

# Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. В.Ф. СОКОЛОВ, д-р физ.-мат. наук (sokolov@ipm.komisc.ru)  
(Коми научный центр УрО РАН, Сыктывкар)

## АДАПТИВНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ В КАНАЛЕ ВЫХОДА

Рассматриваются задачи адаптивного оптимального слежения для минимально-фазового объекта с дискретным временем, неопределенностью в канале выхода и ограниченным внешним возмущением. Коэффициенты уравнения линейной стационарной номинальной модели, коэффициент усиления неопределенности и верхняя граница внешнего возмущения предполагаются неизвестными, а показателем качества служит наихудшая асимптотическая ошибка слежения. Показано, что постановка оптимальной задачи зависит от априорной информации об ограниченном задающем сигнале. Решение задач базируется на полиэдральном оценивании всех неизвестных параметров и использовании показателя качества задачи слежения как идентификационного критерия для вычисления текущих оптимальных оценок. Работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов управления иллюстрируются результатами численного моделирования.

*Ключевые слова:* адаптивное робастное управление, оптимальное управление, ограниченное возмущение, верификация модели.

DOI: 10.31857/S0005231021080055

### 1. Введение

Первоначальный период бурного развития теории робастного управления пришелся на 1980–90-е годы. При этом основной поток публикаций относился к  $H_\infty$ -постановке задачи, имеющей классические частотные и статистические интерпретации [1, 2]. Предметом теории робастного управления являются системы с неопределенностью, под которой понимается не внешнее возмущение или помеха измерений, а неточность самой модели (немоделируемая динамика, малые нелинейности или нестационарность). В начале 1992 г. вышел первый спецвыпуск одного из ведущих журналов по теории автоматического управления IEEE TAC [3], посвященный ставшей сверхактуальной проблеме идентификации для робастного управления. Три основные проблемы были таковы: 1) теория робастного управления была детерминированной, а теория идентификации — в основном стохастической; 2) как вычислять номинальную модель по данным измерений; 3) как определить доли неопределенности

и внешнего возмущения в суммарном возмущении. Эти важнейшие проблемы обсуждались ведущими мировыми экспертами на семинаре по идентификации систем и робастному управлению [4], на котором специалисты по идентификации призывали к разработке стохастической теории робастного управления, а специалисты по робастному управлению — к разработке теории идентификации без привлечения априорных статистических гипотез. Проблемы идентификации для робастного управления остаются актуальными до настоящего времени, о чем свидетельствуют, в частности, последующие регулярные спецвыпуски ведущих мировых журналов [5–7]. Однако до настоящего времени в публикациях по этому направлению задачи оценивания номинальной модели и квантификации неопределенности и внешнего возмущения рассматриваются в стохастической офлайн постановке и вне контекста задач управления и поэтому не могут быть применены в задачах адаптивного управления, где указанные оценивание и квантификация должны осуществляться в онлайн режиме (ограничимся ссылками [8, 9] на публикации двух ведущих мировых экспертов Л. Льюнга и Г. Гудвина и соавт.).

Многие практические задачи управления формулируются в терминах допусков на отклонения выхода системы управления от задающего сигнала. Таким задачам соответствует  $\ell_1$ -теория робастного управления, основы которой были заложены в [10, 11]. Сигнальным пространством в  $\ell_1$ -теории в случае дискретного времени является пространство ограниченных вещественных последовательностей  $\ell_\infty$ , внешнее возмущение предполагается ограниченным и качество управления оценивается в терминах супремум нормы этого пространства. Оказалось, что в этой теории можно получить более продвинутые по сравнению с  $H_\infty$ -теорией результаты по анализу робастной устойчивости, оценке качества и синтезу оптимального управления [11–14], что открывает возможности ставить и решать задачи адаптивного робастного управления в оптимальной постановке. Решению одной из таких задач в рамках  $\ell_1$ -теории робастного управления посвящена настоящая работа.

Системы с ограниченным внешним возмущением породили множественное оценивание неизвестных параметров, характеризующих номинальную модель управляемого объекта. Для моделей, аффинных относительно оцениваемых параметров, из предположения об ограниченности внешнего возмущения известной константой следует, что множество параметров, согласованных с данными измерений на некотором промежутке времени, является ограниченным многоугольником в пространстве параметров. Сложность описания этих многоугольников растет с ростом объема данных измерений, и сотни статей по идентификации таких моделей начиная с 1970-х и до настоящего времени, в том числе некоторые статьи в недавнем спецвыпуске [7], посвящены построению более простых для вычислений верхних или нижних аппроксимаций этих многоугольников. В зарубежной литературе это направление в идентификации систем получило названия *set-membership approach* и *unknown but bounded disturbance*. Как и в случае  $H_\infty$ -теории, при наличии неопределенности задачи квантификации неопределенности и внешнего возмущения в рамках этого подхода, как правило, рассматриваются при фиксированной номинальной модели, в офлайн постановке и вне контекста задачи управления. А под оптимальной идентификацией может подразумеваться, например, офлайн вычисление модели с минимальной верхней границей неопределенности при фикси-

рованной априорной верхней границе внешнего возмущения (или наоборот), как, например, в [15] для систем с ограниченным внешним возмущением или в [16] — в  $H_\infty$ -постановке.

Настоящая работа посвящена решению задачи синтеза адаптивного оптимального слежения для минимально-фазового объекта с неопределенностью в канале выхода и с ограниченным внешним возмущением. Показателем качества служит наихудшая по возмущениям асимптотическая ошибка слежения. Коэффициенты уравнения линейной стационарной минимально-фазовой номинальной модели, коэффициент усиления неопределенности и верхняя граница внешнего возмущения предполагаются неизвестными и оцениваются в режиме онлайн. Для построения адаптивного оптимального управления используется метод рекуррентных целевых неравенств [17], дополненный двумя ключевыми идеями: 1) выбора показателя качества задачи управления как идентификационного критерия и 2) использования множественных оценок неизвестных параметров. Этот подход был первоначально предложен для задачи адаптивной оптимальной стабилизации в [18, 19] для систем только с ограниченным возмущением и был обобщен на робастные системы в [20, 21]. Для рассматриваемой системы с неопределенностью только в канале выхода показатель качества задачи слежения является дробно-рациональной функцией нормы внешнего возмущения и коэффициента усиления неопределенности, благодаря чему вычисление текущих оптимальных оценок сводится к задаче линейного программирования, для которой имеется современное эффективное программное обеспечение. Это позволяет довести общий метод синтеза адаптивного оптимального робастного управления [20, 21] до численной реализации в более общей и существенно более сложной задаче слежения и помимо алгоритма полиэдрального оценивания, сохраняющего почти полную информацию о всех оцениваемых параметрах, предложить новый, менее затратный для вычислений, алгоритм с заранее выбираемым числом сохраняемых в памяти регулятора информационных неравенств. Приведенные в статье результаты моделирования на примере модели с девятью оцениваемыми параметрами иллюстрируют эффективность обоих алгоритмов.

Подчеркнем важные особенности рассматриваемой задачи.

1) Все неизвестные параметры в рассматриваемой задаче неидентифицируемы и решение рассматриваемой оптимальной задачи на базе других идентификационных критериев недостижимо (см. раздел 3.1).

2) Показатель качества в виде наихудшей асимптотической ошибки слежения зависит от верхнего предела модуля задающего сигнала. Поэтому в условиях неидентифицируемости неизвестных параметров постановка оптимальной задачи зависит от априорной информации о задающем сигнале. Эта зависимость ранее не обсуждалась в работах по идентификации для робастного управления даже в офлайн постановке.

*Обозначения:*

$|\varphi|$  — евклидова норма вектора  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dim \varphi := n$  — размерность  $\varphi$ ;

$\ell_\infty$  — нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  с нормой  $\|x\| = \sup_t |x_t|$ ;

$\|x\|_{ss} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_t|$ ;

$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k|$  – индуцированная норма линейной стационарной системы  $G : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$  с устойчивой передаточной функцией  $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$ .

