Нелинейные системы

© 2021 г. Э.М. СОЛНЕЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук (solnechn@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЕЮ

Исследуются динамические свойства реакции одномерной упругой механической системы на внешнее тепловое воздействие. Устанавливается, что динамика объекта управления может быть описана схемой, состоящей из двух операторов интегрирования, линейного ограниченного оператора и оператора, отражающего собственные колебательные свойства объекта. Кроме того, устанавливается класс обратных связей от выхода системы к тепловому воздействию, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы.

Ключевые слова: распределенный термомеханический объект, динамические свойства, оператор, обратная связь, замкнутая система, устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231021080031

1. Введение

Термомеханические системы, в которых происходят процессы механических колебаний и процессы теплопередачи, широко используются в современной технике, в связи с чем возникает необходимость математического исследования динамических свойств таких систем и отыскания методов управления ими.

Литература по изучению явления термоупругости достаточно обширна. После ранних работ [1–3] по изучению этого явления появилась работа [4], исследовавшая термоупругость как часть общего явления упругости. В современной литературе появились работы [5–7], посвященные изучению различных свойств термоупругих сред. В [8] развита современная теория термомеханики упругопластического деформирования. В работе [9] изложена постановка задачи о распространении термоупругих волн в одномерной твердотельной среде.

В настоящей работе исследуются динамические свойства одномерной упругой механической системы, подверженной внешнему тепловому воздействию на одной из границ. В качестве исходной основы для составления математической модели процессов в такой системе была принята классическая работа [4]. В частности, при принятом здесь описании процессов было использовано, согласно [4, гл. 11 и 12], предположение о пренебрежимости влияния механических колебаний упругой среды на процесс теплопередачи.

В работе устанавливается, что свойства реакции механических колебаний объекта на внешнее тепловое воздействие могут быть описаны схемой, состоящей из двух операторов интегрирования, линейного ограниченного оператора и оператора, отражающего собственные колебательные свойства объекта. Получены оценки нормы каждого из этих операторов. Определяется пространство управляющих воздействий, для которых выходные координаты объекта — перемещения сечений и температура — являются ограниченными функциями времени.

Далее устанавливаются ограничения на свойства внешней обратной связи от выхода объекта к управляющему воздействию, выполнение которых обеспечивает устойчивость замкнутой системы (объект, обратная связь). Эти ограничения получены на основе результатов [10], касающихся методов управления линейным распределенным объектом общего вида.

2. Уравнения динамики термомеханической системы как объекта управления

Система уравнений продольных колебаний одномерного упругого объекта ограниченной длины, подвергающегося тепловому воздействию на одной из границ, принимается в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \beta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\varphi(x)(t)$, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$; a, c, β – положительные константы (см. [4, разделы 11.1 и 12.2]).

Здесь $\varphi(x)(t)$ – перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от места приложения теплового воздействия, $\theta(x)(t)$ – температура среды в сечении x.

Принимаются нулевые начальные условия по времени и граничные условия вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(l) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \left(-\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \alpha\theta\right)(0) = u \\ \left(\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \alpha\theta\right)(l) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где u – управляющее тепловое воздействие; оно предполагается входящим в пространство $\mathbf{Q}_{\text{у}}$ равномерно ограниченных функций времени со значениями размерности управляющего воздействия и обладающим всеми свойствами обобщенных оригиналов [11, п. 83]. Ниже, в разделе 6, вводится дополнительное ограничение на выбор управляющего воздействия из условия, чтобы введенное подпространство $\mathbf{U}$ пространства $\mathbf{Q}_{\text{у}}$ обладало следующим свойством: для любого $u \in \mathbf{U}$ решение краевой задачи ((2.1), (2.2)) с управляющим воздействием u является равномерно (по времени) ограниченной вектор-функцией $\begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{x}) \\ \theta(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$.

3. Выражение для передаточной функции оператора $u \to \theta(x)$

Как видно из уравнений (2.1), второе из них вместе с двумя последними граничными условиями (2.2) может исследоваться отдельно от первого уравнения. В [10, раздел 2] для граничных условий общего вида

$$C_0 \begin{pmatrix} \theta \\ q \end{pmatrix} (0) + C_l \begin{pmatrix} \theta \\ q \end{pmatrix} (l) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $q = -\frac{\partial\theta}{\partial x}$ – тепловой поток; C_0, C_l – 2×2-матрицы; u_1, u_2 – управляющие воздействия, получено выражение (в изображениях по Лапласу) для зависимости $\theta(x)$ от воздействий u_j. Для принятого здесь вида граничных условий (условия (2.3) настоящей работы) $u_1 = u$, $u_2 = 0$, $C_0 = \begin{pmatrix} \propto & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \propto & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому выражение (2.2) из [10] принимает вид

$$\overline{\theta}(x) = \left(\cosh\left(\frac{l-x}{x}\zeta\right) + \frac{r}{\zeta}\sinh\left(\frac{l-x}{x}\zeta\right)\right)\frac{1}{D_{\text{т}}(\zeta)}\overline{u}, \tag{3.2}$$

где $\overline{z}$ – изображение по Лапласу от функции времени z, $\zeta(p) = \sqrt{\frac{p}{a}}l$, $D_{\text{т}}(\zeta) = 2\alpha\cosh\zeta + \alpha\left(\frac{\zeta}{r} + \frac{r}{\zeta}\right)\sinh\zeta$, $p \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ – комплексная плоскость, $r = \frac{\alpha}{\lambda}l$. Под $\sqrt{p}$ здесь понимается та ветвь квадратного корня из p, для которой $\operatorname{Re} p \geq 0$.

В [12, раздел 3] получено необходимое и достаточное условие отсутствия у функции $D_{\text{т}}$ нулей в $\mathbf{C}^+ = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p \geq 0\}$: выполнение неравенств $\left\{\frac{a_{12}}{a_2} \geq 0, \frac{a_1}{a_2} \leq 0\right\}$. (Здесь обозначено: $a_j = \det\left((C_0)_{.j}(C_l)_{.j}\right)$ $(j = 1, 2)$, $a_{12} = \det((C_0)_{.1}(C_l)_{.2}) - \det((C_0)_{.2}(C_l)_{.1})$, $(C_i)_{.j}$ – j-й столбец матрицы C_i.) Для системы ((2.1)–(2.3)) имеем: $a_1 = -\propto^2$, $a_2 = 1$, $a_{12} = 2\propto$, так что это условие выполнено, и нули p_n функции $D_{\text{т}}$ имеют вид

$$p_n = -a\left(\frac{\tau_n}{l}\right)^2 \quad (p \in n \geq 0), \tag{3.3}$$

где τ_n – корни уравнения

$$\tau\cot\tau = \frac{\tau^2 - r^2}{2r}. \tag{3.4}$$

(Достаточно считать, что $\tau > 0$. Число τ_n – n-й корень уравнения (3.4) – заключено в интервале $(n, (n+1))\,\pi$.)

Введем в рассмотрение пространство $\mathbf{Q}_{\text{т}}$ равномерно ограниченных функций времени со значениями размерности θ, обладающих всеми свойствами обобщенных оригиналов [11, п. 83]. Норма в $\mathbf{Q}_{\text{т}}$: $\|f\|_{\mathbf{Q}_{\text{т}}} = \sup_{t\geq 0} |f\,(t)|$.

Из результатов [12] следует, что оператор $V_{\text{т}}\,(x)$, переводящий воздействие u в температуру $\theta\,(x)$, входит в пространство $\mathbf{B}_{\text{т}}$ линейных ограниченных операторов, отображающих пространство $\mathbf{Q}_{\text{у}}$ в $\mathbf{Q}_{\text{т}}$.

4. Оценка сверху нормы оператора $V_{\text{т}}\,(x) : u \to \theta\,(x)$

Для оценки сверху нормы оператора $V_{\text{т}}\,(x)$ могут быть использованы результаты [12, раздел 3]. В этом разделе содержатся оценки сверху норм операторов $R_H(\xi)$ и $R_S(\xi)$, имеющих передаточные функции соответственно $\frac{H_\xi(\zeta)}{D_{\text{т}}(\zeta)}$ и $\frac{S_\xi(\zeta)}{D_{\text{т}}(\zeta)}$. (Здесь обозначено: $H_\xi\,(\zeta) = \cosh\left(\frac{\xi}{l}\zeta\right)$, $S_\xi\,(\zeta) = \frac{l}{\zeta\sqrt{\vartheta a}}\sinh\left(\frac{\xi}{l}\zeta\right)$, $\xi \in [0, l]$, ϑ – фиксированная константа, имеющая размерность времени.)

В выражения для этих оценок входят параметры $\beta_1 = \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{a_1}{a_2}$, $\beta_{12} = \left(\frac{l}{\lambda}\right)\frac{a_{12}}{a_2}$ и $C = \beta_{12}^2 - 2\,|\beta_1|$. Для системы ((2.1)–(2.3)) имеем: $\beta_1 = -r^2$, $\beta_{12}^2 = 2r$, т.е. $C = 2r^2 > 0$. Следовательно, эти оценки согласно [12, раздел 3] могут быть представлены в виде

$$\|R_H\,(\xi)\|_{\mathbf{B}_{\text{т}}} \leq \frac{l}{\lambda}\left(r_{\text{т}} + \frac{1}{3}\right), \tag{4.1}$$

$$\|R_{\mathrm{S}}\,(\xi)\|_{\mathbf{B}_{\text{т}}} \leq \frac{l^2}{\lambda\sqrt{a\vartheta}}\left(r_{\text{т}} + \min\left(\frac{3}{\pi^3}, \frac{1}{6r}\right)\right), \tag{4.2}$$

где $r_{\text{т}} = \frac{2}{\tau_0^2 + r^2}$, τ_0 – минимальный из корней уравнения (3.4).

(Число τ_0 заключено в пределах $\left[r, \frac{\pi}{2}\right]$ при $r \leq \frac{\pi}{2}$ и в пределах $\left[\frac{\pi}{2}, \min\,(r, \pi)\right]$ при $r \geq \frac{\pi}{2}$.)

