Автоматика и телемеханика, № 9, 2021

Обзоры

© 2021 г. **Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ, д-р техн. наук (boris.andrievsky@gmail.com)**
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский государственный университет),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (fradkov@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

МЕТОД СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

В обзоре рассматривается современное состояние метода скоростного градиента, разработанного в 1970-80-х годах для синтеза алгоритмов управления и адаптации в нелинейных системах, а также многочисленные приложения метода к решению научных и инженерных задач. Приведены краткие сведения об алгоритмах скоростного градиента и условиях их применимости, оптимальности и пассивности. Обсуждаются применения метода к задачам адаптивного управления и идентификации, нелинейного управления, управления энергией и нелинейными колебаниями, управления в сетевых и многоагентных, а также в распределенных системах. Представлены приложения метода к управлению техническими системами и к задачам физики, биологии, экологии. Приводятся современные модификации и обобщения метода, в том числе неевклидовы алгоритмы скоростного градиента на основе функций Ляпунова–Брэгмана.

Ключевые слова: управление, скоростной градиент, пассификация, адаптация, идентификация, нелинейные системы, управление энергией, нелинейные колебания, сети, распределенные системы, технические системы, физика, биология, экология.

DOI: 10.31857/S0005231021090014

1. Введение

Бурное развитие кибернетики и теории управления в 1960-х годах привело к появлению большого числа разнообразных алгоритмов управления, адаптации, распознавания, обучения, оценивания, фильтрации. Возникла потребность обобщения полученных результатов и унификации предложенных алгоритмов. По-видимому, первым эту потребность почувствовал Я.З. Цыпкин [1, 2], предложивший рассматривать различные задачи распознавания, оценивания, управления и т.д. как задачи минимизации среднего некоторой функции потерь. При этом большое число существовавших тогда алгоритмов стало возможным представить в виде вероятностных градиентных итеративных процедур минимизации или оценивания параметров. Однако непрерывные во

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-18-50428.

времени алгоритмы адаптации (самонастройки) и управления в эту схему не укладывались, и попытки систематизировать теорию непрерывных адаптивных систем продолжались [3–6].

Оказалось, что унификация различных непрерывных алгоритмов адаптации и управления возможна, если перейти от градиента целевой функции к градиенту скорости ее изменения вдоль траекторий объекта управления. По-видимому, наиболее общая схема построения алгоритмов была предложена в [7]. Получаемые алгоритмы были названы алгоритмами скоростного градиента (АСГ) и строились следующим образом. Пусть уравнение обобщенного объекта управления (обобщенного настраиваемого объекта) имеет вид

$$\dot{x} = F(x, u, t), \tag{1.1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих (или настраиваемых) переменных. Пусть цель управления задана в виде

$$Q(x(t), t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{1.2}$$

где $Q(x, t) \geqslant 0$ – скалярная целевая функция. Тогда для синтеза алгоритма АСГ нужно вычислить производную (скорость изменения) функции $Q(x, t)$ вдоль траекторий системы (1.1) при фиксированном u, имеющую вид $w(x, u, t) = \partial Q(x, t)/\partial t + \partial Q(x, t)/\,\partial x F(x, u, t)$, а затем вычислить градиент от скорости $w(x, u, t)$ по u. Алгоритм скоростного градиента в дифференциальной форме имеет вид

$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_u w(x, u, t), \tag{1.3}$$

а в конечной форме — вид

$$u = -\Gamma \nabla_u w(x, u, t), \tag{1.4}$$

где $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{T}} > 0$ – матричный коэффициент усиления.

Первоначально этот метод был ориентирован в основном на решение задач адаптивного управления и идентификации. Было показано [7, 8], как различные известные к тому времени алгоритмы прямого адаптивного управления, идентификации и оценивания состояния можно классифицировать и систематизировать в рамках данного метода, а также намечены пути получения новых алгоритмов с новыми свойствами и более широкими возможностями. В последующие годы метод получил развитие и применение как универсальный подход к решению различных задач синтеза непрерывных динамических систем в математических, физических, инженерных, биологических и других науках. Простота применения метода, а также доступность строгого математического обоснования полученных алгоритмов обусловили его признание в качестве инструмента исследований как у нас в стране, так и за рубежом. Число публикаций, где метод в том или ином виде применяется, постоянно растет и достигает нескольких сот. В течение последнего десятилетия возрос интерес к методу скоростного градиента и как к инструменту построения законов эволюции, позволяющему лучше понять динамику физических, биологических и других систем. В такой интерпретации этот подход известен как “принцип скоростного градиента”.

В обзоре обобщены результаты, полученные российскими и зарубежными учеными в таких областях, как: адаптивное управление и идентификация; управление механическими системами и нелинейными генераторами; управление электромеханическими устройствами, такими как асинхронные двигатели и вибрационные машины; управление и синхронизация хаотических систем; управление транспортными средствами, автомобильными двигателями, летательными аппаратами, воздушными и подводными транспортными средствами, спутниками; управление энергией и применение к энергетическим системам; разработка систем управления нелинейными системами общего вида; управление микроминиатюрными гироскопами; управление сетями; управление пространственно-распределенными системами; управление на уровне микромира, управление квантовыми системами.

Первые публикации, связанные с алгоритмами типа скоростного градиента, появились в 1978 г. Общие формулировки были предложены одновременно и независимо Ю.И. Неймарком и А.Л. Фрадковым в январе 1978 г. на 9-й Всесоюзной школе-семинаре по адаптивным системам [9, 10]. Некоторые близкие формулировки для задачи идентификации были предложены А.А. Красовским [11].

Первые результаты по обоснованию устойчивости алгоритмов типа АСГ были опубликованы в книге [12], где рассмотрена система адаптивной стабилизации коллектива автоматов, изменяющая настраиваемые параметры вдоль вектора скорости уменьшения некоторой оценочной функции V. Модель объекта принимается в виде

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1.5}$$

где x обозначает вектор состояния объекта, u – вектор адаптивно настраиваемых параметров. Предполагается, что $f(0, \cdot) = 0$ и $f(\cdot, u)$ линейна по u. Целевая функция $V(x)$ определяется так, что $V(x) \geqslant \varphi\big(\|x\|\big) \geqslant 0$, где $\varphi(\rho)$ – возрастающая по ρ функция, $V(0) = 0$. Также предполагается, что для некоторых $u = u^*$, $\sigma > 0$, $M > 0$ выполняется неравенство

$$\dot{V}\big(x(t)\big) \equiv \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u^*) < -\min\{\sigma V(x), M\}. \tag{1.6}$$

Показано, что если закон адаптации имеет вид

$$\dot{u} = -\alpha \nabla_u \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u), \quad \alpha > 0, \tag{1.7}$$

то для всех решений (1.5), (1.7) выполнено $x(t) \to 0$, $u(t) \to \bar{u}$ при $t \to \infty$ для некоторого $\bar{u}$.

В [12] также обсуждается случай стохастических возмущений $\xi(t)$, добавленных в правую часть модели объекта (1.5). Во избежание возможной неустойчивости системы в этом случае предлагается “огрубление” (регуляризация) закона адаптации (1.7) путем введения штрафной функции.

Для частного случая аффинной инвариантной во времени управляемой системы $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ и положительно определенной целевой функции $V(x)$ алгоритм скоростного градиента имеет вид $u = -L_g V(x)$, где $L_g V = \partial V/\partial x\, g$ – производная Ли вдоль векторного поля g. Он впервые был предложен в [13] и его часто называют “алгоритм Джурджевича–Куинна” (*Jurdjevic–Quinn control*). Результат исследования устойчивости в [13] охватывает вырожденный случай $\dot{V} \leqslant 0$ и требует некоторых условий обнаруживаемости (так называемые условия “Джурджевича–Куинна”, см., например, [14]).

Неаффинный и нестационарный случай был впервые изучен в [7] для дифференциальной формы СГ-алгоритмов и в [15, 16] для конечной формы.

В процессе развития метода были предложены различные типы СГ-алгоритмов в виде набора схем проектирования и условий их применимости. Этот метод нашел применение в работах многих исследователей по всему миру. В [17] отмечено, что СГ-метод “обеспечивает прозрачный компромисс между качеством управления и выбором параметров. Кроме того, в силу простоты синтеза регулятора метод получил успешное применение в ряде других приложений, преимущественно в физике и механике”. В [18] СГ-методология расширена на алгоритмы “скоростной разности”, что позволило ослабить условия его применимости (условие достижимости).

В последнее десятилетие возрос интерес к СГ методу как эффективному инструменту не только для решения инженерных задач, но и для понимания законов природы, таких как динамика экологических систем или фундаментальные законы физики. В этой интерпретации подход известен как *принцип скоростного градиента*, см. [19–23].

2. Алгоритмы скоростного градиента и условия их применимости

2.1. Условия применимости АСГ

Теоретические основы метода скоростного градиента достаточно полно представлены в [7, 8, 19, 24–30]. Основные сведения об условиях применимости метода приводятся ниже в данном разделе.

Рассматривается модель объекта управления в виде

$$\dot{x}(t) = f(x, \theta, t), \tag{2.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта; $\theta(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления (вектор входа)[2]; $f(\cdot)$ – непрерывная по x, θ, t вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по θ.

[2] Здесь использован некоторый «обобщенный» входной вектор θ. В дальнейшем θ имеет различный смысл в зависимости от характера решаемой задачи, чем вызвано отступление от принятого ранее обозначения. Например, θ может быть собственно управляющим воздействием (сигналом), поступающим на вход объекта, либо, например, вектором настраиваемых параметров регулятора. Во втором случае (2.1) есть уравнения *обобщенного настраиваемого объекта*.

Рассматриваются *допустимые законы* (*алгоритмы*) *управления* в виде

$$\theta(t) = \Theta\left(\left\{x(s)_{s=0}^{t}\right\}, \left\{\theta(s)_{s=0}^{t}\right\}\right) \tag{2.2}$$

с некоторым оператором Θ таким, что решения системы (2.1), (2.2) существуют и единственны на некотором интервале для любых начальных значений $x(0)$, $\theta(0)$.

Требуется, чтобы выполнялась цель управления, заданная в виде асимптотического соотношения

$$Q_t \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{2.3}$$

или неравенства

$$Q_t \leqslant \Delta \quad \text{для всех} \quad t \geqslant t_*, \tag{2.4}$$

где $Q_t = Q\left(\left\{x(s)_{s=0}^{t}\right\}, \left\{\theta(s)_{s=0}^{t}\right\}\right)$ – заданный *целевой функционал* (*функционал качества*), $t_* \in \mathbb{R}$ – некоторый момент времени, начиная с которого целевое условие должно быть выполнено, Δ – определенное пороговое значение, указывающее на требуемую точность выполнения целевого условия.

Рассматриваются два вида функционалов [25]:

1. *локальный целевой функционал*

$$Q_t = Q\big(x(t), t\big);$$

2. *интегральный целевой функционал*

$$Q_t = \int_0^t q\big(x(s), \theta(s), s\big)ds,$$

где $Q(x,t)$, $q(x,\theta,t)$ – заданные целевые функции. В конкретных задачах цель управления может содержать некоторые дополнительные условия. Например, для интегрального целевого функционала обычно ставится цель (2.4) и дополнительная цель управления в виде

$$\lim_{t\to\infty} q\big(x(t), \theta(t), t\big) = 0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим основные формы *алгоритмов скоростного градиента* и условия их применимости [8, 24, 25].

Пусть закон управления имеет вид[3]

$$\frac{d\left(\theta + \psi(x,\theta,t)\right)}{dt} = -\Gamma\nabla_\theta w(x,\theta,t), \tag{2.6}$$

[3] Из вида закона управления (2.6) может создаться впечатление, что функция $\psi(\cdot)$ должна быть дифференцируемой по t, что не дает возможность использовать разрывные функции $\psi(\cdot)$. Однако решения (2.6) можно понимать как сумму “интегральной” и “сигнальной” составляющих, где $\psi(\cdot)$ добавляется к результату интегрирования правой части (2.6), т.е. ее производная по времени не вычисляется.

где $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{T}} > 0$ – $(m \times m)$-матрица; $w(x, \theta, t)$ – производная целевого функционала в силу системы (2.1) [31][4], $\psi(x, \theta, t)$ – некоторая вектор-функция, удовлетворяющая *условию псевдоградиентности* [32]:

$$\psi(x, \theta, t)^{\mathrm{T}} \nabla_\theta w(x, \theta, t) \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Например, в качестве $\psi(x, \theta, t)$ можно брать

$$\psi(x, \theta, t) = \Gamma_1 \nabla_\theta w(x, \theta, t), \tag{2.8}$$

$$\psi(x, \theta, t) = \Gamma_2 \mathrm{sign}\big(\nabla_\theta w(x, \theta, t)\big), \tag{2.9}$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i^{\mathrm{T}} > 0$ – $(m \times m)$-матрицы $(i = 1, 2)$ и Γ_2 – диагональная.

Алгоритмы вида (2.6) называются *алгоритмами скоростного градиента (АСГ) в конечно-дифференциальной форме.*

Известны следующие условия применимости этих алгоритмов к решению задач управления с локальным целевым функционалом [25]. Пусть:

— вектор-функция $\psi(x, \theta, t)$ удовлетворяет (2.7) и для любого $v \in \mathbb{R}^m$ имеется единственное решение $\theta = \kappa(x, v, t)$ уравнения $\theta + \psi(x, \theta, t) = v$;

— функции $f(x, \theta, t)$, $\nabla_x Q(x, t)$, $\psi(x, \theta, t)$, $\nabla_\theta w(x, \theta, t)$ непрерывны и локально ограничены равномерно по $t \geqslant 0$[5];

— скалярная функция $Q(x, t)$ неотрицательна и удовлетворяет условию роста: $\inf_{t \geqslant 0} Q(x, t) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$;

— функция $w(x, \theta, t)$ выпукла по θ;

— условие достижимости: существуют вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ и функция $\rho(Q)$ ($\rho(Q) > 0$ при $Q > 0$) такие, что для всех x, t имеет место

$$w(x, \theta_*, t) \leqslant -\rho\big(Q(x, t)\big). \tag{2.10}$$

Тогда все траектории системы (2.1), (2.6) с начальными условиями, принадлежащими множеству $\Omega_0 \stackrel{\Delta}{=} \big\{(x, \theta) : (\mathbf{I}_m - \Gamma^\dagger \Gamma)(\theta_0 - \theta_*) = 0\big\}$, ограничены и $Q\big(x(t)\big) \to 0$ при $t \to \infty$, т.е. цель управления достигается для любого $\Delta > 0$. Здесь и далее через $\Gamma^\dagger$ обозначена матрица, псевдообратная к Γ по Муру–Пенроузу, см. [33].

Для доказательства этого утверждения использована функция Ляпунова вида [8]

$$V(x, \theta, t) = Q(x, t) + \frac{1}{2}\|\theta - \theta_* + \psi(x, \theta, t)\|^2_{\Gamma^\dagger}. \tag{2.11}$$

Вычисляя ее производную по времени в силу системы (2.1), (2.6), получим

$$\dot{V}_t = w(x(t), \theta(t), t) - v_t^{\mathrm{T}} \Gamma^\dagger \Gamma \nabla_\theta w(x(t), \theta(t), t), \tag{2.12}$$

[4] Для локального целевого функционала $w(x, \theta, t) = \dfrac{\partial Q}{\partial t} + \big(\nabla_x Q\big)^{\mathrm{T}} f(x, \theta, t)$, а для интегрального целевого функционала – $w(x, \theta, t) = q(x, \theta, t)$.