## 2. Постановка задачи

Пусть управляемый объект описывается моделью с дискретным временем

$$(2.1) \quad a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$  – соответственно измеряемый выход объекта, управление и суммарное возмущение в момент времени  $t$ ,  $q^{-1}$  – оператор сдвига назад ( $q^{-1}x_t := x_{t-1}$ ) и

$$a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n, \quad b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \dots + b_m\lambda^{m-1}.$$

Априорная информация об объекте состоит из предположений:

**П.1.** Неизвестный вектор-столбец коэффициентов модели принадлежит известному ограниченному многограннику  $\Xi$ ,

$$\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)^\top \in \Xi = \left\{ \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geq p \right\} \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

$$P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}, \quad p \in \mathbb{R}^l,$$

и для любого  $\xi \in \Xi$   $b_1 \neq 0$ , корни полинома  $b(\lambda)$  лежат вне замкнутого единичного круга  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  (такие полиномы называются устойчивыми, а соответствующие им модели – *минимально-фазовыми*) и  $\sup_{\xi \in \Xi} \|(a(\lambda)|\|1/b(\lambda)\| \leq$

$\leq C_u < +\infty$  с известной верхней границей  $C_u$ .

**П.2.** Неизвестное суммарное возмущение  $v$  удовлетворяет ограничению

$$(2.2) \quad |v_t| \leq \delta_w + \delta_y p_t, \quad p_t = \max_{t-\mu \leq s < t} |y_s| \quad \forall t,$$

где  $\delta_w \geq 0$  и  $\delta_y \geq 0$  неизвестны и  $\delta_y \leq \bar{\delta}_y < 1$  с известной верхней границей  $\bar{\delta}_y$ .

В терминах  $\ell_1$ -теории робастного управления число  $\delta_w$  характеризует  $\ell_\infty$ -норму *неизвестного ограниченного внешнего возмущения* в объекте управления, а число  $\delta_y$  – коэффициент усиления неизвестной *неопределенности в канале выхода*, описываемой в виде линейного нестационарного или нелинейного строго причинного оператора на пространстве выходов  $y$ . Память  $\mu$  в ограничении на неопределенность выбирается конструктором исходя из априорной информации об объекте управления и может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для гарантируемого качества управления. Ограниченность памяти неопределенности по выходу обеспечивает независимость асимптотического качества замкнутой системы управления от начальных данных [13], что необходимо для синтеза адаптивного управления.

Введем обозначение

$$\theta := (\xi^\top, \delta_y, \delta_w)^\top$$

для вектора всех неизвестных конструктору параметров модели (2.1).

Пусть  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots)$  – ограниченный задающий сигнал задачи слежения и в момент времени  $t$  известно значение  $y_{t+1}^*$ . Показателем качества управления будет служить наихудшая по всем допустимым предположением **П.2** возмущениям  $v$  асимптотическая ошибка слежения

$$J^\mu(\theta, y^*) := \sup_v \|y - y^*\|_{ss} = \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*|.$$

Из уравнения (2.1) следует, что для модели с известным вектором коэффициентов  $\xi$  и любыми начальными значениями  $y_{-n+1}, \dots, y_0, u_{-m+1}, \dots, u_0$  регулятор

$$(2.3) \quad b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + y_{t+1}^*$$

обеспечивает равенство

$$y_{t+1} - y_{t+1}^* = v_{t+1}$$

и, следовательно, является *оптимальным* для показателя качества  $J^\mu(\theta, y^*)$  в силу непредсказуемости возмущения  $v_{t+1}$ .

Для формулировки теоремы об оценке показателя качества  $J^\mu(\theta, y^*)$  при использовании оптимального регулятора (2.3) понадобится следующее определение.

*Определение 1.* Будем говорить, что последовательность  $|y_t^*|$  равномерно часто попадает в окрестности своего верхнего предела, если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют число  $N$  и подпоследовательность  $\{t_j\}_{j=1}^\infty$  последовательности натуральных чисел такие, что

$$\forall j \quad (t_{j+1} - t_j \leq N \wedge |y_{t_j}^*| \geq \|y^*\|_{ss} - \varepsilon).$$

*Теорема 1.* Для модели (2.1) с известным вектором коэффициентов  $\xi$ , удовлетворяющей предположениям **П.1**, **П.2** и замкнутой регулятором (2.3),

$$J^\mu(\theta, y^*) \leq J(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \|y^*\|_{ss}}{1 - \delta_y},$$

и

$$J^\mu(\theta, y^*) \nearrow J(\theta, y^*) \quad (\mu \rightarrow +\infty),$$

если последовательность  $|y^*|$  равномерно часто попадает в окрестности своего верхнего предела (знак  $\nearrow$  обозначает монотонную сходимость снизу).

Теорема 1 следует из теорем 3 и 8 [13], примененных к замкнутой системе (2.1), (2.3). Отметим, что условие  $0 \leq \delta_y < 1$  является необходимым и достаточным условием робастной стабилизируемости модели (2.1) в классе линейных стационарных регуляторов при  $\mu \rightarrow +\infty$  (см. детали в [11]).

Формула для показателя качества  $J(\theta, y^*)$  в теореме 1 позволяет сформулировать следующую задачу адаптивного субоптимального робастного слежения.

*Задача 1. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению модели (2.1) с неизвестным вектором параметров  $\theta$  и известно значение  $\|y^*\|_{ss}$ . Требуется построить причинную обратную связь, гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J(\theta, y^*).$$

Значение  $\|y^*\|_{ss}$  доступно, например, в случае постоянного или периодического задающего сигнала  $y^*$ , но в общем случае может быть неизвестным. Если известна некоторая верхняя оценка  $Y^*$  неизвестного (и заведомо не идентифицируемого) значения  $\|y^*\|_{ss}$ , то задача синтеза адаптивного оптимального робастного слежения формулируется в виде

*Задача 2. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению модели (2.1) с неизвестным вектором параметров  $\theta$  и известна верхняя граница  $Y^*$  неизвестного значения  $\|y^*\|_{ss}$ . Требуется построить причинную обратную связь, гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J_2(\theta, Y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y Y^*}{1 - \delta_y}.$$

Если неизвестна и верхняя граница  $Y^*$ , то задача синтеза адаптивного оптимального робастного слежения формулируется в виде

*Задача 3. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению модели (2.1) с неизвестным вектором параметров  $\theta$  и информация о задающем сигнале  $y^*$  заключается в его ограниченности. Требуется построить причинную обратную связь, гарантирующую с заданной точностью неравенство*

$$\|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J_3(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \|y^*\|}{1 - \delta_y}.$$

Далее будет описано решение задачи 1. Решение задач 2 и 3 аналогично (см. замечание 3 в разделе 3.2).

Специфика, нетрадиционность и сложность сформулированных задач заключаются в их оптимальной постановке в условиях неидентифицируемости не только вектора коэффициентов  $\xi$ , но и коэффициента усиления неопределенности  $\delta_y$  и нормы внешнего возмущения  $\delta_w$ . Необходимость оценивания параметров  $\delta_y$  и  $\delta_w$  для решения сформулированных задач становится понятной из следующего вопроса. Предположим, что неизвестный объект управляется оптимальным регулятором, но конструктору это не известно. Как при априорных предположениях **П.1**, **П.2** конструктор, измеряя выход объекта, может судить об оптимальности регулятора, если параметры  $\delta_y$  и  $\delta_w$  не известны?

Ответ на этот частный вопрос кроется в понимании используемого подхода к синтезу адаптивного оптимального управления (см. раздел 3.1), вытекающего из того, что при априорных предположениях **П.1**, **П.2** исчезает понятие “истинного” вектора коэффициентов  $\xi$  номинальной модели. Эти предположения соответствуют *принципу неопределенности*, сформулированному Р.Е. Калманом в [22, с. 30]:

“(2.1) Принцип неопределенности. Неточные (недо-  
стоверные) данные  $\rightarrow$  неединственная (недо-  
стоверная) система.”

Этот принцип выдвинут как альтернатива стандартной статистической априорной гипотезе [22, с. 31]:

“(i) Вся неопределенность порождается жестко фиксированным абстрактным вероятностным механизмом (зачастую очень простого вида).

(ii) Все данные получены путем независимого выбора из фиксированной стационарной генеральной совокупности, управляемой абстрактным вероятностным механизмом.”