Опираясь на оценки (4.1) и (4.2), из (3.2) получаем оценку сверху для нормы оператора $V_{\text{т}}\,(x)$ в пространстве $\mathbf{B}_{\text{т}}$:

$$\begin{aligned} \|V_{\text{т}}\,(x)\|_{\mathbf{B}_{\text{т}}} &\leq \|R_{\mathbf{H}}\,(\xi)\|_{\mathbf{B}_{\text{т}}} + \frac{r}{l}\sqrt{a\vartheta}\|R_{\mathrm{S}}\,(\xi)\|_{\mathbf{B}_{\text{т}}} \leq \\ &\leq \frac{l}{\lambda}\left[r_{\text{т}}\,(r+1) + \min\left(\frac{1}{2}, \frac{3r}{\pi^3} + \frac{1}{3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

5. Выражение для передаточной функции оператора $u \to \varphi\,(x)$

Выполнив преобразование Лапласа первого из уравнений системы (2.1) по времени при нулевых начальных условиях и первых двух граничных условиях (2.2), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$c^2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2}\,(x)\,(p) - p^2\overline{\varphi}\,(x)\,(p) - \beta\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}\,(x)\,(p) = 0 \tag{5.1}$$

с граничными условиями

$$
(5.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}(0) = 0, \\ \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}(l) = 0. \end{cases}
$$

Исследование зависимости решения краевой задачи ((5.1), (5.2)) от u (влияющего на $\varphi(x)$ через $\theta(x)$ согласно (3.2) и (5.1)) приводит к следующему выводу:

Теорема 1. Зависимость $\overline{\varphi}(x)$ от $\overline{u}$ имеет вид

$$
(5.3) \qquad \overline{\varphi}(x) = \beta \frac{\Phi(x)}{\gamma} \frac{\overline{u}}{D_{\text{т}} \circ \zeta},
$$

где

$$
\Phi(x)(p) = \frac{c}{p\sigma(p)} \left(\cosh\left(\frac{px}{c}\right) - A_c(\zeta(p)) \cosh\left(\frac{p(l-x)}{c}\right) \right) +
$$

$$
+ \frac{ar}{pl} \cosh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right) + \sqrt{\frac{a}{p}} \sinh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right),
$$

$$
A_c(\zeta) = \cosh\zeta + \frac{r}{\zeta}\sinh\zeta, \quad \sigma(p) = \sinh\frac{l}{c}p, \quad \gamma(p) = ap - c^2.
$$

В точке $p_{\text{ос}} = \frac{c^2}{a}$ плоскости $\mathbf{C}$ функция $\Phi(x)$, как нетрудно проверить, обращается в нуль, и поэтому точка $p_{\text{ос}}$ является устранимой особой точкой [11, п. 22] $\overline{\varphi}(x)$ как функции на $\mathbf{C}$.

Из (5.3) видно, что канал воздействий от $\boldsymbol{u}$ к $\varphi(x)$ обладает двойным интегрирующим свойством и что функция

$$
(5.4) \qquad \Psi(x)(p) = p \frac{\Phi(x)(p)}{\gamma(p) D_{\text{т}}(\zeta(p))}
$$

не имеет полюсов в $\mathbf{C}^+ = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p > 0\}$; она имеет простые полюса в нулях функции $D_{\text{т}} \circ \zeta$, а также в нулях функции σ, т.е. в точках $\pm i\omega_k$, где $\omega_k = k\pi\frac{c}{l}$ $(k \geq 0)$.

Введем в рассмотрение пространство $(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}} = \mathbf{Q}_{\text{у}} \cap \mathbf{L}_{1\text{у}}$, где $\mathbf{L}_{1\text{у}}$ – пространство функций f со значениями размерности u, обладающими всеми свойствами обобщенных оригиналов и конечным значением $\int_0^\infty |f(t)| dt$. Норма в пространстве $(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}$:

$$
\|f\|_{(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}} = \max\left(\|f\|_{\mathbf{Q}_{\text{у}}}, \ \vartheta_1^{-1} \int\limits_0^\infty |f(t)|\, dt \right),
$$

где ϑ_1 – фиксированная константа, имеющая размерность времени.

Простейшим примером функции из $(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}$ может служить импульс размерности u:

$$v_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t \in [0, \delta], \\ 0 & \text{при} \quad t > \delta. \end{cases} \tag{5.5}$$

Ниже аргумент x при функциях и операторах будем для краткости опускать.

Функцию Ψ будем рассматривать как передаточную функцию оператора V_Ψ, отображающего функцию $u \in (\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}$ в пространство $\mathbf{Q}_\Psi$ равномерно ограниченных функций времени со значениями размерности $\frac{t}{x}\theta$, обладающих свойствами обобщенных оригиналов.

Ниже получается представление оператора V_Ψ в виде суммы оператора d^{-1} интегрирования в пространстве **Or** обобщенных оригиналов [11, п. 83], линейного оператора $B_\Psi : \mathbf{Q}_{\text{у}} \to \mathbf{Q}_\Psi$ и линейного оператора $\Omega_\Psi : \mathbf{L}_{1\text{у}} \to \mathbf{Q}_\Psi$, отражающего собственные колебательные свойства объекта. Затем получается представление для оператора $V_{\text{м}}$, отражающего реакцию координаты $\varphi(x)$ выхода объекта на входное воздействие u.

6. Представления для операторов V_Ψ и $V_{\text{м}}$

Т е о р е м а 2. *Оригинал Ψ как функции от $p \in \mathbf{C}$, т.е. импульсная переходная функция $w(V_\Psi)$ оператора V_Ψ (реакция его на δ-функцию [11, п. 83]) имеет вид*

$$w(V_\Psi)(t) = s(t)\left[b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \exp(p_n t) + \sum_{k=1}^{\infty} (d_k \cos\omega_k t + f_k \sin\omega_k t)\right], \tag{6.1}$$

где

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t \geq 0, \end{cases} \qquad \omega_k = k\pi\frac{c}{l} \ (k \geq 1),$$

$$b_0 = \frac{r}{\propto l(r+2)}, \quad \psi_n = \frac{cl^2 g_{1n}(\tau_n) + alg_{2n}(\tau_n)}{\left((a\tau_n)^2 + (cl)^2\right)(D_{\text{т}})'(p_n)},$$

$$g_{1n} = \frac{\cosh\left(a\tau_n^2 x/cl^2\right) - \cosh\left(a\tau_n^2(l-x)/cl^2\right)(\cos\tau_n + (r/\tau_n)\sin\tau_n)}{\sinh(a\tau_n^2/cl)},$$

$$g_{2n} = \tau_n \sin\left(\frac{l-x}{l}\tau_n\right) - r\cos\left(\frac{l-x}{l}\tau_n\right),$$

$$d_k = 2(-1)^k l\frac{F_{dk}\cos\left(k\pi\left(l - \frac{x}{l}\right)\right) - G_{dk}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}{\left((ak\pi)^2 + (cl)^2\right)|D_{\text{т}}(\zeta_k)|^2},$$

$$f_k = 2(-1)^k l\frac{G_{fk}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - F_{fk}\cos\left(k\pi\left(l - \frac{x}{l}\right)\right)}{\left((ak\pi)^2 + (cl)^2\right)|D_{\text{т}}(\zeta_k)|^2},$$

$$F_{dk} = G_{dk}\mathrm{Re}A_c\left(\zeta_k\right) - G_{fk}\mathrm{Im}\,A_c\left(\zeta_k\right), \quad F_{fk} = G_{dk}\mathrm{Im}\,A_c\left(\zeta_k\right) + G_{fk}\mathrm{Re}\,A_c\left(\zeta_k\right),$$
$$G_{dk} = c^2\mathrm{Re}\,D_{\text{т}}\left(\zeta_k\right) + a\omega_k\mathrm{Im}\,D_{\text{т}}\left(\zeta_k\right), \quad G_{fk} = a\omega_k\mathrm{Re}\,D_{\text{т}}\left(\zeta_k\right) - c^2\mathrm{Im}\,D_{\text{т}}\left(\zeta_k\right).$$

Из теоремы 2 следует

Т е о р е м а 3. *Оператор* V_Ψ *представляется в виде суммы операторов*

$$V_\Psi = b_0 d^{-1} + B_\Psi + \Omega_\Psi. \tag{6.2}$$

Здесь обозначено: d^{-1} – оператор интегрирования в пространстве **Or** обобщенных оригиналов, B_Ψ – линейный оператор $\mathbf{Q}_{\text{у}} \to \mathbf{Q}_\Psi$, имеющий импульсную переходную функцию $w\left(B_\Psi\right)(t) = s\left(t\right)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n\left(\tau_n\right)\exp\left(p_n t\right)$, Ω_Ψ – линейный оператор $\mathbf{L}_{1\text{у}} \to \mathbf{Q}_\Psi$, имеющий импульсную переходную функцию

$$w\left(\Omega_\Psi\right)(t) = s\left(t\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(d_k\cos\omega_k t + f_k\sin\omega_k t\right).$$

Ниже, см. Приложение 4, будут получены оценки сверху норм операторов d^{-1}, B_Ψ и Ω_Ψ, что позволит дать оценку нормы оператора V_Ψ.

Введем теперь в рассмотрение пространство **U**, состоящее из функций $f \in \left(\mathbf{QL}_1\right)_{\text{у}}$, у которых первообразная (в пространстве обобщенных оригиналов) $d^{-1}f$ также входит в $\left(\mathbf{QL}_1\right)_{\text{у}}$. Норма в пространстве **U**:

$$\|f\|_{\mathrm{U}} = \max\left(\|f\|_{\left(\mathbf{QL}_1\right)_{\text{у}}},\, \vartheta_2^{-1}\left\|d^{-1}f\right\|_{\left(\mathbf{QL}_1\right)_{\text{у}}}\right),$$

где ϑ_2, аналогично ϑ_1, – фиксированная константа, имеющая размерность времени.

Простейшим примером функции из **U** может служить двусторонний импульс размерности u:

$$v_2\left(t\right) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [0, \delta), \\ -1 & \text{при} \quad t \in [\delta, 2\delta), \\ 0 & \text{при} \quad t > 2\delta. \end{cases} \tag{6.3}$$

Введем также в рассмотрение пространство $\mathbf{Q}_{\text{м}}$, состоящее из равномерно ограниченных функций времени со значениями размерности φ, обладающих свойствами обобщенных оригиналов. Норма в $\mathbf{Q}_{\text{м}}$ аналогична норме в пространстве $\mathbf{Q}_{\text{т}}$: $\|f\|_{\mathbf{Q}_{\text{м}} = \sup_{t\geq 0}|f(t)|}$.

Т е о р е м а 4. *Оператор* $V_{\text{м}}$, *переводящий воздействие* $u \in \mathbf{U}$ *в* $\varphi\left(x\right) \in \mathbf{Q}_{\text{м}}$ *в силу уравнений* (2.1) *с граничными условиями* ((2.2), (2.3)), *представляется в виде*

$$V_{\text{м}} = \beta \mathrm{d}^{-1} V_\Psi. \tag{6.4}$$

Норма $V_{\text{м}}$ *как оператора* $\mathbf{U} \to \mathbf{Q}_{\text{м}}$ *оценивается сверху следующим образом:*

$$\|V_{\text{м}}\| \leq \beta\vartheta_2(M_B + \vartheta_1\left(b_0 + M_\Omega\right)). \tag{6.5}$$

7. Достаточное условие сохранения причинности и устойчивости объекта при охвате его обратной связью

Добавим к системе, описываемой уравнениями (2.1) с граничными условиями (2.2), *обратную связь*, т.е. систему вида

$$u = F\,(y, f)\,, \tag{7.1}$$

где $y = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$, f – внешнее воздействие (будем считать его элементом некоторого нормированного пространства $\mathbf{F}$), F – оператор (вообще говоря, нелинейный), переводящий пару (y, f) в u – управляющее воздействие для системы ((2.1)–(2.3)).

