

© 2021 г. М. ВАЙЧЮЛИС, канд. физ.-мат наук (marijus.vaiculis@mif.vu.lt)
(Институт науки данных и цифровых технологий Вильнюсского университета,
Вильнюс, Литва),

Н.М. МАРКОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (nat.markovich@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ В СУЖЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПАРЕТО¹

Статья посвящена задаче оценивания параметров суженного распределения Парето. Методом моментов получены новые оценки, зависящие от дополнительного параметра. Доказано, что совместное асимптотическое распределение полученных оценок является гауссовским. Предложена процедура, позволяющая выбрать дополнительный параметр оптимально. Проводится сравнение новых оценок с соответствующими оценками максимального правдоподобия. В качестве примера приведено применение новых оценок к данным заболеваемости КОВИД-19. Предлагается новый алгоритм генератора случайных величин с суженным распределением Парето.

Ключевые слова: суженное распределение Парето, оценивание параметров, оценки методом моментов, оценки максимального правдоподобия, заболеваемость Ковид-19.

DOI: 10.31857/S0005231021080043

1. Введение

Случайная величина (сл.в.) X называется распределенной по (экспоненциально) суженному распределению Парето, если она имеет кумулятивную функцию распределения (ф.р.)

$$(1) \quad F_{a,\beta,\theta}(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\beta \exp\left\{\frac{a-x}{\theta}\right\}, \quad x \geq a,$$

где $a > 0$ – минимальное значение сл.в. X , $\beta > 0$ – параметр формы и $\theta \geq a$ – параметр верхнего среза. Плотность распределения вероятностей этого распределения имеет вид

$$f_{a,\beta,\theta}(x) = \left(\frac{\beta}{x} + \frac{1}{\theta}\right) \left(\frac{a}{x}\right)^\beta \exp\left\{\frac{a-x}{\theta}\right\}, \quad x \geq a.$$

Суженное распределение Парето, также известное как модифицированное распределение Гутенберга–Рихера, было впервые предложено В. Парето в [1]. В [2] было отмечено следующее свойство суженного распределения Парето. Пусть сл.в. χ_1 имеет распределение Парето с ф.р. $F_{a,\beta}(x) = 1 - (a/x)^\beta$,

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке второго автора грантом Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00090.

$x \geq a$, а χ_2 – сл.в., имеющая экспоненциальное распределение с ф.р. $F_\theta(x) = 1 - \exp\{-x/\theta\}$, $x \geq 0$, причем χ_1 и χ_2 – независимые сл.в. Тогда сл.в.

$$(2) \quad X = \min\{\chi_1, \chi_2 + a\}$$

имеет ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, $x \geq a$. Этот факт используется при моделировании суженного распределения Парето, см. [2–4].

Следующее определение основано на нарушении условия Крамера для распределений с тяжелыми хвостами.

Определение 1 [5]. Ф.р. F называется имеющей тяжелый хвост (справа), если

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} F(dx) = \infty$$

для всех $t > 0$. Если F не удовлетворяет условию (3), то называется имеющей легкий хвост.

Например, ф.р. Парето $F_{a,\beta}(x)$, $x \geq a$ имеет тяжелый хвост, а ф.р. экспоненциального закона – легкий хвост. Ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, $x \geq a$ имеет легкий хвост. Действительно, в этом случае для $0 < t < 1/\theta$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{tX} &= \frac{e^{at}}{a(1-t\theta)} + \beta \left(1 - \frac{1}{a(1-t\theta)}\right) \left(\frac{a(1-t\theta)}{\theta}\right)^\beta \times \\ &\times \exp\left\{at + \frac{a(1-t\theta)}{\theta}\right\} \Gamma\left(-\beta, \frac{a(1-t\theta)}{\theta}\right), \end{aligned}$$

где $\Gamma(-\beta, x) = \int_x^\infty t^{-\beta-1}e^{-t}dt$ – неполная гамма-функция. Здесь и далее \mathbb{E} обозначает математическое ожидание. Напомним, что при $x > 0$ последний интеграл сходится для всех вещественных β .

Суженное распределение Парето используется для моделирования магнитуды землетрясений в сейсмологии [3, 4], а также размеров лесных пожаров [6, 7]. В [8] было найдено, что суженное распределение Парето хорошо описывает размеры деревьев. В [9] поддерживается идея, что финансовые данные следуют этому распределению, см. [9]. В настоящей работе, по видимому впервые, суженное распределение Парето применяется к данным КОВИД-19, относящимся к разным странам.

Обозначим через (X_1, \dots, X_n) случайную выборку, где X_1, \dots, X_n – независимые копии сл.в. X с ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, $x \geq a$.

Оценки максимального правдоподобия (МП) $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ параметров β и $\lambda = a/\theta$ являются решением следующих уравнений:

$$(4) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \hat{\lambda}_n^{(1)} \left((\bar{X}_n / \hat{a}_n) - 1 - \hat{b}_n(X_i / \hat{a}_n) \right)} = 1,$$

$$\hat{b}_n \hat{\beta}_n^{(1)} + \left(\frac{\bar{X}_n}{\hat{a}_n} - 1 \right) \hat{\lambda}_n^{(1)} = 1,$$

где

$$(5) \quad \begin{aligned} \hat{a}_n &= \min\{X_1, \dots, X_n\}, \\ \hat{b}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{X_i}{\hat{a}_n} \right), \\ \bar{X}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \end{aligned}$$

Нелинейное уравнение (4) может быть решено только численно. Это можно сделать, например, методом Ньютона-Рафсона с начальной точкой $\bar{X}_n - \hat{a}_n$, см. [2, 4].

Обозначим

$$\begin{aligned} s_{11}(\beta, \lambda) &= \mathbb{E} \left(\frac{\chi^2}{(\beta + \lambda\chi)^2} \right), \\ s_{22}(\beta, \lambda) &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{(\beta + \lambda\chi)^2} \right), \\ s_{12}(\beta, \lambda) &= \mathbb{E} \left(\frac{\chi}{(\beta + \lambda\chi)^2} \right), \end{aligned}$$

где сл.в. χ имеет ф.р. $F_{1,\beta,1/\lambda}$. В следующей теореме собраны известные результаты о совместной асимптотической нормальности $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_n^{(1)}$. В частности, случай, когда a известно, обсуждался в [3]. В случае неизвестного a приведенный далее результат является прямым следствием теоремы 2.4.(б) и леммы 2.6.(а) в [9].

Теорема 1. Предположим, что (X_1, \dots, X_n) – выборка из распределения с ф.р. $F_{a,\beta,a/\lambda}$. Предположим, что параметр a известен или оценивается по формуле (5). Тогда

$$\sqrt{n} \left(\hat{\beta}_n^{(1)} - \beta, \hat{\lambda}_n^{(1)} - \lambda \right) \xrightarrow{d} (\xi_1, \xi_2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где \xrightarrow{d} обозначает сходимость по распределению. Здесь (ξ_1, ξ_2) – гауссовский вектор с $\mathbb{E}(\xi_1) = \mathbb{E}(\xi_2) = 0$, $\mathbb{E}(\xi_1^2) = S_1^2(\beta, \lambda)$, $\mathbb{E}(\xi_2^2) = S_2^2(\beta, \lambda)$ и $\mathbb{E}(\xi_1\xi_2) = S_{12}(\beta, \lambda)$, где

$$\begin{aligned} S_1^2(\beta, \lambda) &= \frac{s_{11}(\beta, \lambda)}{s_{11}(\beta, \lambda)s_{22}(\beta, \lambda) - s_{12}^2(\beta, \lambda)}, \\ S_2^2(\beta, \lambda) &= \frac{s_{22}(\beta, \lambda)}{s_{11}(\beta, \lambda)s_{22}(\beta, \lambda) - s_{12}^2(\beta, \lambda)}, \\ S_{12}(\beta, \lambda) &= -\frac{s_{12}(\beta, \lambda)}{s_{11}(\beta, \lambda)s_{22}(\beta, \lambda) - s_{12}^2(\beta, \lambda)}. \end{aligned}$$

Оценки МП $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ имеют несколько недостатков. Во-первых, как отмечено выше, решение уравнения (4) может быть получено лишь численно.

Более того, оно в основном зависит лишь от нескольких самых больших наблюдений выборки, см. [4]. Во-вторых, в статистической практике часто используются усеченные слева выборки, а для таких выборок оценка МП для параметра $\theta = a/\lambda$ является существенно смещенной, см. подробнее [4]. Поэтому нужны оценки параметров β и λ , построенные другими методами.

Целью работы являются предложение новых оценок параметров суженного распределения Парето, их теоретическое исследование и применение этого распределения для моделирования данных заболеваемости КОВИД-19.

Содержание статьи следующее. В разделе 2 вводятся оценки параметров β и λ суженного распределения Парето с помощью метода моментов. Приводится главный результат, в котором утверждается, что предлагаемые оценки для β и λ имеют совместное асимптотически нормальное распределение. В разделе 3 обсуждается моделирование сл.в. с суженным распределением Парето. В разделе 4 нововведенные оценки сравниваются с оценками, полученными методом МП. Раздел 5 содержит приложение к данным заболеваемости КОВИД-19. В разделе 6 сформулированы выводы. Доказательства содержатся в Приложении.