### 3. Синтез адаптивного управления

В этом разделе описано решение всех поставленных задач. Для их решения используется идентификационный подход, согласно которому по данным измерений вычисляются оценки неизвестного вектора коэффициентов  $\xi$  и в каждый момент времени применяется оптимальный регулятор (2.3), соответствующий текущей оценке.

#### 3.1. Выбор идентификационного критерия в оптимальной задаче в условиях неидентифицируемости объекта

Вся новая информация о векторе  $\xi$ , получаемая в момент времени  $t + 1$  после измерения выхода  $y_{t+1}$ , заключается в неравенстве

$$(3.1) \quad |a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_t| \leq \delta_w + \delta_y p_{t+1},$$

вытекающем из уравнения модели (2.1) и ограничения на суммарное возмущение (2.2). Каждое неравенство (3.1) состоит из пары линейных неравенств относительно вектора параметров  $\theta$ . Для каждого конкретного вектора  $\theta$  только одно из этих двух линейных неравенств может нарушаться, и для краткости будем называть его *неравенством* (3.1), *соответствующим вектору*  $\theta$ . Метод рекуррентных целевых неравенств синтеза адаптивного управления базируется на следующем простом утверждении.

*Утверждение 1. Если для некоторой оценки*

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^\top, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^\top, \quad \hat{\xi} \in \Xi, \quad 0 \leq \hat{\delta}_y \leq \bar{\delta}_y, \quad 0 \leq \hat{\delta}_w,$$

*неравенства (3.1), соответствующие этому вектору, выполняются при всех достаточно больших  $t$ , то модель (2.1) с вектором параметров  $\hat{\theta}$  удовлетворяет априорным предположениям П.1, П.2 при всех достаточно больших  $t$ .*

Полная информация о неизвестном векторе  $\theta$  к моменту времени  $t$  имеет вид

$$(3.2) \quad \theta \in \Theta_t^{\max} := \left\{ \hat{\theta} \in \Theta_0 \mid |\hat{a}(q^{-1})y_{k+1} - \hat{b}(q^{-1})u_k| \leq \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{k+1} \quad \forall k < t \right\},$$

где

$$\Theta_0 := \left\{ \hat{\theta} \mid \hat{\xi} \in \Xi, 0 \leq \hat{\delta}_y \leq \bar{\delta}_y, \hat{\delta}_w \geq 0 \right\}$$

— априорное множество допустимых неизвестных параметров. Множество  $\Theta_t^{\max}$  в любой момент времени  $t$  включает те и только те оценки  $\hat{\theta}$  из априорного множества  $\Theta_0$ , которые согласованы с уравнением модели (2.1), априорными предположениями **П.1**, **П.2** и с измерениями на промежутке  $[0, t]$ , и является полиэдром (многогранником) в пространстве оценок  $\hat{\theta}$ . С ростом времени полиэдры  $\Theta_t^{\max}$  убывают по включению ввиду добавления новых неравенств.

*Утверждение 2. При любом управлении объектом (2.1) на любом промежутке  $[0, t]$ , для любого  $\hat{\xi} \in \Xi$  и любого  $\hat{\delta}_y \geq 0$*

$$(3.3) \quad \hat{\theta} = (\hat{\xi}^\top, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^\top \in \Theta_t^{\max}$$

*при всех достаточно больших  $\hat{\delta}_w$ .*

Утверждение 2 очевидно следует из неограниченного роста правой части неравенств (3.1) при неограниченном возрастании  $\delta_w$  и представляет собой строгое математическое утверждение о *неидентифицируемости неизвестного вектора параметров  $\theta$*  при априорных предположениях **П.1**, **П.2**. Если пытаться решать задачу 1 с помощью какого-либо алгоритма оценивания, обеспечивающего сходимость оценок к некоторому предельному значению  $\theta_\infty$ , и использования оптимального регулятора для вычисляемых оценок, то задача 1 будет решена, если вектор  $\theta_\infty$  будет удовлетворять неравенствам (3.1) при всех достаточно больших  $t$  и

$$(3.4) \quad J(\theta_\infty, y^*) \leq J(\theta, y^*).$$

Поскольку вектор параметров  $\theta$  управляемой модели неизвестен и никакой вектор коэффициентов (от которого и зависит выбор регулятора)  $\hat{\xi} \in \Xi$  не может быть сфальсифицирован данными измерений в силу включения (3.3), т.е. может оказаться вектором коэффициентов  $\xi$  управляемой модели, ключевое неравенство (3.4) диктует выбор текущих оптимальных оценок в виде

$$(3.5) \quad \theta_t^{opt} = \underset{\hat{\theta} \in \Theta_t^{\max}}{\operatorname{argmin}} J(\hat{\theta}, y^*).$$

Таким образом, использование показателя качества  $J$  задачи управления как идентификационного критерия диктуется постановкой задачи адаптивного оптимального управления, если решение ищется с помощью сходящихся оценок.

### 3.2. Синтез на основе полиэдрального оценивания

Прямое применение *оптимального оценивания* (3.5) невозможно ввиду потенциально неограниченного роста числа неравенств в описании множественных оценок  $\Theta_t^{\max}$  и сложности оценки качества нелинейной замкнутой



системы с оценками (3.5). Ограниченность числа изменений множественных оценок и сходимость векторных оценок  $\theta_t$  за конечное время можно обеспечить за счет введения мертвой зоны при обновлении множественных оценок. Платой за введение мертвой зоны будет решение только субоптимальной задачи, т.е. решение оптимальной задачи с заданной точностью.

Перейдем к описанию рекуррентного алгоритма оценивания и основанного на нем адаптивного субоптимального управления. Выберем параметр мертвой зоны  $\varepsilon > 0$ . В каждый момент времени  $t$  вычисляются полиэдральная оценка  $\Theta_t$  и векторная оценка

$$\theta_t = (\xi_t^\top, \delta_{y,t}, \delta_{w,t})^\top$$

неизвестного вектора  $\theta$ . Начальной полиэдральной оценкой служит априорное множество  $\Theta_0$ , а начальной векторной оценкой – вектор  $\theta_0 = (\xi_0^\top, 0, 0)^\top$  с любым  $\xi_0 \in \Xi$ . После измерения выхода  $y_{t+1}$  в момент  $t + 1$  положим

$$\begin{aligned} \varphi_t &:= (-y_t, -y_{t-1}, \dots, -y_{t-n+1}, u_t, \dots, u_{t-m+1})^\top, \quad \eta_{t+1} := \text{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^\top \xi_t), \\ p_{t+1} &= \max_{t-\mu \leq s < t+1} |y_s|, \quad \psi_{t+1} := (\eta_{t+1} \varphi_t^\top, p_{t+1}, 1)^\top, \quad \zeta_{t+1} := \eta_{t+1} y_{t+1}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях неравенство (3.1), соответствующее вектору  $\theta_t$ , эквивалентно неравенству

$$(3.6) \quad \psi_{t+1}^\top \theta_t \geq \zeta_{t+1}.$$

Положим

$$(3.7) \quad \theta_{t+1} := \theta_t, \quad \Theta_{t+1} := \Theta_t, \quad \text{если } \psi_{t+1}^\top \theta_t \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

В противном случае положим

$$(3.8) \quad \Theta_{t+1} := \Theta_t \cap \Omega_{t+1}, \quad \Omega_{t+1} := \left\{ \hat{\theta} \mid \psi_{t+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1} \right\},$$

$$(3.9) \quad \theta_{t+1} := \underset{\hat{\theta} \in \Theta_{t+1}}{\text{argmin}} J(\hat{\theta}, y^*).$$

Формулы (3.7) и (3.8) имеют простую геометрическую интерпретацию. Каждое множество  $\Theta_t$  описывается системой линейных неравенств, состоящей из нескольких неравенств из описания априорного множества  $\Theta_0$  и из нескольких неравенств  $\psi_{s+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{s+1}$ , т.е. неравенств (3.1), соответствующих некоторым предыдущим оценкам  $\theta_s$ ,  $s < t$ . Неравенство в определении полупространства  $\Omega_{t+1}$  является линейным неравенством (3.1), соответствующим текущей оценке  $\theta_t$ . Благодаря введению мертвой зоны обновление  $\Theta_t$  согласно (3.8) производится только в том случае, когда расстояние от вектора  $\theta_t$  до полупространства  $\Omega_{t+1}$  больше параметра мертвой зоны  $\varepsilon$ . Обновленная оценка  $\theta_{t+1}$  согласно (3.9) является оптимальной относительно идентификационного критерия  $J(\hat{\theta}, y^*)$  на полиэдре  $\Theta_{t+1}$ .