Введем в рассмотрение пространство $\mathbf{Q}_2$ функций $y = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, где $\psi_1 \in \mathbf{Q}_{\text{м}}$, $\boldsymbol{\psi}_2 \in \mathbf{Q}_{\text{т}}$; норма в $\mathbf{Q}_2$: $\|y\|_{\mathbf{Q}_2} = \max\left(N_{\text{м}}^{-1}\|\psi_1\|_{\mathbf{Q}_{\text{м}}}, N_{\text{т}}^{-1}\|\psi_2\|_{\mathbf{Q}_{\text{т}}}\right)$, где $N_{\text{м}}$, $N_{\text{т}}$ – нормировочные коэффициенты, имеющие размерности φ и θ соответственно.

Как следует из результатов разделов 4 и 6, для того, чтобы выход y был ограничен, т.е. входил в пространство $\mathbf{Q}_2$, достаточно, чтобы u входило в пространство $\mathbf{U}$. Для обеспечения этого условия оператор F должен отображать пространство $\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{F}$ в $\mathbf{U}$.

Обозначим через F_f отображение $y \to F(y, f)$ (при фиксированном $f \in \mathbf{F}$) и через V – оператор, переводящий функцию $u \in \mathbf{U}$ в пару функций $\begin{pmatrix} V_{\text{м}}\,(u) \\ V_{\text{т}}\,(u) \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}_2$. За норму оператора V выберем $\sup_{u \in \mathbf{U}} \left(\frac{\|V(u)\|_{\mathbf{Q}_2}}{\|u\|_{\mathbf{U}}}\right)$.

Согласно *принципу сжимающих отображений* (см., напр., [13, гл. II, § 4]) для существования и единственности решения замкнутой системы ((2.1)–(2.3), (7.1)) достаточно, чтобы $X_f = V \circ F_f$ был сжимающим, т.е. удовлетворял неравенству

$$\|X_f(y_1) - X_f(y_2)\|_{\mathbf{Q}_2} \leq L_X \|y_1 - y_2\|_{\mathbf{Q}_2} \tag{7.2}$$

с единой для всех $y \in \mathbf{Q}_2$ и $f \in \mathbf{F}$ константой L_X, строго меньшей 1.

Отсюда следует

Т е о р е м а 5. *При выполнении условий*

$$\|F_f\,(y_1) - F_f\,(y_2)\|_{\mathbf{U}} \leq L_F \|y_1 - y_2\|_{\mathbf{Q}_2}, \tag{7.3}$$

$$\|F_f\,(0)\|_{\mathbf{U}} \leq K \|f\|_{\mathbf{F}}, \tag{7.4}$$

где L_F – единая для всех $y \in \mathbf{Q}_2$ константа (размерности u), удовлетворяющая условию

$$L_F < \frac{1}{\|V\|}, \tag{7.5}$$

и K – единая для всех $f \in \mathbf{F}$ константа, существует оператор $A : \mathbf{F} \to \mathbf{Q}_2$, переводящий внешнее воздействие f в решение системы ((2.1)–(2.3), (7.1)). Оператор A обладает свойствами причинности [14] и ограниченности отношения $\frac{\|A(f)\|_{\mathbf{Q}_2}}{\|f\|_{\mathbf{F}}}$, равномерной по всем $f \in \mathbf{F}$.

Доказательство существования оператора A и ограниченности отношения $\frac{\|A(f)\|_{\mathbf{Q}_2}}{\|f\|_{\mathbf{F}}}$ см. в Приложении 6; доказательство причинности оператора A приводится в [10, приложение, п. 1].

Примером оператора F, отображающего пространство $\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{F}$ в $\mathbf{U}$, может служить нелинейный оператор, переводящий пару $\left(\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, f\right)$ (где $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \in$ $\in \mathbf{Q}_2$, $f \in \mathbf{F}$) в функцию

$$\|f\|_{\mathbf{F}} \left\| \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbf{Q}_2} v_2, \tag{7.6}$$

где v_2 – см. (6.5).

8. Заключение

В работе для принятой здесь математической модели линейной распределенной термомеханической системы получены операторные соотношения, описывающие реакции выходных координат системы на управляющее тепловое воздействие. Установлено функциональное пространство управляющих воздействий, для которого эти реакции являются ограниченными функциями времени, и получены оценки сверху для норм операторов, определяющих реакции. На основе принципа сжимающих отображений определен класс *обратных связей* от выходных координат к входному воздействию, для которого обеспечена *устойчивость* замкнутой системы управления (объект, обратная связь), т.е. ограниченность реакций выходных координат системы на внешнее по отношению к ней воздействие. Поскольку полученные оценки норм операторов выражены как функции параметров объекта управления, они могут быть вычислены для любого конкретного объекта, и по результатам вычислений могут быть определены параметры управляющих устройств, обеспечивающих устойчивость замкнутой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1. Выполним преобразование Лапласа уравнения (5.1) по пространственной координате $x \in [0, l]$ с учетом первого из граничных условий (5.2) (см. [11, п. 80, формула (7)]:

$$\left(c^2 q^2 - p^2\right) \overline{\overline{\varphi}}\,(q)\,(p) - \beta q \overline{\overline{\theta}}\,(q)\,(p) = z_0\,(q)\,(p), \tag{П.1.1}$$

где $\overline{\overline{f}}$ – преобразование Лапласа от функции $\overline{f}$ ($\overline{f}(x)(p) \in \mathbf{C}$) по x,

$$z_0\,(q) = c^2 q \overline{\varphi}\,(0) - \beta \overline{\theta}\,(0)\,, \quad q \in \mathbf{C}.$$

Отсюда следует выражение для $\overline{\overline{\varphi}}\,(q)$:

$$\overline{\overline{\varphi}}\,(q)\,(p) = \frac{bq}{q^2 - (p/c)^2} \overline{\overline{\theta}}\,(q)\,(p) + \frac{q\overline{\varphi}\,(0)\,(p) - b\overline{\theta}\,(0)\,(p)}{q^2 - (p/c)^2}, \tag{П.1.2}$$

где $b = \frac{\beta}{c^2}$.

Выражение для $\overline{\overline{\theta}}(q)$ получаем, преобразуя выражение (3.2) для $\overline{\theta}$ по Лапласу по координате x. В силу формул (4) из [11, п. 80] преобразования (по x) функций $\cosh\left(\frac{l-x}{l}\zeta\right)$ и $\sinh\left(\frac{l-x}{l}\zeta\right)$, входящих в (3.2), имеют вид соответственно

$$\frac{q}{q^2-(\zeta/l)^2}\cosh\zeta-\frac{\zeta/l}{q^2-(\zeta/l)^2}\sinh\zeta \quad \text{и} \quad \frac{q}{q^2-(\zeta/l)^2}\sinh\zeta-\frac{\zeta/l}{q^2-(\zeta/l)^2}\cosh\zeta.$$

Поэтому выражение для $\overline{\overline{\theta}}(q)$ имеет вид

$$\overline{\overline{\theta}}(q)=\left(A_c(\zeta)\frac{q}{q^2-(\zeta/l)^2}-A_s(\zeta)\frac{1}{q^2-(\zeta/l)^2}\right)\frac{\overline{u}}{D_{\text{т}}(\zeta)}, \tag{П.1.3}$$

где $A_c(\zeta)=\cosh\zeta+\frac{r}{\zeta}\sinh\zeta$, $A_s(\zeta)=\frac{r}{l}\cosh\zeta+\frac{\zeta}{l}\sinh\zeta$.

При подстановке выражения (П.1.3) для $\overline{\overline{\theta}}(q)$ в (П.1.2) возникает рациональная дробь

$$\frac{1}{\left(q^2-(p/c)^2\right)\left(q^2-(\zeta(p)/l)^2\right)}=\frac{ac^2}{p\gamma(p)}\left(\frac{1}{q^2-(p/c)^2}-\frac{1}{q^2-(\zeta(p)/l)^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{\gamma(p)}\left(\frac{ap}{q^2-(p/c)^2}-\frac{c^2}{q^2-(\zeta(p)/l)^2}\right),$$

где $\gamma(p)=ap-c^2$.

Используя это соотношение и представление для $\overline{\theta}(0)$, следующее из (3.2): $\overline{\theta}(0)=\frac{A_c(\zeta)}{D_{\text{т}}(\zeta)}\overline{u}$ (см. пояснения к (П.1.3)), получаем окончательное выражение для $\overline{\overline{\varphi}}(q)$:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\varphi}}(q)(p)=\frac{\beta}{\gamma(p)}\Bigg[A_c(\zeta(p))\left(\frac{1}{q^2-(p/c)^2}-\frac{1}{q^2-(\zeta(p)/l)^2}\right)-\\ -\frac{a}{p}A_s(\zeta(p))\left(\frac{q}{q^2-(p/c)^2}-\frac{q}{q^2-(\zeta(p)/l)^2}\right)\Bigg]\frac{\overline{u}(p)}{D_{\text{т}}(\zeta(p))}+\\ +\overline{\varphi}(0)(p)\frac{q}{q^2-(p/c)^2}.\end{aligned} \tag{П.1.4}$$

Отсюда переходим к оригиналам по x:

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(x)(p)=\frac{\beta}{\gamma(p)}\Bigg[A_c(\zeta(p))\left(\frac{c}{p}\sinh\left(\frac{p}{c}x\right)-\sqrt{\frac{a}{p}}\sinh\left(\frac{x}{l}\zeta(p)\right)\right)-\\ -\frac{a}{p}A_s(\zeta(p))\left(\cosh\left(\frac{p}{c}x\right)-\cosh\left(\frac{x}{l}\zeta(p)\right)\right)\Bigg]\frac{\overline{u}(p)}{D_{\text{т}}(\zeta(p))}+\overline{\varphi}(0)(p)\cosh\left(\frac{p}{c}x\right).\end{aligned} \tag{П.1.5}$$

Далее, дифференцируя (П.1.5) по x, получаем, что 2-е из граничных условий (5.2) принимает вид

$$\text{(П.1.6)}\qquad \frac{\beta}{\gamma(p)}\Big[A_c\left(\zeta(p)\right)\left(\cosh\left(\frac{p}{c}l\right)-\cosh\zeta(p)\right)-$$

$$-\frac{a}{p}A_s\left(\zeta(p)\right)\left(\frac{p}{c}\sigma(p)-\sqrt{\frac{p}{a}}\sinh\zeta(p)\right)\Big]\frac{\overline{u}(p)}{D_{\text{т}}\left(\zeta(p)\right)}+$$

$$+\overline{\varphi}\left(0\right)(p)\frac{p}{c}\sigma(p)=0,$$

где $\sigma(p)=\sinh\left(\frac{p}{c}l\right)$.