[5] Ограничены в любом ограниченном множестве $\big\{\|x\| + \|\theta\| \leqslant \beta,\ t \geqslant 0\big\}$.

где $w(x,\theta,t)$ определяется выражением (2.6), $v_t = \theta_t(t) - \theta_* + \psi(x(t),\theta(t),t)$. Согласно условию $v_0 \in \mathcal{L}(\Gamma)$, где $\mathcal{L}(\Gamma)$ – линейная оболочка столбцов матрицы $\Gamma^\dagger$. По алгоритму (2.6) $\dfrac{dv_t}{dt} \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Следовательно, $v_t \in \mathcal{L}(\Gamma)$ для всех $t \geqslant 0$, так что $\Gamma^\dagger\Gamma v_t = v_t$ ($\Gamma^\dagger\Gamma$ является проектором на множество $\mathcal{L}(\Gamma)$). Таким образом, (2.12) принимает вид $\dot V_t = w(x(t),\theta(t),t) + v_t^{\mathrm{T}}\nabla_\theta w(x(t),\theta(t),t)$. Применяя теперь условия выпуклости и достижимости (2.10), получаем $\dot V_t \leqslant -\rho\big(Q(x(t),t)\big) \leqslant 0$. Следовательно, $V(x(t),\theta(t),t) \leqslant V(x(0),\theta(0),0)$, что доказывает ограниченность траекторий системы (2.1), (2.6). Итак, $\int_0^\infty \rho\big(Q(x(t),t)\big)dt < \infty$, откуда стандартным образом с помощью леммы Барбалата (см., например, [24, 28]) выводится, что $\lim_{t\to\infty} Q(x(t),t) = 0$, что и требовалось доказать.

Для алгоритма (2.6) с интегральным целевым функционалом имеются следующие условия применимости [8, 24, 25]. Пусть:

— для всех $v \in \mathbb{R}^m$ имеется единственное решение $\theta = \kappa(x,v,t)$ уравнения $\theta + \psi(x,\theta,t) = v$;

— функции $f(x,\theta,t)$, $\nabla_\theta w(x,\theta,t)$, $\kappa(x,\theta,t)$ локально ограничены;

— функция $q(x,\theta,t)$ равномерно непрерывна по x, t;

— функция $w(x,\theta,t)$ выпукла по θ;

— имеется вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$w(x,\theta_*,t) \leqslant 0; \tag{2.13}$$

— выполнено условие роста.

Тогда для любых $x(0)$, $\theta(0)$ в системе (2.1), (2.6) достигается цель управления (2.4), а также цель (2.5) для $\Delta = Q_0 + 0{,}5\big\|\theta_0 - \theta_* - \psi(x_0,\theta_0,0\big\|^2_{\Gamma^\dagger}$.

Заметим, что для единственности решения уравнения $\theta + \psi(x,\theta,t) = v$ достаточно выполнения для $\psi(x,\theta,t)$ условия Липшица по θ с константой Липшица $L < 1$.

Условие роста можно ослабить, заменив на условие того, что ограниченность Q_t решений (2.1), (2.6) означает ограниченность $x(t)$.

Основными из указанных выше условий являются *условия разрешимости* (2.10), (2.13), которые показывают на принципиальную возможность решения поставленной задачи.

Частным случаем (2.6) являются АСГ в *дифференциальной форме*

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma\nabla_\theta w(x,\theta,t). \tag{2.14}$$

Другой важный частный случай (2.6) — АСГ в *конечной форме*, который можно записать в виде

$$\theta = \theta_0 - \gamma\psi(x,\theta,t), \tag{2.15}$$

где $\gamma > 0$ – параметр алгоритма (множитель шага).

Условия применимости алгоритма (2.15) для функций $\psi(x,\theta,t)$, удовлетворяющих условию *сильной псевдоградиентности*: существуют $\rho > 0$, $\delta \geqslant 1$ такие, что

$$\psi(x,\theta,t)\nabla_\theta w(x,\theta,t) \geqslant \rho\big\|\nabla_\theta \omega(x,\theta,t)\big\|^\delta \tag{2.16}$$

имеют следующий вид [8, 25, 28].

Пусть имеется локальный целевой функционал и

— уравнение (2.15) разрешимо относительно θ;

— функция $w(x,\theta,t)$ выпукла по θ;

— имеется вектор $\theta_* = \theta_*(x,t)$, удовлетворяющий условию (2.10) и, при некоторых $\rho > 0$, $\delta \geqslant 1$, условию

$$\rho\gamma(x,t)\big\|\nabla_\theta w(x,\theta,t)\big\|^{\delta-1} \geqslant \big\|\theta_0 - \theta_*(x,t)\big\|; \tag{2.17}$$

— выполнено (2.16).

Тогда в системе (2.6), (2.15) обеспечивается выполнение цели управления (2.4).

Пусть имеется интегральный целевой функционал и

— уравнение (2.15) разрешимо относительно θ,

— функция $w(x,\theta,t)$ выпукла по θ,

— удовлетворяется условие (2.16),

тогда в системе (2.6), (2.15) обеспечивается выполнение цели управления (2.5).

Негладкие обобщения АСГ предложены в [31, 34]. На основе понятия дифференцирования по направлению по Адамару построены алгоритмы скоростного субградиента[6] в дифференциальной и конечной формах. Установлены условия, обеспечивающие достижение цели управления (сходимость целевой функции к нулю). Кроме того, получены условия, при которых цель управления достигается за конечное время с использованием негладких или разрывных алгоритмов СГ. Теоретические результаты проиллюстрированы в [31] на примере негладкого энергетического управления для неаффинной по управлению маятниковой системы. В [34] АСГ применен к почти глобальной стабилизации интегратора Брокетта — неголономной системы, ставшей популярным тестовым примером для негладких и разрывных алгоритмов. Доказано, что разработанный закон управления стабилизирует интегратор Брокетта для любой начальной точки, не лежащей на оси x_3. Кроме того, показано, что алгоритм скоростного субградиента обеспечивает стабилизацию при сколь угодно малом уровне управления. Важной особенностью предлагаемого управления является то, что оно непрерывно на траекториях замкнутой системы. Негладкие обобщения АСГ в конечно-дифференциальной форме предложены в [35].

[6] Вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такой, что для выпуклой функции $f(x)$, $(x \in \mathbb{R}^n)$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $f(x+y) \geqslant f(x) + a^{\mathrm{T}}y$, называется *субградиентом* функции $f(x)$ в точке x и обозначается через $\partial f(x)$ [32]. Для дифференцируемой в точке x функции имеет место $\nabla f(x) \equiv \partial f(x)$.

Идентифицирующие свойства алгоритмов скоростного градиента. Вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ в (2.10) можно считать некоторым «идеальным» входным вектором, так как при $\theta = \theta_*$ выполнены целевые условия. С прикладной точки зрения представляет интерес вопрос о сходимости θ к θ_*, т.е. вопрос о достижении в системе (2.1), (2.2) дополнительной цели управления

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = \theta_*. \tag{2.18}$$

Этот вопрос возникает в первую очередь при решении задачи идентификации, когда θ_* является вектором «истинных» значений параметров объекта. Обобщая, алгоритм (2.2) назовем *идентифицирующим алгоритмом*, если в системе (2.1), (2.2) достигается цель управления (2.18) [24].

Как известно [3, 24, 36], идентифицируемость системы зависит и от вида входного процесса. При достаточном «разнообразии» внешнего воздействия цель (2.18) может быть достигнута. Для точных формулировок используется следующее определение [8, 24].

Определение 1. Матричная функция $\Phi(t)$ размера $m \times N$, ограниченная для всех $t > 0$, называется интегрально-невырожденной, если существуют $t_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, $L > 0$ такие, что для всех $t > t_0$ выполнено

$$\int\limits_t^{t+L} \Phi(s)\Phi(s)^{\mathrm{T}} ds \geqslant \alpha_0 \mathbf{I}_m. \tag{2.19}$$

Это условие показывает, что столбцы матрицы $\Phi(t)$ не стремятся все при $t \to \infty$ ни к какой гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^N$.

Для дифференциальной формы АСГ (2.14) известно следующее утверждение. Пусть:

— функции $f(x,\theta,t)$, $\nabla_x Q(x,t)$, $\psi(x,\theta,t)$, $\nabla_\theta w(x,\theta,t)$ локально ограничены; выполнено условие роста; функция $w(x,\theta,t)$ выпукла по θ; существуют вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^m$ и функция $\rho(Q)$ ($\rho(Q) > 0$ при $Q > 0$) такие, что для всех x, t имеет место $w(x,\theta_*,t) \leqslant -\rho(Q)$, и, кроме того,

— $\inf_x Q(x,t)$ достигается в единственной точке $x_*(t)$, где функция $x_*(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) $\dot{x}(t) = f(x,\theta,t)$;

— функции $\frac{\partial f(x,\theta,t)}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 f(x,\theta,t)}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2 f(x,\theta,t)}{\partial x \partial \theta}$, $\nabla_x Q(x,t)$ непрерывны;

— функция $\Phi(t) \overset{\Delta}{=} \frac{\partial f}{\partial \theta}\big(x,\theta,t\big)$ – интегрально-невырожденная.

Тогда АСГ в дифференциальной форме (2.14) является идентифицирующим алгоритмом для всех $x(t_0)$, $\theta(t_0)$ и решение $\mathrm{col}\{x_*(t),\, \theta_*\}$ системы (2.1), (2.14) асимптотически устойчиво в целом равномерно по ограниченному множеству начальных условий $x(t_0)$, $\theta(t_0)$ и моменту времени t_0 [24].

Практически указанные условия сводятся к требованию, чтобы входной («возбуждающий») сигнал содержал не менее n гармоник с различными частотами. Это требование называют также *условием «неисчезающего возбуждения»* или *«постоянного возбуждения»*, подробнее см. [25, 28].

Робастность алгоритмов скоростного градиента. Свойства грубости и робастности АСГ подробно исследованы в [25, 28]. В частности, показано [25, теорема 2.10], что АСГ в конечной форме (2.15) робастны по отношению к аддитивным возмущениям: при достаточно малом уровне последних сохраняется ограниченность траекторий системы, а целевое условие (2.4) оказывается возможным обеспечить при том же Δ за счет увеличения коэффициента усиления γ в алгоритме управления (2.15). Базовые алгоритмы АСГ в дифференциальной форме (2.6) обладают робастностью только при существенных дополнительных предположениях, одним из которых является *асимптотическая устойчивость* системы (2.1), (2.6), обеспечивающая устойчивость при постоянно действующих возмущениях [25, теорема 2.12].

Для важных на практике ситуаций указанных условий недостаточно, поэтому рекомендуется применять различные способы *огрубления* (обеспечения грубости) АСГ. Среди них известно использование параметрической обратной связи в АСГ, т.е. переход от (2.6) к алгоритмам вида

$$\frac{d}{dt}\big(\theta + \psi(x,\theta,t)\big) = -\Gamma\Big(\varkappa\nabla_\theta w(x,\theta,t) + \zeta\big(\theta + \psi(x,\theta,t)\big)\Big), \tag{2.20}$$

где функция $\psi(\cdot)$, как и выше, удовлетворяет условию псевдоградиентности (2.7), $\zeta(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция обратной связи, $\varkappa > 0$ – числовой коэффициент.

Еще одним способом огрубления базовых АСГ служит введение в них *зоны нечувствительности по целевой функции* переходом к алгоритмам вида

$$\dot{\theta} = \begin{cases} -\Gamma\nabla_\theta w(x,\theta,t) & \text{при} \quad Q(x,t) \geqslant \Delta, \\ 0 \quad \text{при} \quad Q(x,t) < \Delta. \end{cases} \tag{2.21}$$

Робастность адаптивных систем управления на основе АСГ изучается также в [37], где для алгоритма адаптации предложен, совместно с зоной нечувствителности, специальный “барьерный” вид параметрической обратной связи.

2.2. Оптимальность и пассивность алгоритмов скоростного градиента

АСГ обладают еще одним важным свойством, которое кратко можно сформулировать так: для всякого АСГ в конечной форме существует функционал, по отношению к которому АСГ является оптимальным, т.е. АСГ является решением обратной задачи оптимального управления (*inverse optimal control*) [38]. Впервые обратную задачу оптимального управления рассматривал Р. Калман в линейно-квадратичном варианте [39]. Случай аффинных по управлению систем был рассмотрен в ряде работ [14, 40–42], см. также дискуссию в [38]. Пусть модель управляемого объекта аффинна по управлению:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{2.22}$$

где $f(x)$, $G(x)$ – гладкие функции. Алгоритм скоростного градиента, синтезированный по некоторой целевой функции $V(x) \geqslant 0$, можно представить в виде

$$u = -\gamma(x) g^{\mathrm{T}} \nabla V(x) = -\gamma(x) (L_g V)^{\mathrm{T}}, \tag{2.23}$$

где $\gamma(x) = \gamma(x)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$ – заданная матричная функция. Как известно, система (2.22), (2.23) асимптотически устойчива, если при $x \neq 0$ выполняются неравенства $V(x) > 0$ и $L(x) > 0$, где

$$L(x) = -\nabla V(x) \left(F(x) - 0{,}5 g \gamma(x) g^{\mathrm{T}} \nabla V(x) \right) = -\dot{V}. \tag{2.24}$$

Как отмечено в [14, 40–42], при этих условиях система (2.22), (2.23) оптимальна по отношению к функционалу потерь

$$J = \int\limits_0^{\infty} (L(x) + u^{\mathrm{T}} \gamma(x)^{-1} u) dt. \tag{2.25}$$

При этом целевая функция $V(x)$ оказывается функцией Беллмана для оптимизационной задачи, причем для ее нахождения нет необходимости в трудоемком решении уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Платой за простоту является зависимость функционала потерь от искомого решения. В работах А.А. Красовского [40, 41] рассмотрен также случай, когда слагаемое с управлением в функционале потерь задается не квадратичной формой, а формой порядка $p > 1$. В этом случае инверсно-оптимальное управление принимает вид

$$u = -\gamma(x) |g^{\mathrm{T}} \nabla V(x)|^{1/(p-1)} \mathrm{sign}(g^{\mathrm{T}} \nabla V(x)). \tag{2.26}$$

Имеются версии сформулированных результатов для адаптивного [43, 44] и минимаксного [45] инверсно-оптимального управления, однако в них связь с АСГ не упоминается.

С оптимальностью АСГ тесно связана его пассивность. Пусть $y = g^{\mathrm{T}} \nabla V(x)$ — выход объекта (2.22). Введем новый вход объекта $\bar{u}$ с помощью обратной связи $u = -\gamma(x) g^{\mathrm{T}} \nabla V(x)) + \bar{u}$. Тогда при выполнении условия достижимости для АСГ в конечной форме справедливо неравенство

$$\dot{V} - \gamma(x) g^{\mathrm{T}} \nabla V(x) \bar{u} \leqslant 0, \tag{2.27}$$

что как раз и означает пассивность объекта (2.22) от входа $\bar{u}$ к выходу $y = g^{\mathrm{T}} \nabla V(x)$. Таким образом, АСГ решает задачу пассификации — преобразование системы к пассивной при помощи обратной связи.