Перед формулировкой теоремы о качестве адаптивного управления на основе описанного алгоритма оценивания заметим, что уравнение оптимального регулятора (2.3), соответствующего вектору  $\xi_t$  оценок неизвестных коэффициентов  $\xi$ , благодаря введению обозначения  $\varphi_t$  можно кратко записать в виде уравнения

$$(3.10) \quad \varphi_t^\top \xi_t = y_{t+1}^*$$

относительно компоненты  $u_t$  фазового вектора  $\varphi_t$ . Таким образом, управление  $u_t$  будет вычисляться из уравнения (3.10), которое будем называть *адаптивным регулятором*.

*Теорема 2.* Пусть объект управления удовлетворяет уравнению (2.1) и априорным предположениям **П.1**, **П.2** с неизвестным вектором параметров  $\theta = (\xi^\top, \delta_y, \delta_w)^\top$ . Пусть объект управляется адаптивным регулятором (3.10) и используется алгоритм оценивания (3.7)–(3.9) с параметром мертвой зоны  $\varepsilon \leq (1 - \bar{\delta}_y)/(2(2 + C_u))$ . Тогда при любых начальных данных в замкнутой системе управления (2.1), (3.10) полиэдральные оценки  $\Theta_t$  и векторные оценки  $\theta_t$  не изменяются при всех достаточно больших  $t$  и

$$(3.11) \quad \|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq J(\theta_\infty, y^*) + K_{\theta_\infty} \varepsilon \leq J(\theta, y^*) + K\varepsilon,$$

где  $\theta_\infty = (\xi_\infty^\top, \delta_{y,\infty}, \delta_{w,\infty})$  – финальное значение оценок  $\theta_t$  и

$$(3.12) \quad K_{\theta_\infty} = \frac{1 + (2 + \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|) \|y^*\|_{ss} + (\delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty} \|y^*\|_{ss})(2 + \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|)}{(1 - \delta_{y,\infty} - \varepsilon(2 + \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|))^2},$$

$$K = \frac{4(1 + 2\|y^*\|_{ss} + C_u + (\delta_{w,\infty} + \bar{\delta}_y \|y^*\|_{ss})(2 + C_u))}{(1 - \bar{\delta}_y)^2}.$$

*Доказательство теоремы 2.* Докажем, что при каждом изменении оценки  $\theta_t$  расстояние от  $\theta_t$  до полупространства  $\Omega_{t+1}$  больше  $\varepsilon$ . Действительно,  $\theta_t$  изменяется только если

$$\psi_{t+1}^\top \theta_t < \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

Поскольку  $\psi_{t+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1}$  для любого  $\hat{\theta} \in \Omega_{t+1}$ , то

$$|\psi_{t+1}| |\hat{\theta} - \theta_t| \geq |\psi_{t+1}^\top (\hat{\theta} - \theta_t)| > \varepsilon |\psi_{t+1}|$$

и, следовательно,  $|\hat{\theta} - \theta_t| > \varepsilon$  для любого  $\hat{\theta} \in \Omega_{t+1}$ . Из этого следует, что после изменения оценки  $\Theta_t$  на оценку  $\Theta_{t+1} \subset \Omega_{t+1}$  монотонно убывающая по включению последовательность оценок  $\Theta_t$  не будет в дальнейшем пересекаться с  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $\theta_t \in \Theta_t$ , при этом не попадающие в будущие оценки  $\Theta_s$ ,  $s > t$ ,  $\varepsilon/2$ -окрестности оценок  $\theta_t$  не пересекаются. Тогда число возможных изменений оценок  $\Theta_t$  и  $\theta_t$  будет заведомо конечным, если оценки  $\theta_t$  принимают значения только в ограниченном множестве. Для доказательства ограниченности оценок  $\theta_t$  заметим, что  $\theta \in \Omega_t$  при всех  $t$  и поэтому  $\theta \in \Theta_t$  при всех  $t$ . Тогда из (3.9) следует  $J(\theta_t, y^*) \leq J(\theta, y^*)$  при всех  $t$ , и все оценки  $\theta_t$  лежат

в ограниченном множестве  $\{\hat{\theta} \mid J(\hat{\theta}, y^*) \leq J(\theta, y^*)\}$ . Ввиду конечного числа изменений оценок  $\theta_t$

$$(3.13) \quad \exists t_* \forall t \geq t_* \quad \theta_t = \theta_\infty = (\xi_\infty^\top, \delta_{y,\infty}, \delta_{w,\infty}) \wedge \psi_{t+1}^\top \theta_\infty \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

Неравенства (3.13) гарантируют, что при всех  $t \geq t^*$  и  $\mu \geq \max(n, m)$

$$(3.14) \quad \begin{aligned} & |a_\infty(q^{-1})y_{t+1} - b_\infty(q^{-1})u_t| \leq \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty} p_{t+1} + \varepsilon |\psi_{t+1}| \leq \\ & \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty} p_{t+1} + \varepsilon (|y_{t-n+1}^t| + |u_{t-m+1}^t| + p_{t+1} + 1) \leq \\ & \delta_{w,\infty} + \varepsilon + (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon) p_{t+1} + \varepsilon |u_{t-m+1}^t|. \end{aligned}$$

Неравенства (3.14) позволяет рассматривать выход  $y$  для всех  $t \geq t^*$  как выход модели (2.1) с параметрами  $\xi_\infty$ ,  $\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon$ ,  $\delta_{w,\infty} + \varepsilon$  вместо  $\xi$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_w$  соответственно и с дополнительной неопределенностью в канале управления, соответствующей слагаемому  $\varepsilon |u_{t-m+1}^t|$  с коэффициентом усиления  $\varepsilon$ . Тогда по теореме 8 [13]

$$(3.15) \quad \|y_t - y_t^*\|_{ss} \leq \frac{\delta_{w,\infty} + \varepsilon + (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon + \varepsilon \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|) \|y^*\|_{ss}}{1 - (\delta_{y,\infty} + 2\varepsilon) - \varepsilon \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|}.$$

Из определения (3.9) оптимальных оценок  $\theta_t$  и включений  $\theta \in \Theta_t$  при всех  $t$  следует ключевое неравенство

$$(3.16) \quad J(\theta_\infty, y^*) \leq J(\theta, y^*).$$

Для сравнения верхней оценки (3.15) и  $J(\theta_\infty, y^*)$  и вычисления постоянной  $K_{\theta_\infty}$  в (3.11) достаточно воспользоваться неравенством

$$\frac{C_1 + \varepsilon_1}{C_2 - \varepsilon_2} - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2 \varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2}{C_2(C_2 - \varepsilon_2)} \leq \frac{\varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2}{(C_2 - \varepsilon_2)^2}$$

с параметрами

$$\begin{aligned} C_1 &= \delta_{w,\infty} + \delta_{y,\infty} \|y^*\|_{ss}, & \varepsilon_1 &= \varepsilon(1 + (2 + \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\|) \|y^*\|_{ss}), \\ C_2 &= 1 - \delta_{y,\infty} \leq 1, & \varepsilon_2 &= \varepsilon(2 + \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\|). \end{aligned}$$

Формула для постоянной  $K$  из неравенства (3.11) следует из формулы для  $K_{\theta_\infty}$  после применения неравенств

$$\begin{aligned} & \|a_\infty(\lambda)/b_\infty(\lambda)\| \leq C_u, \\ & \|(a_\infty(\lambda) - 1)/b_\infty(\lambda)\| \leq C_u, \\ & \varepsilon(2 + C_u) \leq (1 - \bar{\delta}_y)/2. \end{aligned}$$

Наконец, из неравенств  $K_{\theta_\infty} \leq K$  и (3.16) следует справедливость правого неравенства в (3.11). Теорема доказана.