2. Оценивание параметров суженного распределения Парето методом моментов

Напомним, что однопараметрическое преобразование Бокса–Кокса с параметром $r \in \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$h_r(x) = \begin{cases} \ln(x), & r = 0, \\ (x^r - 1)/r, & r \neq 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$(6) \quad \nu_r = \mathbb{E}(h_r(X/a)),$$

где X – сл.в. с ф.р. $F_{a,\beta,a/\lambda}$. Нетрудно убедиться, что

$$(7) \quad \nu_r = \lambda^{\beta-r} e^\lambda \Gamma(r - \beta, \lambda), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Неполная гамма-функция удовлетворяет свойству

$$(8) \quad \Gamma(r - \beta + 1, \lambda) = \lambda^{r-\beta} e^{-\lambda} + (r - \beta) \Gamma(r - \beta, \lambda),$$

см., например, [10]. Комбинируя (7) и (8), получим

$$(9) \quad \Lambda_r(\beta, \lambda) = 0,$$

где $\Lambda_r(\beta, \lambda) = \lambda \nu_{r+1} - (r - \beta) \nu_r - 1$. Система уравнений $\Lambda_r(\beta, \lambda) = 0$, $\Lambda_{r+1}(\beta, \lambda) = 0$ может быть представлена как

$$\begin{cases} \lambda \nu_{r+1} + \beta \nu_r = 1 + r \nu_r, \\ \lambda \nu_{r+2} + \beta \nu_{r+1} = 1 + (1 + r) \nu_{r+1}. \end{cases}$$

По теореме 4 из [11] неравенство $\nu_{r+1}^2 - \nu_r \nu_{r+2} < 0$ выполнено для всех $r \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ и $\lambda > 0$. Поэтому последняя система уравнений относительно β и λ имеет единственное решение

$$(10) \quad \beta = r - \frac{g^{(1)}(\nu_{r+1}, \nu_{r+2})}{g^{(3)}(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2})}, \quad \lambda = \frac{g^{(2)}(\nu_r, \nu_{r+1})}{g^{(3)}(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2})},$$

где

$$(11) \quad g^{(1)}(x_2, x_3) = x_2 - x_3 + x_2^2,$$

$$(12) \quad g^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + x_1 x_2,$$

$$(13) \quad g^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 - x_2^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Заменив ν_r , ν_{r+1} , ν_{r+2} в (10) их выборочными аналогами $\hat{\nu}_{n,r}$, $\hat{\nu}_{n,r+1}$, $\hat{\nu}_{n,r+2}$, где

$$\hat{\nu}_{n,r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_r \left(\frac{X_i}{\hat{a}_n} \right),$$

а (X_1, \dots, X_n) – случайная выборка с ф.р. $F_{a,\beta,a/\lambda}$, введем новое семейство оценок для пары параметров (β, λ) :

$$(14) \quad \hat{\beta}_{n,r}^{(2)} = r - \frac{g^{(1)}(\hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2})}{g^{(3)}(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2})},$$

$$(15) \quad \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} = \frac{g^{(2)}(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1})}{g^{(3)}(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2})}.$$

Предложенные оценки $\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r}^{(2)}$ зависят от параметра Бокса–Кокса r . Оптимальный выбор этого параметра получен в разделе 4.

Перед формулировкой главного результата введем обозначения:

$$c_{0,r} = \lambda \nu_{r+3} - 2\nu_{r+2} - 1, \quad c_{1,r} = 1 - 2\lambda \nu_{r+2}, \quad c_{2,r} := \lambda \nu_{r+1}, \\ c_{3,r} = -\lambda \nu_{r+2} + \nu_{r+1} + 1, \quad c_{4,r} = 2\lambda \nu_{r+1} + \nu_r - 1, \quad c_{5,r} = -\lambda \nu_r.$$

Пусть Y_t , $t \in \mathbb{R}$ – гауссовский процесс со средним 0 и ковариационной функцией

$$(16) \quad \rho_{s,t} = \mathbb{E}(Y_s Y_t) = \text{Cov}(h_s(\chi), h_t(\chi)),$$

где сл.в. χ та же, что и в теореме 1. В случае $st \neq 0$ ковариации $\rho_{s,t}$ могут быть представлены следующим образом:

$$(17) \quad \rho_{s,t} = \frac{\nu_{s+t} - \nu_t}{s} + \frac{\nu_{s+t} - \nu_s}{t} - \nu_s \nu_t.$$

Ковариации $\rho_{0,t}$, $t \in \mathbb{R}$ могут быть выражены в терминах G -функции Мейера (см. определение в [12]).

Теорема 2. Предположим, что X_1, \dots, X_n – случайная выборка из распределения с ф.р. $F_{a,\beta,a/\lambda}$ и $r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(18) \quad \sqrt{n} \left(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)} - \beta, \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} - \lambda \right) \xrightarrow{d} (\eta_{1,r}, \eta_{2,r}), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $(\eta_{1,r}, \eta_{2,r})$ – гауссовский вектор со средними ноль, дисперсиями $\mathbb{E}(\eta_{1,r}^2) = \sigma_{1,r}^2(\beta, \lambda)$, $\mathbb{E}(\eta_{2,r}^2) = \sigma_{2,r}^2(\beta, \lambda)$ и ковариацией $\mathbb{E}(\eta_{1,r}\eta_{2,r}) = \sigma_{12,r}(\beta, \lambda)$, где

$$(19) \quad \sigma_{1,r}^2(\beta, \lambda) = \frac{1}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} \sum_{i,j=0}^2 c_{i,r} c_{j,r} \rho_{r+i,r+j},$$

$$(20) \quad \sigma_{2,r}^2(\beta, \lambda) = \frac{1}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} \sum_{i,j=0}^2 c_{i+3,r} c_{j+3,r} \rho_{r+i,r+j},$$

$$(21) \quad \sigma_{12,r}(\beta, \lambda) := \frac{1}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} \sum_{i,j=0}^2 c_{i,r} c_{j+3,r} \rho_{r+i,r+j}.$$

Если параметр a известен, то может быть применена очевидная модификация оценок $\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r}^{(2)}$, для которых соотношение (18) остается верным.

Рассмотрим оценивание параметра срезки θ , когда другие параметры a и β известны. Комбинируя $\theta = a/\lambda$ и (9), получим

$$\theta = \frac{a\nu_{r+1}}{1 + (r - \beta)\nu_r}.$$

Заменяя ν_r и ν_{r+1} на $\hat{\nu}_{n,r}$ и $\hat{\nu}_{n,r+1}$ соответственно, получаем оценку

$$\hat{\theta}_{n,r} = \frac{a\hat{\nu}_{n,r+1}}{1 + (r - \beta)\hat{\nu}_{n,r}}.$$

Заметим, что оценка $\hat{\theta}_{n,r}$ совпадает с оценкой параметра θ , введенной в [4]. Обобщим теорему 1 из [4].

Теорема 3. Предположим, что X_1, \dots, X_n – случайная выборка из распределения с ф.р. $F_{a,\beta,\theta}$, где a и β – известные параметры. Пусть $r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(22) \quad \sqrt{n} \left(\hat{\theta}_{n,r} - \theta \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_r^2), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$(23) \quad \sigma_r^2 = \frac{\theta^2}{\nu_{r+1}^2} \left(\left(\frac{\theta(r - \beta)}{a} \right)^2 \rho_{r,r} + \frac{2\theta(r - \beta)}{a} \rho_{r,r+1} + \rho_{r+1,r+1} \right),$$

а $\rho_{s,r}$ определено по (16).

3. Моделирование случайных величин с суженным распределением Парето

Для моделирования сл.в. с непрерывной ф.р. в ряде случаев можно использовать метод обратной функции: если F непрерывная и строго монотонно возрастающая ф.р., а F^{\leftarrow} – обратная к ней функция, то сл.в. $F^{\leftarrow}(U)$, где U равномерно распределенная на $(0, 1)$ сл.в., имеет ф.р. F , см. теорему 2.1 в [13]. Например, сл.в. $F_{a,\beta}^{\leftarrow}(U)$, где $F_{a,\beta}^{\leftarrow}(y) = a(1-y)^{-1/\beta}$, $0 < y < 1$, распределена по закону Парето $F_{a,\beta}(x)$, $x \geq a$, а сл.в. $\tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(U)$, где $\tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(y) = a - \theta \ln(1-y)$, $0 < y < 1$, имеет ф.р. $\tilde{F}_{a,\theta}(x) = F_{\theta}(x-a)$, $x \geq a$.

В [2] отмечено, что сл.в. с суженным распределением Парето и заданными параметрами a, β, θ можно смоделировать, взяв за основу (2). А именно, сл.в.

$$\min \left\{ F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-U_1), \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-U_2) \right\}$$

имеет ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, где U_1 и U_2 – независимые равномерно распределенные на $(0, 1)$ сл.в. Неверное применение этого метода содержится в [14], где утверждается, что сл.в.

$$V = \min \left\{ F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-U), \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-U) \right\},$$

где U – равномерно распределенная на $(0, 1)$ сл.в., имеет ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$. Перед получением распределения сл.в. V напомним, что для $x \geq -1/e$ функция Ламберта $W(x)$ определена как решение уравнения

$$W(x) \exp\{W(x)\} = x.$$

Для $x - 1/e \leq x < 0$ существует два возможных вещественных значения функции $W(x)$ (см. рис. 1 в [15]). Обычно ветвь, удовлетворяющая $W(x) \geq -1$, обозначается как $W_0(x)$, а ветвь, удовлетворяющая $W(x) \leq -1$, – как $W_{-1}(x)$.

