\widehat{\Theta}_\alpha) + (1-\alpha) J_2(\widehat{\Theta}_\alpha) \quad \forall\, \alpha \in (0,1).$$

Заметим, что значениям $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ отвечают прямые $J_1 = \min_\Theta J_1(\Theta)$ и $J_2 = \min_\Theta J_2(\Theta)$ соответственно.

Для количественной оценки близости значений функционалов при найденных субоптимальных решениях $\widehat{\Theta}_\alpha$ и неизвестных оптимальных решениях $\Theta_\alpha$ введем показатель субоптимальности

$$\eta = \max_{\alpha\in\mathcal{S}} \frac{d_\alpha^+ - d_\alpha^-}{d_\alpha^+} = \max_{\alpha\in\mathcal{S}} \frac{\mu_+(\alpha) - \mu_-(\alpha)}{\mu_+(\alpha)},$$

определяемый по относительной величине максимального "расстояния" между границами множества $\Sigma_0$. Чем ближе $\eta$ к нулю, тем точнее оценка множества Парето и тем ближе друг к другу значения соответствующих критериев при субоптимальных и оптимальных решениях.

Заметим, что приведенный в данном разделе анализ и полученный результат без всяких изменений переносятся на случай, когда критериями являются функционалы, а "переменными" $\omega$ и решениями $\Theta$ – функции.

## 3. Обобщенная $H_\infty$ норма

В этом разделе рассматриваются характеристики системы, которые далее будут выбираться в качестве отдельных критериев при синтезе управления. Пусть линейная нестационарная система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \partial x &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ z(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad t \in [t_0,\, t_f], \end{aligned} \tag{3.1}$$

в которых $\partial$ обозначает оператор дифференцирования для системы в непрерывном времени или оператор сдвига, т.е. $\partial x(t) = x(t+1)$, для системы в дискретном времени; $x \in \mathrm{R}^{n_x}$ – состояние, $v \in \mathrm{R}^{n_v}$ – возмущение и $z \in \mathrm{R}^{n_z}$ – целевой выход. Обобщенной $H_\infty$ нормой системы (3.1) на конечном интервале $[t_0, t_f]$ от входа $v$ к выходу $z$ при неопределенном начальном состоянии для заданных весовых матриц начального состояния $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ и терминального состояния $S = S^{\mathrm{T}} \geqslant 0$ называется квадратный корень из максимального значения интегрального показателя выхода с учетом терминального состояния системы, нормированного суммой квадратичной формы начального состояния и квадрата $L_2$-нормы возмущения для непрерывной системы или $l_2$-нормы возмущения для дискретной системы, т.е.

$$\gamma_{\infty,\,0} = \sup_{x_0,\,v} \left( \frac{\|z\|^2_{[t_0,\,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f) S x(t_f)}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,\,t_f]}} \right)^{1/2}, \tag{3.2}$$

где супремум берется по всем начальным состояниям $x(t_0) = x_0$ и всем $v \in L_2$ или $v \in l_2$, одновременно не обращающимся в ноль. Здесь для систем в непрерывном или дискретном времени используются обозначения

$$\|\xi\|^2_{[t_0,\,t_f]} = \int\limits_{t_0}^{t_f} |\xi(t)|^2 dt, \quad \|\xi\|^2_{[t_0,\,t_f]} = \sum_{t=t_0}^{t_f-1} |\xi(t)|^2.$$

При $S = 0$ в обобщенной $H_\infty$ норме терминальное состояние не учитывается.

Эта характеристика, которая для систем в непрерывном времени была введена в [16] под названием "$H_\infty$ norm with transients", а для систем в дискретном времени – в [17], содержит в себе как частные случаи многие критерии, применяемые при синтезе управления. Так, при отсутствии внешнего возмущения, т.е. при $v(t) \equiv 0$, этот показатель принимает вид так называемой $\gamma_0$ нормы

$$\gamma_0 = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|_{[t_0,\,t_f)}}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0\right)^{1/2}}$$

и характеризует "наихудшее" значение квадратичного функционала на траекториях системы при начальном состоянии, принадлежащем эллипсоиду $x^{\mathrm{T}} R^{-1} x \leqslant 1$. Когда начальное состояние нулевое, обобщенная $H_\infty$ норма переходит в стандартную $H_\infty$ норму

$$\gamma_\infty = \sup_{v \neq 0} \frac{\left(\|z\|^2_{[t_0,\,t_f)} + x^{\mathrm{T}}(t_f) S x(t_f)\right)^{1/2}}{\|v\|_{[t_0,\,t_f)}}.$$

В частном случае при $C(t) \equiv 0$, $D(t) \equiv 0$ в (3.1) обобщенная $H_\infty$ норма характеризует так называемое максимальное уклонение выхода $S^{1/2}x(t)$ в конечный момент времени, определяемое как

$$\gamma_{v,\,0} = \sup_{x_0,\,v} \frac{|S^{1/2} x(t_f)|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,\,t_f]}\right)^{1/2}}. \tag{3.3}$$

Все эти показатели являются индуцированными нормами соответствующих линейных операторов, порождаемых системой и отображающих начальное состояние и/или возмущение в выход и/или терминальное состояние, и с соответствующими скалярными произведениями в линейных пространствах.