*Замечание 1.* Последнее неравенство в (3.11) гарантирует решение задачи 1 с неизвестной верхней оценкой  $J(\theta, y^*) + K\varepsilon$ . Оно же позволяет оценивать эту неизвестную верхнюю оценку снизу. Действительно, вычисляемые в каждый момент времени текущие оптимальные значения показателя качества  $J(\theta_t, y^*)$ , не сфальсифицированные данными измерений на промежутке  $[0, t]$ , сходятся снизу за конечное, но неизвестное, время к предельному значению  $J(\theta_\infty, y^*)$ . Более того, если на некотором достаточно длинном интервале времени оценка  $\theta_t$  не изменяется, то оценка  $J(\theta_t, y^*) + K_{\theta_t}\varepsilon$  становится *верной верхней оценкой* ошибки слежения, поскольку для оценки  $\theta_t$  выполнено уравнение модели, при этом вычисление постоянной  $K_{\theta_t}$  — относительно простая задача. Если при этом вычисленное значение  $K_{\theta_t}\varepsilon$  хуже желаемой точности, значение параметра мертвой зоны  $\varepsilon$  можно уменьшить.

*Замечание 2.* Из способа доказательства конечности числа возможных изменений оценок  $\Theta_t$  и  $\theta_t$  за счет исключения шаров радиуса  $\varepsilon/2$  следует грубая оценка числа возможных коррекций оценок порядка  $(1/\varepsilon)^{n+m}$ , соответствующая методу перебора по сетке размером порядка  $\varepsilon$ . Эта оценка представляется излишне грубой по двум причинам. Во-первых, алгоритм оценивания (3.7)–(3.9) осуществляет целенаправленный перебор оценок  $\theta_t$  в порядке возрастания согласованного с измерениями показателя качества  $J(\theta_t, y^*)$  и, во-вторых, накопление информации о неизвестных параметрах идет наиболее эффективно, при этом из полиэдральных оценок исключаются не просто шары, а “максимальные” не согласованные с измерениями области в пространстве оценок  $\hat{\theta}$ . Результаты моделирования подтверждают излишнюю грубость указанной выше экспоненциальной по размерности  $\dim \xi$  оценки, однако получение более адекватной алгоритму (3.7)–(3.9) верхней оценки числа возможных коррекций  $\Theta_t$  и  $\theta_t$  является открытой математической задачей.

*Замечание 3.* Решение задачи 2 обеспечивается тем же алгоритмом оценивания, что и решение задачи 1, после замены показателя качества  $J(\theta, y^*)$  в (3.9) показателем качества  $J_2(\theta, Y^*)$ . Для решения задачи 3 показатель качества  $J(\hat{\theta}, y^*)$  в (3.9) следует заменить показателем качества

$$\tilde{J}_3(\hat{\theta}, y^*) = \frac{\hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y S_{t+1}}{1 - \hat{\delta}_y}, \quad S_{t+1} := \sup_{k \leq t+1} |y_k^*|,$$

где  $S_{t+1}$  вычисляется рекуррентно:  $S_{t+1} = \max(S_t, |y_{t+1}^*|)$ . Последовательность  $S_t$  монотонно снизу сходится к  $\|y^*\|$ , что гарантирует справедливость аналогичного (3.16) ключевого неравенства для показателя качества  $J_3(\theta, y^*)$ .

### 3.3. Синтез на основе полиэдрального оценивания фиксированной сложности

Показатели качества во всех сформулированных в разделе 2 задачах являются дробно-линейными функциями вектора  $\theta$  и, следовательно, их поверхности уровня — гиперплоскости в пространстве оцениваемых параметров. Это обстоятельство открывает возможность использования полиэдральных оценок с фиксированным числом линейных неравенств.

**Алгоритм полиэдрального оценивания с  $N$  неравенствами.** Выберем число  $N \geq n + m + 2 = \dim \theta$  линейных неравенств (3.6), используемых для описа-

ния полиэдральных оценок  $\Theta_t^N$ , и параметр мертвой зоны  $\varepsilon > 0$ . В качестве начальной оценки  $\theta_0$  выберем любую из вершин априорного полиэдра  $\Theta_0$  вида  $\theta_0 = (\xi_0^\top, 0, 0)^\top$ . При этом  $\xi_0$  будет одной из вершин априорного множества коэффициентов  $\Xi$  и

$$J(\theta_0, y^*) = 0 = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0} J(\hat{\theta}, y^*).$$

В качестве начальной полиэдральной оценки  $\Theta_0^N$  возьмем  $\mathbb{R}^{n+m+2}$ , т.е. описание  $\Theta_0^N$  не содержит ни одного неравенства (3.6). Пусть  $\theta_t$  – векторная оценка и  $\Theta_t^N$  – полиэдральная оценка неизвестного вектора  $\theta$  в момент  $t$ . После измерения выхода  $y_{t+1}$  в момент  $t + 1$  положим

$$(3.17) \quad \theta_{t+1} := \theta_t, \quad \Theta_{t+1}^N := \Theta_t^N, \quad \text{если } \psi_{t+1}^\top \theta_t \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

В противном случае положим

$$(3.18) \quad \theta_{t+1} := \underset{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}}{\operatorname{argmin}} J(\hat{\theta}, y^*), \quad \Omega_{t+1} := \left\{ \hat{\theta} \mid \psi_{t+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1} \right\},$$

где  $\theta_{t+1}$  – вершина полиэдра  $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}$ , являющаяся решением задачи дробно-линейного программирования (3.18). Множественная оценка  $\Theta_t$  обновляется по правилу

$$(3.19) \quad \Theta_{t+1}^N = \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1},$$

если число неравенств в описании  $\Theta_t^N$  строго меньше  $N$ . Если же число неравенств достигло значения  $N$ , то новое неравенство (3.6) включается в описание  $\Theta_{t+1}^N$  вместо любого из неравенств в описании  $\Theta_t^N$ , на границе которого не лежит  $\theta_{t+1}$ . В вырожденном случае, когда вершина  $\theta_{t+1}$  оказалась на границе более  $n + m + 2$  неравенств из описания  $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}$ , оценка  $\theta_{t+1}$  пересчитывается по формуле (3.18) с заменой неравенства, задающего полупространство  $\Omega_{t+1}$ , на ослабленное неравенство  $\psi_{t+1}^\top \hat{\theta} \geq \zeta_{t+1} - \varepsilon_1 |\psi_{t+1}|$  со сколь угодно малым  $\varepsilon_1 > 0$  для устранения вырожденного случая.

Таким образом, число неравенств в описании  $\Theta_t^N$  увеличивается на единицу в некоторые начальные моменты времени и не изменяется, достигнув значения  $N$ . Отметим, что вычисление оценок  $\theta_{t+1}$  согласно (3.18) – задача дробно-линейного программирования в  $\mathbb{R}^{n+m+2}$  с не более  $l + 3 + N + 1$  линейных ограничений ( $l + 3$  – число неравенств в описании априорного множества  $\Theta_0$ ). Известно (см., например, [23]), что любая задача дробно-линейного программирования стандартным образом сводится к задаче линейного программирования посредством добавления одной вещественной переменной, одного линейного неравенства и одного линейного равенства.

*Теорема 3. Пусть объект управления удовлетворяет уравнению (2.1) и априорным предположениям П.1, П.2 с неизвестным вектором параметров  $\theta = (\xi^\top, \delta_y, \delta_w)^\top$ . Пусть объект управляется адаптивным регулятором (3.10) с использованием алгоритма полиэдрального оценивания с  $N$  неравенствами и  $\varepsilon \leq (1 - \delta_y)/(2(2 + C_u))$ . Тогда при любых начальных данных в замкнутой системе:*

1) последовательность  $J(\theta_t, y^*)$  возрастающая и

$$(3.20) \quad J(\theta_t, y^*) = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N} J(\hat{\theta}, y^*) \leq J(\theta, y^*) \quad \forall t;$$

2) если оценки  $\Theta_t^N$  и  $\theta_t$  не изменяются при всех достаточно больших  $t$ , то справедливы неравенства (3.11).