Предложение 1. Пусть $c = a/(\beta\theta)$. Если $c \geq 1$, то сл.в. V имеет ф.р. $\tilde{F}_{a,\theta}(x)$, $x \geq a$. Если $0 < c < 1$, то для $x \geq a$

$$(24) \quad P(V \leq x) = \begin{cases} F_{a,\beta}(x), & x < -(a/c)W_{-1}(-c \exp\{-c\}), \\ \tilde{F}_{a,\theta}(x), & x \geq -(a/c)W_{-1}(-c \exp\{-c\}). \end{cases}$$

Заметим, что ф.р. $P(V \leq x)$, $x \geq a$ может быть переписана следующим образом. Для любого $c > 0$

$$P(V \leq x) = \max \left\{ F_{a,\beta}(x), \tilde{F}_{a,\theta}(x) \right\}, \quad x \geq a.$$

Очевидно, что $P(V > x) / (1 - \tilde{F}_{a,\theta}(x)) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\max \left\{ F_{a,\beta}(x), \tilde{F}_{a,\theta}(x) \right\}$, $x \geq a$ можно рассматривать как еще один способ сужения распределения Парето экспоненциальным законом. В этой статье оценивание параметров ф.р. $\max \left\{ F_{a,\beta}(x), \tilde{F}_{a,\theta}(x) \right\}$, $x \geq a$ рассматриваться не будет.

В [9] моделирование сл.в. с распределением суженное Парето осуществляется с помощью метода исключения. Подробно этот метод изложен в [13]. Заметим, что функция, обратная к ф.р. $F_{a,\beta,\theta}(x)$, $x \geq a$, выражается как

$$(25) \quad F_{a,\beta,\theta}^{\leftarrow}(y) = \frac{a}{c} W_0 \left(ce^c(1-y)^{-1/\beta} \right), \quad 0 < y < 1,$$

где c та же, что и в Предложении 1. Поэтому применение теоремы 2.1 из [13] позволяет моделировать сл.в. с распределением суженного Парето с помощью метода обратной функции.

Предложение 2. Если U – равномерно распределенная сл.в. на интервале $(0, 1)$, то $F_{a,\beta,\theta}^{\leftarrow}(1-U)$ имеет ф.р. $F_{a,\beta,\theta}$.

4. Сравнение пар оценок параметров методом максимума правдоподобия

$$\left(\hat{\beta}_n^{(1)}, \hat{\lambda}_n^{(1)} \right) \text{ и методом моментов } \left(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} \right)$$

Напомним, что обобщенная дисперсия гауссовского вектора $(\eta_{1,r}, \eta_{2,r})$, определенного в теореме 3, – это определитель его ковариационной матрицы:

$$(26) \quad \text{GV}_r(\beta, \lambda) = \sigma_{1,r}^2(\beta, \lambda)\sigma_{2,r}^2(\beta, \lambda) - \sigma_{12,r}^2(\beta, \lambda).$$

Обобщенная дисперсия $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ характеризует степень случайного разброса. Выберем $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ в качестве асимптотической меры эффективности оценок $\left(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)} \right)$. $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ зависит от параметра Бокса–Кокса r . Естественно выбрать такое r , которое бы минимизировало $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$. Однако $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ имеет сложную форму, а именно, при $r + i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, 4$, имеем

$$(27) \quad \text{GV}_r(\beta, \lambda) = \frac{\lambda^2(d_{1,r}(\beta, \lambda) + d_{2,r}(\beta, \lambda)\Gamma(2r - \beta, \lambda) + d_{3,r}(\beta, \lambda)\Gamma^2(2r - \beta, \lambda))}{(\lambda^{2r} + d_{4,r}(\beta, \lambda)\Gamma(r - \beta, \lambda) + d_{5,r}(\beta, \lambda)\Gamma^2(r - \beta, \lambda))^2},$$

где

$$\begin{aligned} d_{1,r}(\beta, \lambda) &= -\lambda^{4r}(2\beta + 2\beta r + 2\lambda r - 2r - 1), \\ d_{2,r}(\beta, \lambda) &= -2e^\lambda \lambda^{\beta+2r}(-\beta^2 - \beta\lambda + 2\beta r^2 + 2\lambda r^2 \\ &\quad - 4r^2 - \beta^2 r - 2\beta\lambda r + 3\beta r - \lambda^2 r - 2r), \\ d_{3,r}(\beta, \lambda) &= e^{2\lambda} \lambda^{2\beta}(2r - \beta)(\beta + 4r^2 + 2r), \\ d_{4,r}(\beta, \lambda) &= -e^\lambda \lambda^{\beta+r}(\beta + \lambda - r + 1), \\ d_{5,r}(\beta, \lambda) &= -e^{2\lambda} \lambda^{2\beta}(r - \beta). \end{aligned}$$

Поэтому в статье ее минимизация по r произведена численно, с использованием метода главных осей. Точку глобального минимума r^* на \mathbb{R} будем называть оптимальным выбором параметра r . Контурный график (со значениями изолиний) r^* как функции от β и λ представлен на рис. 1.

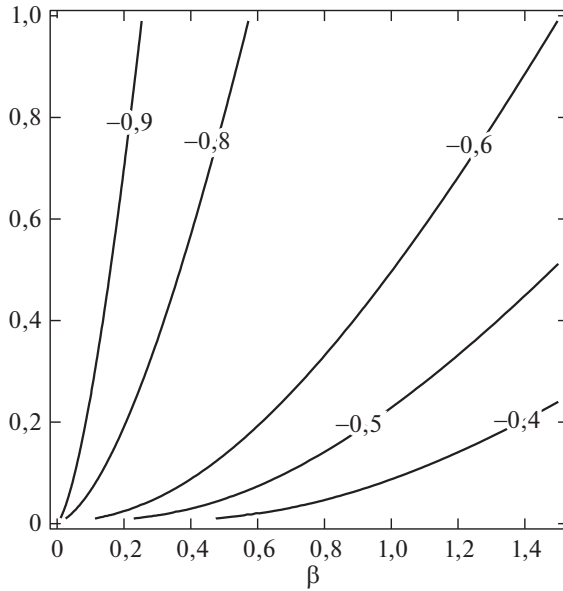


Рис. 1. Контурный график функции $r^*(\beta, \lambda)$.

Асимптотическую относительную эффективность (АОЭ) для $(\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)})$ в отношении $(\hat{\beta}_n^{(1)}, \hat{\lambda}_n^{(1)})$ определим как отношение обобщенных дисперсий для гауссовских векторов $(\eta_{1,r}, \eta_{2,r})$ и (ξ_1, ξ_2) , определенных в теоремах 2 и 1 соответственно:

$$\text{ARE}(\beta, \lambda) = \frac{\sigma_{1,r^*}^2(\beta, \lambda)\sigma_{2,r^*}^2(\beta, \lambda) - \sigma_{12,r^*}^2(\beta, \lambda)}{S_1^2(\beta, \lambda)S_2^2(\beta, \lambda) - S_{12}^2(\beta, \lambda)}, \quad \beta > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Аналогично определим АОЭ для $\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)}$ в отношении $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ в отношении $\hat{\lambda}_n^{(1)}$:

$$\text{ARE}_1(\beta, \lambda) = \frac{\sigma_{1,r^*}^2(\beta, \lambda)}{S_1^2(\beta, \lambda)}, \quad \text{ARE}_2(\beta, \lambda) = \frac{\sigma_{2,r^*}^2(\beta, \lambda)}{S_2^2(\beta, \lambda)}, \quad \beta > 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Контурный график на рис. 2 (слева) показывает, что $\text{ARE}(\beta, \lambda)$ близка к 1 почти во всем прямоугольнике $(\beta, \lambda) \in (0, 1, 5] \times (0, 1)$. Теоретическое доминирование оценок $(\hat{\beta}_n^{(1)}, \hat{\lambda}_n^{(1)})$ более значимо в области, где величины λ малы. Это замечание справедливо для $\text{ARE}_i(\beta, \lambda)$, $i \in \{1, 2\}$, см. рис. 3 (слева) и рис. 4 (слева) соответственно.

Далее с помощью численного моделирования продемонстрируем качество работы предложенных оценок. Во время моделирования делается сравнение между оценками $(\hat{\beta}_n^{(1)}, \hat{\lambda}_n^{(1)})$ и $(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)})$, используя выборки среднего и малого объема n из распределения (1). Во всем моделировании предполагается, что параметр $a = 1$ неизвестен и оценивается, используя \hat{a}_n .