Локально-оптимальные алгоритмы непрерывного и дискретного времени. Близким к методу СГ является принцип оптимального демпфирования переходных процессов В.И. Зубова [46], предписывающий выбирать управление из условия

$$\min_{u \in U} \dot{V}, \tag{2.28}$$

где $\dot{V}$ – производная в силу системы (2.22) от заданной функции $V(x,t) \geqslant 0$, а $U \subset \mathbb{R}^m$ – заданное множество допустимых значений управления. Нетрудно видеть, что для аффинного объекта (2.22) функция

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + L_f V + L_g V\, u$$

линейна по управлению. Поэтому, если множество U выпукло и $0 \in U$, то оптимальная по демпфированию обратная связь имеет вид

$$u = -\Psi_U(y), \tag{2.29}$$

где $y = \nabla u \dot{V}$, а вектор-функция $\Psi_U(y)$ составляет острый угол со скоростным градиентом: $\Psi_U(y)^{\mathrm{T}} y > 0$ при $y \neq 0$. Оптимальное по демпфированию управление является локально-оптимальным для задачи (2.22), (2.25), если в качестве демпфируемой функции $V(x,t)$ в (2.28) выбрана функция Беллмана задачи.

Для систем дискретного времени близкий подход рассмотрен в [47, 48] в рамках локально-оптимального управления. Многошаговый процесс управления динамической системой назван авторами *локально-оптимальным в смысле критерия* V, если на каждом шаге или каждых τ шагах этого процесса достигается наибольшее убывание величины V.

В [47] рассматривается задача управления линейным дискретным динамическим объектом

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = L^{\mathrm{T}} x_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.30}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^m$ – управление, $y_k \in \mathbb{R}^l$ – наблюдаемый выход. Вводится (локальный) критерий оптимальности

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} C x, \quad C = C^{\mathrm{T}} > 0. \tag{2.31}$$

По смыслу метода соответствующее локально-оптимальное управление u_k^* определяется выражением

$$u_k^* = \arg\min_{u_k} \Delta V(x_k, u_k), \tag{2.32}$$

где $\Delta V(x_k, u_k) = V(Ax_k + Bu_k) - V(x_k)$. В предположении, что весь вектор состояния x_k непосредственно измеряется ($L = \mathrm{diag}\,\{1, \ldots, 1\}$), показано, что при $B^{\mathrm{T}} C B$ управление (2.32) в форме обратной связи имеет вид

$$u_k^* = -(B^{\mathrm{T}} C B)^{\dagger} B^{\mathrm{T}} C A x_k + \tilde{u}, \tag{2.33}$$

где $\tilde{u}$ удовлетворяет условию $B^{\mathrm{T}} C B \tilde{u} = 0$. При таком управлении $\Delta V(x_k, u_k^*) = -x_k^{\mathrm{T}} Q x_k$, где матрица Q находится из выражения

$$Q = C - A^{\mathrm{T}} C A + A^{\mathrm{T}} C B (B^{\mathrm{T}} C B)^{\dagger} B^{\mathrm{T}} C A. \tag{2.34}$$

Если, кроме того, $\det B^{\mathrm{T}} C B \neq 0$, управление (2.32) единственно:

$$u_k^* = \theta_*^{\mathrm{T}} x_k, \quad \theta_*^{\mathrm{T}} = -(B^{\mathrm{T}} C B)^{-1} B^{\mathrm{T}} C A. \tag{2.35}$$

3. Адаптивное управление и идентификация на основе метода СГ

В [7, 49] рассматривается схема синтеза алгоритмов адаптивного управления, состоящая в организации движения в пространстве настраиваемых параметров в направлении градиента от скорости изменения оценочного функционала. В эту схему укладывается ряд известных алгоритмов адаптации и идентификации, синтезированных прямым методом Ляпунова [8, 25]. Получены общие условия устойчивости таких систем. Предлагаются способы регуляризации алгоритмов, придающие системе свойства грубости по отношению к действию на объект неконтролируемых возмущений и к дискретности алгоритма адаптации. Приводятся примеры применения рассмотренной схемы для синтеза алгоритмов адаптации в ряде задач адаптивного управления динамическими объектами.

3.1. Адаптивное управление с эталонными моделями

Беспоисковые самонастраивающиеся системы с эталонными моделями. Беспоисковые самонастраивающиеся системы с эталонными моделями (БСНС с ЭМ, англ. — *Model Reference Adaptive Control*, MRAC) для решения задачи получены в серии фундаментальных работ по теории адаптивного управления, см., например, [3, 24, 50–52], где объект и эталонная модель приняты в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu && \text{– объект управления,} \\ \dot{x}_M &= A_M x_M + B_M r(t) && \text{– эталонная модель.} \end{aligned} \tag{3.1}$$

В (3.1) матрицы A, B неизвестны, матрицы A_M, B_M эталонной модели заданы.

Ставится задача обеспечения асимптотической сходимости вектора ошибок $e(t) = x(t) - x_M(t)$ к нулю. Для простоты изложения примем здесь, что можно произвольно изменять матрицы уравнений состояния системы, добавляя к неизвестным матрицам A и B модели объекта (3.1) матрицы тех же размеров ΔA и ΔB соответственно. Уравнения обобщенного настраиваемого объекта (ОНО) тогда принимают вид

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)r(t). \tag{3.2}$$

Таким образом, вектор настраиваемых параметров $\theta \in \mathbb{R}^N$ имеет вид $\theta = \mathrm{col}\,(\Delta A, \Delta B)$, где $N = n(n + m)$.

Для синтеза алгоритма адаптации СГ-методом выберем локальный квадратичный функционал $Q_t = e^{\mathrm{T}} P e$, где $e(t) = x(t) - x_M(t)$ – вектор ошибки, $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ – положительно определенная $(n \times n)$-матрица, выбор которой будет уточнен ниже, и вычислим функцию $w(x, \theta, t) = \dot{Q}_t$. Находя производную по времени от Q_t в силу системы (3.1), (3.2), получим

$$w(x, \theta, t) = e^{\mathrm{T}} H\big((A + \Delta A)x + (B + \Delta B)r(t) - A_M x_M - B_M r(t)\big).$$

Далее, дифференцированием по настраиваемым параметрам (с учетом правил дифференцирования сложной функции и соотношения $\nabla f(z) = \left(\partial f/\partial z\right)^{\mathrm{T}}$) получим

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\Delta A} w(x,\theta,t) &= Pe(t)x(t)^{\mathrm{T}},\\
\nabla_{\Delta B} w(x,\theta,t) &= Pe(t)r(t)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Выбирая, для простоты $\Gamma = \gamma \mathrm{I}_N$ (где $\gamma > 0$, I_N – единичная матрица) получим алгоритм адаптации

$$
\frac{d\Delta A}{dt} = -\gamma Pe(t)x(t)^{\mathrm{T}}, \qquad \frac{d\Delta B}{dt} = -\gamma Pe(t)r(t). \tag{3.4}
$$

Как следует из условия достижимости (2.10), матрица $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ должна удовлетворять уравнению Ляпунова $PA_M + A_M^{\mathrm{T}}P = -G$ для некоторой матрицы $G = G^{\mathrm{T}} > 0$ [8, 25].

Для предотвращения неограниченного роста коэффициентов регулятора при действии возмущений рекомендуется использовать регуляризованные алгоритмы адаптации вида [8, 24, 25, 28]

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta A(t) &= -\gamma\left(Pe(t)x(t)^{\mathrm{T}} + \alpha\big(\Delta A(t) - \Delta\widehat{A}\big)\right),\\
\frac{d}{dt}\Delta B(t) &= -\gamma\left(Pe(t)r(t)^{\mathrm{T}} + \alpha\big(\Delta B(t) - \Delta\widehat{B}\big)\right),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где $\Delta\widehat{A}$, $\Delta\widehat{B}$ – некоторые априорные оценки настраиваемых параметров, скалярные величины $\gamma > 0$ – коэффициент усиления алгоритма, $\alpha > 0$ – коэффициент параметрической обратной связи, значения которых выбираются при синтезе.

Адаптивное управление с неявной эталонной моделью. Метод неявной эталонной модели (НЭМ) был разработан в [53], применен для адаптивной настройки ПИД-регуляторов в [54] и распространен на задачи синхронизации в [55]. Законы адаптивного управления с НЭМ выводятся с помощью метода СГ с локальным целевым функционалом $Q = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$, где $x \in \mathbb{R}^n$ обозначает вектор состояния объекта, $(n \times n)$-матрица P положительно определена, $P = P^{\mathrm{T}} > 0$. Настраиваемый закон управления в “основном контуре” принимается в виде $u = K(t)y$, где u – управляющее воздействие, y – измеряемый выход объекта, $K = K(t)$ – коэффициенты усиления регулятора, скорректированные с помощью алгоритма адаптации

$$
\dot{K}(t) = -\gamma\delta(t)y(t), \quad \delta(t) = \sum_{i=1}^{l} g_i y_i(t), \quad u(t) = \sum_{i=1}^{l} \theta_i(t) y_i(t),
$$

в котором l обозначает число выходов объекта, используемых для формирования управления и настройки коэффициентов регулятора.

Адаптивная стабилизация линейных стационарных (инвариантных по времени) объектов с одним входом и выходом. Пусть линейный стационарный объект с одним входом и выходом представлен в форме "входа-выход"

$$A(p)y(t) = B(p)u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3.6}$$

где u, y – скалярные входная и выходная переменные, $A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$, $B(p) = b_m p^m + \dots + b_0$ – многочлены от оператора дифференцирования по времени $p \equiv d/dt$. Определим k как *относительную степень* системы (3.6), $k = n - m > 0$. Параметры объекта (3.6) a_i, b_j ($i = 0, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m$) считаются неизвестными. Желаемая динамика системы с обратной связью выражается в виде некоторого "эталонного" дифференциального уравнения. В классических БСНС с ЭМ это уравнение явно реализовано (интегрируется) в адаптивном регуляторе, см. [3, 50–52]. Чтобы описать адаптивные регуляторы с НЭМ, вводится сигнал ошибки адаптации $\sigma(t)$ как

$$\sigma(t) = G(p)y(t), \tag{3.7}$$

где $G(p) = p^l + g_{l-1}p^{l-1} + \dots + g_0$ – заданный гурвицев (устойчивый) многочлен от оператора дифференцирования $p \equiv d/dt$. Коэффициенты g_i – расчетные параметры; они выбираются на основе желаемой динамики замкнутой системы. Степень l полинома $G(p)$ определяется ниже. Предполагая, что закон адаптации обеспечивает стремление $\sigma(t)$ к нулю, заметим, что при $\sigma \equiv 0$ выход $y(t)$ удовлетворяет следующему "*эталонному уравнению*":

$$G(p)y(t) = 0. \tag{3.8}$$

Это уравнение описывает эталонную модель, но эта модель не реализована в адаптивном регуляторе в виде некой динамической подсистемы, а введена *неявно* через свои параметры g_i ($i = 0, 1, \dots, l-1$). Следовательно, ее имеет смысл назвать неявной эталонной моделью (НЭМ).

Выберем закон управления с обратной связью в следующем виде:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{l} k_i(t)\bigl(p^i y(t)\bigr), \tag{3.9}$$

где $k_i(t)$, $i = 0, \dots, l$ – настраиваемые параметры регулятора. Для рассматриваемого случая свойство гиперминимальнофазовости [24, 25, 28, 53, 55, 56] приводит к следующему закону адаптации, см. [53]:

$$\dot{k}_i(t) = -\gamma\sigma(t)p^i y(t), \quad k_i(0) = k_i^0, \tag{3.10}$$

где $\gamma > 0$ – *коэффициент адаптации*, k_i^0 задаются как начальные значения коэффициентов усиления регулятора, $i = 0, \dots, l$. Вводя вектор-строку $G = [g_0, g_1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^{l+1}$ и функцию преобразования $W(s)$ объекта $W(s)$ из входа u в вектор выхода $[y, \dot{y}, \dots y^{(l)}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l+1}$ как $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}\left[1, s, \dots, s^l\right]^{\mathrm{T}}$,

$s \in \mathbb{C}$ в силу теоремы пассификации [53] относительно передаточной функции $GW(s)$, легко вывести следующие условия устойчивости адаптивного регулятора (3.9), (3.10):

1) полином $B(s)$ гурвицев и $b_0 > 0$;

2) $l = k - 1$, где $k = n - m$ – относительная степень модели объекта (3.6).

Алгоритм (3.10) обычно обеспечивает затухание $\sigma(t)$ существенно быстрее, чем переходные процессы в замкнутом контуре. В результате изменение коэффициента усиления (3.9) регулятора прекращается, и выход объекта (3.6) $y(t)$ подчиняется НЭМ (3.8).

Чтобы избежать неограниченного роста коэффициентов передачи регулятора (3.9) при наличии внешних возмущений и ошибок измерения, можно использовать следующую α-модификацию (3.10), см. [55, 57]:

$$\dot{k}_i(t) = -\gamma\sigma(t)p^i y(t) - \alpha\big(k_i(t) - k_i^0\big), \quad k_i^0 = k_i(0), \tag{3.11}$$

где введен *коэффициент параметрической обратной связи* $\alpha > 0$.

Адаптивные системы слежения с НЭМ. Адаптивный закон управления (3.9), (3.11) непосредственно расширены до решения задачи слежения с желаемой динамикой замкнутой системы, см. [54]. Для этого введем задающее воздействие $r(t)$ и определим сигнал ошибки адаптации $\sigma(t)$ в виде

$$\sigma(t) = G(p)y(t) - D(p)r(t), \tag{3.12}$$

где многочлен $G(p)$ определен выше, а операторный многочлен $D(p)$ имеет вид $D(p) = d_q p^q + \cdots + d_1 p + d_0$. Сигнал $\sigma(t)$ можно трактовать как невязку в уравнении

$$G(p)y(t) = D(p)r(t), \tag{3.13}$$

рассматривая (3.13) как НЭМ в задаче слежения.

По аналогии с (3.9) возьмем управляющее воздействие в виде

$$u(t) = k_r(t)\big(D(p)r(t)\big) + \sum_{i=0}^{l} k_i(t)\big(p^i y(t)\big), \tag{3.14}$$

где $k_r(t)$, $k_i(t)$ $(i = 0, \ldots, l)$ – настраиваемые параметры. Закон адаптации имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{k}_r(t) &= \gamma\sigma(t)D(p)r(t) - \alpha\big(k_r(t) - k_r^0\big), \quad k_r^0 = k_r(0), \\ \dot{k}_i(t) &= -\gamma\sigma(t)p^i y(t) - \alpha\big(k_i(t) - k_i^0\big), \quad k_i^0 = k_i(0), \end{aligned} \tag{3.15}$$

где $\gamma > 0$, $\alpha \geqslant 0$ – выбираемые при синтезе параметры; k_r^0, k_i^0 – это “угаданные” начальные значения коэффициентов передачи регулятора, $i = 0, \ldots, l$. Стоит отметить, что как степень q полинома $D(p)$, так и его коэффициенты могут быть выбраны разработчиком произвольно.