В [16] было установлено, что для нахождения обобщенной $H_\infty$ нормы линейной непрерывной нестационарной системы на конечном горизонте требуется найти решение дифференциального матричного уравнения Риккати, удовлетворяющее определенным начальным и конечным условиям. В следующей теореме, доказательство которой приведено в Приложении, показано, что обобщенная $H_\infty$ норма на конечном горизонте в непрерывном и дискретном случаях может быть вычислена как решение задачи оптимизации линейной функции при ограничениях, заданных дифференциальными или разностными линейными матричными неравенствами.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняется неравенство*

$$\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}(t)D(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \tag{3.4}$$

*Обобщенная $H_\infty$ норма системы* (3.1) *удовлетворяет неравенству $\gamma_{\infty,0} < \gamma$ тогда и только тогда, когда дифференциальные линейные матричные неравенства*

$$\begin{pmatrix} -\dot{Y}(t) + Y(t)A^{\mathrm{T}}(t) + A(t)Y(t) & * & * \\ B^{\mathrm{T}}(t) & -I & * \\ C(t)Y(t) & D(t) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leqslant 0, \quad t \in [t_0,\, t_f], \tag{3.5}$$

*для непрерывной системы или линейные матричные неравенства*

$$\begin{pmatrix} -Y(t+1) & * & * & * \\ Y(t)A^{\mathrm{T}}(t) & -Y(t) & * & * \\ B^{\mathrm{T}}(t) & 0 & -I & * \\ 0 & C(t)Y(t) & D(t) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leqslant 0, \quad t = t_0, \ldots, t_f - 1, \tag{3.6}$$

*для дискретной системы, а также равенство*

$$Y(t_0) = R \tag{3.7}$$

*и линейное матричное неравенство*

$$\begin{pmatrix} Y(t_f) & * \\ S^{1/2}Y(t_f) & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0 \tag{3.8}$$

*имеют решения относительно неизвестных $Y(t) > 0$ и $\gamma^2$.*

Для вычисления обобщенной $H_\infty$ нормы предварительно проводится дискретизация соответствующего дифференциального линейного матричного неравенства, а затем решается стандартная задача полуопределенного программирования.

Для устойчивого стационарного объекта вида (3.1), в котором $A(t) = A$, $B(t) = B$, $C(t) = C$, $D(t) = D$ – заданные постоянные матрицы и все собственные значения матрицы $A$ расположены для системы в непрерывном времени строго слева от мнимой оси, а для системы в дискретном времени — строго внутри единичного круга комплексной плоскости, обобщенная $H_\infty$ норма, стандартная $H_\infty$ норма (т.е. при нулевых начальных условиях) и $\gamma_0$ норма на бесконечном интервале определяются как

$$\gamma^s_{\infty,\,0} = \sup_{x_0,\, v} \frac{\|z\|_{[0,\infty)}}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[0,\infty)}\right)^{1/2}}, \quad \gamma^s_\infty = \sup_{v \neq 0} \frac{\|z\|_{[0,\infty)}}{\|v\|_{[0,\infty)}},$$

$$\gamma^s_0 = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|_{[0,\infty)}}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0\right)^{1/2}},$$

где верхний индекс $s$ указывает на стационарность системы.

Т е о р е м а 3.2. *Обобщенная $H_\infty$ норма устойчивой стационарной системы (3.1) на бесконечном интервале времени удовлетворяет неравенству $\gamma^s_{\infty,0} < \gamma$ тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства*

$$\begin{pmatrix} YA^{\mathrm T} + AY & * & * \\ B^{\mathrm T} & -I & * \\ CY & D & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0, \quad Y > R, \tag{3.9}$$

*для системы в непрерывном времени* [18] *или*

$$\begin{pmatrix} -Y & * & * & * \\ YA^{\mathrm T} & -Y & * & * \\ B^{\mathrm T} & 0 & -I & * \\ 0 & CY & D & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0, \quad Y > R, \tag{3.10}$$

*для системы в дискретном времени* [17] *имеют решения относительно неизвестных $Y$ и $\gamma^2$.*

В отличие от теоремы 3.1 линейные матричные неравенства в теореме 3.2 являются строгими, так как на бесконечном горизонте дополнительно требуется обеспечить асимптотическую устойчивость системы при наихудшем возмущении. Из теоремы 3.2 следует, что уровень гашения начального возмущения для системы в непрерывном времени удовлетворяет неравенству $\gamma^s_0 < \gamma$ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства (3.9), в первом из которых следует вычеркнуть вторые блочные строку и столбец, а для системы в дискретном времени, когда разрешимы неравенства (3.10), в первом из которых следует вычеркнуть третьи блочные строку и столбец. В свою очередь $H_\infty$ норма передаточной матрицы от $v$ к $z$ меньше $\gamma$ тогда и только тогда, когда разрешимо первое неравенство в (3.9) для системы в непрерывном времени или первое неравенство в (3.10) для системы в дискретном времени. Каждый из показателей находится путем минимизации $\gamma^2$ на множестве, определяемом соответствующими линейными матричными неравенствами.

## 4. Синтез субоптимальных по Парето управлений в задачах с обобщенными $H_\infty$ нормами

Рассмотрим многокритериальную задачу управления системой с $N$ целевыми выходами

$$\begin{aligned} \partial x &= A(t)x(t) + B_v(t)v(t) + B_u(t)u(t), \\ z_i(t) &= C_i(t)x(t) + D_{v\,i}(t)v(t) + D_{u\,i}(t)u(t), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{4.1}$$

с обратной связью $u = \Theta(t)x$, критериями в которой являются квадраты обобщенных $H_\infty$ норм выходов $z_i$

$$J_i[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v} \frac{\|z_i\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm T}(t_f)S_i x(t_f)}{x_0^{\mathrm T} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,t_f]}}, \quad i = 1, \dots, N,$$

рассматриваемых как функционалы от матрично-значных функций $\Theta(t)$, $t \in [t_0, t_f]$. Для этой задачи субоптимальный целевой функциионал имеет вид

$$\widehat{J}_\alpha[\Theta(t)] = \sup_{x_0,\, v} \frac{\|z_\alpha\|^2_{[t_0,\, t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f) S_\alpha x(t_f)}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,\, t_f]}},$$

где

$$z_\alpha(t) = [C_\alpha(t) + D_{u\,\alpha}(t)\Theta(t)]x(t) + D_{v\,\alpha}(t)v(t), \quad S_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i S_i,$$

$$C_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{1/2} C_1(t) \\ \cdots \\ \alpha_N^{1/2} C_N(t) \end{pmatrix}, \quad D_{u\,\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{1/2} D_{u\,1}(t) \\ \cdots \\ \alpha_N^{1/2} D_{u\,N}(t) \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$D_{v\,\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{1/2} D_{v\,1}(t) \\ \cdots \\ \alpha_N^{1/2} D_{v\,N}(t) \end{pmatrix}.$$