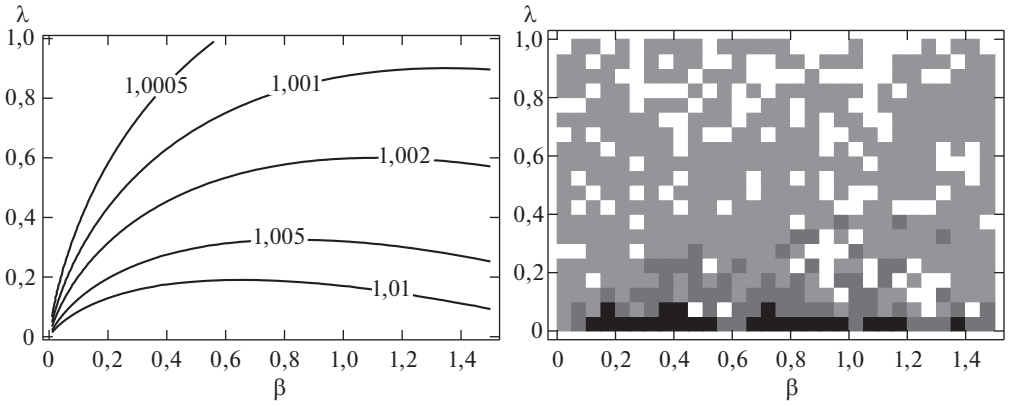


Рис. 2. Контурный график $ARE(\beta, \lambda)$ (слева) и график $\widehat{ARE}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ (справа).

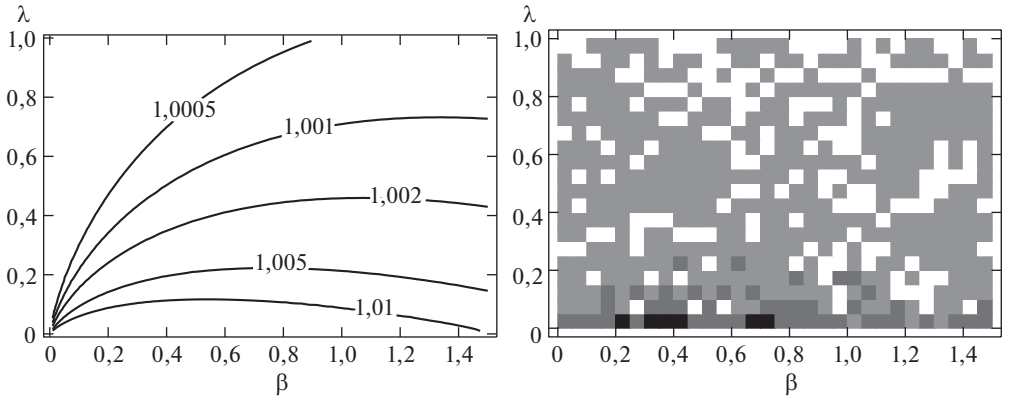


Рис. 3. Контурный график $ARE_1(\beta, \lambda)$ (слева) и график $\widehat{ARE}_1(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ (справа).

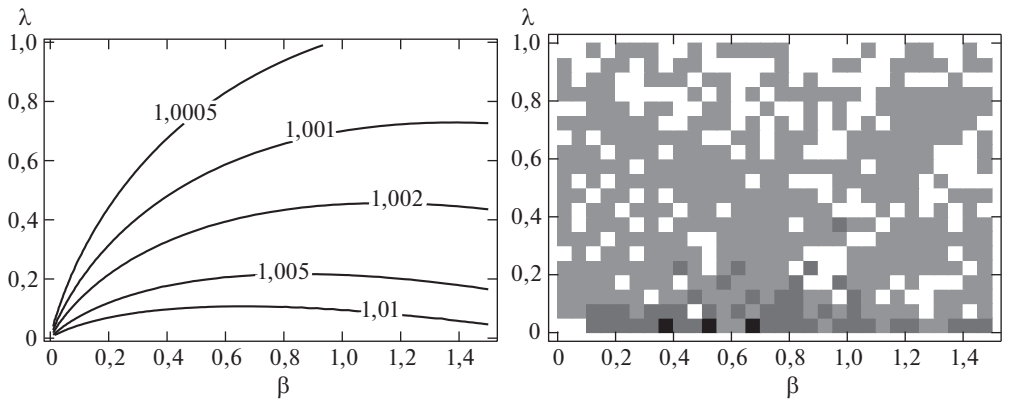


Рис. 4. Контурный график $ARE_2(\beta, \lambda)$ (слева) и график $\widehat{ARE}_2(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ (справа).

Для практических целей, чтобы выбрать параметр r оптимально, достаточно минимизировать $\text{GV}_r(\beta, \lambda)$ (см. (27)) по параметру $r \in (-1, 0)$. Так как оптимальный выбор r^* зависит от неизвестных параметров β и λ , предлагается следующая итерационная процедура. Если выполнена k -я итерация оценивания оптимального выбора r^* , во время которой вычислено его приближение r_k^* , то $(k+1)$ -ю итерацию выполняем следующим образом:

- 1) вычислить оценки $\hat{\beta}_{n,r_k^*}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r_k^*}^{(2)}$ по формулам (14) и (15) соответственно;
- 2) вычислить $r_{k+1}^* = \text{argmin} \left\{ r \in (-1, 0) : \text{GV}_r \left(\hat{\beta}_{n,r_k^*}^{(2)}, \hat{\lambda}_{n,r_k^*}^{(2)} \right) \right\}$ по формуле (27);
- 3) проверить критерий останова $|r_{k+1}^* - r_k^*| \leq \epsilon$, и если он не выполнен, то увеличить k на единицу и перейти к шагу 1.

После выполнения критерия останова, значение r_{k+1}^* принимается за r^* и соответственно принимается $\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)} = \hat{\beta}_{n,r_{k+1}^*}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)} = \hat{\lambda}_{n,r_{k+1}^*}^{(2)}$. Чтобы избежать большого числа итераций, используется еще одно ограничение. А именно, если $|r_{k+1}^* - r_k^*| > \epsilon$ для всех $0 \leq k \leq 9$, то $r^* = r_{10}^*$, $\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)} = \hat{\beta}_{n,r_{10}^*}^{(2)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)} = \hat{\lambda}_{n,r_{10}^*}^{(2)}$. В моделировании использовалось начальное приближение $r_0^* = -1/2$ и точность $\epsilon = 0,001$. Заметим, что шаг 2 предлагаемой процедуры может быть выполнен комбинированием функций “Last” и “FindMinimum” в “Wolfram Mathematica 10”.

В первой части моделирования прямоугольник $(0, 3/2] \times (0, 1)$ разделяется на квадраты

$$s_{i,j} = \{(i/20, (i+1)/20] \times (j/20, (j+1)/20], 0 \leq i \leq 29, 0 \leq j \leq 19\}.$$

В качестве истинных значений параметров β и λ взяты координаты

$$\beta_{i,j} = \frac{2i+1}{40}, \quad \lambda_{i,j} = \frac{2j+1}{40}$$

центра квадрата $s_{i,j}$ и сгенерированы $N = 750$ реализаций случайной выборки из распределения (1) размером $n = 2500$ наблюдений.

Пусть $(\hat{\beta}_n^{(1,k)}, \hat{\lambda}_n^{(1,k)})$ и $(\hat{\beta}_n^{(2,k)}, \hat{\lambda}_n^{(2,k)}) = (\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2,k)}, \hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2,k)})$ обозначают оценки параметров (β, λ) , вычисленные по k -й реализации. Рассмотрим следующие эмпирические моменты:

$$m_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\hat{\beta}_n^{(i,k)} \right)^j, \quad i = 1, 2, j = 1, 2,$$

$$M_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\hat{\lambda}_n^{(i,k)} \right)^j, \quad i = 1, 2, j = 1, 2,$$

$$\mu_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\beta}_n^{(i,k)} \hat{\lambda}_n^{(i,k)}, \quad i = 1, 2.$$

Выборочные аналоги характеристик $\text{ARE}(\beta, \lambda)$, $\text{ARE}_1(\beta, \lambda)$ и $\text{ARE}_2(\beta, \lambda)$ имеют вид

$$\widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) = \frac{(m_{2,2} - (m_{2,1})^2) (M_{2,2} - (M_{2,1})^2) - (\mu_2 - m_{2,1}M_{2,1})^2}{(m_{1,2} - (m_{1,1})^2) (M_{1,2} - (M_{1,1})^2) - (\mu_1 - m_{1,1}M_{1,1})^2},$$

$$\widehat{\text{ARE}}_1(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) = \frac{m_{2,2} - (m_{2,1})^2}{m_{1,2} - (m_{1,1})^2}, \quad \widehat{\text{ARE}}_2(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) = \frac{M_{2,2} - (M_{2,1})^2}{M_{1,2} - (M_{1,1})^2}.$$

График $\widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ представлен на рис. 2 (справа), где квадрат $s_{i,j}$ окрашен следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{черный,} & \widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) \geq 1,03, \\ \text{темно-серый,} & 1,01 \leq \widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) < 1,03, \\ \text{серый,} & 1 \leq \widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) < 1,01, \\ \text{белый,} & \widehat{\text{ARE}}(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j}) < 1. \end{array} \right.$$

Та же цветовая схема используется для получения графиков $\widehat{\text{ARE}}_1(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$ и $\widehat{\text{ARE}}_2(\beta_{i,j}, \lambda_{i,j})$, см. рис. 3 (справа) и рис. 4 (справа) соответственно.