Сигнально-параметрические адаптивные регуляторы с НЭМ. Пусть поставлена задача стабилизации $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ для объекта

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \tag{3.16}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$, A, B – неизвестные матрицы соответствующих размеров.

Следуя [55, 58], введем вспомогательную цель в виде обеспечения движения в *скользящем режиме* вдоль заданной поверхности, т.е. выполнения $\sigma(t) \equiv 0$, где $\sigma(t) = Gy$, G – заданная $(m \times l)$-матрица.

Воспользуемся следующим законом управления:

$$u = -\gamma \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = Gy, \tag{3.17}$$

где $\gamma > 0$ – параметр регулятора. Можно доказать, что для системы (3.16), (3.17) поставленная цель управления может быть достигнута, если существуют матрица $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ и вектор K_* такие, что $PA_* + A_*^{\mathrm{T}} P < 0$, $PB = GC$, $A_* = A + BK^{\mathrm{T}}C$. Как следует из теоремы о пассификации, указанные условия выполняются, если и только если: передаточная функция $GW(s)$ – гиперминимальнофазовая (где $W(s) = C\big(\lambda I_n - A)^{-1}B)$; знак GCB известен (считаем, что он положительный). При этих условиях цель $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ достигается при достаточно большом γ (относительно начальных условий и фактических параметров объекта).

Чтобы избежать зависимости устойчивости замкнутой системы от начальных условий и параметров объекта, вместо (3.17) можно использовать следующий "*сигнально-параметрический*", или "*комбинированный*", закон управления:

$$\begin{gathered} u = K^{\mathrm{T}}(t)y(t) - \gamma \operatorname{sign} \sigma(y), \quad \sigma(y) = Gy(t), \\ \dot{K}(t) = -\sigma(y)\Gamma y(t), \end{gathered} \tag{3.18}$$

где $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{T}} > 0$, $\gamma > 0$ – матричный и скалярный коэффициенты передачи алгоритма адаптации.

3.2. Идентификация параметров объекта

Пусть динамика объекта с неопределенными параметрами описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A_* x(t) + B_* u(t) \tag{3.19}$$

с неизвестными постоянными матрицами A_*, B_* и измеряемыми векторами состояния и входов $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Для идентификации параметров вводится следующая *настраиваемая модель* [59]:

$$\dot{x}_M(t) = Gx_M(t) + \big(A(t) - G)x(t) + B(t)u(t) \tag{3.20}$$

с вектором состояния $x_M(t) \in \mathbb{R}^n$ и матрицами $A(t)$, $B(t)$, которые служат оценками матриц A_*, B_*. В этом случае вектор θ определяется как $\theta(t) = \mathrm{col}\,(A, B)$. Вводятся сигнал ошибки $e(t) = x_M(t) - x(t)$ и целевая функция

$$Q_t = 1/2e(t)^{\mathrm{T}} Pe(t), \quad \text{где} \quad P = P^{\mathrm{T}} > 0. \tag{3.21}$$

Следуя методу СГ, получим

$$\omega = \dot{Q}_t = 1/2e(t)^{\mathrm{T}} P\big(Ge(t) + (A - A_*)x(t) + (B - B_*)u(t)\big), \tag{3.22}$$

$$\nabla_A \omega = Pe(t)x(t)^{\mathrm{T}}, \quad \nabla_B \omega = Pe(t)u(t)^{\mathrm{T}}, \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = -\gamma Pex^{\mathrm{T}}, \quad \gamma > 0, \\ \dot{B}(t) = -\gamma Peu^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{3.24}$$

4. Общие методы нелинейного управления на основе СГ

Задачи стабилизации заданного подмножества пространства состояний для пассивных нелинейных систем рассмотрены в [60]. Рассмотрим аффинные по управлению системы вида

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u, \tag{4.1}$$

где $x \in X \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \in \mathbb{R}^m$ – состояние и управляющий вход соответственно. Отображения f, g – гладкие векторные функции подходящей размерности.

Введем вспомогательные выходы системы (4.1)

$$y = h_1(x) = \big[L_g V(x)\big], \tag{4.2}$$

$$z = h_2(x), \tag{4.3}$$

где $V(x) = 0{,}5\|h_2(x)\|^2$, а $h_2 : X \to \mathbb{R}^k$ – гладкая вектор-функция.

Предположим, что желаемое аттрактивное множество можно описать как прообраз нулевого значения некоторой гладкой неотрицательной функции $V(x)$ и что эта функция не увеличивается вдоль решений свободной системы. Задача состоит в определении регулятора в обратной связи по состоянию, обеспечивающего свойство

$$V\big(x(t)\big) \to 0 \quad (\text{или } h_2\big(x(t)\big) \to 0) \text{ при } t \to \infty, \tag{4.4}$$

где $x = x(t, x_0)$ является решением уравнения замкнутой системы с начальными условиями x_0, принадлежащими к некоторому предписанному множеству $\mathscr{D}$. Сделаны предположения, что:

(A1) функция $V(x)$ – правильная на пространстве состояний X, т.е. для любого $c \geqslant 0$ множество $\{x \in X : V(x) \leqslant c\}$ компактно;

(A2) свободная система $\dot{x} = f(x)$ такова, что гладкая функция $V(x)$ не возрастает вдоль ее решений: $L_f V(x) \leqslant 0$, $\forall x \in X$;

(A3) на множестве $\mathscr{R} = \{x \in X : L_g V(x) = 0\}$ функция $h_2(x)$ инвариантна, т.е. выполнено тождество $L_f h_2(x) \equiv 0, \forall x \in \mathscr{R}$.

Для решения задачи стабилизации (4.1), (4.3), (4.4) в [60] получены вытекающие из СГ-метода достаточные условия, гарантирующие асимптотическую стабилизацию целевого множества $V_0 = \{x \in X : V(x) = 0\}$ с помощью управления с обратной связью по состоянию

$$u = -\Psi\left(\frac{\partial}{\partial u}\dot{V}(x)\right), \tag{4.5}$$

где $\dot{V}(x)$ – полная производная от $V(x)$ вдоль решения (4.1), а $\Psi(y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольная гладкая вектор-функция, образующая острый угол с y, т.е. $\Psi(y)^{\mathrm{T}} y > 0$ для всех $y \neq 0$ и $\Psi(0) = 0$.

Подход к анализу и синтезу систем с обратной связью на базе моделей нелинейных систем и непериодических сигналов, генерируемых нелинейными системами, представлен в [61]. Предлагаемый подход основан на показателе возбудимости – нелинейном аналоге амплитудно-частотной характеристики линейной системы. Его можно использовать для анализа устойчивости полностью нелинейных каскадных систем аналогично анализу абсолютной устойчивости систем Лурье. Описаны СГ алгоритмы создания резонанса обратной связи в нелинейных генераторах с несколькими степенями свободы. Для строго диссипативных систем установлены границы изменения энергии и возбудимости по обратной связи.

В [62] известные условия устойчивости сингулярно возмущенных систем расширены, чтобы охватить случай систем управления энергией, синтезированных на основе метода СГ. В частности, таким способом попучены решения задач управления энергией на основе СГ сингулярно возмущенных гамильтоновых систем. Приложение к управляемой синхронизации двух связанных маятников представлено для двух случаев появления в системе малого параметра: малой инерции динамического связующего звена и малой инерции крутящего момента. В обоих случаях проводится сравнение оценок теоретической асимптотической точности с результатами компьютерного моделирования.

Метод управления неполноприводными (*underactuated*) нелинейными системами, основанный на введении искусственных инвариантов и использовании СГ алгоритмов, предложен в [63]. В работе сформулировано и обосновано общее положение о достижении цели управления. Применение предложенного подхода проиллюстрировано на примере стабилизации колебаний тележки-маятника вокруг верхнего положения равновесия.

В [64] рассмотрена задача управления нестационарной динамической системой с нефиксированным временем завершения и терминальным функционалом при наличии неопределенных параметров. Предлагается алгоритм построения управления, использующий элементы необходимых условий оптимальности и принцип СГ, обеспечивающий гарантированное значение функционала качества. Приведены результаты расчета управления и значений функционала для тестовых параметров модели.

Возможности исследования нелинейных физических систем с помощью малой обратной связи обсуждаются в [65]. Установлены аналитические границы возможного изменения энергии системы по обратной связи. Показано, что для нелинейного осциллятора с одной степенью свободы изменение энергии за счет обратной связи может достигать предела, достижимого для линейного осциллятора за счет гармонического (без обратной связи) воздействия. Такое явление называется резонансом с обратной связью (*feedback resonance*) или авторезонансом. Описан метод создания резонанса с обратной связью в нелинейных осцилляторах с несколькими степенями свободы на основе АСГ. Пример выхода из потенциальной ямы иллюстрируется результатами компьютерного моделирования.

Задача стабилизации уровня энергии для гамильтоновых систем с одной степенью свободы при наличии ограниченных входных возмущений рассмотрена в [66]. Показано, что для произвольных равномерно ограниченных возмущений с достаточно малой границей СГ закон управления обеспечивает предельную ограниченность энергетической погрешности. В качестве вспомогательного результата получены новые достаточные условия предельной ограниченности функции Ляпунова вдоль траекторий нелинейной нестационарной динамической системы.

5. Управление энергией. Управление нелинейными колебаниями

В развитии метода скоростного градиента в 1990-х годах можно выделить две важные вехи. Во-первых, удалось систематизировать на основе АСГ [67] методы адаптивного управления механическими системами, в том числе роботами-манипуляторами, в основе которых лежит пассивность [68–71].

Во-вторых, было предложено строить алгоритмы управления возбуждением колебаний гамильтоновых систем на основе скоростного градиента с использованием целевых функций, зависящих от гамильтониана (энергии) системы. В частности, для управляемой гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(q,p) = H_0(q,p) + H_1(q,p)u$, где $q \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных координат, $p \in \mathbb{R}^n$ – вектор обобщенных импульсов, u – скалярное управляющее воздействие, $H_0(q,p)$ – гамильтониан (энергия) свободной системы, $H_1(q,p)u$ – гамильтониан взаимодействия, ставится цель управления

$$H_0(q(t), p(t)) \to H^* \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{5.1}$$

где H^* – желаемое значение энергии системы. Выбирая целевую функцию в виде $Q(x) = 1/2(H_0(x) - H^*)^2$, получаем АСГ в виде

$$u = -\gamma(H_0 - H^*)p, \tag{5.2}$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент усиления [72–75]. Полученные результаты были подытожены в книгах [27, 28, 76] и стали основой для синтеза алгоритмов управления в многочисленных задачах управления колебаниями в системах и сетях. В [67, 74, 75] эти методы были распространены на системы более общие, чем гамильтоновы. Были получены условия применимости метода СГ для управления инвариантами широкого класса нелинейных систем.

Введено понятие “раскачивающего управления”, обеспечивающего достижение произвольно большого уровня целевой функции при помощи произвольно малого уровня управления. Установлено существование раскачивающего управления для гамильтоновых систем. Приведены результаты моделирования для задачи раскачки маятника. Результаты развиты в [75], где метод синтеза управления колебательными нелинейными системами распространен на задачи с несколькими целевыми функционалами и с ограничениями. Впервые предложен подход на основе метода СГ к задаче управления прохождением через резонансные зоны.

В [77] предложен способ использования метода СГ для управления синхронизацией двух осцилляторов на примере двух маятников, слабо связанных пружиной. В этом случае уравнение управляемого объекта имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \rho\dot{\varphi}_1 + \omega^2 \sin\varphi_1 = k(\varphi_2 - \varphi_1) + u, \\ \ddot{\varphi}_2 + \rho\dot{\varphi}_2 + \omega^2 \sin\varphi_2 = k(\varphi_1 - \varphi_2), \end{cases} \tag{5.3}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(t)$ – углы поворота маятников $(i = 1, 2)$; $u = u(t)$ – внешний момент (управляющее воздействие), действующий на первый маятник; ω, k, ρ – параметры системы: ω – частота собственных колебаний малой амплитуды, k – коэффициент связи между маятниками (например, коэффициент упругости пружины), ρ – коэффициент демпфирования.

В качестве целевой функции берется функция вида

$$Q(x) = \alpha Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) + (1-\alpha) Q_H(x), \tag{5.4}$$

где $x = \big[\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2\big]^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния объекта,

$$Q_\varphi(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \frac{1}{2}\,\delta_\varphi^2, \quad Q_H(x) = \frac{1}{2}\,\big(H(x) - H_*\big)^2, \tag{5.5}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}_1^2 + \omega^2(1-\cos\varphi_1) + \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}_2^2 + \omega^2(1-\cos\varphi_2) + \frac{k}{2}(\varphi_1-\varphi_2)^2 \tag{5.6}$$

– полная энергия системы, $\delta_\varphi = \dot{\varphi}_1 + -\dot{\varphi}_2$ – ошибка синхронизации, H_* – заданное целевое значение энергии, $\alpha > 0$ – весовой коэффициент. Очевидно, минимальное (нулевое) значение целевой функции соответствует синхронному движению маятников при заданном уровне энергии колебаний всей системы.

Синтезированный по такой целевой функции АСГ в конечной форме имеет вид

$$\begin{aligned} &u(t) = -\gamma\big(\alpha\delta_\varphi(t) + (1-\alpha)\delta_H(t)\dot{\varphi}_1(t)\big), \\ &\delta_\varphi(t) = \dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t), \\ &\delta_H(t) = H\big(x(t)\big) - H_*, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент усиления.

Результаты моделирования показывают, что действительно АСГ (5.7) создает в системе с двумя степенями свободы (два связанных маятника) синхронный режим, причем при малом коэффициенте трения $\rho > 0$ энергия, близкая к заданной H_*, может быть достигнута при малом коэффициенте усиления $\gamma > 0$, т.е. в системе наблюдается эффект резонанса с обратной связью.

Сходная задача рассмотрена и в [78], где СГ методом с энергетическим целевым функционалом выполнен синтез закона управления. Произведен анализ системы по упрощенной модели ее динамики. Результаты как компьютерного моделирования, так и экспериментов на лабораторном стенде продемонстрировали работоспособность принятого метода управления.

Задача подъема маятника Фуруты анализируется в [79] путем сравнения результатов, полученных с помощью традиционной стратегии Острема–Фуруты, основанной на модели размерности два, с новой стратегией, основанной на СГ-законе на многообразии размерности три. Приведен контрпример, когда новый закон работает хорошо, а старый нет. Задача приведения маятника Фуруты в верхнее положение обычно решается гибридным регулятором, в котором глобальная задача разбивается на два этапа. Сначала накачка энергии приводит маятник в вертикальное положение. Затем маятник стабилизируется в этом положении. В [80] различные стратегии управления для обеих задач анализируются как путем моделирования, так и с использованием реального лабораторного маятника. Проблема подъема маятника Фуруты решается в [81] с применением метода СГ к модели системы с размерностью четыре. Новый закон сравнивается с традиционной стратегией Острема–Фуруты, основанной на модели размерности два. Приведены результаты сравнительного анализа, включающего моделирование и эксперименты, в которых показаны преимущества и эффективность предложенного закона раскачки маятника.

