Автоматика и телемеханика, № 8, 2021

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

 Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (levafraimovich@gmail.com),
М.Д. ЕМЕЛИН (makcum888e@mail.ru)
(Нижегородский государственный университет)

КОМБИНИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Рассматриваются вопросы решения NP-трудной целочисленной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Ставится задача оптимального комбинирования пар допустимых решений задачи и строится линейный по трудоемкости алгоритм ее решения. Данный подход может быть применен в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения трехиндексной задачи о назначениях для постобработки полученных приближенных решений задачи. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие перспективность предложенного подхода.

Ключевые слова: аксиальная задача о назначениях, многоиндексные задачи, приближенные алгоритмы.

DOI: 10.31857/S0005231021080080

1. Введение

Существует широкий класс прикладных задач, формализуемых в виде многоиндексных аксиальных задач о назначениях [1–3]. Обзор результатов, связанных с анализом вычислительной сложности и построением приближенных алгоритмов решения специальных подклассов многоиндексных аксиальных задач о назначениях, приведен в [1]. В общей постановке класс многоиндексных аксиальных задач о назначениях является NP-трудным уже в трехиндексном случае [4]. Более того, для задач данного класса не существует полиномиальных ε-приближенных алгоритмов (здесь ε — произвольная константа), иначе P = NP, данный результат также справедлив уже в трехиндексном случае [5]. В [5] также показано, что данный результат справедлив в случае, когда матрица стоимостей задачи о назначениях имеет декомпозиционную структуру (т.е. матрица стоимостей представима в виде суммы трех двухиндексных матриц). При этом задача о назначениях в случае, когда декомпозиционная матрица стоимостей удовлетворяет неравенству треугольника, остается NP-трудной [5]. В [5–8] исследуются аксиальные задачи о назначениях со специальной структурой многоиндексной матрицы стоимостей, в [9–11] обсуждаются вопросы построения потоковых алгоритмов решения многоиндексных задач, в [12] описывается метод ветвей и границ решения аксиальной задачи о назначениях, в [13] строится генетический алгоритм, в [14] обсуждается нижняя оценка задачи, в [15] исследуются асимптотически оптимальные решения. В планарной постановке задача о назначениях исследуется в [16–18]. Стохастические постановки многоиндексных задач исследуются в [19–21].

В данной работе ставится задача оптимального комбинирования пар допустимых решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Содержательно задача заключается в поиске оптимального решения, которое может быть построено с использованием лишь назначения выбранных допустимых решений. Строится полиномиальный алгоритм решения данной задачи комбинирования. Данный алгоритм может быть применен в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения трехиндексной задачи о назначениях для постобработки полученных допустимых решений задачи. Начальные допустимые решения могут быть получены при помощи эвристик, описанных, например, в [2, 5, 13, 22–24 и др.].

Далее статья построена следующим образом. В разделе 2 приводится постановка трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, в разделе 3 ставится задача оптимального комбинирования допустимых решений задачи о назначениях, строится алгоритм оптимального комбинирования и доказывается его корректность, в разделе 4 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

2. Трехиндексная аксиальная задача о назначениях

Пусть I, J, K – непересекающиеся множества индексов, $I \cap J = \varnothing$, $I \cap K = \varnothing$, $J \cap K = \varnothing$ и $|I| = |J| = |K| = n$; c_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – трехиндексная матрица стоимостей; x_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – трехиндексная матрица неизвестных. Тогда трехиндексная аксиальная задача о назначениях ставится как следующая задача целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} = 1, \quad k \in K, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, \quad j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, \quad i \in I, \tag{3}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk} \to \min. \tag{5}$$

Задача о назначениях (1)–(5) является NP-трудной [4]. При этом существует ряд эффективных алгоритмов (эвристических или ε-приближенных), показывающих хорошие практические результаты при решении численных задач, выделим некоторые из них.