Вторая часть моделирования посвящена выборкам малого объема. Истинные значения (β, λ) выбраны следующими: $\beta_i = i/20$, $\lambda_i = c\beta_i$, $1 \leq i \leq 29$, где $c = 1/96, 1/24, 1/6$. Выборки из распределения $F_{1, \beta_i, 1/\lambda_i}$ объемом $n = 110$ смоделированы $N = 1500$ раз. Из каждой выборки $(X_1^{(k)}, \dots, X_{110}^{(k)})$, $1 \leq k \leq N$ сформированы три выборки объемом $n = 100$:

- а) неусеченная выборка $(X_1^{(k)}, \dots, X_{100}^{(k)})$;
- б) выборка с усеченными пятью наименьшими наблюдениями $(X_{6,105}^{(k)}, \dots, X_{105,105}^{(k)})$, где $X_{1,n}^{(k)} \leq \dots \leq X_{n,n}^{(k)}$ – вариационный ряд выборки $(X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)})$;
- в) выборка с усеченными десятью наименьшими наблюдениями $(X_{11,110}^{(k)}, \dots, X_{110,110}^{(k)})$.

В качестве эффективности оценивания параметров для неусеченных выборок рассмотрены отношения средних квадратов отклонения от истинных значений параметров:

$$\psi_1(c, \beta_i) = \frac{m_{2,2} - 2\beta_i m_{2,1} + \beta_i^2}{m_{1,2} - 2\beta_i m_{1,1} + \beta_i^2},$$

$$\Psi_1(c, \beta_i) = \frac{M_{2,2} - 2c\beta_i M_{2,1} + c^2 \beta_i^2}{M_{1,2} - 2c\beta_i M_{1,1} + c^2 \beta_i^2}.$$

Пусть $\psi_2(c, \beta_i)$, $\psi_3(c, \beta_i)$ и $\Psi_2(c, \beta_i)$, $\Psi_3(c, \beta_i)$ обозначают аналоги эмпирических характеристик $\psi_1(c, \beta_i)$ и $\Psi_1(c, \beta_i)$, вычисленные по усеченным слева выборкам. Численные результаты представлены на рис. 5–7.

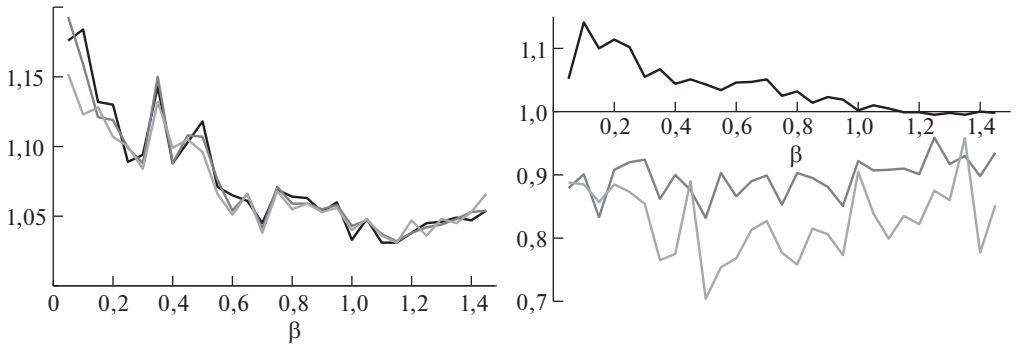


Рис. 5. Графики $\psi_j(1/96, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (слева) и $\Psi_j(1/96, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (справа), $1 \leq i \leq 29$ ($j = 1$ – черная ломаная, $j = 2$ – темно-серая ломаная, $j = 3$ – серая ломаная).

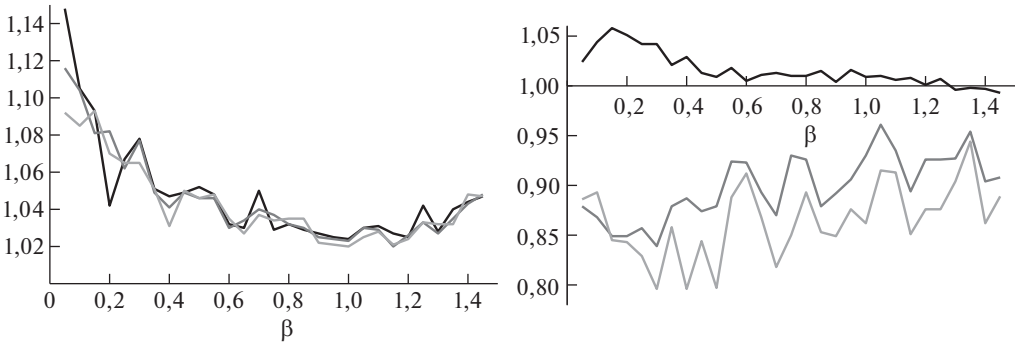


Рис. 6. Графики $\psi_j(1/24, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (слева) и $\Psi_j(1/24, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (справа), $1 \leq i \leq 29$ ($j = 1$ – черная ломаная, $j = 2$ – темно-серая ломаная, $j = 3$ – серая ломаная).

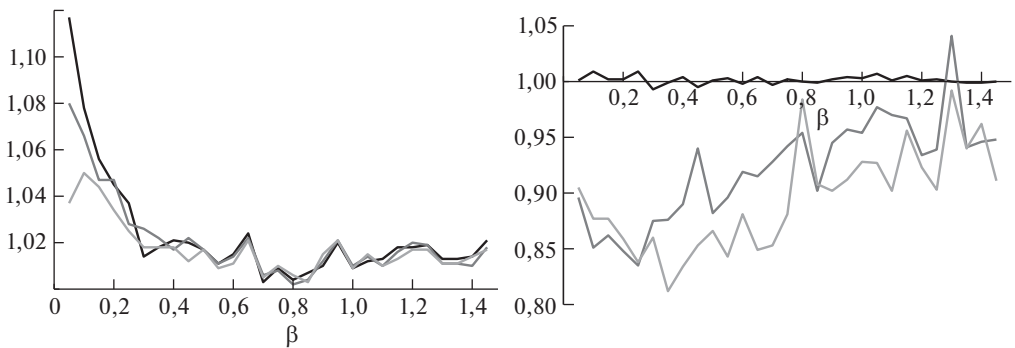


Рис. 7. Графики $\psi_j(1/6, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (слева) и $\Psi_j(1/6, \beta_i)$, $j = 1, 2, 3$ (справа), $1 \leq i \leq 29$ ($j = 1$ – черная ломаная, $j = 2$ – темно-серая ломаная, $j = 3$ – серая ломаная).

На основе полученных результатов моделирования можно сделать следующие выводы.

- 1) Из сравнения контурного графика $\text{ARE}(\beta, \lambda)$ и графика $\widehat{\text{ARE}}(s_{i,j}, \lambda_{i,j})$, $0 \leq i \leq 29$, $0 \leq j \leq 19$ на рис. 2 следует, что результаты моделирования на рис. 2 (справа) в целом соответствуют теоретическим результатам на рис. 2 (слева). Во-первых, значения $\text{ARE}(\beta, \lambda)$ не превышают 1,01 в прямоугольнике $(\beta, \lambda) \in (0, 1,5] \times (0, 2, 1)$, и это отражено на графике $\widehat{\text{ARE}}(s_{i,j}, \lambda_{i,j})$. Более того, достаточное количество белых квадратов в прямоугольнике на рис. 2 (справа) $(\beta, \lambda) \in (0, 1,5] \times (0, 2, 1)$ указывает, что предложенные оценки $(\hat{\beta}_{n,r}^{(2)}, \hat{\theta}_{n,r}^{(2)})$ могут быть полезны для практических приложений. Во-вторых, результаты моделирования на рис. 2 (справа) достаточно хорошо отражают доминирование оценок МП при малых значениях λ . По существу, графики на рис. 3, 4 ничем не отличаются от графиков на рис. 2.
- 2) Поскольку $\psi_1(c, \beta_i) > 1$ для всех β_i , $1 \leq i \leq 29$ и $c = 1/96, 1/24, 1/6$, то оценка $\hat{\beta}_n^{(1)}$ доминирует над оценкой $\hat{\beta}_{n,r^*}^{(2)}$ во всех исследованных точках (β_i, λ_i) , $1 \leq i \leq 29$. Нужно отметить, что доминирование оценки $\hat{\beta}_n^{(1)}$ сохраняется при оценивании параметра β по усеченным слева выборкам, см. графики ломаных $\psi_j(c, \beta_i)$, $j = 2, 3$ на рис. 5–7 (слева). Усечение выборок не отражается на относительных статистиках $\psi_j(c, \beta_i)$, $j = 2, 3$, т.е. значения ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 при фиксированных c и β_i практически не различаются.
- 3) Сравнение оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ при неусеченных выборках зависит от значения параметра c . При $c = 1/6$ ни одна из оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ не превосходит другой, см. график ломаной $\Psi_1(1/6, \beta_i)$, $1 \leq i \leq 29$ на рис. 7 (справа). При $\beta_i \in [1, 3/2)$ значения ломаной $\Psi_1(1/96, \beta_i)$ осциллируют вокруг единицы, но при $\beta_i \in (0, 1)$ оценка $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ имеет преимущество, см. рис. 5 (справа). Аналогичный вывод может быть сделан и в отношении оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ при $c = 1/24$. При усечении наблюдении слева оценка $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ превосходит оценку $\hat{\lambda}_n^{(1)}$, см. графики ломаных Ψ_2 и Ψ_3 на рис. 5–7 (справа). Исходя из результатов моделирования, представленных в табл. 1, можно заключить, что в основном превосходство оценки $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ создается за счет лучшего эмпирического среднеквадратического отклонения. В этой таблице через

$$\begin{aligned} \text{BI}_1 &= M_{1,1} - \lambda, & \text{bi}_1 &= M_{2,1} - \lambda, \\ \text{RD}_1 &= M_{1,2} - (M_{1,1})^2, & \text{rd}_1 &= M_{2,2} - (M_{2,1})^2 \end{aligned}$$

обозначены эмпирические смещения и среднеквадратические отклонения оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$ при неусеченных выборках. При усеченных выборках используются те же обозначения, но с нижними индексами 2 и 3 соответственно.