Задача стабилизации вертикального положения сферического маятника подробно рассмотрена в [82]. Эта задача сводится к стабилизации устойчивого многообразия Ω_{st} вертикального положения свободного сферического маятника. Показано, что для любого гладкого управления с обратной связью, полученного с помощью СГ алгоритма с целью стабилизации Ω_{st}, замкнутая система имеет предельный цикл Γ, который не принадлежит желаемому аттрактору Ω_{st}.

В [83] обобщены и расширены имеющиеся результаты по стабилизации инвариантных множеств для нелинейных систем на основе метода СГ и понятия V-обнаруживаемости. Представлены результаты по управлению колебаниями маятника, маятника на тележке, сферического маятника. Алгоритм, обеспечивающий глобальную аттрактивность вертикального (неустойчивого) положения равновесия маятника, основанный на разрывной версии энергетического СГ метода, получен в [84]. Показано, что глобальная аттрактивность не может быть получена с помощью непрерывной статической обратной связи по состоянию. Представлен подробный глобальный анализ переходного поведения замкнутой системы. Кроме того, показано, что глобальная аттрактивность вертикального положения равновесия может быть достигнута путем применения управления сколь угодно малой величины.

В [85] рассмотрена задача численного определения показателя возбудимости колебательных систем. Показано, что возбуждение по методу СГ обеспечивает точное решение задачи достижения максимальной энергии для линейного осциллятора второго порядка на бесконечном интервале времени. Оценены верхняя и нижняя границы полной энергии системы в режиме установившихся колебаний и показатель возбудимости. Найдено точное значение доступной энергии системы для случая гармонического возбуждения.

АСГ управления нелинейными колебаниями динамической системы для задач регулирования и слежения представлен в [86]. Осциллятор Колпитца [87], имеющий хаотическое поведение, рассматривается в качестве примера. Алгоритм использует только структурную информацию о динамической модели для построения закона управления и может глобально асимптотически сходиться к заданным регулярным орбитам или фиксированным точкам.

В [88] рассмотрены задачи возбуждения и синхронизации колебаний в двухсвязанной двойной маятниковой мехатронной системе. Описаны аппаратные средства, интерфейс обмена данными и программное обеспечение для лабораторных экспериментов и управления. Импульсно-модулированный закон управления для возбуждения/синхронизации колебаний получен методом СГ. Лабораторные эксперименты выполнены для проверки и оценки параметров принятой математической модели. Приведены результаты сравнения моделирования и лабораторных экспериментов для анализа возбуждения и синхронизации.

В [89] использована адаптивная настройка усиления в обратной связи с запаздыванием для улучшения процесса управления. Предложенный в [89] адаптивный регулятор применяется для стабилизации неустойчивой неподвижной точки и неустойчивой периодической орбиты, встроенной в хаотический аттрактор. Алгоритм адаптации построен с использованием СГ метода. Представленные в [89] результаты компьютерного моделирования показали, что алгоритм адаптации может найти подходящее значение усиления обратной связи для одиночных и множественных задержек. Кроме того, показано, что метод [89] устойчив к шуму и отличиям в начальных условиях.

Задача адаптивной синхронизации двух связанных неидентичных моделей нейронов Хиндмарша–Роуза (*Hindmarsh–Rose*) рассмотрена в [90]. Показано, что использование разработанного регулятора, основанного на методе СГ, обеспечивает достижение синхронного поведения исследуемых систем. Полученные результаты математически обоснованы и проиллюстрированы моделированием.

Проблема управления маятниковыми механизмами рассматривается в [91]. Для описания динамики маятников используется гамильтонов формализм. Предложен алгоритм достижения равных значений энергии колеблющихся маятников посредством управления с обратной связью на основе СГ метода. Получены условия достижимости цели управления. Установлена связь между синхронизацией энергии и частотой колебаний. Представлены результаты компьютерного моделирования, демонстрирующие достижение цели управления и демонстрирующие динамические свойства замкнутой системы.

В [92] рассмотрена задача управления энергией маятника при наличии нерегулярного входного возмущения. Закон управления с обратной связью выбирается на основе метода СГ. Основным результатом являются точные оценки для начального множества и конечного множества (аттрактора), а также условия, гарантирующие, что все решения, начинающиеся в начальном множестве, попадут в аттрактор за конечное время.

На примере управления энергией маятника, в [93] рассмотрена задача управления нелинейной системой на инвариантном многообразии с помощью квантованной обратной связи по состоянию. Выбран основанный на АСГ закон управления с обратной связью. Основной результат заключается в точном описании границ допустимой ошибки квантования и результирующих границ отклонения энергии.

В [94] ставятся задачи управления энергией для модели Френкеля–Конторовой и обсуждается их связь с управлением маятниковыми цепочками. Предложен и проанализирован алгоритм управления энергией на основе метода СГ. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие сходимость предложенного алгоритма.

В [95, 96] метод СГ распространен на синхронизацию осцилляторов с комплексными переменными. Существующие результаты о частичной устойчивости дифференциальной формы АСГ для сингулярно возмущенных систем распространены в [97] на случай СГ управления в конечной форме. Результаты проиллюстрированы на примере управления энергией и синхронизацией двух связанных маятников с учетом инерции двигателя. Показано, что возмущения, вызванные инерцией соединительного звена, и возмущения, обусловленные инерцией двигателя, влияют по-разному на поведение возмущенной системы.

6. АСГ в сетевых и многоагентных системах

АСГ находят применение в современных исследованиях по управлению и оцениванию в сетевых и многоагентных системах. При этом метод СГ может использоваться для синтеза алгоритмов управления или адаптации как для локальной динамики агентов, так и для изменения связей между агентами, в том числе для изменения топологии сети. Опишем основные подходы к этим задачам. С середины 2000-х годов исследования велись в рамках общей модели сетевой системы управления, имеющей вид [98]

$$x_i(t) = f(x_i(t), u_i(t), t) + c\sum_{j=1}^{N} G_{ij}x(t)\Gamma\phi(x_j(t) - x_i(t)), \tag{6.1}$$

где x_i – вектор состояния i-го агента, u_i – вектор входов (управления) i-го агента, $\Gamma(x), \phi(x)$ – функции фиксированных связей между агентами,

$G_{ij}(t)$ – функции изменяемых коэффициентов связи, c – общий коэффициент интенсивности взаимодействия агентов, $i, j = 1, \ldots, N$. Искомые модели управления могут быть децентрализованными (локальными, $u_i = U_i(x_i)$), частично децентрализованными, когда u_i зависит от нескольких агентов-соседей, или кооперативными в более общих случаях. В разных работах задаются различные цели управления. Например, в задачах синхронизации или достижения консенсуса агентов цель управления имеет вид

$$\lim_{t\to\infty} ||x_j(t) - x_i(t)|| = 0, \quad i, j, = 1, \ldots, N. \tag{6.2}$$

Рассмотрим задачу слежения за лидером, где целью управления является синхронизация движений агентов с движением лидера (эталонной модели), который может быть реальным или виртуальным. Предположим, что управлениями являются изменения коэффициентов G_{ij} (при этом $u_i = 0$) и выберем целевую функцию

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (e_i^{\mathrm{T}} P e_i), \tag{6.3}$$

где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ – положительно определенная матрица, а $e_i = x_i - x^*(t)$, где $x^*(t)$ – состояние лидера (желаемая траектория движения агентов). Тогда вычисляя скорость изменения целевой функции вдоль решений (6.1), а затем градиент скорости по управляющим переменным, получим СГ-алгоритм управления в дифференциальной форме

$$\dot{G}_{ij}(t) = -\gamma_{ij} c (e_i)^{\mathrm{T}} P (e_j - e_i), \tag{6.4}$$

где $\gamma_{ij} > 0$ – коэффициенты усиления. Условия достижимости цели выводятся из общих условий применимости АСГ, см. раздел 2.1.

Алгоритмы, близкие к (6.4), рассматривались в [99], где роль лидера играет “усредненный” агент $x^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t)$.

В [100] метод СГ используется для синтеза децентрализованного алгоритма адаптации локальных регуляторов для сетей в случае, когда локальная динамика агентов имеет вид $F(x_i, u_i, t) = Ax_i + Bu_i + \varphi_0(x_i)$, уравнение лидера имеет вид $\dot{x}_i^* = A^* x_i^* + B^* u_i^* + \varphi_0(x_i^*)$, $y_i^* = Cx_i^*$, а локальные адаптивные регуляторы имеют вид

$$u_i = \theta_i^{\mathrm{T}} (y_i - y^*(t)), \quad y_i = Cx_i, \quad \dot{\theta}_i = -\gamma_i g^{\mathrm{T}} \big(y_i - y^*(t)\big)^{\mathrm{T}} P (x_j - x_i). \tag{6.5}$$

В [101] рассматривались задачи управления кластерной синхронизацией в сетях из осцилляторов Стюарта–Ландау с запаздыванием в связях, описываемых уравнениями

$$\dot{z}_j(t) = \left(\lambda + i\omega - |z_j|^2\right) z_j + K \sum_{n=1}^{N} G_{jn}(t) \big(z_n(t-\tau) - z_j(t)\big), \tag{6.6}$$

где z_j – комплексные числа, $i^2 = -1$, $K = \rho e^{i\beta}$ – комплексный параметр, определяющий интенсивность и фазовый сдвиг функций связей, τ – запаздывание, λ, ω – параметры динамики агентов. Известно, что при изменении величины K в сети могут возникать различные колебательные режимы, в которых фазы колебаний агентов могут все совпадать, или быть все различными, отличающимися на $2\pi/N$, или, в промежуточном случае, агенты могут группироваться в $M < N$ кластеров, в каждом из которых агенты имеют одну и ту же фазу. Целевая функция выбрана в виде

$$Q = 1 - f_d(\varphi) + \frac{N^2}{2} \sum_{p|d, 1 \leqslant p < d} f_p(\varphi), \tag{6.7}$$

где

$$f_p(\varphi) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} e^{pi\varphi_j} \sum_{k=1}^{N} e^{-pi\varphi_k}, \tag{6.8}$$

а символ $p\,|\,d$ означает, что d делится на p. Построен АСГ в дифференциальной форме для настройки параметра β и в частном случае сети из шести осцилляторов путем моделирования показано, что в системе можно создать режим синхронизации с любым допустимым числом кластеров: 1, 2, 3 или 6. В [101] аналогичные результаты получены при настройке параметров G_{jn}, определяющих топологию сети.

7. Управление техническими системами

7.1. Управление вибрационными машинами

В [102, 103] исследуется задача управляемого прохождения через зону резонанса для механических систем с несколькими степенями свободы. В [102] разработан алгоритм управления, основанный на методе СГ и оценке частоты замедленного движения вблизи резонанса (частота Блехмана). Приведены результаты моделирования двухроторных гибких виброустановок, демонстрирующие эффективность предложенных алгоритмов и фрактальную зависимость времени прохождения от начальных условий. Особенностью исследования, приведенного в [103], является изучение работы замкнутой системы с учетом динамики электропривода. Получено, что время прохождения зоны резонанса может оказаться меньшим, чем для упрощенной модели без учета динамики электропривода. Исследования продолжены в [104]. Отмечено, что существующие алгоритмы управления на основе метода СГ требуют измерения полного вектора состояния системы. Для устранения этого недостатка разработан алгоритм управления на основе частичного наблюдателя для оценки вертикальной скорости опорного тела. Предлагаемый наблюдатель основан на упрощенной нелинейной модели двухмассовой колебательной системы. Эффективность управляемого прохождения через зону резонанса с алгоритмом управления на основе предложенного наблюдателя проанализирована с помощью компьютерного моделирования для полной модели механической системы.

Работа [105] посвящена управлению колебаниями механических систем при пуске и прохождении через резонансные режимы. В обоих случаях алгоритм управления основан на методе СГ с целевыми функциями на основе энергии. Показано, что для гамильтоновых систем с одной степенью свободы в общем случае возможно переместить систему из любого начального состояния в любое конечное состояние с помощью управляющей силы сколь угодно малой интенсивности. Исследуется управляемое прохождение через резонанс на вибрационной машине с пятью степенями свободы с присутствием сил трения. Моделированием показано, что применение управления с обратной связью делает возможным прохождение через более низкий резонанс с меньшей интенсивностью управления по сравнению с прохождением через резонанс при постоянном управляющем моменте. Особенностью данной статьи является рассмотрение случая, когда постоянные управляющие моменты не позволяют роторам даже начать вращение. Применение управления с обратной связью позволяет роторам преодолевать силу тяжести и начинать вращение. В [105] приведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными результатами, полученными на двухроторном лабораторном мехатронном стенде СВ-2М ИПМаш РАН. Большинство результатов качественно совпадают, что подтверждает адекватность принятой модели.

Результаты экспериментального исследования явления самосинхронизации и эффекта Зоммерфельда как в разомкнутом, так и в замкнутом контуре управления представлены в [106]. Эксперименты выполнены на мультирезонансной мехатронной лабораторной установке (*Multiresonance Mechatronic Laboratory Setup*, MMLS) СВ-2М ИПМаш РАН, в которую входят неуравновешенные вибровозбудители, установленные на подпружиненной платформе, датчики, электродвигатели, управляющий компьютер, интерфейс для обмена данными. Показано, что управление с обратной связью на основе метода СГ позволяет точнее стабилизировать скорость вращения, чем обычно используемое в вибрационной технике управление двигателями без обратной связи. Некоторые дополнительные эффекты, такие как низкочастотные автоколебания, могут появиться из-за интегральной (И) составляющей сигнала управления с обратной связью.

В [107] изучена синхронизация управляемого неуравновешенного ротора с вязкоупругим основанием и силовым возбуждением. Методом прямого разделения движения выводятся условия существования и устойчивости синхронного режима движения для общего закона управления. Затем с помощью метода СГ разработан закон управления, чтобы передать максимальную энергию от возбуждения к ротору. Свободные параметры закона управления выводятся таким образом, чтобы управляемая синхронизация была устойчивой на пределе ее существования.

В [108, 109] рассмотрена задача об управлении числом проскальзываний циклов ротора электрической машины с помощью воздействия внешнего момента на примере одной простой математической модели. Для решения задачи применен метод СГ с целевой функцией, определяемой функцией энергии колебаний. Особенностью данного подхода является возможность использования достаточно малого управления, что способствует сбережению энергии. Строится алгоритм управления колебаниями ротора электрической машины, при использовании которого совершается заданное число проскальзываний циклов. В [109] проведено сравнение использования алгоритмов СГ и релейного. При моделировании ставится задача выполнить желаемое количество проскальзываний цикла в его начале, а затем возбудить колебания ротора с постоянной амплитудой. Результаты моделирования показали эффективность предложенных алгоритмов.

В [110] рассматривается адаптивное оценивание неизвестных параметров и состояний сферического робота с маятниковым приводом. С этой целью рассматривается следующая обобщенная задача: для модели нелинейного объекта в виде $\dot{x} = f(x, p, u)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^k$, найти оценку $\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{p}, u)$ обеспечения выполнения цели $\lim_{t\to\infty} |p - \hat{p}(t)| = 0$. Для использования метода СГ вводится следующий целевой функционал:

$$J(x, \hat{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i e_i^2,$$

где $e_i = \hat{x}_i - x_i$, w_i – весовые коэффициенты, выбранные разработчиком; $i = 1, \ldots, n$.