В [5] предложен алгоритм, применимый при решении задач с декомпозиционной матрицей системы ограничений, т.е. с матрицей стоимостей, представимой в виде суммы трех двухиндексных матриц: $c_{ijk} = u^1_{ij} + u^2_{ik} + u^3_{jk}$,

$i \in I,\ j \in J,\ k \in K$. Данный алгоритм основан на решении пары зависимых двухиндексных задач. Всего существует три таких пары, таким образом, предложенный в [5] алгоритм позволяет построить три различных допустимых решения. В [5] показано, что рекорд из данных трех решений является ε-приближенным решением задачи в случае, когда декомпозиционная матрица стоимостей удовлетворяет неравенству треугольника: $u^1_{ij} \le u^2_{ik} + u^3_{jk}$, $u^2_{ik} \le u^1_{ij} + u^3_{jk}$, $u^3_{jk} \le u^1_{ij} + u^2_{ik}$, $i \in I,\ j \in J,\ k \in K$. В [2] предложен эвристический подход, основанный на аппроксимации матрицы стоимостей исходной задачи матрицей стоимостей заданной структуры и решении задачи с аппроксимационной матрицей стоимостей. Для ряда аппроксимаций в [2] строятся оценки отклонения от оптимума. В [13] построен гибридный генетический алгоритм решения задачи о назначениях, интерес представляет предложенная стратегия локальной оптимизации, которая может быть применена к любым допустимым решениям (в том числе полученным случайной генерацией).

Таким образом, начальные допустимые решения задачи (1)–(5) могут быть получены при помощи эвристик, описанных, например, в [2, 5, 13] и др. Далее описывается алгоритм, позволяющий оптимально комбинировать назначения выбранных допустимых решений.

3. Задача комбинирования решений

Пусть задано множество $W \subseteq I \times J \times K$, которое определяет подмножество разрешенных назначений. Тогда рассмотрим задачу (1)–(4), (6), (5).

$$x_{ijk} = 0, \quad (i,j,k) \notin W. \tag{6}$$

Для удобства изложения задачу (1)–(4), (6), (5) для заданного множества W будем обозначать через $Z\,(W)$. Очевидно, задача (1)–(5) соответствует задаче $Z\,(I \times J \times K)$.

В общем случае задача $Z\,(W)$ является NP-трудной. Более того, проблема проверки совместности системы (1)–(4), (6) для произвольного множества W является NP-полной [1]. Будем рассматривать такие множества W, которые соответствуют набору назначений некоторых допустимых решений задачи (1)–(5).

Пусть $x_{ijk},\ i \in I,\ j \in J,\ k \in K$ — допустимое решение системы ограничений (1)–(4). Тогда через $W\,(x)$ обозначим следующее множество разрешенных назначений:

$$W\,(x) = \{(i,j,k) |\, x_{ijk} = 1, i \in I, j \in J, k \in K\}.$$

Далее пусть $x^1_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K$ и $x^2_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K$ — произвольные допустимые решения системы ограничений (1)–(4). Тогда

$$W\left(x^1, x^2\right) = W\left(x^1\right) W\left(x^2\right).$$

Данный раздел посвящен алгоритму решения задачи $Z\left(W\left(x^1, x^2\right)\right)$.

Алгоритм 1. Решение задачи $Z\left(W\left(x^1, x^2\right)\right)$.

Шаг 1. Построить граф $G = (V, A)$, где

$$V = \{I \cup J \cup K\}, \quad A = \left\{(i,j)\,, (i,k)\,, (j,k) \;\middle|\; (i,j,k) \in W\left(x^1, x^2\right)\right\}.$$

Ш а г 2. Найти компоненты связности V_l, $l=\overline{1,q}$ графа G и построить подграфы $G_l=(V_l,A_l)$, $l=\overline{1,q}$, порожденные соответствующими компонентами связанности.