Это значит, что $\widehat{J}_\alpha[\Theta(t)]$ является обобщенной $H_\infty$ нормой комбинированного выхода $z_\alpha$ системы (4.1) с матрицей терминального состояния $S_\alpha$, а субоптимальными по Парето решениями являются обобщенные $H_\infty$ оптимальные управления по отношению к этой норме для всех $\alpha \in \mathcal{S}$. Матрицы параметров этих законов управления вычисляются как $\widehat{\Theta}_\alpha(t) = Z(t)Y^{-1}(t)$ при решении линейных матричных неравенств, получаемых из (3.5) и (3.8) для системы в непрерывном времени (из (3.6) и (3.8) для системы в дискретном времени) с начальным условием $Y(t_0) = R$ и с матрицей терминального состояния $S_\alpha$ при замене в них соответствующих матриц на матрицы $A(t) + B_u(t)\Theta(t)$, $B_v(t)$, $C_\alpha(t) + D_{u\,\alpha}(t)\Theta(t)$, $D_{v\,\alpha}(t)$ и при введении вспомогательных переменных $Z(t) = \Theta(t)Y(t)$. Заметим, что для приближенного вычисления матриц параметров обратной связи $\Theta(t)$ в системах с непрерывным временем предварительно проводится дискретизация дифференциального линейного матричного неравенства.

В частном случае для системы с нулевыми начальными условиями при критериях вида стандартных $H_\infty$ норм и максимальных уклонений субоптимальные по Парето управления находятся при решении линейных матричных неравенств (3.5) и (3.8) (или (3.6) и (3.8)) с соответствующими системными матрицами и при $Y(t_0) = 0$. В другом частном случае, когда отсутствуют возмущения, т.е. $v(t) \equiv 0$, субоптимальные по Парето управления в многокритериальной задаче с критериями вида $\gamma_0$ норм и максимальных уклонений выходов в конечный момент времени при неопределенных начальных условиях находятся в результате решения линейных матричных неравенств, полученных из (3.5) и (3.8) (или (3.6) и (3.8)) с соответствующими системными матрицами при $B(t) \equiv 0$ и $Y(t_0) = R$.

Когда все критерии являются максимальными уклонениями в конечный момент времени $N$ выходов $z_i(t_f)$ системы (4.1) при $D_{v\,i}(t) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, N$, возможен синтез оптимальных по Парето управлений. Действительно, выберем в этом случае в качестве единого критерия свертку Гермейера [15]

$$J_\alpha^G[\Theta(t)] = \max_{j=1,\ldots,N} \Big\{ \alpha_j^{-1} J_j[\Theta(t)] \Big\} \quad \forall\, \alpha_j > 0.$$

Представим ее в виде

$$J_\alpha^G[\Theta(t)] = \max_{j=1,\ldots,N} \alpha_j^{-1} \sup_{x_0,\, v} \frac{|z_j(t_f)|^2}{x_0^{\mathrm T} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,\, t_f]}} =$$

$$= \sup_{x_0,\, v} \frac{\max\limits_{j=1,\ldots,N} |\alpha_j^{-1/2} z_j(t_f)|^2}{x_0^{\mathrm T} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,\, t_f]}} = \sup_{x_0,\, v} \frac{|z_\alpha(t_f)|^2_{g\,\infty}}{x_0^{\mathrm T} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,\, t_f]}},$$

где

$$z_\alpha = \mathrm{col}\,(\alpha_1^{-1/2} z_1, \ldots, \alpha_N^{-1/2} z_N), \quad |z_\alpha|_{g\,\infty} = \max_{j=1,\ldots,N} |\alpha_j^{-1/2} z_j|.$$

Таким образом, свертка Гермейера для этой задачи представляет собой квадрат максимального уклонения в конечный момент времени комбинированного выхода $z_\alpha$, состоящего из взвешенных выходов системы (4.1), где под максимальным уклонением комбинированного вектора принимается величина, равная максимуму из евклидовых норм составляющих его векторов. Следовательно, оптимальные по отношению к $J_\alpha^G[\Theta(t)]$ матрицы $\Theta_\alpha(t)$, которые являются оптимальными по Парето решениями рассматриваемой многокритериальной задачи, находятся как $\Theta_\alpha(t) = Z(t)Y^{-1}(t)$ в результате решения задачи $\inf \gamma^2$ при ограничениях в форме дифференциальных матричных неравенств

$$-\dot Y(t) + Y(t)A^{\mathrm T}(t) + A(t)Y(t) + Z^{\mathrm T}(t)B_u^{\mathrm T}(t) + B_u(t)Z(t) + B_v(t)B_v^{\mathrm T}(t) \leqslant 0 \tag{4.3}$$

при $t = [t_0, t_f]$ для системы в непрерывном времени,

$$\begin{pmatrix} -Y(t+1) + B_v(t)B_v^{\mathrm T}(t) & * \\ Y(t)A^{\mathrm T}(t) + Z^{\mathrm T}(t)B_u^{\mathrm T}(t) & -Y(t) \end{pmatrix} \leqslant 0 \tag{4.4}$$

при $t = t_0, \ldots, t_f - 1$ для системы в дискретном времени, а также

$$Y(t_0) = R, \quad \begin{pmatrix} Y(t_f) & * \\ C_i Y(t_f) + D_{u\,i} Z(t_f) & \alpha_i \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4.5}$$