Метод синтеза СГ приводит к следующим выражениям:

$$\dot{J} = \frac{\partial J}{\partial t} + \hat{f}(\hat{x}, \hat{p}, u)^{\mathrm{T}} \nabla_{\hat{x}} J = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i \left(\dot{e}_i + \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{p}, u)\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i \left(2\hat{f}_i(\hat{x}, \hat{p}, u) - f_i(x, p, u)\right).$$

В итоге получается следующее правило оценивания на основе СГ:

$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma \nabla_{\hat{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i e_i \hat{f}_i(\hat{x}, \hat{p}, u) \right). \tag{7.1}$$

Алгоритм (7.1), используется в [110] для оценки в реальном времени состояний и неизвестных параметров сферического робота для различных значений длины шага и начальных условий. Для адаптивной регулировки этого усиления используется эвристический нечетко-логический регулятор. Представленные в [110] результаты моделирования показывают, что предложенный подход является достаточно обнадеживающим для идентификации этой нелинейной по параметрам хаотической системы, даже если начальные условия меняются и уровень неопределенности возрастает.

7.2. Управление летательными аппаратами

7.2.1. Управление летательными аппаратами в атмосфере

Управление нежесткими летательными аппаратами. В [111] разработан робастный автопилот для управления угловым положением летательного аппарата (ЛА) с нежесткостью в конструкции при параметрической неопределенности. Используется следующая модель бокового движения ЛА как твердого тела [112–114]:

$$\begin{cases} \dot{\beta}(t) = r(t) + a_z^{\beta}\beta(t) + a_z^{\delta}\delta(t), \\ \dot{\omega}_y(t) = a_m^{\beta}\beta(t) + a_m^{\omega}r(t) + a_m^{\delta}\delta(t), \\ \dot{\psi}(t) = r(t), \end{cases} \tag{7.2}$$

где $\psi(t)$, $r(t)$ – угол и скорость рыскания соответственно, $\beta(t)$ – угол скольжения, $\delta(t)$ – угол поворота руля направления, a_i^j – параметры модели динамики ЛА. Значения a_i^j зависят от условий полета (таких как высота, число Маха и т.д.) и могут изменяться в широком диапазоне во время полета. Учитывается первый тон изгибных колебаний корпуса ЛА, который в месте расположения датчиков моделируется передаточной функцией

$$W_{\text{bend}}(s) = \frac{\Delta\psi(s)}{\delta_r(s)} = \frac{k_{\text{bend}}}{T_{\text{bend}}^2 s^2 + 2\xi_{\text{bend}}T_{\text{bend}}s + 1}, \tag{7.3}$$

где k_{bend} – коэффициент передачи от отклонения руля направления к изгибу; T_{bend} – постоянная времени первого тона упругих колебаний, $T_{\text{bend}} = \omega_{\text{bend}}^{-1}$, где ω_{bend} – собственная частота первого тона упругих колебаний; ξ_{bend} – коэффициент естественного демпфирования ($\xi_{\text{bend}} \approx 0$). Сигнал ψ_{g}, измеренный гироскопом, представляет собой сумму углов рыскания и изгиба:

$$\psi_{\text{g}}(t) = \psi(t) + \Delta\psi(t). \tag{7.4}$$

Сервопривод руля направления моделируется как фильтр нижних частот второго порядка. На основе СГ-метода в [111] разработан регулятор с высоким коэффициентом усиления с принудительно организованными скользящими режимами. *Шунт* (*параллельный компенсатор в прямой связи*) [54, 115–119] используется для обеспечения устойчивости замкнутой системы в условиях недостатка информации о переменных состоянии ЛА. Последовательная эталонная модель используется для определения желаемой динамики системы с обратной связью. Исследована устойчивость системы в широкой области значений параметров ЛА. Результаты моделирования продемонстрировали эффективность и высокую робастность предложенного метода управления.

Адаптивное кодирование при управлении группой дронов. В [120] представлена и численно исследована процедура адаптивного кодирования для передачи данных между квадрокоптерами, движущимися в формации. Параметры квадрокоптера определены с использованием экспериментальных данных по цифровому каналу связи с ограниченной полосой пропускания. Приведено сравнение полученных результатов с теоретическими положениями и проиллюстрирована эффективность процедуры адаптивного кодирования.

Робастное управление боковым движением самолета. Синтез робастного управления с обратной связью по выходу для линейных объектов с непрерывным временем в условиях параметрических неопределенностей и внешних ограниченных возмущений рассматривается в [121]. Предлагаемый алгоритм обеспечивает отслеживание выходом эталонного процесса с необходимой точностью. Представлено применение алгоритма для управления боковым движением самолета при параметрических и внешних возмущениях и дано сравнение предложенного алгоритма с H_∞ и управлением по методу СГ. Результаты моделирования демонстрируют эффективность и робастность предлагаемой системы управления.

Подавление автоколебаний ЛА по крену (wing rock). Явление "*wing rock*" известно как самовозбуждающееся движение крена при больших углах атаки. Когда возникает это явление, угол крена ЛА испытывает колебания нарастающей амплитуды, которые асимптотически сходятся к устойчивому предельному циклу [122–125]. Динамика автоколебаний по крену описывается существенно нелинейной моделью, параметры которой меняются в широком диапазоне в зависимости от условий полета (высоты, числа Маха, массы нагрузки и др.), а также от угла атаки.

В [126] предлагается адаптивный АСГ в конечной (интегрально-алгебраической) форме для управления ЛА по крену с подавлением автоколебаний. Используется следующая модель динамики движения ЛА:

$$\ddot{\varphi} + a_0\varphi + a_1\dot{\varphi} + a_2|\dot{\varphi}|\dot{\varphi} + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^2\dot{\varphi} = bu, \tag{7.5}$$

где φ обозначает угол крена, u – управляющее воздействие (отклонение элеронов), $a_i = a_i(\alpha)$, $b = b(\alpha) > 0$ – неизвестные параметры модели самолета, зависящие от угла атаки α. Рассмотрена задача отслеживания углом крена φ задающего воздействия φ^*, что означает приведение состояния системы к целевому многообразию $\psi(\varphi, t) \equiv \dot{e} + \lambda e = 0$, где $e = \varphi - \varphi^*(t)$. В [126] представлены сравнительные результаты моделирования для закона управления СГ и закона, полученного с помощью метода "погружения и инвариантности" (*Immersion&Invariance*, I&I) I&I, см. [127–129]. Оба закона адаптации включают в себя интегральный закон обновления и алгебраическую векторную функцию, зависящую от состояния ЛА. Результаты моделирования показали, что обе адаптивные системы способны подавлять автоколебания по крену, несмотря на неопределенности параметров модели при различных углах атаки.

Аналогичная задача управления рассмотрена и в [130] для модели ЛА вида (7.5). Для адаптивного подавления автоколебаний крена используется метод *неявной эталонной модели* (НЭМ) [8, 25, 28, 30, 54, 55]. Законы адаптивного управления с НЭМ выводятся на основе метода СГ, если использовать локальный целевой функционал $Q = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$, где $x \in \mathbb{R}^n$ обозначает вектор состояния объекта, $(n \times n)$-матрица P положительно определена, $P = P^{\mathrm{T}} > 0$. Настраиваемый закон управления в "основном контуре" принимается в виде $u = K(t)y$, где u – управляющее воздействие, y – измеряемый выход объекта, $K = K(t)$ – коэффициенты передачи регулятора, скорректированные с помощью алгоритма адаптации. На основе этого подхода получается следующий адаптивный закон управления креном:

$$e(t) = \varphi(t) - \varphi^*(t), \quad \dot{\xi}(t) = e(t), \quad \xi(0) = 0 \tag{7.6}$$
– ошибка слежения и ее интеграл,

$$\sigma(t) = \tau\varphi(t) + e(t) \text{ – ошибка адаптации,} \tag{7.7}$$

$$u(t) = -\big(k_i\xi(t) + k_p(t)e(t) + k_d(t)\varphi(t)\big) \text{ – сигнал управления,} \tag{7.8}$$

$$\dot{k}_p(t) = \gamma\sigma(t)e(t) - \lambda\big(k_p(t) - k_p^0\big), \quad k_p(0) = k_p^0 \tag{7.9}$$
– адаптивная настройка коэффициента регулятора для пропорциональной составляющей,

$$\dot{k}_d(t) = \gamma\sigma(t)\varphi(t) - \lambda\big(k_d(t) - k_d^0\big), \quad k_d(0) = k_d^0 \tag{7.10}$$
– адаптивная настройка коэффициента регулятора для дифференциальной составляющей,

где $\varphi^*(t)$ – задающее воздействие по крену, $\tau > 0$ – постоянная времени НЭМ (выбираемый при синтезе параметр), $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации (выбираемый при синтезе параметр), $\lambda > 0$ – коэффициент усиления параметрической обратной связи адаптации (выбираемый при синтезе параметр), k_p^0, k_d^0 – начальные значения настраиваемого пропорционального и производного коэффициентов усиления, найденные на основе априорно доступной информации о параметрах объекта (выбираются при синтезе). Если априорные данные не дают возможности для обоснованного выбора k_p^0, k_d^0, то разумно выбрать $k_p^0 = 0$, $k_d^0 = 0$. Следует отметить, что интегральный коэффициент усиления k_i в (7.8) не подвергается настройке. Результаты, полученные с помощью моделирования, показывают, что адаптивный регулятор с НЭМ подавляет колебания предельного цикла колебаний по крену и обеспечивает приемлемые характеристики слежения при различных углах атаки.

Исследования в этом направлении продолжены в [131], где использована более реалистичная, чем (7.5), модель динамики движения ЛА по крену [132–134], в которой учитывается взаимное влияние углов крена и скольжения. В отличие от [132, 135, 136], кроме того, ограничения на угол отклонения элеронов явно учитываются в [131] при синтезе регулятора. С этой целью в [131] предложена и численно исследована для характерных режимов полета модификация схемы адаптивного управления с НЭМ.

Реализация закона адаптивного управления (7.8)–(7.10), как и других типов “простых адаптивных регуляторов” [53, 137–139], требует низких вычислительных затрат. В частности, (7.6), (7.8) соответствуют традиционному ПИД-регулированию с возможным добавлением “релейной” компоненты $\operatorname{sign}\sigma$. Для усиления адаптивной настройки $k_p(t)$, $k_d(t)$ должны быть включены два интегратора (7.9), (7.10). Адаптивный закон управления приведен в [131] и в дискретной форме, выполнены численные исследования влияния интервала квантования на качество управления.

Приведенные в [131] результаты моделирования также демонстрируют очень важное и характерное свойство адаптивных систем управления НЭМ: в процессе адаптации коэффициенты усиления регулятора не стремятся к фиксированным значениям, определяемым параметрами объекта. Это не требуется и, более того, невозможно, поскольку не выполняется условие Эрцбергера [24, 52], которое является естественным для обычных БСНС с ЭМ. Коэффициенты регулятора изменяются в зависимости от, например, задающего воздействия или действующих возмущений, обеспечивая выполнение "эталонного уравнения" для замкнутой системы.

Адаптивное управление лабораторным стендом "Вертолет". В [140, 141] метод СГ и концепция НЭМ используются для разработки двух законов адаптивного управления углом тангажа лабораторного стенда "Вертолет" Quanser$^{\text{TM}}$-LAAS.

Для адаптивной настройки стандартных ПИ и ПИД-регуляторов в реальном времени используется метод СГ с НЭМ [8, 54, 55]. Адаптивное управление с пропорционально-интегрально-дифференцирующим (ПИД) регулятором выглядит следующим образом:

$$u(t) = k_P(t)e(t) + k_I(t)\int\limits_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau - k_D(t)\dot{y}(t), \tag{7.11}$$

где $\theta(t)$ – угол тангажа, $\varepsilon(t)$ – угол места, а $\lambda(t)$ – угол перемещения (разворота штанги стенда). Через $e(t) = r(t) - y(t)$ обозначена "обобщенная" *ошибка слежения* (по соответствующим координатам), $k_P(t)$, $k_I(t)$, $k_D(t)$ – настраиваемые коэффициенты усиления регулятора. Методом СГ получен следующий алгоритм адаптации:

$$\begin{aligned}
\dot{k}_P(t) &= -\gamma_P\sigma(t)e(t) - \alpha_P\big(k_P(t) - k_P^0\big),\ k_P(0) = k_P^0,\\
\dot{k}_I(t) &= -\gamma_I\sigma(t)\int\limits_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau - \alpha_I\big(k_I(t) - k_I^0\big),\ k_I(0) = k_I^0,\\
\dot{k}_D(t) &= \gamma_D\sigma(t)\dot{y}(t) - \alpha_D\big(k_D(t) - k_D^0\big),\ k_D(0) = k_D^0,
\end{aligned} \tag{7.12}$$

где $\gamma_i > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, k_i^0 – выбираемые при синтезе параметры, $i \in \{P, I, D\}$. *Ошибка адаптации* $\sigma(t)$ имеет вид

$$\sigma(t) = T^2\dot{y}(t) + 2\xi T y(t) - \int\limits_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{7.13}$$

где T, ξ – выбираемые при синтезе параметры, описывающие желаемую динамику замкнутой системы. Уравнения (7.11)–(7.13) задают адаптивный ПИД-регулятор с НЭМ второго порядка. Если выбрана НЭМ первого порядка, то сигнал ошибки адаптации следует брать в виде

$$\sigma(t) = T\dot{y}(t) - e(t), \tag{7.14}$$

где $e(t) = r(t) - y(t)$. Параметр T задает желаемую постоянную времени замкнутой системы.

Программные среды MATLAB / Simulink и WinCon использованы для реализации законов адаптивного управления при проведении экспериментов. Результаты экспериментов показали достижение требуемого поведения системы и устойчивость предложенных законов управления по отношению к параметрической неопределенности и неучтенной при синтезе динамике объекта.

Подавление изгибно-упругого флаттера крыла адаптивным регулятором с НЭМ. В [142] предложена простая схема адаптивного управления, основанная на НЭМ и СГ-методе для активного подавления флаттера крыла. Рассмотрено двумерное крыло, которое колеблется по тангажу и прогибу. Угол тангажа α – наклон крыла относительно оси упругости. Матрично-векторное уравнение изгибно-упругого флаттера крыла взято в виде [143, 144]:

$$\begin{bmatrix} I_\alpha & m_w x_\alpha b \\ m_w x_\alpha b & m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\alpha & 0 \\ 0 & c_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{h} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} k_\alpha(\alpha) & 0 \\ 0 & k_h(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ -L \end{bmatrix}, \tag{7.15}$$

где m_t – общая масса основного крыла и опорной конструкции, m_w – масса основного крыла, x_α – безразмерное расстояние между центром масс и осью изгиба, I_α – момент инерции крыла относительно оси вращения, b – средняя хорда крыла, c_α, c_h – коэффициенты демпфирования за счет прогиба и тангажа соответственно, $k_h(h)$ и $k_\alpha(\alpha)$ – коэффициенты жесткости пружины для прогиба и тангажа соответственно, так что $\alpha k_\alpha(\alpha)$ – нелинейное слагаемое, $\alpha k_\alpha(\alpha) = k_1\alpha + k_2\alpha^2$.