- 4) Приводимые в табл. 1 значения BI_1 позволяют судить о смещении оценки $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ при неусеченных выборках. Результаты моделирования не противоречат полученному в [4] выводу, что оценка МП (как и оценка $\hat{\lambda}_{n,r^*}^{(2)}$)

Таблица 1. Эмпирические характеристики

β	0,05	0,75	1,45	0,05	0,75	1,45	0,05	0,75	1,45
$100 \cdot \lambda$	5/6	75/6	145/6	5/24	75/24	145/24	5/96	75/96	145/96
$100 \cdot BI_1$	0,01	0,55	5,25	0,04	0,70	5,12	0,18	1,50	7,79
$100 \cdot bi_1$	0,01	0,57	5,34	0,04	0,73	5,13	0,18	1,51	7,72
$100 \cdot BI_2$	0,13	0,63	5,32	0,04	0,91	5,26	1,40	2,40	8,58
$100 \cdot bi_2$	0,13	0,63	5,35	0,03	0,94	5,27	1,36	2,28	8,46
$100 \cdot BI_3$	0,42	0,70	5,30	1,32	1,17	5,44	3,21	3,26	8,41
$100 \cdot bi_3$	0,41	0,68	5,30	1,27	1,16	0,56	3,11	2,98	9,04
$100 \cdot RD_1$	0,01	1,16	8,87	0,06	2,23	11,45	0,24	6,15	23,23
$100 \cdot rd_1$	0,01	1,17	8,81	0,06	2,24	11,40	0,24	6,15	23,73
$100 \cdot RD_2$	0,11	1,32	9,30	0,39	2,45	11,98	0,97	6,76	24,30
$100 \cdot rd_2$	0,10	1,19	8,88	0,35	2,34	11,30	0,87	6,58	23,62
$100 \cdot RD_3$	0,34	1,43	9,31	0,94	2,71	12,50	1,73	7,28	25,04
$100 \cdot rd_3$	0,30	1,23	8,35	0,85	2,46	11,60	1,54	6,88	23,87

оказывается существенно смещенной вправо. Усечение слева приводит к смещению обеих оценок параметра λ вправо, а увеличение среднеквадратических отклонений зависит от параметра c .

5. Применение к данным КОВИД-19

В статье исследовались данные, связанные с заболеванием коронавирусной инфекцией КОВИД-19 по дням (см. <https://www.kaggle.com/allen-institute-for-ai/CORD-19-research-challenge>). Анализируется число выздоровевших индивидуумов по дням путем предварительного усечения слева с разным уровнем. Анализ основан на данных, собранных до 22 июня 2020 г., т.е. на первой волне пандемии. Применим суженное распределение Парето как модель распределения числа выздоровевших индивидуумов для двух соседних стран восточной Азии: Японии и Южной Кореи. Средняя плотность населения в Японии 338 человек, а в Южной Корее 496 человек на 1 кв. км. Эти страны сопоставимы по индексу развития и занимают 19 и 22 места в мировом списке стран соответственно.

Оценки параметров (по методам МП и моментов) суженного распределения Парето представлены в табл. 2 и 3, где для полноты анализа приведены и оценки параметра верхнего усечения θ . Параметр a считается известным и равным выбранному уровню усечения слева. В табл. 2 и 3 $n(a)$ обозначает объем усеченной слева выборки.

Получив различающиеся оценки максимального правдоподобия и по методу моментов для β , λ (или θ) для одной какой-то страны, трудно решить, является ли эта разница статистически значимой. Поэтому применим несколько тестов согласия. Пусть F_n – эмпирическая ф.р. выборки X_1, \dots, X_n , а $X_{1,n} < X_{2,n} < \dots < X_{m,n}$ – ее порядковые статистики. Пусть $\hat{\beta}$ и $\hat{\lambda}$ обозначают оценки параметров β и λ .

Тест Колмогорова–Смирнова (KS) определяет наибольшее расстояние между F_n и ф.р. суженного распределения Парето $F_{a, \hat{\beta}, a/\hat{\lambda}}$:

$$K_n = \sqrt{n} \sup_{x \geq a} \left| F_n(x) - F_{a, \hat{\beta}, a/\hat{\lambda}}(x) \right|.$$

Таблица 2. Оценка параметров суженного распределения Парето на японских данных

a	$n(a)$	$\hat{\beta}_n^{(1)}$	$\hat{\lambda}_n^{(1)}$	$\hat{\theta}_n^{(1)}$	$\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)}$	$\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$	$\hat{\theta}_{n,r*}^{(2)}$
5	87	0,108	0,01952	256,02	0,108	0,01743	286,83
10	83	0,177	0,03324	300,82	0,171	0,03092	323,38
15	79	0,234	0,04417	339,56	0,220	0,04253	352,62
20	75	0,279	0,05367	372,63	0,256	0,05333	375,00

Таблица 3. Оценка параметров суженного распределения Парето на южнокорейских данных

a	$n(a)$	$\hat{\beta}_n^{(1)}$	$\hat{\lambda}_n^{(1)}$	$\hat{\theta}_n^{(1)}$	$\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)}$	$\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$	$\hat{\theta}_{n,r*}^{(2)}$
5	102	0,077	0,03978	125,66	0,074	0,03778	132,49
10	99	0,220	0,06000	166,65	0,218	0,05674	176,22
15	91	0,292	0,07913	189,55	0,291	0,07522	199,39
20	87	0,428	0,08430	237,24	0,437	0,07842	255,01

Статистика теста KS имеет вид $K_n = \sqrt{m} \max\{K_m^-, K_m^+\}$, где

$$K_m^+ = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ F_n(X_{i,n}) - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{i,n}) \right\},$$

$$K_m^- = \max_{2 \leq i \leq m} \left\{ F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{i,n}) - F_n(X_{i-1,n}) \right\}.$$

Статистика \tilde{K}_n для теста Койпера (К) имеет представление в виде $\tilde{K}_n = \sqrt{m}(K_m^- + K_m^+)$. Статистика для теста Крамера-фон Мизеса–Смирнова (CvMS) использует квадратичную меру близости между $F_n(x)$ и $F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}$:

$$\omega_n^2 = n \int_a^\infty \left(F_n(x) - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x) \right)^2 dF_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x).$$

Практическое вычисление статистики теста CvMS удобно производить по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{1}{12m} + \sum_{i=1}^m \left(F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{i,n}) - \frac{2i-1}{2m} \right)^2.$$

Статистика для теста Андерсона–Дарлинга (AD) использует взвешенную квадратичную меру близости между $F_n(x)$ и $F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}$:

$$A_n^2 = n \int_a^\infty \frac{\left(F_n(x) - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x) \right)^2}{\left(1 - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x) \right) F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x)} dF_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(x).$$

Практическое вычисление статистики теста AD производится по формуле

$$A_n^2 = -m - \sum_{i=1}^m \frac{2i-1}{m} \left(\ln \left(F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{i,n}) \right) + \ln \left(1 - F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}(X_{m+1-i,n}) \right) \right).$$

Таблица 4. p -значения для тестов KS, K, CvMS и AD

Япония								
a	KS		K		CvMS		AD	
	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2
5	0,040	0,129	0,015	0,042	0,070	0,161	0,001	0,002
10	0,130	0,281	0,030	0,049	0,152	0,235	0,002	0,003
15	0,220	0,406	0,039	0,051	0,214	0,278	0,080	0,094
20	0,294	0,408	0,048	0,059	0,254	0,305	0,090	0,098
Южная Корея								
a	KS		K		CvMS		AD	
	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2
5	0,284	0,531	0,062	0,128	0,136	0,278	0,042	0,072
10	0,533	0,625	0,165	0,239	0,577	0,701	0,512	0,631
15	0,690	0,782	0,324	0,422	0,726	0,802	0,170	0,187
20	0,728	0,792	0,585	0,634	0,829	0,860	0,232	0,242

При нулевой гипотезе, что выборка соответствует распределению $F_{a,\hat{\beta},a/\hat{\lambda}}$, статистики K_n , \tilde{K}_n , ω_n^2 и A_n^2 убывают с увеличением числа наблюдений до бесконечности. С помощью процедур, входящих в “Wolfram Mathematica 10”, нетрудно посчитать p -значения для приведенных выше статистических тестов. Таблица 4 содержит p -значения для тестов KS, K, CvMS и AD, где p -значения выше уровня значимости $\alpha = 0,05$ показаны жирным шрифтом. При этом нулевая гипотеза не отвергается. В табл. 4 F_1 и F_2 обозначают ф.р. $F_{a,\hat{\beta}_n^{(1)},a/\hat{\lambda}_n^{(1)}}$ и $F_{a,\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)},a/\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}}$ соответственно. Напомним, что $F_{a,\hat{\beta}_n^{(1)},a/\hat{\lambda}_n^{(1)}}$ обозначает модель с параметрами, оцененными методом максимума правдоподобия, а $F_{a,\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)},a/\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}}$ – предложенным в статье методом моментов.