Исключая $\overline{\varphi}\left(0\right)$ из (П.1.5) и (П.1.6) и используя выражения для функций A_c и A_s (см. пояснения к (П.1.3)), получаем окончательное выражение для $\overline{\varphi}\left(x\right)$ в виде (5.3).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2.

1. Представим функцию Ψ (см. (5.4)) в виде суммы $\Psi_1+\Psi_2$, где

$$\text{(П.2.1)}\qquad \Psi_1(p)=c\frac{\cosh\left(px/c\right)-A_c\left(\zeta(p)\right)\cosh\left(p\left(l-x\right)/c\right)}{\gamma(p)\sigma(p)D_{\text{т}}\left(\zeta(p)\right)},$$

$$\text{(П.2.2)}\quad \Psi_2(p)=\frac{1}{\gamma(p)D_{\text{т}}(\zeta(p))}\left(\frac{ar}{l}\cosh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right)+\sqrt{ap}\sinh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right)\right).$$

Для исследования динамических свойств операторов V_{Ψ_j} $(j=1,2)$, имеющих передаточные функции Ψ_j, будем пользоваться теоремой Коши [11, п. 71].

Для применения этой теоремы нужно построить *правильную* систему контуров $\{\mathbf{G}_n, n\geq n_0\}$ и проверить стремление к нулю значений функций Ψ_j $(j=1,2)$ на этих контурах при $n\to\infty$.

2. Сначала введем в рассмотрение область $\mathbf{H}_0=\{p\in\mathbf{C}:\ |p|>|p_{\text{ос}}|\}$ (где $p_{\text{ос}}$ – см. раздел 5) и в этой области построим систему контуров в виде прямоугольников со сторонами $\mathbf{G}_{\pm\text{г}n}=\{p\in\mathbf{C}:|\mathrm{Re}p|\leq H_n,\mathrm{Im}p=\pm L_n\}$ и $\mathbf{G}_{\pm\text{в}\boldsymbol{n}}=$ $=\{p\in\mathbf{C}:\mathrm{Re}p=\pm H_n,|\mathrm{Im}p|\leq L_{\boldsymbol{n}}\}$, где числа H_n и $L_{\boldsymbol{n}}$ выбираются ниже.

При этом, чтобы система контуров $\{\mathbf{G}_{\boldsymbol{n}},n\geq n_0\}$ находилась в области $\mathbf{H}_0$, число n_0 должно удовлетворять условию $\min\left(H_{n_0},L_{n_0}\right)>|p_{\text{ос}}|$.

3. Величину H_n определяем так, чтобы сторона $\mathbf{G}_{-\text{в}\boldsymbol{n}}$ прошла через точку $p_{en}=-a\left(\frac{\tau_{en}}{l}\right)^2$ плоскости $\mathbf{C}$; здесь τ_{en} – точка максимума функции $D_{\text{т}}\left(i\tau\right)=$ $=\propto\left[2\cos\tau+\left(\frac{r}{\tau}-\frac{\tau}{r}\right)\sin\tau\right]$ (см. пояснения к (3.2)).

Так как $\frac{\partial}{\partial t}\left(D_{\text{т}}\left(i\tau\right)\right)=\propto\left[\left(\frac{r}{\tau}-\frac{\tau}{r}\right)\cos\tau-\left(2+\frac{r}{\tau^2}+\frac{1}{r}\right)\sin\tau\right]$, значение τ_{en} определяется как решение уравнения

$$\text{(П.2.3)}\qquad \tan\tau=\tau f_D\left(\tau\right),$$

где $f_D(\tau) = \frac{r^2-\tau^2}{r^2+(2r+1)\tau^2}$. На решениях этого уравнения значения $\sin\tau_{en}$ и $\cos\tau_{en}$ имеют разные знаки, чередующиеся с ростом n; при $n\to\infty$ имеем: $\sin\tau_{en}\to 1$ и $\cos\tau_{en}\to 0$.

Таким образом, величина H_n определяется как $a\left(\frac{\tau_{en}}{l}\right)^2$. Так как число τ_{en} находится в интервале (τ_n,τ_{n+1}) и $\tau_n\in(n,n+1)\,\pi$, величина H_n возрастает с ростом n и имеет порядок роста n^2.

4. Величина L_n выбирается так, чтобы сторона $\mathbf{G}_{\pm\text{г}\boldsymbol{n}}$ не проходила через нули функции σ (см. пояснения к (5.3)). А именно, L_n определяется как $\frac{c}{l}\pi\left(n^2+\frac{1}{2}\right)$. (Для того, чтобы система $\{\mathbf{G}_n, n\geq n_0\}$ контуров была правильной, значения L_n должны иметь тот же порядок роста, что и H_n.)

5. Оценим значения функций, входящих в выражения (П.2.1) и (П.2.2) для Ψ_j $(j=1,2)$, на сторонах контура $\mathbf{G}_{\boldsymbol{n}}$, используя свойства гиперболических функций комплексного переменного. При этом в силу комплексной сопряженности чисел на сторонах $\mathbf{G}_{+\text{г}n}$ и $\mathbf{G}_{-\text{г}\boldsymbol{n}}$ достаточно ограничиться верхней половиной плоскости $\mathbf{C}$.

а) В силу выбора L_n на стороне $\mathbf{G}_{+\text{г}\boldsymbol{n}}$ значение функции σ (см. пояснения к (5.3)) равно $i\cosh\left(\frac{l}{c}\mathrm{Re}p\right)$, а значения функции $\left|\cosh\left(\frac{\xi}{c}p\right)\right|$ (где $\xi\in[0,l]$) не превышают величины $\cosh\left(\frac{l}{c}\mathrm{Re}p\right)$. Поэтому значения отношения $\left|\frac{\cosh((\xi/c)p)}{\sigma(p)}\right|$ не превышают 1.

б) Так как модуль комплексного числа $\zeta(p)$ (см. пояснения к (3.2)) равен $\sqrt{\frac{|p|}{a}}l$, а аргумент его равен половине аргумента числа p, на стороне $\mathbf{G}_{+\text{г}n}$ имеем: $\arg p\in\left[\frac{\pi}{2}-\delta_n,\frac{\pi}{2}+\delta_n\right]$, где $\delta_n=\arctan\frac{H_n}{L_n}$; следовательно, $\arg\zeta(p)\in\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\delta_n}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{\delta_n}{2}\right]$ и

$$\text{(П.2.4)}\qquad \mathrm{Re}\,\zeta(p)=|\zeta(p)|\cos\arg\zeta(p)\geq\frac{|\zeta(p)|}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\delta_n}{2}-\sin\frac{\delta_n}{2}\right)=$$
$$=|\zeta(p)|\,\frac{L_n}{\left(\sqrt{M_n+L_n}+\sqrt{M_n-L_n}\right)\sqrt{M_n}}=$$
$$=|\zeta(p)|\,\frac{L_n}{M_n+L_n+H_n}\sqrt{\frac{M_n+L_n}{M_n}}.$$

(Здесь обозначено: $M_n=\sqrt{H_n^2+L_n^2}$ и использовано соотношение $\sqrt{M_n-L_n}=\frac{H_n}{\sqrt{M_n+L_n}}$).

Так как на $\mathbf{G}_{+\text{г}n}$ имеет место соотношение $|\zeta(p)|\geq\sqrt{\frac{L_n}{a}}l$, значения функции $\mathrm{Re}\,\zeta(p)$ растут при $n\to\infty$ с порядком роста, не меньшим, чем n.

в) Введя обозначение $z_1(\zeta)=\frac{\zeta}{r}+\frac{r}{\zeta}$, выпишем развернутое выражение для $D_\text{т}(\zeta)$:

$$D_\text{т}(\zeta)=\alpha\Big\{(2\cosh\mathrm{Re}\,\zeta+\mathrm{Re}\,z_1(\zeta)\sinh\mathrm{Re}\,\zeta)\cos\mathrm{Im}\,\zeta-$$
$$-\mathrm{Im}\,z_1(\zeta)\cosh\mathrm{Re}\,\zeta\sin\mathrm{Im}\,\zeta+$$
$$+i\Big[(2\sinh\mathrm{Re}\,\zeta+\mathrm{Re}\,z_1(\zeta)\cosh\mathrm{Re}\,\zeta)\sin\mathrm{Im}\,\zeta+\mathrm{Im}\,z_1(\zeta)\sinh\mathrm{Re}\,\zeta\cos\mathrm{Im}\,\zeta\Big]\Big\}.$$

Отсюда следует представление функции $|D_{\text{т}}(\zeta)|^2$ в виде суммы $\sum_{j=1}^{2} F_{Dj}(\zeta)$, где

$$F_{D1}(\zeta) = \propto^2 \left[4\left(\cosh^2 \mathrm{Re}\,\zeta \cos^2 \mathrm{Im}\,\zeta + \sinh^2 \mathrm{Re}\,\zeta \sin^2 \mathrm{Im}\,\zeta\right) + \right. \\ \left. + |z_1(\zeta)|^2 \left(\sinh^2 \mathrm{Re}\,\zeta \cos^2 \mathrm{Im}\,\zeta + \cosh^2 \mathrm{Re}\,\zeta \sin^2 \mathrm{Im}\,\zeta\right)\right], \tag{П.2.5}$$

$$F_{D2}(\zeta) = 2\propto^2 \left(\mathrm{Re}\, z_1(\zeta) \sinh 2\mathrm{Re}\,\zeta - \mathrm{Im}\, z_1(\zeta) \sin 2\mathrm{Im}\,\zeta\right). \tag{П.2.6}$$

Функция $F_{D1}(\zeta)$ оценивается снизу функцией

$$F_D(\zeta) = \propto^2 \left(4 + |z_1(\zeta)|^2\right) \sinh^2 \mathrm{Re}\,\zeta.$$

Для оценки значений функции $F_{D2}(\zeta)$ при больших n заметим, что значения функции $z_1(\zeta)$ при росте n сближаются со значениями функции $\frac{\zeta}{r}$. Оценка снизу роста функции $\mathrm{Re}\,\zeta$ получена в (П.2.4). Оценка же роста функции $\mathrm{Im}\,\zeta$ получается аналогично (П.2.4):

$$\mathrm{Im}\,\zeta(p) = |\zeta(p)| \sin \arg \zeta(p) \le \frac{|\zeta(p)|}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\delta_n}{2} + \sin \frac{\delta_n}{2}\right) = \\ = \frac{|\zeta(p)|}{2} \frac{M_n + L_n + H_n}{\sqrt{M_n (M_n + L_n)}}.$$

Из этой оценки видно, что при достаточно больших n значения функции $F_{D2}(\zeta)$ становятся положительными и потому функция $F_D(\zeta)$ становится оценкой снизу всей функции $|D_{\text{т}}(\zeta)|^2$.