Ш а г 3. Построить следующие множества:

$$D_l^1=\left\{(i,j,k)\;\middle|\;(i,j,k)\in W\left(x^1\right),\ (i,j),(i,k),(j,k)\in A_l\right\},$$
$$D_l^2=\left\{(i,j,k)\;\middle|\;(i,j,k)\in W\left(x^2\right),\ (i,j),(i,k),(j,k)\in A_l\right\}.$$

Ш а г 4. Оптимальное значение критерия задачи $Z\left(W\left(x^1,x^2\right)\right)$ определяется как

$$c^*=\sum_{l=1}^{q}\min\left(\sum_{(i,j,k)\in D_l^1}c_{ijk},\ \sum_{(i,j,k)\in D_l^2}c_{ijk}\right).$$

Ш а г 5. Оптимальное решение задачи определяется по следующему алгоритму. Пусть $x_{ijk}{:=}0$, $i\in I$, $j\in J$, $k\in K$. Далее для каждого $l=\overline{1,q}$ выполнить

$$x_{ijk}{:=}1,\ (i,j,k)\in D_l^{p^*},\quad \text{где}\quad p^*=\operatorname*{argmin}_{p\in\{1,2\}}\sum_{(i,j,k)\in D_l^p}c_{ijk}.$$

Далее рассмотрим доказательство корректности алгоритма 1. При доказательстве будем использовать следующие обозначения:

$$V_l^1=\bigcup_{(i,j,k)\in D_l^1}\{i,j,k\},\quad V_l^2=\bigcup_{(i,j,k)\in D_l^2}\{i,j,k\},\quad l=\overline{1,q}.$$

Л е м м а 1. $V_l^1=V_l^2=V_l$, $l=\overline{1,q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $V_l^1=V_l$, $l=\overline{1,q}$. Докажем методом от противного. Предположим, что найдется $l\in\{1,\ldots,q\}$, что выполняется условие $V_l^1\neq V_l$. По построению $V_l^1\subseteq V_l$, тогда существует v, что $v\in V_l$ и $v\notin V_l^1$.

Тогда согласно условию (1)–(4) существует тройка (i,j,k), что $x_{ijk}^1=1$ и $v\in\{i,j,k\}$. Отсюда $(i,j,k)\in W\left(x^1\right)$ и, следовательно, $(i,j),(i,k),(j,k)\in A$. Тогда так как $v\in V_l$ и $v\in\{i,j,k\}$, то $(i,j),(i,k),(j,k)\in A_l$ и $(i,j,k)\in D_l^1$. Отсюда $i,j,k\in V_l^1$ и, следовательно, $v\in V_l^1$. Получаем противоречие.

Соотношение $V_l^2=V_l$, $l=\overline{1,q}$, доказывается аналогично. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. $|V_l\cap I|=|V_l\cap J|=|V_l\cap K|$, $l=\overline{1,q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условию (1)–(4) выполняется $|V_l^1\cap I|=$ $=|V_l^1\cap J|=|V_l^1\cap K|$. По лемме 1 $V_l^1=V_l$, отсюда $|V_l\cap I|=|V_l\cap J|=|V_l\cap K|$. Лемма 2 доказана.

Т е о р е м а 1. Оптимальное значение критерия задачи $Z(W(x^1,x^2))$ определяется как

$$\sum_{l=1}^{q}\min\left(\sum_{(i,j,k)\in D_l^1}c_{ijk},\ \sum_{(i,j,k)\in D_l^2}c_{ijk}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим компоненту связности V_l, $l \in \{1,\ldots,q\}$. Согласно лемме 2 выполняется $|V_l \cap I| = |V_l \cap J| = |V_l \cap K|$. Тогда упорядочим множества $I \cap V_l$, $J \cap V_l$, $K \cap V_l$ следующим образом.

В качестве i_1, j_1, k_1 выберем произвольную тройку $(i_1, j_1, k_1) \in D_l^1$. Пусть были упорядочены первые m элементов множеств:

$$i_1, \ldots, i_m,$$
$$j_1, \ldots, j_m,$$
$$k_1, \ldots, k_m.$$

Тогда выберем тройку i_{m+1}, j_{m+1}, k_{m+1}, удовлетворяющую следующим правилам:

— $i_{m+1} \in (I \cap V_l) \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}$, $j_{m+1} \in (J \cap V_l) \setminus \{j_1, \ldots, j_m\}$, $k_{m+1} \in (K \cap V_l) \setminus \{k_1, \ldots, k_m\}$,

— $(i_{m+1}, j_{m+1}, k_{m+1}) \in D_l^1$,

— существует тройка $(i_{m+1}, j, k) \in D_l^2$, что $j \in \{j_1, \ldots, j_m\}$ или $k \in \{k_1, \ldots, k_m\}$.