По результатам анализа можно сделать следующие выводы.

- 1) Идентифицировать параметрическую модель по малой выборке объемом около 100 наблюдений (см. $n(a)$ в табл. 2, 3) чрезвычайно сложно, так как можно подобрать множество моделей, одинаково хорошо описывающих выборочные данные с позиций нескольких критериев согласия.
- 2) Сравнивая соответствующие p -значения для моделей F_1 и F_2 в табл. 4, заметим, что для всех примененных тестов p -значения для модели F_2 выше, чем для модели F_1 . Это указывает на то, что модель с новыми оценками параметров (β, λ) лучше описывает анализируемые данные, чем модель F_1 .
- 3) Приведенные в табл. 4 p -значения растут вместе с уровнем усечения a . Отсюда следует вывод, что наблюдения (как для Японии, так и для Южной Кореи) из нижней части вариационного ряда хуже описываются суженным распределением Парето.
- 4) Из табл. 4 следует, что суженное распределение Парето лучше описывает число выздоровевших от COVID-19 индивидуумов в Южной Корее, чем в Японии. Это отражается в оценках параметров β и λ (при соответствующем уровне усечения), которые различаются 1,5–2 раза, см. табл. 2 и 3.

6. Заключение

В статье применяется метод моментов для получения семейства новых оценок для параметров суженного распределения Парето. Доказано, что совместное асимптотическое распределение новых оценок является гауссовским. Предложена процедура оптимального выбора дополнительного параметра. Теоретическое сравнение показало, что при неусеченных выборках пара нововведенных оценок незначительно уступает в качестве соответствующей паре оценок максимального правдоподобия. Как показало компьютерное моделирование, оценки максимума правдоподобия теряют превосходство при некоторых истинных значениях параметров β и λ , см. рис. 2–4.

Новым в работе является также предложение генератора случайных чисел, распределенных по суженному распределению Парето.

Часто в задачах статистического анализа данных используется усечение наблюдений слева. Эмпирические исследования статистических свойств оценок по выборкам, содержащим усеченные слева наблюдения, показали, что из оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$ более предпочтительным является использование нововведенной оценки $\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$. Что касается оценок $\hat{\beta}_n^{(1)}$ и $\hat{\beta}_{n,r*}^{(2)}$, то усечение данных воздействует на их эффективность примерно одинаково.

Компьютерное моделирование выявило, что как при усеченных слева, так и при неусеченных данных смещение оценок $\hat{\lambda}_n^{(1)}$ и $\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)}$ вносит значительный вклад в их отклонения средних квадратов. Устранение (или сокращение) смещения обсуждаемых оценок тесно связано с исследованием асимптотики матожиданий $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n^{(1)} - \lambda)$ и $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_{n,r*}^{(2)} - \lambda)$ при $n \rightarrow \infty$. Эту проблему авторы статьи намерены решить в дальнейшем.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Лемма 1. Пусть (X_1, \dots, X_n) – выборка сл.в. из распределения $F_{\alpha, \beta, \alpha/\lambda}$ и $r \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(П.1) \quad \sqrt{nh_r}(a/\hat{a}_n) \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$(П.2) \quad nh_r(a/\hat{a}_n) \xrightarrow{d} -\frac{Z}{\lambda + \beta}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где Z – экспоненциально распределенная сл.в. с ф.р. $P(Z \leq x) = 1 - \exp\{-x\}$, $x \geq 0$.

Для любого $r \in \mathbb{R}$ функция $h_r(x)$ строго возрастает на $[1, \infty)$. Используя это свойство, можно проверить тождество

$$h_r(a/\hat{a}_n) = -\min \left\{ h_{-r} \left(\frac{X_1}{a} \right), \dots, h_{-r} \left(\frac{X_n}{a} \right) \right\}.$$

Положим

$$L_r = \begin{cases} +\infty, & r \leq 0, \\ 1/r, & r > 0. \end{cases}$$

Имеем $P(h_{-r}(X_1/a) \leq x) = F_{1,\beta,1/\lambda}(h_{-r}^{\leftarrow}(x))$, $x \in [1, L_r)$. Используя (25), нетрудно убедиться, что функция $h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(y) \right)$, $0 \leq y \leq 1$ является обобщенной обратной к ф.р. $F_{1,\beta,1/\lambda}(h_{-r}^{\leftarrow}(x))$, $x \in [1, L_r)$. Согласно теореме 8.3.6(ii) в [16] соотношение

$$\frac{\min \left\{ h_{-r} \left(\frac{X_1}{a} \right), \dots, h_{-r} \left(\frac{X_n}{a} \right) \right\} - h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right)}{h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(1/n) \right) - h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right)} \xrightarrow{d} Z, \quad n \rightarrow \infty$$

будет доказано, если показать, что $h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right)$ конечно, и верно

$$(П.3) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{F_{1,\beta,1/\lambda} \left(h_{-r}^{\leftarrow} \left(h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right) + \epsilon x \right) \right)}{F_{1,\beta,1/\lambda} \left(h_{-r}^{\leftarrow} \left(h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right) + \epsilon \right) \right)} = x$$

для всех $x > 0$.

Сочетая (25) и тождество $W_0(xe^x) = x$, которое выполнено для $x \geq -1$, выводим $h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(0) \right) = h_{-r}(1) = 0$. Применяя правило Лопиталья, получаем, что левая часть (П.3) равна

$$x \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_{1,\beta,1/\lambda}(\exp\{\epsilon x\})}{f_{1,\beta,1/\lambda}(\exp\{\epsilon\})} \exp\{\epsilon(x-1)\} = x$$

при $r = 0$, и

$$x \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f_{1,\beta,1/\lambda} \left((1 - r\epsilon x)^{-1/r} \right)}{f_{1,\beta,1/\lambda} \left((1 - r\epsilon)^{-1/r} \right)} \left(1 + \frac{r\epsilon(1-x)}{1-r\epsilon} \right)^{-1-1/r} = x$$

при $r \neq 0$.

Чтобы завершить доказательство соотношения (П.2), остается доказать, что $h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(n^{-1}) \right) \sim (\lambda + \beta)^{-1} n^{-1}$, $n \rightarrow \infty$. Напомним, что

$$\frac{dW_0(t)}{dt} = \frac{W_0(t)}{t(1+W_0(t))}, \quad t \neq 0,$$

см., например, (3.2) в [15]. Применив правило Лопиталья еще раз, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{-r} \left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(n^{-1}) \right)}{n^{-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(t) \right)^r}{\beta(1-t) \left(1 + (\lambda/\beta) F_{1,\beta,1/\lambda}^{\leftarrow}(t) \right)} = \frac{1}{\lambda + \beta}.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда

$$(П.4) \quad \sqrt{n}((\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2}) - (\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2})) \xrightarrow{d} (Y_r, Y_{r+1}, Y_{r+2})$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. По теореме Крамера–Вольда (см. теорему 29.4 в [17]), достаточно показать, что для любого вектора констант $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\sqrt{n} \sum_{k=0}^2 c_k (\hat{\nu}_{n,r+k} - \nu_{r+k}) \xrightarrow{d} \sum_{k=0}^2 c_k Y_{r+k}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что

$$\zeta_i = \sum_{k=0}^2 c_k \left(h_{r+k} \left(\frac{X_i}{a} \right) - \nu_{r+k} \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с $\mathbb{E}(\zeta_i) = 0$ и $\text{Var}(\zeta_i) = \sum_{i,j=0}^2 c_i c_j \rho_{r+i,r+j}$. Используя центральную предельную теорему Линдберга–Леви (см., например, теорему 27.1 в [17]), заключаем, что

$$(П.5) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_i \xrightarrow{d} \sum_{k=0}^2 c_k Y_{r+k}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ввиду декомпозиции

$$\sum_{k=0}^2 c_k (\hat{\nu}_{n,r+k} - \nu_{r+k}) = T_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_i,$$

где

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^2 c_k \left(h_{r+k} \left(\frac{X_i}{\hat{a}_n} \right) - h_{r+k} \left(\frac{X_i}{a} \right) \right),$$

остается доказать, что

$$\sqrt{n} T_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

заметив, что соотношение

$$\begin{aligned} & h_r \left(\frac{X_1}{\hat{a}_n} \right) - h_r \left(\frac{X_1}{a} \right) = \\ & = \begin{cases} h_0(a/\hat{a}_n), & r = 0, \\ r h_r(a/\hat{a}_n) \{h_r(X_1/a) - \nu_r\} + (r\nu_r + 1) h_r(a/\hat{a}_n), & r \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

вытекает из (П.1) и (П.5).