г) Значения модуля функции $A_c(\zeta)$ (см. пояснения к (5.3)), входящей в выражение (П.2.1) для функции $\Psi_1(\zeta)$, оцениваются сверху следующим образом:

$$|A_c(\zeta)| \le \left(1 + \frac{r}{|\zeta|}\right) \cosh \mathrm{Re}\,\zeta, \tag{П.2.7}$$

и потому $\left|\frac{A_c(\zeta)}{D_{\text{т}}(\zeta)}\right| \le \frac{1}{\propto |z_1(\zeta)|} \left(1 + \frac{r}{|\zeta|}\right) \coth \mathrm{Re}\,\zeta$.

Таким образом, отношение $\frac{A_c(\zeta)}{D_{\text{т}}(\zeta)}$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Из содержания подпунктов а)–г) следует, что значения функции Ψ_1 на стороне $\mathbf{G}_{+\text{г}\boldsymbol{n}}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

д) Модуль функции $z_2(p) = \frac{ar}{l} \cosh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right) + \sqrt{ap} \sinh\left(\frac{l-x}{l}\zeta(p)\right)$, входящей в выражение (П.2.2) для функции Ψ_2, оценивается сверху функцией $\left(\frac{ar}{l} + \sqrt{a|p|}\right) \cosh(\mathrm{Re}\,\zeta(p))$. Отношение функции $|z_2|$ к $F_D(\zeta)$ не превышает величины $\frac{ar/l + \sqrt{a|p|}}{\propto |z_1(\zeta(p))|} \coth(\mathrm{Re}\,\zeta(p))$, т.е. остается ограниченным при $n \to \infty$. Поскольку в выражении (П.2.2) для Ψ_2 стоит функция γ с неограниченно растущим при $n \to \infty$ модулем (см. пояснения к (5.3)), получаем, что значения функции Ψ_2 на стороне $\mathbf{G}_{+\text{г}n}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

6. Оценим значения функций, входящих в выражения для Ψ_j $(j=1,2)$, на стороне $\mathbf{G}_{+\text{в}n}$.

а) Значения на $\mathbf{G}_{+\text{в}n}$ функции $|\sigma|$ оцениваются снизу величиной $\left|\sinh\left(\frac{l}{c}\operatorname{Re}p\right)\right|$, т.е. величиной $\sinh\left(\frac{l}{c}H_n\right)$, а значения модуля функции $\cosh\left(\frac{\xi}{c}p\right)$ (где $\xi\in[0,l]$) не превышают величины $\cosh\left(\frac{\xi}{c}\operatorname{Re}p\right)$, т.е. величины $\cosh\left(\frac{l}{c}H_n\right)$. Поэтому значения модуля отношения $\frac{\cosh((\xi/c)p)}{\sigma(p)}$ на $\mathbf{G}_{+\text{в}n}$ не превышают величины $\coth\left(\frac{l}{c}H_{n_0}\right)$, где n_0 – см. п. 2.

б)–д). На верхней половине стороны $\mathbf{G}_{+\text{в}n}$ имеем: $\arg p\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\delta_n\right]$, где δ_n – см. п. 5б); поэтому $\arg\zeta(p)\in\left[0,\frac{\pi}{4}-\frac{\delta_n}{2}\right]$, и

$$\operatorname{Re}\zeta(p)\geq\frac{|\zeta(p)|}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\delta_n}{2}+\sin\frac{\delta_n}{2}\right)\geq\frac{l}{2}\sqrt{\frac{H_n}{a}}\frac{M_n+L_n+H_n}{\sqrt{M_n\left(M_n+L_n\right)}}.$$

Отсюда видно, что $\operatorname{Re}\zeta(p)\to\infty$ при $n\to\infty$ с порядком роста, не меньшим n. Поэтому справедливы те же выводы относительно стремления к нулю при $n\to\infty$ функций $\left|\frac{A_c}{D_\text{т}}(\zeta)\right|$, $\frac{z_2}{\gamma D_\text{т}\circ\zeta}$ и Ψ_j $(j=1,2)$, что в пп. 5б)–д).

7. Теперь оценим значения отношений, содержащихся в выражениях для функций Ψ_j (см. (П.2.1), (П.2.2)) на стороне $\mathbf{G}_{-\text{в}\boldsymbol{n}}$ контура $\mathbf{G}_{\boldsymbol{n}}$. Достаточно провести эту оценку при $\operatorname{Im}p\geq 0$.

а) Повторяя рассуждения п. 6а), получаем, что отношение $\left|\frac{\cosh((\xi/c)p)}{\sigma(p)}\right|$ $(\xi\in[0,\ l])$ на стороне $\mathbf{G}_{-\text{в}n}$ оценивается сверху той же величиной $\coth\left(\frac{l}{c}H_{n_0}\right)$, что и на стороне $\mathbf{G}_{+\text{в}n}$.

б) На верхней половине стороны $\mathbf{G}_{-\text{в}\boldsymbol{n}}$ имеем: $\arg p\in\left[\frac{\pi}{2}+\delta_n,\pi\right]$, и потому $\arg\zeta(p)\in\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\delta_n}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Вводя в рассмотрение угол $\theta_n=\arccos\frac{H_n}{|p|}$, имеем:

$$\operatorname{Re}\zeta(p)=|\zeta(p)|\cos\frac{\arg p}{2}=l\sqrt{\frac{|p|}{2a}\left(1-\cos\theta_n\right)}.\tag{П.2.8}$$

Величина же $\operatorname{Im}\zeta(p)$ вычисляется следующим образом:

$$\operatorname{Im}\zeta(p)=|\zeta(p)|\sin\frac{\arg p}{2}=l\sqrt{\frac{|p|}{2a}\left(1+\cos\theta_n\right)}=l\sqrt{\frac{H_n+|p|}{2a}}.$$

Но так как $H_n=a\left(\frac{\tau_{en}}{l}\right)^2$ (см. п. 3 настоящего приложения), получаем:

$$\operatorname{Im}\zeta(p)=\tau_{en}\sqrt{\frac{H_n+|p|}{2H_n}}.\tag{П.2.9}$$

в) Для величины $\sin^2 \mathrm{Im}\,\zeta(p)$ (см. (П.2.5)), можно записать:

$$\sin^2 \mathrm{Im}\,\zeta(p) - \sin^2 \tau_{en} = \tag{П.2.10}$$

$$= 2 \int\limits_{\tau_{en}}^{\mathrm{Im}\,\zeta(p)} \sin\tau \cos\tau \, d\tau \le \sqrt{2}\,(\mathrm{Im}\,\zeta(p) - \tau_{en}) =$$

$$= \sqrt{2}\tau_{en} \left(\sqrt{\frac{H_n + |p|}{2H_n}} - 1 \right) = \tau_{en} \frac{|p| - H_n}{\sqrt{H_n}\left(\sqrt{|p| + H_n} + \sqrt{2H_n}\right)} =$$

$$= \tau_{en} \frac{\mathrm{Im}^2 p}{\sqrt{H_n}\,(|p| + H_n)\left(\sqrt{|p| + H_n} + \sqrt{2H_n}\right)}.$$

Из (П.2.10) видно, что при выполнении условия: $\mathrm{Im}\, p < \sqrt{\frac{H_n}{\vartheta}}$, где θ – фиксированная константа, имеющая размерность времени, правая часть (П.2.10) стремится к нулю при $n \to \infty$. А так как при этом $|\sin\tau_{en}| \to 1$(см. п. 3), это означает, что $\sin^2 \mathrm{Im}\,\zeta(p)$ также стремится к 1 при $n \to \infty$.

Учитывая этот факт, разобьем верхнюю половину стороны $\mathbf{G}_{-\text{в}\boldsymbol{n}}$ на зоны: $\boldsymbol{\Lambda}_n$, где $\mathrm{Im}\, p \in \left[\sqrt{\frac{H_n}{\theta}}, L_n\right]$, и $\boldsymbol{\Lambda}_{0n}$, где $\mathrm{Im}\, p < \sqrt{\frac{H_n}{\theta}}$.

г) В зоне $\boldsymbol{\Lambda}_n$ имеем: $\arg p \in \left[\frac{\pi}{2} + \delta_n, \pi - \theta_{0n}\right]$, где $\theta_{0n} = \arctan\sqrt{\frac{1}{\vartheta H_n}}$; следовательно, $\arg\zeta(p) \in \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\delta_n}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_{0n}}{2}\right]$. Поэтому

$$\mathrm{Re}\,\zeta(p) = |\zeta(p)| \cos\arg\zeta(p) \ge l\sqrt{\frac{|p|}{a}} \sin\frac{\theta_{0n}}{2} = \sqrt{\frac{|p|}{2a}\left(1 - \frac{H_n}{M_{0n}}\right)},$$

где $M_{0n} = \sqrt{H_n^2 + H_n/\vartheta}$. Таким образом, так как $|p| \ge M_{0n}$, имеем:

$$\mathrm{Re}\,\zeta(p) \ge l\sqrt{\frac{M_{0n} - H_n}{2a}} = l\sqrt{\frac{H_n}{2a\vartheta\,(M_{0n} + H_n)}} = l\sqrt{\frac{1}{2a\vartheta\,(1 + \sec\vartheta_{0n})}}, \tag{П.2.11}$$

что означает ограниченность снизу значений функции $\mathrm{Re}\,\zeta(p)$ при неограниченном росте n.

Функция же $\mathrm{Im}\,\zeta(p)$ в зоне $\boldsymbol{\Lambda}_n$ оценивается сверху следующим образом:

$$\mathrm{Im}\,\zeta(p) = |\zeta(p)| \sin\arg\zeta(p) \le l\sqrt{\frac{p}{a}} \cos\frac{\theta_{0n}}{2} = l\sqrt{\frac{p}{2a}\,(1 + \cos\theta_{0n})} \le \tag{П.2.12}$$

$$\le l\sqrt{\frac{M_n}{2aM_{0n}}\,(M_{0n} + H_n)}.$$

Теперь, оценивая снизу значения функции $|D_{\text{т}}(\zeta)|^2$ в зоне $\boldsymbol{\Lambda}_n$ функцией

$$F_D(\zeta) - \mathrm{Im}\, z_1(\zeta) \sin 2\mathrm{Im}\,\zeta$$

(см. п. 5в), видим, что при достаточно большом n функция $|D_{\text{т}}(\zeta)|^2$ оценивается снизу функцией $\frac{F_D(\zeta)}{2}$.