Далее покажем, что такая тройка $(i_{m+1}, j_{m+1}, k_{m+1})$ всегда существует, в противном случае множества упорядочены.

Построим множества

$$V_m^1 = \bigcup_{q=1}^{m} \{i_q, j_q, k_q\}, \quad V_m^2 = \bigcup_{q=\overline{1,m}, (i_q, j, k) \in D_l^2} \{i_q, j, k\}.$$

Возможны следующие два случая.

1) $V_m^1 \neq V_m^2$, тогда существует вершина $j_q \notin V_m^2$ или $k_q \notin V_m^2$, $q = \overline{1,m}$, следовательно, существует тройка $(i, j, k) \in D_l^2$, такая что $j_q = j$ или $k_q = k$, данную вершину i выберем в качестве i_{m+1}. В качестве j_{m+1}, k_{m+1} выберем такие индексы, что $(i_{m+1}, j_{m+1}, k_{m+1}) \in D_l^1$.

2) $V_m^1 = V_m^2$. По построению для каждой вершины $i \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ существует тройка $(i, j, k) \in D_l^2$, причем $j \in \{j_1, \ldots, j_m\}$ и $k \in \{k_1, \ldots, k_m\}$. Согласно (1)–(4) не существует тройки $(i, j, k) \in D_l^2$, что $\{i, j, k\} \cap V_m^1 \neq \varnothing$ и $\{i, j, k\} \setminus V_m^1 \neq \varnothing$. Тогда V_m^1 образует компоненту связанности графа G и, следовательно, $V_m^1 = V_l$. Таким образом множества упорядочены.

Далее рассмотрим произвольное допустимое решение $x_{ijk}, i \in I, j \in J, k \in K$, задачи $W(x^1, x^2)$. Пусть $R_l = \{(i, j, k) | x_{ijk} = 1, \{i, j, k\} \in V_l\}$, $l = \overline{1,q}$. Предположим, что для некоторого $l \in \{1, \ldots, q\}$ найдутся $(i', j', k'), (i'', j'', k'') \in R_l$, что $(i', j', k') \neq (i'', j'', k'')$, $(i', j', k') \in D_l^1$, $(i'', j'', k'') \in D_l^2$. Пусть множества $I \cap V_l$, $J \cap V_l$, $K \cap V_l$ упорядочены согласно процедуре, описанной выше:

$$i_1, \ldots, i_m,$$
$$j_1, \ldots, j_m,$$
$$k_1, \ldots, k_m.$$

Здесь $I \cap V_l = \{i_1, \ldots, i_m\}$, $J \cap V_l = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $K \cap V_l = \{k_1, \ldots, k_m\}$. Не уменьшая общности, будем считать, что $(i_1, j_1, k_1) = (i', j', k')$.

Как показано выше, $(i_1, j_1, k_1) \in R_l$. Пусть для некоторого $t < m$ выполняется $(i_1, j_1, k_1), (i_2, j_2, k_2), \ldots, (i_t, j_t, k_t) \in R_l$. Согласно описанному выше правилу упорядочивания множеств существует тройка $(i_{t+1}, j, k) \in D_l^2$, что $j \in \{j_1, \ldots, j_t\}$ или $k \in \{k_1, \ldots, k_t\}$. Тогда с учетом условия (1)–(4) выполняется $(i_{t+1}, j_{t+1}, k_{t+1}) \in R_l$. Следовательно, $(i_1, j_1, k_1), (i_2, j_2, k_2), \ldots$ $\ldots, (i_m, j_m, k_m) \in R_l$. Получаем противоречие.

Таким образом, для каждого $l \in \{1, \ldots, q\}$ выполняется $R_l = D_l^1$ или $R_l = D_l^2$. Отсюда оптимальное значение критерия задачи $Z\left(W\left(x^1, x^2\right)\right)$ определяется как $\sum_{l=1}^{q} \min\left(\sum_{(i,j,k)\in D_l^1} c_{ijk}, \sum_{(i,j,k)\in D_l^2} c_{ijk}\right)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Алгоритм 1 требует $O(n)$ вычислительных операций.