Доказательство теоремы 2. Применяя теорему Крамера–Вольда еще раз, достаточно доказать, что для любого вектора констант $(c_0, c_1) \in \mathbb{R}^2$

$$(П.6) \quad \sqrt{n} \left((c_0 \hat{\beta}_{n,r}^{(2)} + c_1 \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)}) - (c_0 \beta + c_1 \lambda) \right) \xrightarrow{d} c_0 \eta_{1,r} + c_1 \eta_{2,r}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Положим

$$g(x_1, x_2, x_3) = c_0 r + \frac{c_1 g^{(2)}(x_1, x_2) - c_0 g^{(1)}(x_2, x_3)}{g^{(3)}(x_1, x_2, x_3)},$$

где функции $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$ те же, что и в (11)–(13). Используя (10) и (14)–(15), получаем, что

$$(c_0 \hat{\beta}_{n,r}^{(2)} + c_1 \hat{\lambda}_{n,r}^{(2)}) - (c_0 \beta + c_1 \lambda) = g(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2}) - g(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}).$$

Пусть $g'_\ell(x_1, x_2, x_3)$ обозначает частную производную g относительно x_ℓ . Можно проверить, что

$$g'_1(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) = c_0 \frac{\nu_{r+2}(\nu_{r+1} + \nu_{r+1}^2 - \nu_{r+2})}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} + c_1 \frac{\nu_{r+1}(\nu_{r+2} - \nu_{r+1} - \nu_{r+1}^2)}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2},$$

$$g'_2(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) = c_0 \frac{2\nu_{r+1}\nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2 - \nu_r \nu_{r+2} - 2\nu_r \nu_{r+1} \nu_{r+2}}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} + c_1 \frac{\nu_r \nu_{r+1} - \nu_{r+1}^2 + \nu_r \nu_{r+1}^2 - \nu_r \nu_{r+2} + \nu_r^2 \nu_{r+2}}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2},$$

$$g'_3(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) = c_0 \frac{\nu_{r+1}(\nu_r - \nu_{r+1} + \nu_r \nu_{r+1})}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2} + c_1 \frac{\nu_r(\nu_{r+1} - \nu_r - \nu_r \nu_{r+1})}{(\nu_r \nu_{r+2} - \nu_{r+1}^2)^2}.$$

Используя дельта-метод (см., например, теорему 3.1 в [18]), находим, что $\sqrt{n}(g(\hat{\nu}_{n,r}, \hat{\nu}_{n,r+1}, \hat{\nu}_{n,r+2}) - g(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}))$ сходится по распределению к сл.в., имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией

$$G \begin{pmatrix} \rho_{r,r} & \rho_{r,r+1} & \rho_{r,r+2} \\ \rho_{r,r+1} & \rho_{r+1,r+1} & \rho_{r+1,r+2} \\ \rho_{r,r+2} & \rho_{r+1,r+2} & \rho_{r+2,r+2} \end{pmatrix} G^T = \\ = c_0^2 \sigma_{11,r}^2(\beta, \lambda) + 2c_0 c_1 \sigma_{12,r}(\beta, \lambda) + c_1^2 \sigma_{22,r}^2(\beta, \lambda),$$

где $\sigma_{11,r}^2(\beta, \lambda)$, $\sigma_{12,r}(\beta, \lambda)$, $\sigma_{22,r}^2(\beta, \lambda)$ даны в (19)–(21), а

$$G = (g'_1(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) \quad g'_2(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2}) \quad g'_3(\nu_r, \nu_{r+1}, \nu_{r+2})).$$

Остается заметить, что сл.в. $c_0 \eta_{1,r} + c_1 \eta_{2,r}$ распределена по нормальному закону со средним 0 и дисперсией $c_0^2 \sigma_{11,r}^2(\beta, \lambda) + 2c_0 c_1 \sigma_{12,r}(\beta, \lambda) + c_1^2 \sigma_{22,r}^2(\beta, \lambda)$.

Доказательство теоремы 3 опущено, так как оно аналогично доказательству теоремы 2.

Доказательство предложения 1. Положим $J(y) = F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-y) - \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-y)$, $0 < y \leq 1$. Имеем

$$\frac{dJ(y)}{dy} = \frac{\theta}{y} \left(1 - \frac{c}{y^{1/\beta}} \right).$$

Отсюда немедленно следует, что для $c \geq 1$ функция $J(y)$ строго возрастает на $(0, 1)$. Это вместе с $J(1) = 0$ дает $J(y) > 0$ для $0 < y < 1$. Таким образом, в случае $c \geq 1$ имеем $V \stackrel{d}{=} \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-U)$ или, что эквивалентно, сл.в. V имеет смещенную экспоненциальную ф.р. $F_{\theta}(x-a)$, $x \geq a$.

Пусть $0 < c < 1$. Уравнение $J(y) = 0$ может быть переписано как

$$(П.7) \quad -cy^{-1/\beta} \exp\{-cy^{-1/\beta}\} = -c \exp\{-c\}.$$

Поскольку $-1/e < -c \exp\{-c\} < 0$ для любого $0 < c < 1$, уравнение (П.7) имеет два корня:

$$y_0 = \left(- (1/c)W_{-1}(-c \exp\{-c\}) \right)^{-\beta} \quad \text{и} \quad y_1 = \left(- (1/c)W_0(-c \exp\{-c\}) \right)^{-\beta}.$$

Применяя тождество $W_0(-c \exp\{-c\}) = -c$, получим $y_1 = 1$. Используя строгое неубывание $W_{-1}(x)$, $-1/e < x < 0$, можно проверить, что $J(y) > 0$ выполнено для $0 < y < y_0$ и $J(y) < 0$ для $y_0 < y < 1$. Тогда для $x \geq a$ имеем

$$\begin{aligned} P(V \leq x) &= \\ &= P\left(\tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-U) \leq x, 0 < U < y_0\right) + P\left(F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-U) \leq x, y_0 \leq U < 1\right) = \\ &= P\left(0 < U < y_0, 1 - \tilde{F}_{a,\theta}(x) \leq U < 1\right) + P\left(\max\{y_0, 1 - F_{a,\beta}(x)\} \leq U < 1\right). \end{aligned}$$

Доказательство предложения 1 можно завершить, заметив, что $\tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-y_0) = F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-y_0) = -(a/c)W_{-1}(-c \exp\{-c\})$ и используя

$$\begin{aligned} P\left(0 < U < y_0, 1 - \tilde{F}_{a,\theta}(x) \leq U < 1\right) &= \begin{cases} 0, & x < \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-y_0), \\ y_0 - 1 + \tilde{F}_{a,\theta}(x), & x \geq \tilde{F}_{a,\theta}^{\leftarrow}(1-y_0), \end{cases} \\ P\left(\max\{y_0, 1 - F_{a,\beta}(x)\} \leq U < 1\right) &= \begin{cases} F_{a,\beta}(x), & x < F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-y_0), \\ 1 - y_0, & x \geq F_{a,\beta}^{\leftarrow}(1-y_0). \end{cases} \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pareto V.* The New Theories of Economics // J. of Political Economy. 1897. V. 5. No. 4. P. 485–502.
2. *Vere-Jones D., Robinson R., Yang W.Z.* Remarks on the accelerated moment release model: problems of model formulation, simulation and estimation // Geophys. J. Int. 2001. V. 144. P. 517–531.

3. *Kagan Y.Y.* Seismic moment distribution revisited: I. Statistical results // *Geophys. J. Int.* 2002. V. 148. P. 520–541.
4. *Kagan Y.Y., Schoenberg F.* Estimation of the upper cutoff parameter for the tapered Pareto distribution // *J. Appl. Probab.* 2001. V. 38A. P. 158–175.
5. *Foss S., Korshunov D., Zachary S.* An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions. New York: Springer, 2011.
6. *Cumming S.G.* A parametric model of the fire-size distribution // *Canad. J. Forest Res.* 2001. V. 31. No. 8. P. 1297–1303.
7. *Schoenberg F.P., Peng R., Woods J.* On the distribution of wildfire sizes // *Environmetrics.* 2003. V. 14. P. 583–592.
8. *Swetnam T.L., Falk D.A., Lynch A.M., Yool S.R.* Estimating individual tree mid- and understory rank-size distributions from airborne laser scanning in semi-arid forests // *Forest Ecology and Management.* 2014. V. 330. P. 271–282.
9. *Meerschaert M.M., Roy P., Shao Q.* Parameter estimation for tempered power law distributions // *Communications in Statistics — Theory and Methods.* 2012. V. 41. P. 1839–1856.
10. *Jameson G.J.O.* The incomplete gamma functions // *Math. Gazette.* 2016. V. 100. P. 298–306.
11. *Baricz Á., Ismail M.E.H.* Turán Type Inequalities for Tricomi Confluent Hypergeometric Functions // *Constructive Approximation.* 2013. V. 37. P. 195–221.
12. *Beads R., Szmiagielski J.* Meijer G-Functions: A Gentle Introduction // *Notices of the American Mathematical Society.* 2013. V. 60. P. 866–872.
13. *Devroye L.* Non-Uniform Random Variate Generation. New York: Springer-Verlag, 1986.
14. *Geist E.L., Parsons T.* Undersampling power-law size distributions: effect on the assessment of extreme natural hazards // *Nat. Hazards.* 2014. V. 72. P. 565–595.
15. *Corless R.M., Gonner G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W Function // *Advances in Computational Mathematics.* 1996. V. 5. P. 329–359.
16. *Arnold B.C., Balakrishnan N., Nagaraja H.N.* A first course in order statistics. New York: Wiley, 1992.
17. *Bilingsley P.* Probability and Measure. New York: Wiley, 1995.
18. *Van der Vaart A.W.* Asymptotic Statistics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 19.11.2020

После доработки 26.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021