Поэтому, опираясь на оценку (П.2.7), получаем:

При достаточно большом n имеет место неравенство, аналогичное п. 5г):

$$\left|\frac{A_c(\zeta)}{D_{\text{т}}(\zeta)}\right| \leq \frac{2}{\propto |z_1(\zeta)|}\left(1+\frac{r}{|\zeta|}\right)\coth \operatorname{Re}\zeta.$$

Из этого неравенства в силу ограниченности снизу функции $\operatorname{Re}\zeta$ следует стремление отношения $\left(\frac{A_c}{D_{\text{т}}}\right)\circ\zeta$ к нулю при $n\to\infty$.

Также, аналогично п. 5д) при достаточно большом n модуль отношения $\frac{z_2(p)}{D_{\text{т}}(\zeta(p))}$ оценивается сверху величиной

$$2\frac{ar/l+\sqrt{a|p|}}{\alpha|z_1(\zeta(p))|}\coth \operatorname{Re}\zeta(p).$$

В силу ограниченности снизу функции $\operatorname{Re}\zeta(p)$ модуль этого отношения ограничен сверху при неограниченном росте n, и, следовательно, отношение $\frac{z_2}{\gamma D_{\text{т}}\circ\zeta}$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

д) В зоне $\mathbf{\Lambda}_{0n}$ имеем:

$$\arg p \in (\pi-\theta_{0n},\pi], \quad \arg\,\zeta(p)\in\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_{0n}}{2},\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\operatorname{Re}\zeta(p)=|\zeta(p)|\cos\frac{\arg p}{2}\leq l\sqrt{\frac{|p|}{a}}\sin\frac{\theta_{0n}}{2};$$

$$\operatorname{Im}\zeta(p)=|\zeta(p)|\sin\frac{\arg p}{2}> l\sqrt{\frac{|p|}{a}}\cos\frac{\theta_{0n}}{2}.$$

Учитывая факт стремления к 1 функции $\sin^2\operatorname{Im}\zeta$ при $n\to\infty$, можем оценить снизу функцию $|D_{\text{т}}(\zeta)|^2$ в этой зоне функцией $F_{D0}(\zeta)-$ $-2\alpha^2\operatorname{Im}z_1(\zeta)\sin 2\operatorname{Im}\zeta$, где $F_{D0}(\zeta)=\alpha^2|z_1(\zeta)|^2\cosh^2\operatorname{Re}\zeta\sin^2\operatorname{Im}\zeta$. Из вида последних двух функций следует, что аналогично случаю зоны $\mathbf{\Lambda}_n$ (см. подпункт 7г) при достаточно большом n функция $|D_{\text{т}}(\zeta)|^2$ оценивается снизу функцией $\frac{F_{D0}(\zeta)}{2}$. Поэтому аналогично подпункту 7г) модуль отношения $\frac{A_c(\zeta)}{D_{\text{т}}(\zeta)}$ при достаточно большом n оценивается сверху модулем функции $2\frac{1+r/\zeta}{\alpha z_1(\zeta)}\cosh\operatorname{Re}\zeta$ и, следовательно, стремится к нулю при $n\to\infty$. Модуль же отношения $\frac{z_2}{D_{\text{т}}(\zeta)}$ оценивается сверху модулем функции

$$2\frac{\sqrt{ap}+ar/l}{\propto z_1(\zeta(p))}\cosh\operatorname{Re}\zeta(p)$$

и, следовательно, остается ограниченным при неограниченном росте n. Следовательно, отношение $\frac{z_2}{\gamma D_{\text{т}}\circ\zeta}$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

8. Из изложенного в пп. 2–7 вытекает, что значения функций Ψ_j $(j = 1, 2)$ на контурах $\mathbf{G}_n$ $(n \geq n_0)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, из чего следует возможность применения теоремы Коши [11, п. 71]. В силу этой теоремы функция Ψ_1 представляется суммой ряда, составленного из главных частей этой функции в ее полюсах $p_{\text{ос}}$ и p_n $(n \geq 0)$, а также в нулях функции σ (см. раздел 5). Функция же Ψ_2 представляется суммой ряда, составленного из главных частей этой функции в ее полюсах $p_{\text{ос}}$ и p_n. А именно, так как все эти полюса – простые, имеем:

$$\Psi_1(p) = \frac{b_0}{p} + \frac{b_{1\text{ос}}}{p - p_{\text{ос}}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{1n}}{p - p_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k p + f_k \omega_k}{p^2 + \omega_k^2}, \tag{П.2.13}$$

$$\Psi_2(p) = \frac{b_{2\text{ос}}}{p - p_{\text{ос}}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{p - p_n}, \tag{П.2.14}$$

где

$$b_0 = \operatorname*{res}_{0} \Psi_1, \quad b_{j\text{ос}} = \operatorname*{res}_{p_{\text{ос}}} \Psi_j, \quad b_{jn} = \operatorname*{res}_{p_n} \Psi_{j} \quad (n \geq 0, j = 1, 2),$$
$$d_k = 2 \operatorname*{res}_{i\omega_k} \Psi_1, \quad f_k = -2 \operatorname{Im} \operatorname*{res}_{i\omega_k} \Psi_1.$$

Ниже, в Приложении 3, приводится вычисление значений коэффициентов b_0, b_{jn} $(n \geq 0, j = 1, 2)$, d_k и f_k $(k \geq 1)$ согласно [11, п. 23].

Складывая (П.2.13) и (П.2.14), на основе результатов вычислений в Приложении 3, получаем разложение для функции Ψ:

$$\Psi(p) = \frac{b_0}{p} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n}{p - p_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k p + f_k \omega_k}{p^2 + \omega_k^2}, \tag{П.2.15}$$

где

$$b_0 = \frac{r}{\propto l\,(r+2)}, \quad \psi_n = \sum_{j=1}^{2} b_{jn} = \frac{c l^2 g_{1n} + a l g_{2n}}{\left((a\tau_n)^2 + (cl)^2\right)(D_{\text{т}})'(p_n)},$$
$$g_{1n} = \frac{\cosh\left(a\tau_n^2 x / cl^2\right) - \cosh\left(a\tau_n^2 (l-x)/cl^2\right)\left(\cos\tau_n + (r/\tau_n)\sin\tau_n\right)}{\sinh\left(a\tau_n^2/cl\right)},$$
$$g_{2n} = \tau_n \sin\left(\frac{l-x}{l}\tau_n\right) - r\cos\left(\frac{l-x}{l}\tau_n\right).$$

Выражения для коэффициентов b_0 и b_{jn} получены в Приложении 3, пп. 1 и 3 приложения соответственно; выражения для коэффициентов d_k и f_k получены в п. 5 того же Приложения; выражение для $(D_{\text{т}})'(p_n)$ получено в п. 4 того же Приложения. Поскольку значения $(D_{\text{т}})'(p_n)$ как функции n ограничены снизу константой $\frac{\propto l^2}{2ar}$, значения функции ψ_n оцениваются сверху следующим образом:

$$\psi_n \leq \frac{2r}{\propto \tau_n^2}\left[\frac{hc}{a} + \left(\frac{hc}{a\tau_n} + \frac{1}{l}\right)\sqrt{\tau_n^2 + r^2}\right], \tag{П.2.16}$$

где $h=\coth\left(\frac{a\tau_0^2}{cl}\right)$. Учитывая, что $\tau_n \geq \tau n$ (см. раздел 3), получаем, что ψ_n стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, ряд $R_\psi(t) = = s(t)\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n \exp(p_n t)$ сходится в пространстве $\mathbf{L_1}(\mathbf{R}^+)$ суммируемых на $\mathbf{R}^+ = \{t\in \mathrm{Re} : t>0\}$ функций времени. Сумма этого ряда представляет собой импульсную переходную функцию оператора B_ψ, имеющего передаточную функцию $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_n}{p-p_n}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вычисление выражений для b_0, $b_{j\text{ос}}$, b_{jn} $(j=1,2;\ n\geq 0)$, d_k, f_k $(k\geq 1)$ и $(D_\text{т})'(p_n)(p_n)$.

1.

$$b_0 = \operatorname*{res}_{0}\Psi_1 = -\frac{1-\lim_{p\to 0}A_c(p)}{l\lim_{p\to 0}D_\text{т}(p)} = \frac{r}{\propto l\,(r+2)}. \tag{П.3.1}$$

2. Вследствие того, что $p_\text{ос}$ – устранимая особая точка функции

$$b_{2\text{ос}} = \operatorname*{res}_{p_\text{ос}}\Psi_2 = -\operatorname*{res}_{p_\text{ос}}\Psi_1 = -b_{1\text{ос}}. \tag{П.3.2}$$

3.

$$b_{1n} = \operatorname*{res}_{p_n}\Psi_1 = \frac{cl^2}{(a\tau_n)^2+(cl)^2}\frac{g_{1n}}{(D_\text{т})'(p_n)}, \tag{П.3.3}$$

где $$g_{1n} = \frac{\cosh\left(a\tau_n^2 x/cl^2\right)-\cosh\left(a\tau_n^2(l-x)/cl^2\right)(\cos\tau_n+(r/\tau_n)\sin\tau_n)}{\sinh(a\tau_n^2/cl)};$$

$$b_{2n} = \operatorname*{res}_{p_n}\Psi_2 = \frac{al}{(a\tau_n)^2+(cl)^2}\frac{g_{2n}}{(D_\text{т})'(p_n)}, \tag{П.3.4}$$

где $$g_{2n} = \tau_n\sin\left(\frac{l-x}{l}\tau_n\right) - r\cos\left(\frac{l-x}{l}\tau_n\right).$$

4. Для вычисления величины $(D_\text{т})'(p_n)$, входящей в выражения для b_{jn} $(j=1,2)$, запишем (см. пояснения к (3.2)):

$$\frac{\partial D_\text{т}}{\delta\zeta} = \alpha\left(2+\frac{1}{r}-\frac{r}{\zeta^2}\right)\sinh\zeta + \alpha\left(\frac{\zeta}{r}+\frac{r}{\zeta}\right)\cosh\zeta,$$

$$\zeta'(p_n) = \frac{l}{2\sqrt{ap_n}} = -i\frac{l^2}{2a\tau_n},$$

$$(D_\text{т})'(p_n) = \frac{\partial D_\text{т}}{\delta\zeta}(\zeta(p_n))\,\zeta'(p_n) =$$

$$= \frac{\propto l^2}{a\tau_n}\left[\left(1+\frac{1}{2r}+\frac{r}{2\tau_n^2}\right)\sin\tau_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_n}{r}-\frac{r}{\tau_n}\right)\cos\tau_n\right].$$

Учитывая соотношение (3.4) (см. раздел 3), из которого следует:

$$\sin\tau_n = 2\frac{r\tau_n}{\tau_n^2 + r^2} \quad \text{и} \quad \cos\tau_n = \frac{\tau_n^2 - r^2}{\tau_n^2 + r^2},$$

получаем окончательно:

$$(\text{П.3.5}) \qquad (D_\text{т})'(p_n) = \frac{\propto l^2}{a\left(\tau_n^2 + r^2\right)}\left[1 + 2r + \left(\frac{r}{\tau_n}\right)^2 + \frac{\left(\tau_n^2 - r^2\right)^2}{2r\tau_n^2}\right].$$

Как нетрудно убедиться, значения функции $(D_\text{т})'(p_n)$ монотонно убывают с ростом n и потому превышают ее значение при $n = \infty$, т.е. величину $\frac{\propto l^2}{2ar}$.