Доказательство. Пусть входными данными алгоритма 1 являются допустимые решения x^1, x^2, представленные в виде коллекции троек (i, j, k) и стоимостей c_{ijk}, для которых соответствующие переменные принимают значение 1. Согласно (1)–(4) для каждого из допустимых решений количество таких троек составляет n. Тогда на шаге 1 алгоритма строится граф $G = (V, A)$, что $|V| = O(n)$, $|A| = O(n)$.

На шаге 2 граф G разбивается на компоненты связности. Это осуществляется при помощи обхода графа в ширину, который требует $O(|V| + |A|) = O(n)$ вычислительных операций.

На шаге 3 для входных троек алгоритма определяются соответствующие компоненты связности, этот шаг требует $O(n)$ вычислительных операций.

И, наконец, на шаге 4 необходимо определить оптимальное значение критерия. Согласно шагу 4 по каждой из компонент связности выбирается минимум среди подмножества троек, соответствующих входным допустимым решениям. Данный шаг требует $O(n)$ вычислительных операций.

Таким образом, алгоритм 1 требует $O(n)$ вычислительных операций. Теорема доказана.

4. Вычислительный эксперимент

В [5] предложен набор тестовых задач, состоящий из 18 задач, параметр n принимает значения 33 и 66. Предложенный в [5] подход основан на решении трех пар зависимых двухиндексных задач, в результате решения каждой из пары задач строится допустимое решение задачи (1)–(5). По аналогии с [5] значение критерия (5), полученное на данных трех допустимых решениях, будем обозначать через c_{IJ}, c_{IK}, c_{JK} соответственно. Сами допустимые решения обозначим через x_{IJ}, x_{IK}, x_{JK} соответственно. Далее последовательно применим алгоритм 1 оптимального комбинирования решений следующим образом. Пусть x_{IJ-JK} является решением задачи $Z\left(W\left(x_{IJ}, x_{JK}\right)\right)$, $x_{IJ-JK-IK}$ является решением задачи $Z\left(W\left(x_{IJ-JK}, x_{IK}\right)\right)$. Значение критерия (5) на решении $x_{IJ-JK-IK}$ обозначим через $c_{IJ-JK-IK}$. Оптимальное значение критерия задачи (1)–(5) обозначим через c^*. Будем сравнивать рекорд среди решений x_{IJ}, x_{IK}, x_{JK} (соответствует $\min\{c_{IJ}, c_{IK}, c_{JK}\}$) с их оптимальной комбинацией $x_{IJ-JK-IK}$ (соответствует $c_{IJ-JK-IK}$). Полученные результаты приведены в табл. 1. Среднее отклонение от оптимума для рекорда среди решений x_{IJ}, x_{IK}, x_{JK} составляет 1,675%, среднее отклонение от оптимума для оптимальной комбинации данных решений $x_{IJ-JK-IK}$ составляет 1,527%. Фактическое снижение отклонения от оптимума за счет комбинирования решений произошло на семи из 18 тестовых задач.

Таблица 1

	n	c^*	c_{IJ}	c_{IK}	c_{JK}	$\min\{c_{IJ}, c_{IK}, c_{JK}\}$	$c_{IJ-JK-IK}$
1	33	1608	1620	1637	1655	1620	1615
2	33	1401	1420	1416	1411	1411	1406
3	33	1604	1613	1635	1632	1613	1604
4	66	2662	2678	2684	2666	2666	2663
5	66	2449	2503	2486	2470	2470	2466
6	66	2758	2811	2788	2792	2788	2777
7	33	4797	4855	4851	4885	4851	4851
8	33	5067	5165	5150	5181	5150	5150
9	33	4287	4341	4364	4371	4341	4341
10	66	9684	9817	9761	9891	9761	9761
11	66	8944	9138	9177	9129	9129	9129
12	66	9745	9921	9869	9975	9869	9869
13	33	133	139	135	136	135	135
14	33	131	137	138	137	137	136
15	33	131	134	136	136	134	134
16	66	286	296	296	295	295	295
17	66	286	295	295	292	292	292
18	66	282	294	297	294	294	294