*Доказательство теоремы 3.* Доказательство монотонности последовательности  $J(\theta_t, y^*)$  проведем индукцией по времени  $t$ . На начальном промежутке времени, пока количество неравенств в оценках  $\Theta_t^N$  не достигло  $N$ , полиэдральные оценки  $\Theta_t^N$  убывают по включению, и возрастание последовательности  $J(\theta_t, y^*)$  и равенство в (3.20) прямо следуют из (3.18) и равенств  $\Theta_{t+1} = \Theta_t \cap \Omega_{s+1}$ . Докажем индукционный переход. Пусть возрастание  $J(\theta_t, y^*)$  имеет место до момента  $t$  включительно, справедливо равенство в (3.20) и количество линейных неравенств в описании  $\Theta_t^N$  равно  $N$ . В момент времени  $t + 1$  после вычисления оценки  $\theta_{t+1}$  согласно формуле (3.18) неравенство

$$J(\theta_{t+1}, y^*) \geq J(\theta_t, y^*)$$

следует из включения  $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1} \subset \Theta_t^N$  и равенства (3.20), справедливого в силу индукционного предположения. Покажем, что после изменения  $\Theta_t^N$  на  $\Theta_{t+1}^N$

$$(3.21) \quad \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N} J(\hat{\theta}, y^*) = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*) = J(\theta_{t+1}, y^*)$$

несмотря на замену одного из неравенств полиэдра  $\Theta_t^N$  на неравенство, описывающее  $\Omega_{t+1}$ . Правое равенство в (3.21) является определением  $\theta_{t+1}$  в (3.18). Пусть  $C_{t+1}$  – конус с вершиной  $\theta_{t+1}$ , определенный системой  $n + m + 2$  неравенств из описания  $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}$ , на границе которых лежит  $\theta_{t+1}$ . Тогда  $\Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N \subset C_{t+1}$ , так как в описании  $\Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N$  заведомо входят неравенства, задающие конус  $C_{t+1}$ . Из включений  $\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1} \subset \Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N \subset C_{t+1}$  следует

$$J(\theta_{t+1}, y^*) = \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*) \geq \min_{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_{t+1}^N} J(\hat{\theta}, y^*) \geq \min_{\hat{\theta} \in C_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*).$$

Теперь для доказательства (3.21) достаточно показать, что

$$(3.22) \quad \min_{\hat{\theta} \in C_{t+1}} J(\hat{\theta}, y^*) = J(\theta_{t+1}, y^*).$$

Это равенство следует из того, что линии уровня дробно-линейного показателя качества  $J(\hat{\theta}, y^*)$  – гиперплоскости в  $\mathbb{R}^{n+m+2}$ :

$$J(\hat{\theta}, y^*) = C \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y(\|y^*\|_{ss} + C) = C.$$

В малой окрестности  $\theta_{t+1}$  векторы из полиэдра  $\Theta_0 \cap \Theta_t^N \cap \Omega_{t+1}$  описываются только неравенствами из описания конуса  $C_{t+1}$  и лежат в полупространстве

$$\left\{ \hat{\theta} \mid J(\hat{\theta}, y^*) \geq J(\theta_{t+1}, y^*) \right\}.$$

Из этого следует, что конус  $C_t$  с вершиной  $\theta_{t+1}$  весь лежит в этом полупространстве и, следовательно, справедливо равенство (3.22).

Доказательство второго утверждения теоремы аналогично доказательству неравенств (3.11) в теореме 2. Теорема 3 доказана.

*Замечание 4.* Формально множественными оценками неизвестного вектора параметров  $\theta$  следовало бы называть полиэдры  $\Theta_0 \cap \Theta_t^N$ , поскольку  $\operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_t^N} J(\hat{\theta}, y^*)$  может оказаться вне априорного полиэдра  $\Theta_0$ . Однако при достаточно разнообразных возмущениях такое случается на относительно коротком начальном этапе настройки оценок  $\theta_t$ , когда  $\delta_{yt} = 0$  или  $\delta_{wt} = 0$ , и с некоторого момента полиэдры  $\Theta_t^N$  фактически оказываются множественными оценками  $\theta$ . Алгоритм полиэдрального оценивания с  $N$  неравенствами приведен выше в той форме, в какой он применялся при численном моделировании, описанном в разделе 4, при этом при добавлении нового неравенства (3.6) в оценку  $\Theta_{t+1}^N$  из описания  $\Theta_t^N$  удалялось неравенство, граница которого наиболее удалена от новой оценки  $\theta_{t+1}$ .

*Замечание 5.* Второе утверждение теоремы 3 базируется на предположении о сходимости оценок за конечное время. В [24] была доказана конечная сходимость конусного алгоритма оценивания (соответствующего случаю  $N = \dim \theta$ ) для размерностей 2 и 3. Этот результат остается справедливым при любом числе запоминаемых неравенств. Доказательство конечной сходимости для размерностей выше трех остается открытой проблемой.

#### 4. Моделирование

Для численного моделирования выбрана неустойчивая и минимально-фазовая модель (2.1) с полюсами, т.е. корнями  $a(\lambda)$ , равными 0,8, 0,9 и  $0,8 \pm \pm 0,4i$ , с нулями, т.е. корнями  $b(\lambda)$ , равными 1,1 и 1,2 и с коэффициентом  $b_1 = 2$ . Этим параметрам соответствует (с точностью  $10^{-4}$ ) вектор коэффициентов

$$\xi = (-4,3611, 7,3611, -5,7292, 1,7361, 2, -3,4848, 1,5152)^\top.$$

Таким образом, размерность вектора оцениваемых параметров  $\theta$  равна 9. Суммарное возмущение  $v$  моделируется в виде

$$(4.1) \quad v_t = w_t + 0,5 \kappa_t p_t,$$

где  $w_t, \kappa_t$  – последовательности независимых равномерно распределенных на отрезке  $[-1, 1]$  случайных величин, так что  $\delta_y = 0,5, \delta_w = 1$ . Память неопределенности  $\mu = 10$ , параметр мертвой зоны  $\varepsilon = 0,001$ . Априорные ограничения на вектор  $\theta$  имеют вид

$$(-9, 3, -10, -3, 0,1, -8, -3) \leq \xi^\top \leq (3, 15, 2, 9, 10, 4, 9),$$

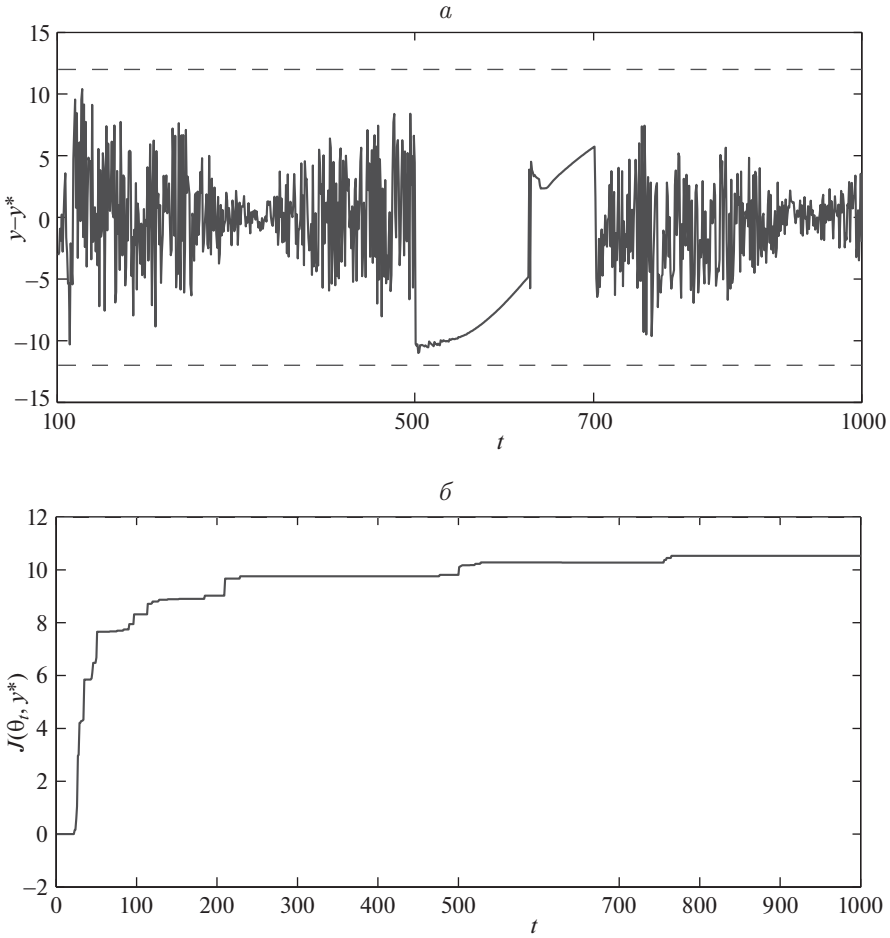


Рис. 1. Алгоритм (3.9): графики ошибки слежения (а) и  $J(\theta_t, y^*)$  (б).