Теперь покажем, как синтезировать субоптимальные по Парето стационарные обратные связи $u = \Theta x$ в задачах многокритериальной оптимизации для стационарных систем вида (4.1), критериями в которых являются обобщенные $H_\infty$ нормы на бесконечном интервале

$$J_i(\Theta) = \sup_{x_0,\, v} \frac{\|z_i\|^2_{[0,\, \infty)}}{x_0^{\mathrm T} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[0,\, \infty)}}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

В этом случае субоптимальная целевая функция имеет вид

$$\widehat{J}_\alpha(\Theta) = \sup_{x_0,\, v} \frac{\|z_\alpha\|^2_{[0,\,\infty)}}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[0,\,\infty)}},$$

где комбинированный выход $z_\alpha(t)$ определен как в (4.2) при всех стационарных матрицах. Субоптимальными по Парето решениями данной задачи являются оптимальные управления по отношению к обобщенной $H_\infty$ норме выхода $z_\alpha$ стационарной системы (4.1) для всех $\alpha \in \mathcal{S}$. Параметры $\widehat{\Theta}_\alpha$ этих законов управления находятся при решении линейных матричных неравенств (3.9) или (3.10), в которых соответствующие матрицы следует заменить на $A + B_u\Theta$, $B_v$, $C_\alpha + D_{u\,\alpha}\Theta$ и $D_{v\,\alpha}$.

## 5. Примеры

### *5.1. Система первого порядка*

Начнем с простого примера для системы первого порядка

$$\begin{gathered} \dot{x} = -x + v + u, \quad x(0) = 0, \\ z_1 = x, \quad z_2 = u, \end{gathered} \tag{5.1}$$

рассматриваемого аналитически. Зададим управление в виде $u = -\theta x$ и выберем два критерия

$$J_i(\theta) = \sup_{v \neq 0} \frac{\|z_i\|^2_{[0,\,\infty)}}{\|v\|^2_{[0,\,\infty)}}, \quad i = 1, 2. \tag{5.2}$$

В данном случае субоптимальная целевая функция $\widehat{J}_\alpha(\theta)$ – квадрат $H_\infty$ нормы передаточной функции $H(s)$ замкнутой системы от $v$ к комбинированному выходу

$$z_\alpha(t) = \Big(\alpha^{1/2} \quad -(1-\alpha)^{1/2}\theta\Big)^{\mathrm{T}} x(t), \quad \alpha \in (0,\, 1).$$

Так как

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\alpha + (1-\alpha)\theta^2}{\omega^2 + (1+\theta)^2},$$

то

$$\widehat{J}_\alpha(\theta) = \max_{\omega \in [0,\infty)} |H(j\omega)|^2 = \frac{\alpha + (1-\alpha)\theta^2}{(1+\theta)^2}.$$

Проводя минимизацию $\widehat{J}_\alpha(\theta)$, получаем

$$\widehat{\theta}_\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad \widehat{J}_\alpha(\widehat{\theta}_\alpha) = \alpha(1-\alpha).$$

Согласно (2.3) и (2.4) имеем

$$\mu_-(\alpha) = \mu_+(\alpha) = \alpha(1-\alpha).$$

Таким образом, нижняя и верхняя границы области, в которой находится искомое множество решений двукритериальной задачи, совпадают, а само это множество определяется как огибающая на плоскости $(J_1, J_2)$ семейства прямых

$$\alpha J_1 + (1-\alpha) J_2 = \alpha(1-\alpha).$$

Решение этой несложной задачи о нахождении огибающей семейства прямых дает при $J_1 \in [0,\, 1]$ и $J_2 \in [0,\, 1]$ кривую в неявной форме

$$2J_1 + 2J_2 - (J_1 - J_2)^2 = 1$$

или в явной форме

$$J_2 = (\sqrt{J_1} - 1)^2, \quad J_1 \in (0,\, 1).$$

Наконец, заметим, что в данном примере

$$J_1(\theta) = \frac{1}{(1+\theta)^2}, \quad J_2(\theta) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)^2}$$

и, следовательно, $\widehat{J}_\alpha(\Theta) = J_\alpha(\Theta)$.

### *5.2. Виброизоляция упругого объекта*

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, показанную на рис. 2 и представляющую собой упругий объект, который моделируется двумя материальными точками 2 и 3, связанными между собой линейными упругим и диссипативным элементами; этот упругий объект связан такими же линейными упругим и диссипативным элементами и управляемым элементом (называемым далее виброизолятором) с другим телом 1, который моделирует подвижное основание. Динамика данной механической системы (в безразмерных переменных и параметрах) описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 = -2\beta\dot{x}_1 + \beta\dot{x}_2 - 2x_1 + x_2 + v + u, && x_1(0) = x_{10}, \quad \dot{x}_1(0) = x_{30},\\
&\ddot{x}_2 = -\beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - x_2 + x_1 + v, && x_2(0) = x_{20}, \quad \dot{x}_2(0) = x_{40},
\end{aligned}$$

где $x_1$ и $x_2$ – координаты материальных точек 2 и 3 относительно подвижного основания, $u$ – усилие, создаваемое виброизолятором при его деформации (т.е. при смещении точки 2 относительно точки 1), $v$ – с точностью до знака ускорение основания (материальной точки 1), $\beta = 0{,}1$ – заданный положительный параметр демпфирования. Задача виброизоляции состоит в поиске управления $u = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 \dot{x}_1 + \theta_4 \dot{x}_2$, обеспечивающего как наименьшую возможную деформацию механической системы, так и минимальную силу,

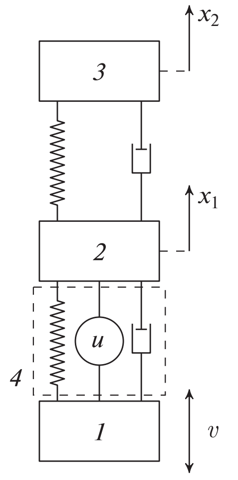


Рис. 2. Схема упругого объекта с виброизолятором.