Таблица 2

n	M	$100\% \frac{C'-C^*}{C^*}$	$100\% \frac{C''-C^*}{C^*}$
10	10	5,366%	5,366%
11	10	8,435%	6,021%
12	10	13,913%	12,704%
13	10	20,686%	15,913%
14	10	33,339%	29,448%
15	10	55,093%	50,347%
16	10	73,054%	69,869%
17	10	83,103%	75,433%
18	10	75,947%	67,858%
19	10	97,771%	88,445%

По аналогии с [12] построим тестовый набор с матрицами стоимостей, элементы которых сгенерированы с целочисленными значениями, равномерно распределенными в интервале $[0, 300]$. Будем строить серии экспериментов с задачами размерности $n \in \{10, 11, \ldots, 19\}$, в каждой серии построим $M = 10$ задач. Для каждой из тестовых задач случайным образом сгенерируем $N = n^3$ допустимых решений, к каждому из которых итеративно применим алгоритм локальной оптимизации, предложенный в [13], до тех пор, пока решение не перестанет меняться. Полученные допустимые решения задачи (1)–(5) и соответствующие значения критерия (5) обозначим через x'_t и c'_t, $t = \overline{1, N}$. Тогда рекорд среди полученных решений обозначим как $C' = \min\limits_{t=\overline{1,N}} c'_t$. Далее применим алгоритм 1 оптимального комбинирования решений следующим образом. Пусть x''_1 является решением задачи $Z\left(W\left(x'_1, x'_2\right)\right)$, x''_t является решением задачи $Z\left(W\left(x''_{t-1}, x'_{t+1}\right)\right)$, $t = \overline{2, N-1}$. Соответствующие значения критерия обозначим через c''_t, $t = \overline{1, N-1}$, и выберем рекорд, достигнутый комбинированием всей последовательности N решений $C'' = c''_{N-1}$. Наконец, через C^* обозначим оптимальное значение критерия исходной задачи. Будем сравнивать отклонение от оптимума рекорда среди локально оптимизированных случайных решений и отклонение от оптимума рекорда среди локально оптимальных случайных решений, последовательно комбинированных алгоритмом 1. Для серии экспериментов будем оценивать среднее отклонение в серии. Полученные результаты приведены в табл. 2. Таким образом, среднее отклонение для C' по всем сериям составляет 46,671%, для C'' по всем сериям составляет 42,141%.

5. Заключение

При исследовании алгоритмов решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях в работе построен алгоритм, позволяющий эффективно комбинировать пары допустимых решений задачи. Данный алгоритм может быть применен в качестве дополнения к известным эвристическим или приближенным алгоритмам для постобработки полученных приближенных решений задачи о назначениях. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие повышения качества приближенных решений, полученных в результате постобработки предложенным алгоритмом оптимального комбинирования. Полученные результаты естественным образом обобщаются при исследовании многоиндексных задач о назначениях. Дальнейшим направлением исследования является построение алгоритма комбинирования произвольного числа допустимых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spieksma F.C.R.* Multi Index Assignment Problems. Complexity, Approximation, Applications. / P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 1–11.
2. *Афраймович Л.Г.* Эвристический метод решения целочисленных декомпозиционных многоиндексных задач // АиТ. 2014. № 8. С. 3–18.

   Afraimovich L.G. A Heuristic Method for Solving Integer-Valued Decompositional Multiindex Problems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. P. 1357–1368.
3. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи оптимального планирования производства // АиТ. 2010. № 10. С. 148–155.

   Afraimovich L.G., Prilutskii M.Kh. Multiindex Optimal Production Planning Problems // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. P. 2145–2151.
4. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
5. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation Algorithms for Three-Dimensional Assignment Problems with Triangle Inequalities // Eur. J. Oper. Res. 1992. V. 60. P. 273–279.