где неравенство понимается покомпонентно, т.е. вектор  $\xi$  лежит в кубе в  $\mathbf{R}^{n+m}$  со стороной 12 и

$$\begin{aligned}
 b_1 &\geq 0,1, & 0,8 &\geq \delta_y \geq 0, & \delta_w &\geq 0, \\
 b_1 - b_3 &\geq 0,01, & b_1 - b_2 + b_3 &\geq 0,01, & b_1 + b_2 + b_3 &\geq 0,01.
 \end{aligned}$$

Неравенства в нижней строке эквивалентны условию минимально-фазовости модели, если в правых частях этих неравенств вместо 0,01 поставить нули. Замена нуля числом 0,01 в правых частях неравенств нижней строки дает необходимый отступ от границы множества минимально-фазовых моделей. Начальные значения  $y_1, y_2, y_3, y_4$  – случайные из отрезка  $[-1, 1]$ ,  $u_1, u_2, u_3, u_4$  – нули.

Для иллюстрации поведения адаптивной системы при наихудших возмущениях внешнее возмущение и неопределенность на промежутке  $[500, 700]$  имеют максимальную амплитуду,

$$v_{t+1} = (\delta_w + \delta_y p_{t+1}) \text{sign}(\xi_t^\top \varphi_t),$$



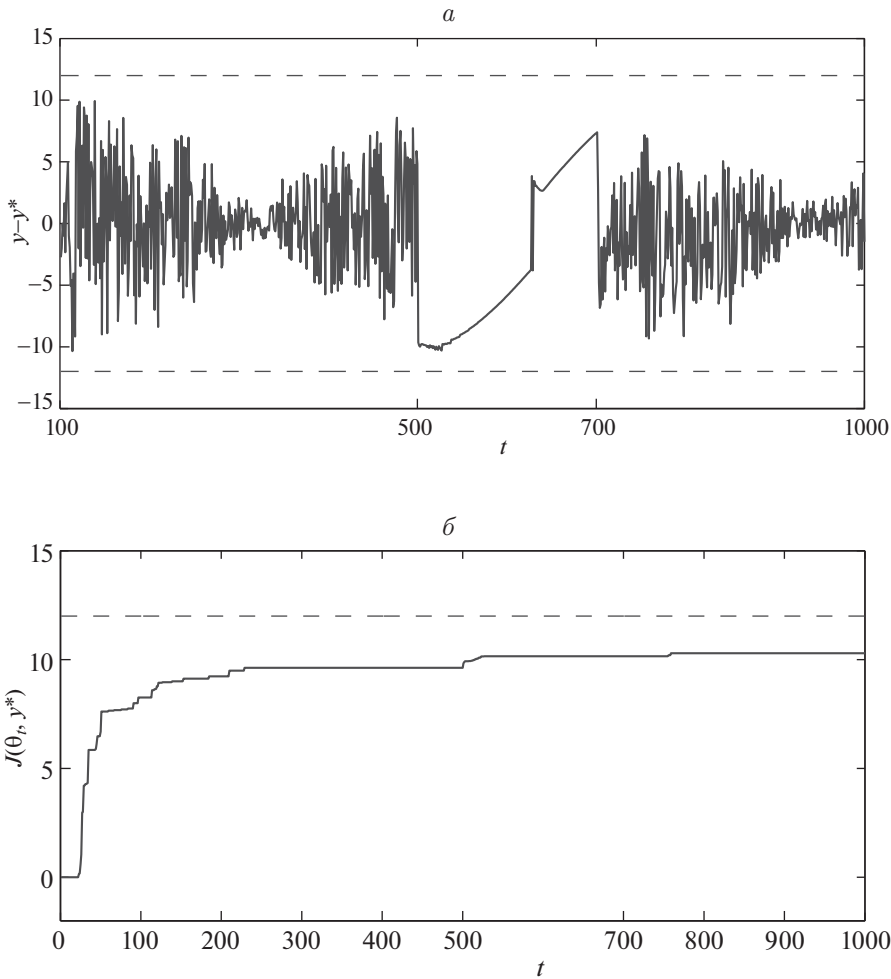


Рис. 2. Алгоритм (3.18): графики ошибки слежения (а) и  $J(\theta_t, y^*)$  (б).

максимизируя абсолютную величину выхода. Задающий сигнал  $y_t^* = 10 \sin(0,001 t)$  – периодический и  $\|y_t^*\|_{ss} = 10$ . Пунктирные линии на графиках ошибки слежения соответствуют неизвестным конструктору адаптивной системы оптимальным асимптотическим границам для ошибки слежения  $\pm J(\theta, y^*) = \pm 12$ .

Графики ошибки слежения и значений  $J(\theta_t, y^*)$  для алгоритмов оценивания (3.9) и (3.18) приводятся соответственно на рис. 1 и 2 для одинаковых реализаций случайных начальных данных и  $w_t$  и  $\kappa_t$  из (4.1). Использованное при моделировании число запоминаемых неравенств  $N = 2 \dim \theta = 18$  в алгоритме оценивания (3.18) соответствует полиэдру  $\Theta_t^N$ , в каждом из которых вершинами являются текущая оценка  $\theta_t$  и ее девять смежных вершин. Число коррекций оценок для алгоритмов (3.9) и (3.18) в многочисленных экспериментах находилось в основном в промежутках 50–70 и 60–80 коррекций соответственно. Время счета в экспериментах на ноутбуке с процессором 4xIntelCore i5-7200U CPU@2,50GHz варьировалось от 1,5 до 3 сек.

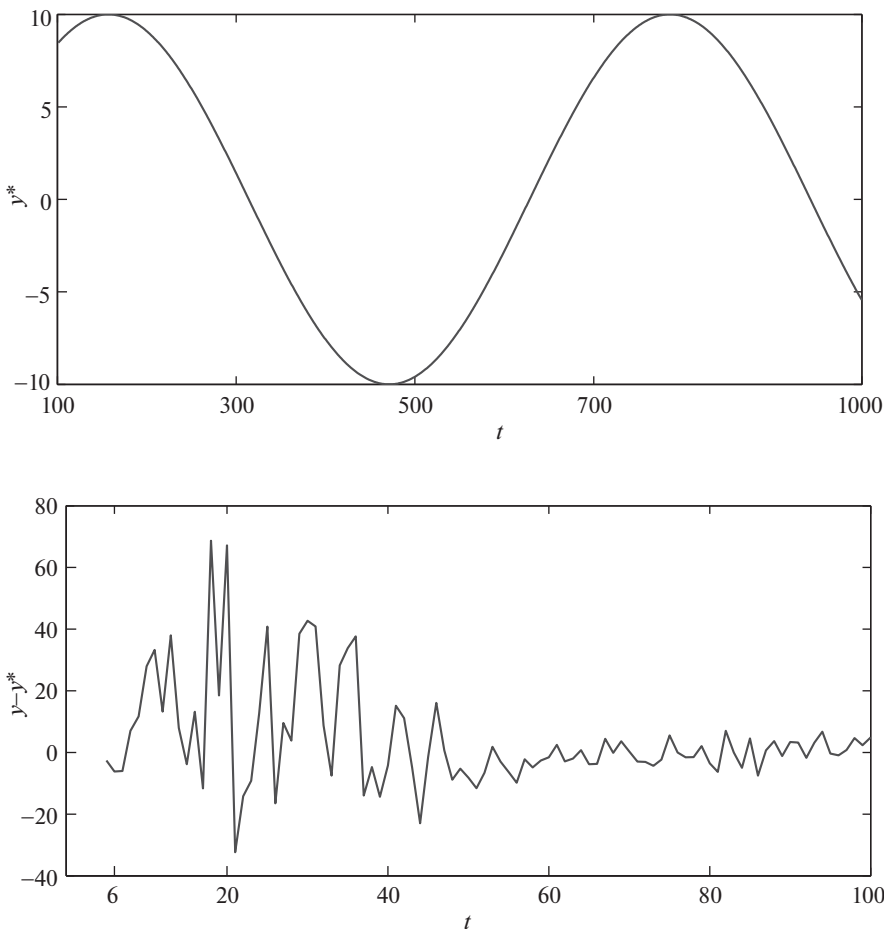


Рис. 3. График задающего сигнала  $y^*$  и график ошибки слежения на начальном промежутке  $[0, 100]$  для алгоритм (3.18).