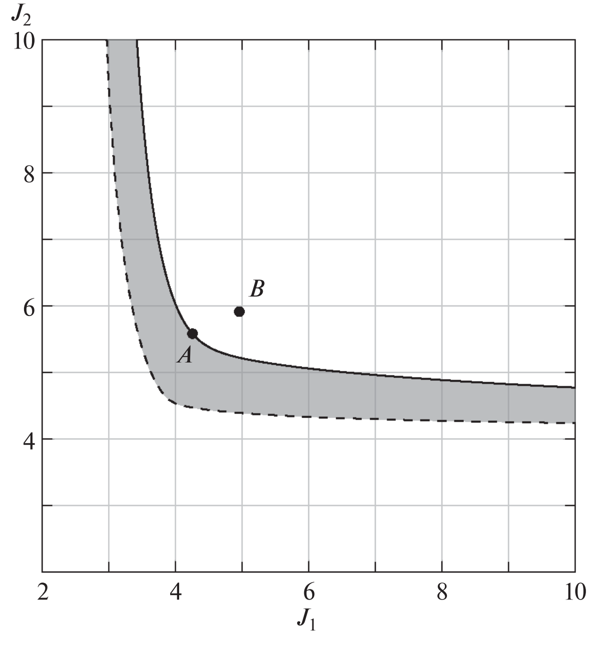


Рис. 3. Оценка множества Парето в задаче виброизоляции.

противодействующую смещению упругого объекта относительно основания. С этой целью рассмотрим целевые выходы

$$z_1 = (x_1,\, x_2 - x_1)^{\mathrm{T}}, \quad z_2 = -x_1 - \beta \dot{x}_1 + u.$$

Обобщенные $H_\infty$ нормы относительно указанных выходов можно трактовать как искомые характеристики системы. Используя неравенства теоремы 3.2, найдем множество $\Sigma_0$ (см. рис. 3). В этом случае показатель субоптимальности равен $\eta = 0{,}2768$. На верхней границе множества $\Sigma_0$ указана точка $A(4{,}256; 5{,}582)$, отвечающая значению $\alpha = 0{,}64$.

Для сравнения были вычислены регуляторы на основе линейных матричных неравенств, характеризующих каждую из указанных обобщенных $H_\infty$ норм при дополнительном предположении, что функции Ляпунова для каждой из этих норм равны между собой. А именно матрицы обратных связей определялись при решении задачи $\inf J_2(\Theta)$ при условии, что $J_1(\Theta) < \gamma^2$ с параметром $\gamma$. Они находились как $\widetilde{\Theta}_\gamma = Z_\gamma Y_\gamma^{-1}$, где $Y_\gamma$ и $Z_\gamma$ – решения задачи $\inf \gamma^2$ при ограничениях, определяемых парой линейных матричных неравенств вида (3.9), в одном из которых матрицы $A$, $B$, $C$, $D$ заменены матрицами $A + B_u\Theta$, $B_v$, $C_1 + D_{u\,1}\Theta$, $D_{v\,1}$ соответственно, а в другом — матрицами $A + B_u\Theta$, $B_v$, $C_2 + D_{u\,2}\Theta$, $D_{v\,2}$ и $Z_\gamma = \Theta Y_\gamma$. Точка $B(4{,}959; 5{,}913)$ на рис. 3 соответствует одному из найденных регуляторов с параметрами $\Theta = (-0{,}472; 0{,}252; -1{,}745; -1{,}385)^{\mathrm{T}}$.

*5.3. Гашение параметрических колебаний линейного осциллятора*

Рассмотрим уравнение Матьё

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\delta^2(1 + \varepsilon \sin t)x_1 + u + v \end{aligned} \tag{5.3}$$

с параметрами $\delta = 0{,}5$ и $\varepsilon = 0{,}3$, описывающее параметрические колебания линейного осциллятора. Зададим на интервале времени длительностью $T = 10$ равномерную сетку с шагом $h = 0{,}05$ и дискретизируем систему (5.3), заменяя производные конечно-разностными отношениями. Выберем в качестве первого критерия обобщенную $H_\infty$ норму этой системы с целевым выходом $z = x_1 + u$, т.е. с матрицами $C_1 = (1\ 0)$, $D_1 = 1$, и весовой матрицей терминального состояния $S_1 = 0$. В качестве второго критерия возьмем максимальное уклонение вектора $(1/2)\mathrm{col}\,(x_1, x_2)$ в конечный момент времени, т.е. $C_2 = (0\ 0)$, $D_2 = 0$ и $S_2 = 0{,}25I$. Таким образом, функционалы имеют вид:

$$J_1[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v} \frac{\|z\|^2_{[0,T]}}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[0,T]}}, \quad J_2[\Theta(t)] = \sup_{x_0, v} \frac{x_f^{\mathrm{T}} S_2 x_f}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[0,T]}}. \tag{5.4}$$

В дальнейших численных экспериментах $R = 0{,}5I$. Применим подход, изложенный в разделе 2, для построения границ области $\Sigma_0$, содержащей множество Парето. На рис. 4 серым цветом изображено множество $\Sigma_0$. Видно, что оно получилось достаточно “узким” и значение показателя субоптимальности $\eta = 0{,}125$ подтверждает этот вывод. Отметим, что точки верхней границы множества $\Sigma_0$ соответствуют субоптимальным по Парето решениям $\widehat{\Theta}_\alpha$, которые находятся с использованием описанного в разделе 4 подхода. В частности, при $\alpha = 0{,}18$ были найдены коэффициенты обратной связи $\widehat{\Theta}_\alpha$ и для них вычислены значения функционалов. Точка, отвечающая этим значениям, на рис. 4 обозначена через $A$, ее координаты — $(0{,}898; 0{,}249)$. Значения функционалов в случае, когда управление в системе (5.3) отсутствует, равны $J_1 = 185{,}259$ и $J_2 = 0{,}966$. Таким образом, использование управления позволяет уменьшить обобщенную $H_\infty$ норму системы практически в 200 раз!