В [142] получен и исследован следующий ПД закон адаптивного управления с НЭМ для системы активного подавления флаттера:

$$\begin{aligned} &u(t) = k_p(t)\alpha(t) + k_d(t)\dot{\alpha}(t), \\ &\sigma(t) = \dot{\alpha}(t) + g_0\alpha(t), \\ &\dot{k}_p(t) = \gamma\sigma(t)\alpha(t) - \lambda\big(k_p(t) - k_p^0\big), \quad k_p(0) = k_p^0, \\ &\dot{k}_d(t) = \gamma\sigma(t)\dot{\alpha}(t) - \lambda\big(k_d(t) - k_d^0\big), \quad k_d(0) = k_d^0. \end{aligned}$$

7.2.2. Управление космическими аппаратами. В [145] рассматриваются две задачи управления нелинейными колебаниями космических систем: задача стабилизации угловой скорости вращающегося спутника и задача возбуждения колебаний с заданной амплитудой для буксируемого спутника-зонда.

Стабилизация угловой скорости вращающегося спутника. Предполагается, что спутник снабжен пассивным инерционным диссипатором энергии в виде пружинно-массового демпфера и малых реактивных двигателей. Движение спутника подвергается воздействию комбинации изменяющегося во времени момента возбуждения и управляющего момента.

Демпфер центрирован на неподвижной оси X тела и имеет точечную массу m. Эта масса движется по оси, перпендикулярной оси X, на некотором расстоянии от главной оси Z. Используется следующая модель углового движения спутника, приведенная в [146]:

$$\begin{cases} (I + m(1-\mu)y^2)\dot\omega + 2m(1-\mu)y\dot y\omega - mb\ddot y = M(t), \\ m(1-\mu)\ddot y + c\dot y + \big(k - (1-\mu)\omega^2\big)y - b\dot\omega = 0, \end{cases} \tag{7.16}$$

где ω, y – угловая скорость спутника и смещение массы демпфера; I, m, k, c обозначают момент инерции спутника относительно оси Z, массы демпфера, жесткости пружины и усиления вязкого сопротивления; $\mu = m/m_T$, где m_T обозначает полную массу системы. Внешний крутящий момент $M(t)$ представляет собой сумму крутящего момента возбуждения и управляющего крутящего момента, т.е. $M(t) = M_E(t) + M_C(t)$. Предполагается, что $|M_C(t)| \leqslant \bar M$, $\bar M > 0$.

Применение энергетического варианта СГ-метода синтеза управления дает следующие “пропорциональный” и “релейный” законы управления:

$$M_C = \gamma\big(H_{\text{ref}} - H(y, \dot y, \omega)\big)\big(\omega + \dot{\tilde y}(\tilde I + \tilde y^2 - 1)^{-1}\big), \tag{7.17}$$

$$M_C = \gamma \operatorname{sign}\big(H_{\text{ref}} - H(y, \dot y, \omega)\big)\operatorname{sign}\big(\omega + \dot{\tilde y}(\tilde I + \tilde y^2 - 1)^{-1}\big), \tag{7.18}$$

где введены $\tilde y = (1-\mu)b^{-1}y$, $\tilde I = (1-\mu)m^{-1}b^{-2}I$. Закон управления (7.18) может быть непосредственно реализован с помощью двухпозиционных управляющих реактивных двигателей.

В [145] приведены результаты численного моделирования для спутника Intelsat-II, демонстрирующие эффективность стратегии управления по методу СГ с энергетическим целевым функционалом для подавления возможных хаотических колебаний спутника.

Возбуждение колебаний буксируемого зонда-спутника. Метод управления СГ применяется для возбуждения колебаний заданной амплитуды буксируемого спутника-зонда. Рассмотрено относительное движение зондирующего спутника, соединенного с космическим кораблем гибким нерастянутым безынерционным кабелем [147, 148]. Обозначим фиксированную длину кабеля через L, массу спутника через m, а массу космического корабля будем считать намного большей массы спутника. Представим космический аппарат и спутник материальными точками. Принята следующая модель нелинейных колебаний [147]:

$$\ddot\gamma + \Big(\omega^2 \mathrm{e}^{\delta \sin\gamma} - 3\omega_0 \cos\gamma\Big)\sin\gamma = 0. \tag{7.19}$$

Пусть изменение длины кабеля после развертывания привязной системы является регулирующей величиной. Используя метод СГ, в [145] выводится следующий алгоритм:

$$\begin{aligned} u_k' &= -\alpha(\gamma_{\max} - \gamma_*)\dot\gamma \sin\gamma, \\ u_k &= \begin{cases} u_k' & \text{если } \ |u_k'| \leqslant \bar u, \\ \bar u \operatorname{sign} u' & \text{иначе}, \end{cases} \end{aligned} \tag{7.20}$$

где $\bar{u}$ – максимальное изменение длины кабеля, $\gamma > 0$ – коэффициент усиления.

Устойчивость системы к изменениям модели спутника и амплитуды момента возбуждения установлена с помощью компьютерного моделирования.

7.3. Управление автомобилями

Регулирование скорости большегрузных автомобилей. В [149] рассмотрена задача управления продольной скоростью большегрузных автомобилей, оборудованных регулируемым компрессионным тормозом. Разработаны нелинейные регуляторы, которые выполняют как некритические, так и критические маневры. Техника проектирования основана на СГ-методе. Номинальная целевая функция выбирается для решения задачи регулирования скорости, а затем она соответствующим образом модифицируется барьерными функциями для выполнения критических требований маневра. Чтобы выполнять более активные (критические) маневры торможения или управлять скоростью автомобиля при больших изменениях уклона, компрессионный тормоз должен согласовываться с регулировкой передаточного числа и фрикционными тормозами. Обсуждаются два способа управления неопределенностью уклона дороги: за счет использования интегрального действия регулятора СГ для постоянных (но неизвестных) уклонов и за счет использования дополнительного дифференциального действия для различных уклонов.

Управление работой бензиновых двигателей с прямым впрыском и стратифицированным наддувом. Метод СГ используется в [150] для разработки закона управления скоординированным соотношением воздух–топливо и управления крутящим моментом в бензиновых двигателях с прямым впрыском и стратифицированным наддувом (*direct injection stratified charge gasoline engines* DISCE). Метод основан на динамической минимизации целевой функции.

Используется следующая модель процесса:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{7.21}$$

где вектор состояния $x = [p_m, W_f, \delta]^{\mathrm{T}}$ и вектор управления $u = [u_{th}, u_f, u_\delta]^{\mathrm{T}}$ складываются из давления во впускном коллекторе p_m, эффективного проходного сечения дроссельной заслонки u_{th}, расхода через дроссель W_f, времени зажигания δ. Для введения интегрального воздействия в закон управления предполагается, что W_f и δ управляются следующими уравнениями: $\dot{W}_f = u_f$, $\dot{\delta} = u_\delta$.

Для синтеза регулятора используется целевая функция $Q = Q_p + Q_b$, где

- Q_p – это *штраф за переходный процесс* — квадраты отклонений момента торможения мотора, потока через цилиндры и времени зажигания от их уставок;
- Q_b – это *штраф за нарушение ограничения* $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, $\lambda(t)$ – соотношение воздух–топливо внутри цилиндра.

Цель управления – стабилизировать желаемое состояние равновесия $x = x_d$ так, чтобы $f(x_d) + g(x_d)u_d = 0$, минимизируя $Q\big(x(t)\big) \to 0$.

Для выбранной целевой функции Q скоростной градиент равен $\omega(x) \equiv \equiv \nabla_u \dot{Q}\big(x(t), u\big) = \Big(\frac{\partial Q_p}{\partial x} g(x)\Big)^{\mathrm{T}} + \Big(\frac{\partial Q_b}{\partial x} g(x)\Big)^{\mathrm{T}}$. Тогда для рассматриваемой целевой функции метод СГ приводит к следующему закону управления:

$$u = u_d - \Gamma\omega(x). \tag{7.22}$$

В [150] предлагается численная процедура, которая может использоваться на практике для проверки условий устойчивости рассматриваемой системы с обратной связью.

7.4. Управление автономными подводными роботами

Адаптивное управление автономным подводным манипуляционным роботом. Работы [17, 86, 151] посвящены адаптивному управлению автономным подводным аппаратом (АПА, *autonomous underwater vehicle*, AUV) с манипулятором. В этих статьях разработана основанная на методе СГ нелинейная адаптивная система управления АПА с шестью степенями свободы. При адаптивном подходе проблемы позиционирования и кинематического слежения решаются совместно. Для разработки алгоритма управления не требуется предварительных знаний о параметрах динамики и гидродинамики АПА, кроме динамики двигателя. Адаптация проводилась с помощью нелинейного адаптивного закона управления СГ. При проектировании учитывается динамика двигателей с использованием метода обратной динамики и наблюдения за состоянием/возмущением.

В [17] рассматривается класс полноуправляемых АПА с двумя плоскостями симметрии и шестью степенями свободы. Модель динамики АПА основана на результатах [152, 153] и имеет следующий вид:

$$M\dot{\mathbf{v}} = -C(\mathbf{v})\mathbf{v} - D(|\mathbf{v}|)\mathbf{v} + \mathbf{F}_b(\eta) + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_t, \tag{7.23}$$

$$\dot{\eta} = J(\eta)\mathbf{v} \tag{7.24}$$

с системными матрицами $M(t) = M_b(t) + M_a(t)$, $C(t, \mathbf{v}) = C_b(t, \mathbf{v}) + C_a(t, \mathbf{v})$, где M_b – матрица инерции тела; M_a – матрица добавленных масс (масса окружающей жидкости); $C_b(t, \mathbf{v})$, $C_a(t, \mathbf{v})$ – кориолисова и центростремительная матрицы, $D(|\mathbf{v}|) = D_l + D_q \operatorname{diag}(|\mathbf{v}|)$. В (7.23), (7.24) введены следующие обобщенные координаты и скорости: $\eta = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^{\mathrm{T}}$ – обобщенное положение в системе отсчета, закрепленной с Землей, $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^{\mathrm{T}}$ – вектор обобщенной скорости на траектории полета АПА в системе отсчета, закрепленной с телом аппарата; $J(\eta)$ – матрица поворотов с углами Эйлера (φ, θ, ψ); $\mathbf{F}_b$ – чистая выталкивающая сила, $\mathbf{F}_c$ – сила реакции троса, $\mathbf{F}_t$ – обобщенная тяга.

Из (7.24) следует, что $\mathbf{v} = J(\eta)^{-1}\dot{\eta}$. С подстановкой этого отношения в (7.23) модель АПА принимает вид

$$M_\eta(\eta)\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{M}_\eta(\eta)\dot{\eta} + D_\eta(\mathbf{v}, \eta)\dot{\eta} + g_\eta(\eta) = \tau_\eta, \tag{7.25}$$

где τ_η – обобщенный управляющий момент. Введением ошибок ориентации и скорости как $\tilde{\eta}(t) = \eta(t) - \eta^*(t)$, $\tilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^*(t)$ в [17] ставится следующая задача слежения: обеспечить предельные отношения $\lim_{t\to\infty} \tilde{\eta}(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{v}}(t) = 0$.

Для решения этой задачи в [17] используется *энергетический оценочный функционал* $Q(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}\tilde{\eta} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}} M \tilde{\mathbf{v}}$ и выбирается следующая цель управления: $Q(\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{v}}) \to 0$ при $t \to \infty$. Процедура синтеза по методу СГ состоит из следующих шагов: $\dot{Q}(\eta, \mathbf{v})$, следовательно, $\nabla_\tau \dot{Q}(\eta, \mathbf{v})$ и, наконец, закон управления СГ имеет вид $\tau(\eta, \mathbf{v}, \tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{v}})$.

Из-за неопределенности параметров модели АПА использован СГ-адаптивный закон управления

$$\dot{U}_i = -\Gamma_i \frac{\partial \dot{Q}(U_i)}{\partial U_i}, \quad i = 1, \ldots, 6, \tag{7.26}$$

где U_i – матричные параметры регулятора, $\Gamma_i = \Gamma_i^{\mathrm{T}} > 0$ – коэффициенты усиления.

В [17, 151] приведены результаты моделирования, отражающие особенности предлагаемого подхода.

В [154] представлен подход к прямому адаптивному управлению и разработке быстрой навигационной системы для трехмерного отслеживания пути полноприводных дистанционно управляемых транспортных средств, сочетающих алгоритм СГ с оптимальным по времени алгоритмом отслеживания пути.

Нейросетевая система управления подводным роботом. Работы [155–157] посвящены проектированию систем управления подводным роботом на основе интеллектуальной нейронной сети. Получен новый алгоритм обучения интеллектуального регулятора с использованием метода СГ. Предлагаемые системы обеспечивают динамику робота, близкую к желаемой.

Изложим подробнее результаты [157]. В качестве исходной модели подводного робота (ПР) в [157] используется его стандартное описание в виде совокупности кинематических и динамических уравнений [158]

$$\dot{q}_1 = J(q_1) q_2, \tag{7.27}$$

$$D(q_1)\dot{q}_2 + B(q_1, q_2) q_2 + G(q_1, q_2) = U, \tag{7.28}$$

где J – кинематическая матрица; q_1, q_2 – векторы обобщенных координат и скоростей ПР в связанной системе координат; U – вектор управляющих сил и моментов; D – матрица инерции с учетом присоединенной массы воды; B – матрица кориолисовых и центробежных сил; G – вектор обобщенных сил и моментов тяготения, плавучести и нелинейного демпфирования. В [157] предлагается преодолеть имеющуюся неполноту априорной информации о параметрах модели ПР на основе интеллектуального нейросетевого (НС) управления.

Ставится задача отслеживания ПР заданной траектории $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$. Сначала рассматривается отслеживание скоростей $q_2^*(t)$. Вводится ошибка слежения $e_2(t) = q_2^*(t) - q_2(t)$, относительно которой строится локальный целевой функционал

$$Q = \frac{1}{2} e_2^{\mathrm{T}} D e_2 \tag{7.29}$$

с некоторой матрицей $D(t) = D(t)^{\mathrm{T}} > 0$. Следуя СГ-методу, вычисляется производная $\dot{Q}$ в силу системы:

$$\dot{Q} = e_2^{\mathrm{T}} D \dot{e}_2 + \frac{1}{2} e_2^{\mathrm{T}} \dot{D} e_2, \tag{7.30}$$

откуда после подстановок получаем

$$\dot{Q} = e_2^{\mathrm{T}} \big(D(q_1) \dot{q}_2^* + B(q_1, q_2) q_2^* + G(q_1, q_2) - U \big). \tag{7.31}$$

Закон управления ПР предлагается реализовать с помощью двухслойной НС [159], т.е. в виде

$$U = W f(w, x), \tag{7.32}$$

где W – матрица коэффициентов передачи от нейронов внутреннего (скрытого) слоя к выходным нейронам, $f(\cdot)$ – функции активации нейронов скрытого слоя, w – матрица коэффициентов передачи от входных нейронов к нейронам скрытого слоя.