На графиках рис. 1,б и 2,б иллюстрируется *онлайн верификация* текущих оценок. В каждый момент времени  $t$  вычисляемое значение  $J(\theta_t, y^*)$  является, с точностью  $K_{\theta_t}\varepsilon$ , верхней оценкой ошибки слежения, согласованной с данными измерений. При этом гарантируется справедливость этой верхней оценки, если текущая оценка  $\theta_t$  не изменяется. Например, последней обновленной оценке алгоритма (3.9)

$$\theta_{765} = \left( -4,5459, 7,6979, -6,0380, 1,8589, 2,0574, \right. \\ \left. -3,6490, 1,6233, 0,3448, 3,4526 \right)^\top$$

неизвестного вектора

$$\theta = \left( -4,3611, 7,3611, -5,7292, 1,7361, 2,0000, \right. \\ \left. -3,4848, 1,5152, 0,5000, 1,0000 \right)^\top$$

соответствует  $J(\theta_{765}, y^*) = 10.5314 < 12 = J(\theta, y^*)$ , а последней оценке алгоритма (3.18)

$$\theta_{798} \left( -6,1669, 11,3053, -9,1758, 3,0296, 2,7700, \right. \\ \left. -5,3721, 2,6408, 0,3120, 3,9614 \right)^T$$

соответствует меньшее значение  $J(\theta_{798}, y^*) = 10,2939$ , поскольку в алгоритме (3.18) задействовано меньшее число целевых неравенств. Заметим, что, несмотря на заметное различие последних оценок алгоритмов (3.9) и (3.18), эти оценки согласованы с измерениями на финальных промежутках длиной более 200 тактов и иллюстрируют принцип неопределенности Р.Е. Калмана.

На рис. 3 представлены графики задающего сигнала  $y^*$  и переходного процесса для алгоритма (3.18). График задающего сигнала позволяет наглядно увидеть, как в приведенных численных экспериментах значения периодического сигнала  $y^*$  проявляются в виде “пульсации” ошибки слежения в установившемся режиме.

В целом результаты моделирования показали высокую эффективность обоих алгоритмов оценивания в задаче адаптивного оптимального слежения с 9 оцениваемыми параметрами. Алгоритм оценивания (3.18) с фиксированным числом неравенств представляется перспективным и для задач с большим числом оцениваемых параметров.

## 5. Заключение

Р.Е. Калман завершил свою работу [22] словами:

“Проблема шума, безусловно, является центральной проблемой всей прикладной математики. Она должна быть разрешена при помощи математики, а не априорной гипотезы”.

Настоящая работа посвящена проблеме оптимального управления в условиях шума и соответствует процитированному в разделе 2 принципу неопределенности. Для минимально-фазового объекта с неизвестным вектором коэффициентов, неопределенностью в канале выхода с неизвестным коэффициентом усиления и ограниченным внешним возмущением с неизвестной верхней границей впервые решена задача адаптивного оптимального робастного слежения. Показана зависимость постановки оптимальной задачи от априорной информации о задающем сигнале. Решение задачи получено при минимальных априорных предположениях в рамках детерминированной теории робастного управления в  $\ell_1$ -постановке, не требует использования тестовых или пробных сигналов и реализует максимальные возможности обратной связи. Главное достоинство предложенных алгоритмов оценивания заключается в обеспечении асимптотической *субоптимальности адаптивного управления*. Важнейшим, помимо оптимальности, достоинством используемого подхода является *онлайн верификация* не только текущей оценки модели, но и априорных предположений об управляемом объекте, неопределенности и внешнем возмущении. Такая верификация не доступна другим методам синтеза адаптивного управления, в том числе в стохастических постановках. Результаты численного моделирования показали эффективность предложенных

алгоритмов, и эти алгоритмы представляются перспективными для практических приложений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and Optimal Control. Upper Saddle River, New Jersey. Prentice-Hall, 1996.
2. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
3. Kosut R., Goodwin G., Polis M. (Eds.) Special issue on system identification for robust control design // IEEE Transactions Automatic Control. 1992. V. 37. No. 7.
4. Smith R.S., Dahleh M. (Eds.) The Modeling of Uncertainty in Control Systems (Lecture Notes in Control and Information Sciences). V. 192. London, U.K.: Springer-Verlag, 1994.
5. Ljung L., Vicino A. (Eds.) Special Issue on System Identification // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. V. 50. No. 10.
6. Soderstrom T., Van Den Hof P., Wahlberg B., Weiland S. (Eds.) Special Issue on Data-Based Modelling and System Identification // Automatica. 2005. V. 41. No. 3.
7. Regruto D., Dabbene F. (Eds.) Special Issue on Relaxation Methods in Identification and Estimation Problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. V. 59. No. 11.
8. Ljung L., Goodwin G., Agüero J.C., Chen T. Model Error Modeling and Stochastic Embedding // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 28. P. 75–79.
9. Delgado R.A., Goodwin G.C., Carvajal R., Agüero J.C. A novel approach to model error modelling using the expectation-maximization algorithm // In IEEE 51st Conference on Decision and Control (CDC). 2012. P. 7327–7332.
10. Khammash M., Pearson J.B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. V. AC-36. No. 4. P. 398–412.
11. Khammash M.H. Robust steady-state tracking // IEEE Trans. Automat. Control. 1995 V. 40. No. 11. P. 1872–1880.
12. Khammash M.H. Robust Performance: Unknown Disturbances and Known Fixed Inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. V. 42. P. 1730–1P734.
13. Соколов В.Ф. Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в  $\ell_1$ -метрике // АиТ. 1999. № 1. С. 101–112.  
Sokolov V.F. Asymptotic Robust Performance of the Discrete Tracking System in the  $\ell_1$ -metric // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 1. Part 2. P. 82–91.
14. Sokolov V.F.  $\ell_1$  robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty // Syst. Control Lett. 2001. V. 42(5). P. 363–377.
15. Smith R. Model Validation and Parameter Identification for Systems in  $H_\infty$  and  $\ell_1$  // Proc. American Control Conf. 1992. P. 2852–2856.
16. Bianchi F., Sánchez-Peña R. Robust identification/invalidation in an LPV framework // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2010. V. 20. P. 301–312.
17. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука. 1981.
18. Sokolov V.F. Adaptive suboptimal control of a linear system with bounded disturbances // Syst. Control Lett. 1985. V. 6. P. 93–98.

19. *Соколов В.Ф.* Адаптивное субоптимальное управление в случае ограниченной помехи // *АиТ.* 1985. № 9. С. 78–86.  
*Sokolov V.F.* Adaptive Suboptimal Control in the Case of Constrained Noise // *Autom. Remote Control.* 1985. V. 46. P. 1. P. 1131–1139.
20. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в  $\ell_1$ -постановке // *АиТ.* 1998. № 3. С. 107–131.  
*Sokolov V.F.* Adaptive Robust Control of a Discrete Scalar Object in the  $\ell_1$ -statement // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 3. P. 2. P. 392–411.
21. *Sokolov V.F.* Adaptive  $\ell_1$  robust control for SISO system // *Systems Control Lett.* 2001. V. 42. P. 379–393.
22. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // *Успехи математических наук.* 1985. Т. 40. Вып. 4(244). С. 27–41.
23. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. N.Y. Cambridge University Press. 2004.
24. *Соколов В.Ф.* Адаптивное минимаксное управление на основе рекуррентного линейного программирования // *АиТ.* 1993. № 12. С. 127–139.  
*Sokolov V.F.* Adaptive Minimax Control Based on Recursive Linear Programming // *Autom. Remote Control.* 1993. V. 54. No. 12. P. 1835–1845.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.*

Поступила в редакцию 25.11.2019

После доработки 24.09.2020

Принята к публикации 15.01.2021