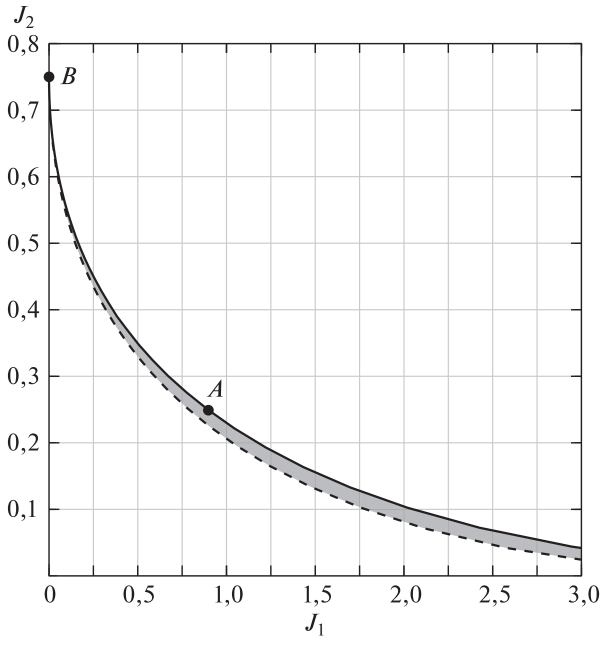


Рис. 4. Оценка множества Парето в задаче гашения параметрических колебаний.

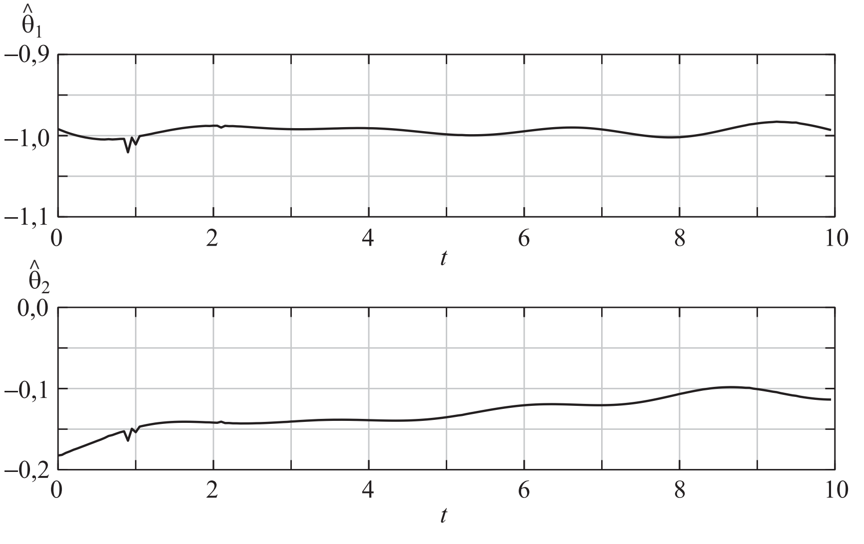


Рис. 5. Графики зависимостей от времени субоптимальных по Парето коэффициентов обратной связи.

Также представляет интерес сравнить полученные результаты с простейшим регулятором вида $u = -x_1$. Нетрудно видеть, что в этом случае $J_1 = 0$, поскольку $z = x_1 + u = 0$. Значение $J_2 = 0{,}750$, что примерно в 3 раза больше, чем значение $J_2$ для точки $A$. На рис. 4 точка с координатами $(0; 0{,}750)$ обозначена через $B$.

На рис. 5 приведены графики зависимости от времени субоптимальных по Парето коэффициентов обратной связи $\widehat{\Theta}_\alpha^{\mathrm{T}}(t) = (\widehat{\theta}_1(t)\ \widehat{\theta}_2(t))$, отвечающих точке $A$. Заметим, что практически все время функционирования системы коэффициенты обратной связи сохраняют “постоянные” значения. Значения функционалов при стационарном регуляторе, отвечающим этим “постоянным” значениям $\theta_1(t) \equiv -0{,}13$ и $\theta_2(t) \equiv -1{,}0$, равны $J_1 = 0{,}900$ и $J_2 = 0{,}249$, т.е. отличия в значениях критериев при использовании такого стационарного регулятора вместо нестационарного субоптимального регулятора $\widehat{\Theta}_\alpha(t)$ незначительны.

## 6. Заключение

Рассмотрены многокритериальные задачи минимаксной оптимизации, критериями в которых являются максимумы некоторых функционалов. В статье показано, что при минимизации единого критерия в виде максимума линейной свертки функционалов (вместо линейной свертки максимумов) находятся субоптимальные по Парето решения и оцениваются их потери по сравнению с минимальными. В критериальном пространстве строятся границы области, содержащей точки множества Парето, в которых линейная свертка критериев принимает манимальные значения. Тем самым появляется возможность сравнивать значения отдельных критериев при выбираемых тем или иным способом решениях многокритериальных задач и при оптимальных по Парето решениях. Этот подход в сочетании с аппаратом линейных матричных неравенств применяется для решения новых многокритериальных линейно-квадратичных задач управления при неопределенных начальных условиях и возмущениях с критериями вида обобщенной $H_\infty$ нормы или $\gamma_0$ нормы для непрерывных и дискретных нестационарных систем на конечном горизонте и стационарных систем на бесконечном горизонте. Приводятся примеры двукритериальных задач управления, в которых находятся субоптимальные по Парето решения и строятся области, содержащие точки множества Парето.