5. Вычисление выражений для коэффициентов d_k и f_k начинаем с вычисления $\operatorname*{res}_{i\omega_k} \Psi_1$.

Поскольку для σ (см. пояснения к (5.3)) имеет место выражение

$$\sigma'(i\omega_k) = \frac{l}{c}\cos\left(\frac{l}{c}\omega_k\right) = \frac{l}{c}(-1)^k,$$

получаем:

$$(\text{П.3.6}) \quad \operatorname*{res}_{i\omega_k} \Psi_1 = \frac{(-1)^k c^2}{\left(ia\omega_k - c^2\right) l D_\text{т}(\zeta_k)}\left[\cos\left(\frac{x}{l}k\pi\right) - A_c(\zeta_k)\cos\left(\frac{l-x}{l}k\pi\right)\right],$$

где

$$\zeta_k = \zeta(i\omega_k) = l\sqrt{i\frac{\omega_k}{a}} = y_k(1+i), \quad y_k = \sqrt{\frac{k\pi}{2}\frac{cl}{a}},$$

$$A_\text{c}(\zeta_k) = h_{cck} + \frac{r}{2y_k}\left(h_{csk} + h_{sck}\right) + i\left[h_{ssk} + \frac{r}{2y_k}\left(h_{csk} - h_{sck}\right)\right],$$

$$D_\text{т}(\zeta_k) = \propto \left\{2h_{cck} + \frac{y_k}{r}\left(h_{sck} - h_{csk}\right) + \frac{r}{2y_k}\left(h_{csk} + h_{sck}\right) + \right.$$

$$\left. + i\left[2h_{ssk} + \frac{y_k}{r}\left(h_{sck} + h_{csk}\right) + \frac{r}{2y_k}\left(h_{csk} - h_{sck}\right)\right]\right\},$$

$$h_{cck} = \cosh y_k \, \cos y_k, \quad h_{csk} = \cosh y_k \, \sin y_k,$$

$$h_{sck} = \sinh y_k \, \cos y_k, \quad h_{ssk} = \sinh y_k \, \sin y_k.$$

Таким образом, получаем выражения для d_k и f_k (см. пояснения к (П.2.12)) в виде

$$(\text{П.3.7}) \qquad d_k = 2(-1)^k \frac{c^2}{l}\frac{I_k G_{fk} - R_k G_{dk}}{G_{dk}^2 + G_{fk}^2} =$$

$$= 2(-1)^k l \frac{F_{dk}\cos\left(k\pi\left(l - \frac{x}{l}\right)\right) - G_{dk}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)}{\left((ak\pi)^2 + (cl)^2\right)\left|D_\text{т}(\zeta_k)\right|^2},$$

$$f_k = 2(-1)^k \frac{c^2}{l} \frac{R_k G_{fk} - I_k G_{dk}}{G_{dk}^2 + G_{fk}^2} = \tag{П.3.8}$$

$$= 2(-1)^k l \frac{G_{fk} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) - F_{fk} \cos\left(k\pi\left(l - \frac{x}{l}\right)\right)^2}{\left((ak\pi)^2 + (cl)^2\right) |D_{\text{т}}(\zeta_k)|},$$

где

$$R_k = \cos\left(k\pi \frac{x}{l}\right) - \mathrm{Re}\, A_c(\zeta_k) \cos\left(k\pi \frac{l-x}{l}\right), \quad I_k = \mathrm{Im}\, A_c(\zeta_k) \cos\left(k\pi \frac{l-x}{l}\right),$$

$$G_{dk} = k\pi \frac{ac}{l} \mathrm{Im}\, D_{\text{т}}(\zeta_k) + c^2 \mathrm{Re}\, D_{\text{т}}(\zeta_k), \quad G_{fk} = k\pi \frac{ac}{l} \mathrm{Re}\, D_{\text{т}}(\zeta_k) - c^2 \mathrm{Im}\, D_{\text{т}}(\zeta_k),$$

$$F_{dk} = G_{dk} \mathrm{Re}\, A_c(\zeta_k) + G_{fk} \mathrm{Im}\, A_c(\zeta_k), \quad F_{fk} = G_{dk} \mathrm{Im}\, A_c(\zeta_k) + G_{fk} \mathrm{Re}\, A_c(\zeta_k).$$

(Здесь использовано соотношение

$$G_{dk}^2 + G_{fk}^2 = c^2 \left(\left(\frac{a}{l} k\pi\right)^2 + c^2\right) |D_{\text{т}}(\zeta_k)|^2.)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

1. *Оценка нормы оператора* d^{-1}: $(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}} \to \mathbf{Q}_{\text{у}}$.

Если $f \in (\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}$, то функция $d^{-1} f$ ограничена, т.е. входит в пространство $\mathbf{Q}_{\text{у}}$, и норма ее в этом пространстве не превышает $\int_0^\infty |f(t)| dt$. Поэтому норма d^{-1} как оператора $(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}} \to Q_{\text{у}}$ не превышает числа ϑ_1.

2. *Оценка нормы оператора* B_Ψ.

Мажорируя в (П.2.16) при $\tau_n \geq \tau_0$ функцию $\rho(\tau_n) = \sqrt{\tau_n^2 + r^2}$ линейной функцией от τ_n вида $v(\tau_n) = \tau_n - \tau_0 + \rho(\tau_0) = \tau_n + \frac{r^2}{\tau_0 + \rho(\tau_0)}$, можем оценить сверху сумму ряда $R_\psi(t)$ (см. П.2) в пространстве $L_{1\text{у}}$ суммой числового ряда

$$M_\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\psi_n}{p_n}\right| \leq 2 \frac{rl^2}{\propto a^2 \tau_n^4} \left[hc + \left(\frac{a}{l} + \frac{hc}{\tau_n}\right) v(\tau_n)\right] = \tag{П.4.1}$$

$$= 2 \frac{rl}{\propto a \tau_n^3} \left(1 + \sum_{j=1}^{2} \frac{s_j}{\tau_{\text{п}}^j}\right),$$

где $s_1 = 2h\frac{cl}{a} + \frac{r^2}{\tau_0 + \rho(\tau_0)}$, $s_2 = h\frac{cl}{a}\frac{r^2}{\tau_0 + \rho(\tau_0)}$, h – см. пояснения к (П.2.15).

Используя формулу $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (см. [15, п. 1.1.3.1, формула (16)]) и неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^j} \leq 1 + \int_1^j \frac{1}{\xi^j} = \frac{j}{j-1} \quad (j \geq 2),$$

получаем оценку сверху для M_ψ:

$$M_B = 2\frac{rl}{\alpha a}\left[\frac{1}{\tau_0^3} + \frac{3}{2\tau^3} + h_1\left(\frac{1}{\tau_0^4} + \frac{1}{90}\right) + h_2\left(\frac{1}{\tau_0^5} + \frac{5}{4\tau^5}\right)\right], \tag{П.4.2}$$

где $h_1 = 2\frac{chl}{a} + \frac{r^2}{\tau_0+\rho}$, $h_2 = \frac{chl}{a}\frac{r^2}{\tau_0+\rho}$, $h = \coth\left(\frac{a}{cl}\tau_0^2\right)$, $\rho = \sqrt{r^2+\tau_0^2}$, τ_0 – см. раздел 4.

Величина M_B служит оценкой сверху для нормы оператора B_Ψ.

3. *Оценка нормы оператора* Ω_Ψ: $\mathbf{L}_{1\text{y}} \to \mathbf{Q}_\text{y}$.

Выход оператора Ω_Ψ при входном воздействии u определяется *сверткой* (см. [16, гл. 1, § 4, п. 7]) функций u и $w(\Omega_\Psi)$ – импульсной переходной функции оператора Ω_Ψ:

$$\Omega_\Psi(u)(t) = \int_0^t w(\Omega_\Psi)(t-\tau)\,u(\tau)d\tau. \tag{П.4.3}$$

Из (П.4.3) следует: если функция $w(\Omega_\Psi)$ входит в пространство $\mathbf{Q}_\text{y}$, а функция u входит в пространство $\mathbf{L}_{1\text{y}}$, то выход оператора Ω_Ψ входит в пространство $\mathbf{Q}_\text{y}$, и норма его в этом пространстве не превышает величины $\|w(\Omega_\Psi)\|_{\mathbf{Q}_\text{y}}\|u\|_{\mathbf{L}_{1\text{y}}}$.

Покажем, что функция $w(\Omega_\Psi)$ входит в пространство $\mathbf{L}_{1\text{y}}$, и оценим ее норму в этом пространстве исходя из выражения $w(\Omega_\Psi)(t) = s(t)\sum_{k=1}^{\infty}(d_k\cos\omega_k t + f_k\sin\omega_k t)$ (см. формулировку теоремы 3).

Каждое слагаемое правой части этого выражения может быть представлено в виде $M_k\sin(\omega_k t + \chi_k)$, где $M_k = \sqrt{d_k^2+\omega_k^2}$, $\sin\chi_k = \frac{d_k}{M_k}$, $\cos\chi_k = \frac{f_k}{M_k}$. Следовательно, это слагаемое входит в пространство $\mathbf{Q}_\text{y}$ и имеет в нем норму, равную M_k.