6. *Bandelt H.J., Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation Algorithms for Multidimensional Assignment Problems with Decomposable Costs // Discret. Appl. Math. 1994. V. 49. P. 25–50.
7. *Burkard R.E., Rudolf R., Woeginger G.J.* Three-Dimensional Axial Assignment Problems with Decomposable Cost Coefficients // Discret. Appl. Math. 1996. V. 65. P. 123–139.
8. *Spieksma F., Woeginger G.* Geometric three-dimensional assignment problems // Eur. J. Oper. Res. 1996. V. 91. P. 611–618.
9. *Афраймович Л.Г.* Многоиндексные транспортные задачи с декомпозиционной структурой // АиТ. 2012. № 1. С. 130–147.

   Afraimovich L.G. A Multi-index Transport Problems with Decomposition Structure // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 118–133.
10. *Афраймович Л.Г.* Многоиндексные транспортные задачи с 2-вложенной структурой // АиТ. 2013. № 1. С. 116–134.

    Afraimovich L.G. A Multiindex Transportation Problems with 2-embedded Structure // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 1. P. 90–104.
11. *Афраймович Л.Г.* Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой // АиТ. 2011. № 8. С. 109–120.

    Afraimovich L.G. Three-Index Linear Programs with Nested Structure // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 8. P. 1679–1689.
12. *Balas E., Saltzman M.J.* An Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Oper. Res. 1991. V. 39. No. 1. P. 150–161.
13. *Huang G., Lim A.* A hybrid genetic algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Eur. J. Oper. Res. 2006. V. 172. P. 249–257.
14. *Kim B.J., Hightower W.L., Hahn P.M., Zhu Y.R., Sun L.* Lower bounds for the axial three-index assignment problem // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 202. P. 654–668.
15. *Дичковская С.А., Кравцов М.К.* Исследование полиномиальных алгоритмов решения трехиндексной планарной проблемы выбора // Журн. вычисл. мат., мат. физики. 2006. Т. 46. 2. С. 222–228.
16. *Думбадзе Л.Г., Леонов В.Ю., Тизик А.П., Цурков В.И.* Декомпозиционный метод решения трехиндексной задачи о назначениях // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 56–59.
17. *Гимади Э.Х., Глазков Ю.В.* Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трехиндексной планарной задачи о назначениях // Дискрет. анализ и исследование операций. Сер. 2. 2006. Т. 13. 1. С. 10–26.
18. *Magos D.* Tabu search for the planar three-index assignment problem // J. Global Optim. 1996. V. 8. P. 35–48.
19. *Прилуцкий М.Х.* Программные управления двухстадийными стохастическими производственными системами // АиТ. 2020. № 1. С. 81–92.

    Prilutskii M.Kh. Programmed Control of Two-Stage Stochastic Production Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. P. 64–73.
20. *Прилуцкий М.Х.* Оптимальное управление двухстадийными стохастическими производственными системами // АиТ. 2018. № 5. С. 69–82.

    Prilutskii M.Kh. Optimal Control for Two-Stage Stochastic Production Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. P. 830–840.
21. *Прилуцкий М.Х.* Оптимальное планирование двухстадийных стохастических производственных систем // АиТ. 2014. № 8. С. 37–47.

    Prilutskii M.Kh. Optimal Planning for Two-Stage Stochastic Industrial Systems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. P. 1384–1392.

22. *Karapetyan D., Gutin D.* A New Approach to Population Sizing for Memetic Algorithms: A Case Study for the Multidimensional Assignment Problem // Evolutionary Computation. 2011. V. 19. No. 3. P. 345–371.

23. *Медведев С.Н., Медведева О.А.* Адаптивный алгоритм решения аксиальной трехиндексной задачи о назначениях // АиТ. 2019. № 4. С. 156–172.

    Medvedev S.N., Medvedeva O.A. An Adaptive Algorithm for Solving the Axial Three-Index Assignment Problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. P. 718–732.

24. *Gabrovšek B., Novak T., Povh J., Rupnik Poklukar D., Žerovnik J.* Multiple Hungarian Method for k-Assignment Problem // Mathematics. 2020. V. 8. 2050.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 05.11.2020

После доработки 11.01.2021

Принята к публикации 16.03.2021