*ПРИЛОЖЕНИЕ*

*Доказательство теоремы 3.1.* Покажем, что выполнение неравенства $\gamma_{\infty,0} < \gamma$ влечет выполнение неравенств (3.5) (или (3.6)), (3.8) и равенства (3.7). На траекториях системы (3.1) определим функционал

$$\bar{J}(v) = \gamma^2 \left[\|v\|^2_{[t_0,\,t_f]} + x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0\right] - \|z\|^2_{[t_0,\,t_f]}. \tag{П.1}$$

Заметим, что неравенство $\gamma_{\infty,0} < \gamma$ эквивалентно неравенству

$$\bar{J}(v) > x^{\mathrm{T}}(t_f) S x(t_f) \quad \forall x_0 \in \mathrm{R}^{n_x},\ \forall v \in L_2 :\ x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,\,t_f]} \neq 0. \tag{П.2}$$

Поставим задачу минимизации этого функционала относительно $v$, которую будем решать методом динамического программирования.

С этой целью введем вдоль траектории системы функцию Беллмана

$$V(t,x) = \min_{v(\tau),\, \tau\in[t_0,t]} \left\{\gamma^2 \left[\|v\|^2_{[t_0,\,t]} + x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0\right] - \|z\|^2_{[t_0,\,t]}\right\}, \tag{П.3}$$

где $x = x(t)$ – состояние системы в момент времени $t$. Запишем соответствующее уравнение Беллмана

$$\min_{v(t)} \left(-\partial V - |z|^2 + \gamma^2 |v|^2\right) = 0, \quad V(t_0, x) = \gamma^2 x^{\mathrm{T}} R^{-1} x, \tag{П.4}$$

которое в непрерывном случае приводит к следующему уравнению в частных производных

$$V_t + V_x[A(t)x + B(t)v_*] + [C(t)x + D(t)v_*]^{\mathrm{T}}[C(t)x + D(t)v_*] - \gamma^2|v_*|^2 = 0,$$

где

$$v_*(t) = [\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}(t)D(t)]^{-1}[2^{-1}B^{\mathrm{T}}(t)V_x^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}(t)C(t)x]$$

и нижние индексы $t$ и $x$ обозначают частные производные от функции Беллмана по соответствующим переменным. Решением этого уравнения в частных производных является функция в виде квадратичной формы $V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(t)x$, где матрица $Q$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати

$$\begin{gathered}\dot{Q} = AQ + QA^{\mathrm{T}} + QC^{\mathrm{T}}CQ + (B^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}CQ)^{\mathrm{T}}(\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}D)^{-1}(B^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}CQ),\\ Q(t_0) = \gamma^{-2}R,\end{gathered} \tag{П.5}$$

в котором для сокращения записи у всех матриц опущен аргумент $t$. Заметим, что из положительной полуопределенности квадратичных слагаемых в правой части дифференциального уравнения (П.5) и положительной определенности матрицы $Q(t_0)$ следует положительная определенность решения, т.е. $Q(t) > 0$, $t \in [t_0, t_f]$, и, следовательно, матрица $Q(t)$ обратима на всем рассматриваемом отрезке.

Обратимся опять к уравнению Беллмана (П.4), из которого следует, что вдоль траектории системы (3.1) при любых возмущениях $v(t)$ для найденной функции Беллмана $V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(t)x$ выполняется неравенство

$$\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 \leqslant 0, \tag{П.6}$$

которое принимает вид квадратичного неравенства $\xi^{\mathrm{T}}M\xi \leqslant 0$, $\xi^{\mathrm{T}} = (x^{\mathrm{T}}\ v^{\mathrm{T}})$ с отрицательно полуопределенной матрицей

$$M = \begin{pmatrix} -Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1} + A^{\mathrm{T}}Q^{-1} + Q^{-1}A + C^{\mathrm{T}}C & * \\ B^{\mathrm{T}}Q^{-1} + D^{\mathrm{T}}C & -(\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}D) \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу $M$ слева и справа на положительно определенную матрицу $L = \mathrm{diag}(Q\ I)$, получим

$$LML = \begin{pmatrix} -\dot{Q} + QA^{\mathrm{T}} + AQ + QC^{\mathrm{T}}CQ & * \\ B^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}CQ & -(\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}D) \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Шура и делая замену $Q = \gamma^{-2}Y$, получаем матричное неравенство

$$
\begin{gathered}
-\dot{Y} + AY + YA^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}YC^{\mathrm{T}}CY + \\
+ (B^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}D^{\mathrm{T}}CY)^{\mathrm{T}}(I - \gamma^{-2}D^{\mathrm{T}}D)^{-1}(B^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}D^{\mathrm{T}}CY) \leqslant 0,
\end{gathered} \tag{П.7}
$$

которое повторным применением леммы Шура приводится к линейному матричному неравенству (3.5). Заметим далее, что согласно (П.5) $Y(t_0) = R$. Наконец, используя неравенство (П.2), получаем квадратичное неравенство

$$
\bar{J}(v_*) = \gamma^2 x^{\mathrm{T}}(t_f)Y^{-1}(t_f)x(t_f) > x^{\mathrm{T}}(t_f)Sx(t_f)
$$

или матричное неравенство

$$
\gamma^2 Y^{-1}(t_f) > S, \tag{П.8}
$$

которое с применением леммы Шура приводится к линейному матричному неравенству (3.8). Необходимое условие теоремы 3.1 для системы в непрерывном времени доказано.

Для системы в дискретном времени покажем, что функцией Беллмана является квадратичная форма $V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Q^{-1}(t)x$, где матрица $Q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$
\left(A^{\mathrm{T}}\, C^{\mathrm{T}}\right)\left[\begin{pmatrix} Q(t+1) & * \\ 0 & I \end{pmatrix} - \gamma^{-2}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}\left(B^{\mathrm{T}}\, D^{\mathrm{T}}\right)\right]^{-1}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} - Q^{-1}(t) = 0 \tag{П.9}
$$

с начальным условием $Q(t_0) = \gamma^{-2}R$. Действительно, уравнение (П.9) получено из (П.4), где минимум достигается при наихудшем возмущении

$$
v_*(t) = \Gamma^{-1}(t+1)\left(B^{\mathrm{T}}\, D^{\mathrm{T}}\right)\widehat{Q}^{-1}(t+1)\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}x(t).
$$