Из представлений (П.3.7) и (П.3.8) для d_k и f_k соответственно следует:

$$M_k = 2\frac{c^2}{l\left(G_{dk}^2+G_{fk}^2\right)}\sqrt{\left(R_kG_{dk}+I_kG_{fk}\right)^2 + \left(I_kG_{dk}-R_kG_{fk}\right)^2} = \\ = 2\frac{c^2}{l}\sqrt{\frac{R_k^2+I_k^2}{G_{dk}^2+G_{fk}^2}} = 2\frac{cv_k}{|D_\text{т}(\zeta_k)|\sqrt{(ak\pi)^2+(cl)^2}}, \tag{П.4.4}$$

где

$$v_k = \\ = \sqrt{\cos^2\left(k\pi\frac{x}{l}\right) + |A_c(\zeta_k)|^2\cos^2\left(k\pi\frac{l-x}{l}\right) - 2\,\mathrm{Re}\,A_c(\zeta_k)\cos\left(k\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(k\pi\frac{l-x}{l}\right)}.$$

Величина v_k оценивается сверху величиной

$$\rho_k = \sqrt{1+|A_c(\zeta_k)|^2 + 2\,|\mathrm{Re}\,A_c(\zeta_k)|}.$$

Для оценки сверху величины M_k выпишем выражение для $|D_{\text{т}}(\zeta_k)|^2$, используя пояснения к (П.3.6):

$$
\begin{aligned}
\text{(П.4.5)} \qquad |D_{\text{т}}(\zeta_k)|^2 = \varkappa^2 \Bigg\{ & 4\left(h_{cck}^2 + h_{ssk}^2\right) + \left(2\frac{y_k^2}{r^2} + \frac{r^2}{2y_k^2}\right)\left(h_{csk}^2 + h_{sck}^2\right) + \\
& + 4\frac{y_k}{r}\left[h_{cck}\left(h_{sck} - h_{csk}\right) + h_{ssk}\left(h_{csk} + h_{sck}\right)\right] + \\
& + 2\frac{r}{y_k}\left[h_{cck}\left(h_{csk} + h_{sck}\right) + h_{ssk}\left(h_{csk} - h_{sck}\right)\right]\Bigg\} = \\
& = \varkappa^2 \Big[4\left(\cosh^2 y_k \cos^2 y_k + \sinh^2 y_k \sin^2 y_k\right) + \\
& + \left(2\frac{y_k^2}{r^2} + \frac{r^2}{2y_k^2}\right)\left(\cosh^2 y_k \sin^2 y_k + \sinh^2 y_k \cos^2 y_k\right) + \\
& + 2\frac{y_k}{r}\left(\sinh 2y_k - \sin 2y_k\right) + \frac{r}{y_k}\left(\sinh 2y_k + \sin 2y_k\right)\Big].
\end{aligned}
$$

Так как $\sinh 2y_k > 2y_k > \sin 2y_k$, правая часть (П.4.5) положительна и может быть оценена снизу функцией

$$
\begin{aligned}
\text{(П.4.6)} \qquad \varkappa^2 \Bigg[& \left(4 + 2\left(\frac{y_k}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2\right)\sinh^2 y_k + \\
& + \left(2\frac{y_k}{r} + \frac{r}{y_k}\right)\left(\sinh 2y_k - |\sin 2y_k|\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Удерживая в (П.4.6) лишь слагаемое с наибольшей скоростью роста по k, получаем оценку снизу для функции $|D_{\text{т}}(\zeta_k)|$:

$$
\text{(П.4.7)} \qquad |D_{\text{т}}(\zeta_k)| \geq \sqrt{2}\,\varkappa\,\frac{y_k}{r}\sinh y_k = \frac{\varkappa}{r}\sqrt{k\pi\frac{cl}{a}}\sinh\left(\sqrt{\frac{k\pi}{2}\frac{cl}{a}}\right).
$$

Функция же $|A_c(\zeta_k)|^2$ представляется в виде

$$
\begin{aligned}
|A_c(\zeta_k)|^2 = h_{cck}^2 + h_{ssk}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2\left(h_{csk}^2 + h_{sck}^2\right) + \\
+ \frac{r}{y_k}\left[h_{cck}\left(h_{csk} + h_{sck}\right) + h_{ssk}\left(h_{csk} - h_{sck}\right)\right]
\end{aligned}
$$

и оценивается сверху функцией

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2\right)\cosh^2 y_k + \frac{1}{2}\frac{r}{y_k}\left(\sinh 2y_k - \sin 2y_k\right) \leq \\
\leq \left(1 + \frac{r}{y_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2\right)\cosh^2 y_k + \frac{1}{2}\frac{r}{y_k},
\end{aligned}
$$

а функция $|\operatorname{Re} A_c(\zeta_k)| = \left| h_{cck} + \frac{1}{2}\frac{r}{y_k}(h_{csk} + h_{sck}) \right|$ оценивается сверху функцией $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{r}{y_k}\right)\cosh y_k$.

Таким образом, величина M_k оценивается сверху следующим образом:

$$M_k \le 2\frac{c\rho_k}{k\pi a\,|D_{\text{т}}(\zeta_k)|} \le 2\frac{r\mu_k}{\propto (k\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{c}{al}}, \tag{П.4.8}$$

где

$$\mu_k = \frac{\rho_k}{\sinh y_k} =$$

$$= \coth y_k \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{y_k}\right)^2 + \frac{r}{y_k} + \left(2 + \sqrt{2}\frac{r}{y_k}\right)\frac{1}{\cosh y_k} + \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r}{y_k}\right)\frac{1}{\cosh^2 y_k}}$$

(μ_k – убывающая функция k, стремящаяся к 1 при $k \to \infty$).

Норма функции $w(\Omega_\Psi)$ в пространстве $\mathbf{Q}_{\text{у}}$ оценивается суммой числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$.

С учетом оценки сверху суммы числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ величиной $1 + \int_0^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$, равной 3, из (П.4.8) получаем: $\|w(\Omega_\Psi)\|_{\mathbf{Q}_{\text{у}}}$ оценивается сверху величиной $M_\Omega = 6\frac{r\mu_1}{\alpha\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{c}{al}}$. Если функция u входит в пространство $\mathbf{L}_{1\text{у}}$, то в силу (П.4.3)

$$\|\Omega_\Psi(u)\|_{\mathbf{Q}_\Psi} \le M_{\boldsymbol{\Omega}}\|u\|_{\mathbf{L}_{1\text{у}}}. \tag{П.4.9}$$

Следовательно, норма оператора Ω_Ψ: $(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}} \to \mathbf{Q}_\Psi$ не превышает отношения $M_{\boldsymbol{\Omega}}\frac{\|u\|_{\mathbf{L}_{1\text{у}}}}{\|u\|_{(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}}}$, т.е. величины $\vartheta_1 M_{\boldsymbol{\Omega}}$ (см. раздел 5).

Таким образом, норма V_Ψ как оператора $(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}} \to \mathbf{Q}_\Psi$ может быть оценена сверху величиной $M_B + \vartheta_1(b_0 + M_\Omega)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Доказательство теоремы 4.

Представление (6.4) для оператора $V_{\text{М}}$ следует из (5.3) и (5.4). В силу коммутирования сверточных операторов [16, гл. 1, § 4, п. 7] d^{-1} и V_Ψ имеем:

$$d^{-1}(V_\Psi(u)) = V_\Psi\left(d^{-1}(u)\right). \tag{П.5.1}$$

Поэтому, если $u \in \mathbf{U}$ (см. раздел 6), то его первообразная $d^{-1}u$ входит в $(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}$, и функция $d^{-1}(V_\Psi(u))$ входит в пространство $\mathbf{Q}_\Psi$ (см. конец раздела 5).

Таким образом, в силу (6.4) оператор $V_{\text{м}}$ отображает пространство $\mathbf{U}$ в $\mathbf{Q}_{\text{м}}$ (см. раздел 6), и норма его, вычисляемая как

$$\sup_{u\in\mathbf{U}}\left(\beta\frac{\left\|d^{-1}(V_\Psi(u))\right\|_{\mathbf{Q}_\Psi}}{\|u\|_{\mathbf{U}}}\right) = \beta\sup_{u\in\mathbf{U}}\left(\frac{\left\|V_\Psi\left(d^{-1}(u)\right)\right\|_{\mathbf{Q}_\Psi}}{\max\left(\|u\|_{(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}}, \vartheta_2^{-1}\left\|d^{-1}(u)\right\|_{(\mathbf{QL}_1)_{\text{у}}}\right)}\right),$$

оценивается сверху величиной $\beta\vartheta_2\left[M_B + \vartheta_1(b_0 + M_\Omega)\right]$.

Доказательство теоремы 5.

При выполнении условий (7.3) и (7.5) в силу линейности оператора V получаем выполнение неравенства (7.2) с единой для всех $y \in \mathbf{Q}$ и $f \in F$ константой $L_X = L_F \|V\|$, строго меньшей 1. Поэтому отображение $X_f = V \circ F$ является сжимающим и потому имеет неподвижную точку; это и означает существование и единственность решения системы ((2.1)–(2.3), (7.1)) при каждом $f \in F$, т.е. существование оператора $A : \mathbf{F} \to \mathbf{Q}_2$, переводящего внешнее воздействие f в решение этой системы относительно y. Оценку сверху нормы этого оператора можно получить из (7.3) и (7.4): при $y = A(f)$ имеют место соотношения

$$\text{(П.6.1)} \qquad \begin{aligned} \|y\|_{\mathbf{Q}_2} = \|X_f(y)\|_{\mathbf{Q}_2} \le \|X_f(y) - X_f(0)\|_{\mathbf{Q}_2} + \|X_f(0)\|_{\mathbf{Q}_2} \le \\ \le L_X \|y\|_{Q_2} + K\,\|V\| \cdot \|f\|_{\mathbf{F}}, \end{aligned}$$

а так как $L_X < 1$, получаем:

$$\text{(П.6.2)} \qquad \frac{\|A(f)\|_{\mathbf{Q}_2}}{\|f\|_{\mathbf{F}}} \le \frac{K}{1 - L_X}.$$

Автор благодарен Л.А. Черемушкиной за творческую помощь в выполнении работы, в частности, за подбор литературы по явлению термоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1964.
2. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
3. *Nayfeh A.H., Nemat-Nasser S.* Thermoelastic waves in solids with thermal relaxation // Acta Mechanica. 1971. V. 12. P. 53–69.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. Перевод с польского. М.: Мир, 1975.
   Novacki W. Teoria spręžystości. Warszawa: Pacstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.
5. *Jordan P.M., Puri P.* On the propagation of plane waves in type – I11 thermoelastic media // Proc. Royal Soc. Lond. 2004. V. 460. P. 3203–3221.
6. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.
7. *Бабенков М.Б.* Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 126–137.
8. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Наука, 2013.
9. *Торсукова Е.Б., Христич Д.В.* Постановка связанной динамической задачи термоупругости для стержня // Вестник Тулгу. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». 2016. Вып. 1. С. 88–92.
10. *Солнечный Э.М.* Исследование условий причинности и устойчивости системы управления линейным распределенным объектом // АиТ. 2006. № 4. С. 53–85.

11. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Лань, 2002.
12. *Солнечный Э.М.* О причинности системы теплопроводности с нелинейной обратной связью по граничным условиям // АиТ. 2002. № 9. С. 15–26.
13. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
14. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. Перевод с немецкого. М.: Наука, 1978.

    Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferenzialgleichungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1974.
15. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Совм. изд. Лейпциг: Тойбнер; М.: Наука, 1981.
16. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 04.11.2018

После доработки 22.08.2020

Принята к публикации 15.01.2021