Здесь введены обозначения

$$
\Gamma(t+1) = \gamma^2 I - \left(B^{\mathrm{T}}\, D^{\mathrm{T}}\right)\widehat{Q}^{-1}(t+1)\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} > 0,
$$

$$
\widehat{Q}^{-1}(t+1) = \begin{pmatrix} Q^{-1}(t+1) & * \\ 0 & I \end{pmatrix}.
$$

Так как $Q(t_0) > 0$, то матрица, стоящая в квадратных скобках в (П.9) при $t = t_0$, является положительно определенной. Следовательно, в силу условия (3.4) имеем $Q(t_0+1) > 0$. Продолжая этот процесс, получим $Q(t) > 0$ для всех $t \geqslant t_0$. Далее, поскольку для любого $v(t) \neq v_*(t)$ выполняется неравенство $\Delta V + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 \geqslant 0$, то с учетом известной формулы обращения блочной матрицы приходим к следующему неравенству:

$$
\begin{gathered}
\left(A^{\mathrm{T}}\, C^{\mathrm{T}}\right)\widehat{Q}^{-1}(t+1)\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} - Q^{-1}(t) + \\
+ \left(A^{\mathrm{T}}\, C^{\mathrm{T}}\right)\widehat{Q}^{-1}(t+1)\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}\Gamma^{-1}(t+1)\left(B^{\mathrm{T}}\, D^{\mathrm{T}}\right)\widehat{Q}^{-1}(t+1)\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \leqslant 0.
\end{gathered} \tag{П.10}
$$

После введения новых переменных $Y(t) = \gamma^2 Q(t)$, для которых $Y(t_0) = R$, и применения леммы Шура неравенство (П.10) преобразуется в (3.6). Необходимое условие теоремы 3.1 в дискретном случае доказано.

Докажем достаточное условие. Пусть линейные матричные неравенства (3.5) (или (3.6)), (3.8), а также равенство (3.7) разрешимы относительно $Y(t) > 0$ при $t \in [t_0,\, t_f]$ и $\gamma^2 > 0$. Тогда непосредственно проверяется, что для квадратичной формы $V = \gamma^2 x^{\mathrm{T}} Y^{-1}(t) x$ на траекториях системы (3.1) выполняется неравенство

$$\partial V + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \leqslant 0. \tag{П.11}$$

Интегрируя или суммируя неравенства (П.11) на отрезке $[t_0, t_f]$ и учитывая (П.8), получаем, что

$$\|z\|^2_{[t_0,\, t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f) S x(t_f) < \gamma^2 \left[ \|v\|^2_{[t_0,\, t_f]} + x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 \right]$$

для любых допустимых возмущений $v$ и начальных условий системы $x_0$. Отсюда следует $\gamma_{\infty,\,0} < \gamma$, и это завершает доказательство теоремы 3.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Mäkilä P.M.* On Muptiple Criteria Stationary Linear Quadratic Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 12. P. 1311–1313.
2. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Muptiple Objective Optimal Control of Linear Systems: the Quadratic Norm Case // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 1. P. 14–24.
3. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // АиТ. 2019. № 10. С. 37–61.

   *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Optimal Control of Maximum Output Deviations of a Linear Time-Varying System on a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1783–1802.
4. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Finite-Horizon Multi-Objective Generalized $H_2$ Control with Transients // Automatica. 2019. V. 106. No. 8. P. 27–34.
5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Субоптимальные по Парето регуляторы против коалиций возмущений // АиТ. 2017. № 2. С. 3–26.

   *Balandin D.V., Kogan M.M.* Pareto Suboptimal Controllers Versus Coallitions of Disturbances // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 2. P. 197–216.
6. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQG Control with an $H_\infty$ Performance Bound: a Riccati Equation Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 3. P. 293–305.
7. *Khargonekar P.P., Rotea M.A.* Mixed $H_2/H_\infty$ Control: a Convex Optimization Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 7. P. 824–831.
8. *Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.* Mixed $H_2$ and $H_\infty$ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1564–1574.
9. *Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B.* Mixed $H_2$ and $H_\infty$ Performance Objectives II: Optimal Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1575–1587.

10. *Scherer C., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 7. P. 896–911.

11. *Chen X., Zhou K.* Multiobjective $H_2/H_\infty$ Control Design // SIAM J. Control Optim. 2001. V. 40. No. 2. P. 628–660.

12. *Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A New Discrete-time Robust Stability Condition // System Control Lett. 1999. V. 37. P. 261–265.

13. *Ebihara Y., Hagiwara T.* New Dilated LMI Characterisations for Continuous-time Control Multi-objective Controller Synthesis // Automatica. 2004. V. 40. P. 2003–2009.

14. *Hindi H.A., Hassibi B., Boyd S.P.* Multi-objective $H_2/H_\infty$-Optimal Control via Finite Dimensional $Q$-Parametrization and Linear Matrix Inequalities // Proc. 1998 Amer. Control Conf., Philadelphia, USA. 1998. P. 3244–3249.

15. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

16. *Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R.* $H_\infty$ Control with Transients // SIAM J. Control Optim. 1991. V. 29. No. 6. P. 1373–1393.

17. *Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А.* Синтез обобщенного $H_\infty$-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // АиТ. 2014. № 1. С. 3–22.

    *Balandin D.V., Kogan M.M., Krivdina L.N., Fedyukov A.A.* Design of generalized discrete-time $H_\infty$-optimal control over finite and infinite intervals // Autom. Remote Control. 2019. V. 75. No. 1. P. 1–17.

18. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное $H_\infty$-оптимальное управление как компромисс между $H_\infty$-оптимальным и $\gamma$-оптимальным управлениями // АиТ. 2010. № 6. С. 20–38.

    *Balandin D.V., Kogan M.M.* Generalized $H_\infty$-optimal Control as a Trade-off between the $H_\infty$-optimal and $\gamma$-optimal Controls // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 993–1010.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 27.08.2020

После доработки 15.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021