Выражения (7.31), (7.32) приводят к следующей формуле для производной по коэффициентам матрицы W от скорости изменения целевой функции:

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial W} = -e_2 f^{\mathrm{T}}(w, x). \tag{7.33}$$

Функции активации нейронов взяты в экспоненциальной форме $f(w, x) = 1/(1 + e^{-\tau w x})$ с некоторым $\tau > 0$.

Работа [157] иллюстрируется результатами компьютерного моделирования.

7.5. Управление энергосистемами

Задача управляемой синхронизации многомашинной энергосистемы с потерями рассмотрена в [160], где получены условия существования инвариантов в системе и разработан алгоритм синхронизации на основе метода СГ для целевой функции, штрафующей за отклонение от имеющегося инварианта. Оценка качества замкнутой системы выполнена по результатам моделирования.

В [161, 162] представлен инверсный оптимальный нейронный регулятор по методу СГ для нелинейных систем с дискретным временем при наличии внешних возмущений и неопределенностей параметров для энергосистемы с различными типами неисправностей в линиях передачи, включая колебания нагрузки. Регулятор основан на дискретной рекуррентной нейронной сети высокого порядка (*discrete-time recurrent high order neural network*, RHONN), обученной с помощью алгоритма на основе расширенного фильтра Калмана (*extended Kalman filter*, EKF). В [162] предлагается упрощенная нейронная модель синхронной машины для стабилизации системы из девяти шин при наличии неисправности в трех различных случаях на линиях передачи.

Проблема повышения устойчивости и качества работы электрических сетей с помощью управления рассмотрена в [163]. Расширен подход, основанный на использовании инвариантной функции, зависящей от системных переменных, и метода СГ для синтеза управления, предложенный в [160], а именно, в алгоритм этой работы внесены изменения для большей гибкости при разработке системы управления. Исследованы устойчивость и работоспособность замкнутой системы для сети, состоящей из трех генераторов. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие динамику системы.

7.6. Управление гироскопическими устройствами

Работы [164, 165] посвящены управлению нелинейными колебаниями кольцевого вибрационного микрогироскопа, резонатор которого представляет собой тонкое упругое кольцо толщины h, связанное с основанием при помощи восьми полукруглых спиц [166, 167]. Осевая линия резонатора в недеформированном состоянии имеет вид окружности радиуса R. Его колебания возбуждаются и регистрируются системой управляющих и измерительных электродов. В [164, 165] исследованы погрешности вибрационного микрогироскопа, возникающие из-за нелинейных упругих свойств материала кольцевого резонатора. Целью работы является синтез закона управления колебаниями резонатора для снижения влияния нелинейной упругости материала кольца на ошибки гироскопа. С использованием СГ-метода построено управление потенциалами электродов, позволяющее поддерживать заданную амплитуду нормального прогиба резонатора и парировать погрешности гироскопа из-за нелинейных упругих свойств материала.

При описании динамики резонатора вводятся величины v, w – упругие смещения элемента кольца резонатора в окружном и радиальном направлении соответственно. Для упрощения решения используется одномодовое приближение, т.е. считается, что $w = f\sin(n\varphi) + g\cos(n\varphi)$, где n – номер моды колебаний резонатора; $f = f(\tau)$, $g = g(\tau)$ – функции безразмерного времени $\tau = \omega_n t$, определяемые системой двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, полученных из уравнения нормального прогиба с применением процедуры Бубнова–Галеркина. Правые части уравнений для $f(\tau)$, $g(\tau)$ содержат управляющие напряжения $\tilde{U}_1$ (для f) и $\tilde{U}_2$ (для g), которые выбраны в виде

$$\tilde{U}_1 = u_1 \sin\tau + u_2 \cos\tau, \tag{7.34}$$

$$\tilde{U}_2 = u_3 \sin\tau + u_4 \cos\tau, \tag{7.35}$$

где $u_1, \dots, u_4$ – медленно изменяющиеся управляющие воздействия.

Для исследования системы методом усреднения Крылова–Боголюбова [168] выполнена следующая замена переменных:

$$f = p_1 \sin\tau + q_1 \cos\tau, \quad g = p_2 \sin\tau + q_2 \cos\tau, \tag{7.36}$$

где введены медленно изменяющиеся переменные p_1, q_1, p_2, q_2.

Далее уравнения системы представляются в гамильтоновой форме:

$$q_i = \varepsilon\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{1}{2}\gamma q_i\right), \quad p_i = \varepsilon\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\gamma p_i\right), \quad i = 1, 2 \tag{7.37}$$

с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} H = &-1/2\nu(p_2q_1 - p_1q_2) - 1/8\xi(p_2q_1 - p_1q_2)^2 + \\ &+ 3/32\xi\left(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2\right)^2 + 1/2(p_2u_1 + q_1u_2 + p_2u_3 + q_2u_4). \end{aligned} \tag{7.38}$$

Коэффициент γ в (7.37) соответствует демпфированию системы (диссипации энергии). В [164, 165] показано, что при отсутствии демпфирования ($\gamma = 0$) функции

$$G_1 = q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2, \quad G_2 = p_2q_1 - p_1q_2 \tag{7.39}$$

являются первыми интегралами системы (7.37), что дает возможность сведения задачи о нелинейных колебаниях кольцевого резонатора к квадратурам.

Рассматриваемая задача возбуждения и стабилизации колебаний кольцевого резонатора формализована в [164, 165] при помощи скалярных целевых функций G_1, G_2, при этом цель управления задается как достижение предельного равенства

$$\lim_{t\to\infty} G_i = G_i^*, \qquad i = 1, 2, \tag{7.40}$$

где

$$G_1^* = r_\infty^2, \quad G_2^* = 0.$$

Для возбуждения и поддержания заданной амплитуды колебаний резонатора в форме стоячей волны вводится квадратичная целевая функция

$$V = 0{,}5\big(\zeta(G_1 - G_1^*)^2 + (1-\zeta)G_2^2\big), \tag{7.41}$$

где $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ – выбранный при синтезе весовой коэффициент.

Алгоритм управления выводится на основе метода СГ. Для этого вычисляется производная по времени функции (7.41)

$$\dot V = \zeta(G_1 - G_1^*)\dot G_1 + (1-\zeta)G_2\dot G_2, \tag{7.42}$$

где производные функций G_i в силу (7.37) имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot G_i = \varepsilon\left(-\gamma G_i + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\{\bar{\mathbf{H}}, G_i\}\right), \quad i = 1, 2, \\ &\bar{\mathbf{H}} = 1/2(p_1, q_1, p_2, q_2)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{7.43}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор управления, $\{\bar{\mathbf{H}}, G_i\}$ – вектор-столбец скобок Пуассона [169].

Для целевой функции (7.41) выводится следующий АСГ в конечной форме

$$\mathbf{u} = -\eta \left(\zeta (G_1 - G_1^*) \{ \bar{\mathbf{H}}, G_1 \} + (1 - \zeta) G_2 \left\{ \bar{\mathbf{H}}, G_2 \right\} \right), \tag{7.44}$$

где $\eta > 0$ – коэффициент усиления алгоритма управления.

Далее в [164, 165] выполнен анализ свойств замкнутой системы с АСГ, исследовано влияние коэффициента усиления η на вид фазовых траекторий и на расположение особых точек в пространстве (G_1, G_2), а также приведены соотношения для выбора весового коэффициента ζ в (7.41), обеспечивающего наибольшую степень затухания колебаний в зависимости от параметров модели.

7.7. Управление асинхронными электродвигателями

Пуск асинхронного электродвигателя с короткозамкнутым ротором. Статья [170] посвящена задаче плавного пуска асинхронного электродвигателя (АД) с короткозамкнутым ротором. Отмечена неудовлетворительная динамика пусковых процессов АД, которая особенно сильно проявляется у электроприводов с частыми пусками или работающих в повторно-кратковременном режиме. Для улучшения пусковых процессов АД можно использовать устройство плавного пуска — специальный пускатель на основе силовых полупроводниковых приборов. В [170] предлагается закон управления плавным пуском АД на основе метода СГ исходя из предположения, что при неизменной частоте питающего напряжения пусковое устройство способно изменять его амплитуду с неограниченно большой скоростью.

Для описания процесса пуска в [170] используется следующая модель обобщенной двухфазной электрической машины, записанная для системы координат x–y, вращающихся синхронно с вектором напряжения статора:

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \tag{7.45}$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L_1}\psi_{1x} + \dfrac{R_1}{L_1}k_2\psi_{2x} + \omega_0\psi_{1y} \\ -\dfrac{R_1}{L_1}\psi_{1y} + \dfrac{R_1}{L_1}k_2\psi_{2y} + \omega_0\psi_{1x} \\ -\dfrac{R_2}{L_2}\psi_{2x} + \dfrac{R_2}{L_2}k_1\psi_{1x} + (\omega_0 - p\omega)\psi_{2y} \\ -\dfrac{R_2}{L_2}\psi_{2y} + \dfrac{R_2}{L_2}k_1\psi_{1y} - (\omega_0 - p\omega)\psi_{2x} \\ \dfrac{1}{J}(M - M_c) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.46}$$

$u = U_m,\ x = \left[\psi_{1x}\, \psi_{1y}\, \psi_{2x}\, \psi_{2y}\, \omega\right]^{\mathrm{T}}$ – составляющие потокосцеплений статора (индекс 1) и ротора (индекс 2); R_1, R_2, L_1, L_2 – соответственно активные сопротивления и полные индуктивности статора и ротора; ω_0, ω – соответственно частота вращения поля и частота вращения ротора; p – число пар полюсов; $M = c(\psi_{1y}\psi_{2x} - \psi_{1x}\psi_{2y})$ – электромагнитный момент, развиваемый двигателем; M_c – момент сопротивления; J – момент инерции электропривода; $k_1 = L_m/L_1$; $k_2 = L_m/L_2$; L_m – индуктивность цепи намагничивания.

Поставлены две цели управления: стабилизация момента и стабилизация модуля вектора потокосцепления. Первая цель направлена на минимизацию пульсаций электромагнитного момента, а вторая – для исключения насыщения магнитной системы. Эти цели управления выражены через локальный целевой функционал

$$Q(x,t) = \frac{1}{2}\big(y - y^*\big)^{\mathrm{T}} H \big(y - y^*\big), \tag{7.47}$$

где $y = \big[M\, \psi_1^2\big]^{\mathrm{T}}$ – вектор регулируемых величин; $y^* = \big[M^*\, {\psi_1}^{*2}\big]^{\mathrm{T}}$ – вектор задающих воздействий; H – единичная матрица порядка 2; $\psi_1^2 = \psi_{1x}^2 + \psi_{1y}^2$ – квадрат модуля вектора потокосцепления статора; $M^*, {\psi_1}^{*2}$ – соответственно заданные значения электромагнитного момента и квадрата модуля вектора потокосцепления статора.

Объект управления (7.46) аффинный по входу, поэтому АСГ в интегральной форме имеет вид

$$u = \int \big(-\Gamma B(x)^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} H (y - y^*)\big)\, \mathrm{d}t, \tag{7.48}$$

где $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{T}} > 0$, $C = \frac{\partial y(x)}{\partial x}$ – матрица Якоби для вектора регулируемых величин. С учетом (7.45), (7.47) выводится алгоритм управления

$$U_m = -\gamma \int \big(2\psi_{1x}(\psi_1^2 - {\psi^*}_1^2) - \psi_{2y}(M - M^*)\big)\, \mathrm{d}t, \tag{7.49}$$

в котором $\gamma > 0$ – выбранный коэффициент усиления.

В [170] проведено моделирование полученного алгоритма управления для двигателя 4А80А4У3, результаты которого показали, что при использовании алгоритма (7.49) временны́е зависимости электромагнитного момента и модуля потокосцепления имеют гораздо меньшие пульсации, чем при пуске прямым включением в сеть.

Приводится вывод алгоритма управления пусковым устройством и результаты компьютерного моделирования.

Управление многодвигательным электроприводом. Задача управления многодвигательным асинхронным электроприводом рассматривается в [171]. При ее решении необходимо обеспечить согласование значений электромагнитного момента, развиваемого каждым из n асинхронных двигателей (АД), поддерживая на требуемом уровне величину суммарного момента M_Σ. Кроме того, требуется поддерживать значения каждого АД на заданном уровне.

В [171] используется следующая математическая модель АД, работающих на один вал:

$$\dot{x} = A(x,t) + B(x,t)u, \tag{7.50}$$

где $x = \operatorname{col}\{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ – вектор-столбец, составленный из векторов состояния каждого двигателя $x_i = \left[\psi_{1\alpha,i}, \psi_{1\beta,i}, \psi_{2\alpha,i}, \psi_{2\beta,i}, \omega\right]^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \ldots, n$, $\psi.$ – составляющие векторов потокосцепления статора и ротора, ω – угловая скорость ротора; $u_i = \left[u_{1,\alpha}, u_{1,\beta}\right]^{\mathrm{T}}$ – составляющие вектора напряжения, подводимого к статору АД в неподвижной системе координат α–β (вектор управления). Матрица A имеет блочную форму.

Вводится вектор рассогласования регулируемых величин $\left[y(t) - y^*(t)\right]$, отдельные компоненты которого определяются следующим образом:

$$\left[y(t) - y^*(t)\right] = \begin{bmatrix} \left[p_i\sigma_i L_{12,i}(\psi_{1\beta,i}\psi_{2\alpha,i} - \psi_{1\alpha,i}\psi_{2\beta,i}) - M_i^*(t)\right] \\ \left[\psi_{1\alpha,i}^2 + \psi_{1\beta,i}^2 - {\psi^*}_{1,i}^2\right] \end{bmatrix}, \tag{7.51}$$

где $L_1 = L_{12} + L_{\sigma 1}$, $L_2 = L_{12} + L_2$ – полные индуктивности статора и ротора соответственно; $\sigma = 1/(L_1L_2 - L_{12}^2)$ – коэффициент рассеяния двигателя; p – число пар полюсов; M^* – заданный электромагнитный момент двигателя.

Для синтеза алгоритма управления вводится локальный целевой функционал

$$Q(x,t) = 0{,}5\big(y(t) - y^*(t)\big)^{\mathrm{T}} H\big(y(t) - y^*(t)\big). \tag{7.52}$$

В результате применения СГ метода для целевого функционала (7.52) найдены выражения составляющих вектора напряжения на выходе преобразователя частоты, необходимые для достижения поставленной цели управления. Отмечено, что полученные выражения трудоемки в вычислительном отношении, а также требуют информацию о составляющих векторов потокосцепления ротора каждого АД в режиме реального времени, поэтому применять полученный АСГ на практике затруднительно. Чтобы избежать указанных недостатков, в [171], следуя [172], принят ряд допущений, с учетом которых закон управления моментом многодвигательного асинхронного электропривода принимает вид:

$$\begin{aligned} u_{1\alpha} &= -\gamma \int \left(\sum_{i=1}^{n} \left(h_i \left(\frac{-M_i - M_i^*}{M_{Hi}} \psi_{1\beta,i} + \frac{|\psi_{1,i}|^2 - {\psi^*}_{1,i}^2}{\psi_{1H,i}^2} \psi_{1\alpha,i} \right)\right)\right) \mathrm{d}t, \\ u_{1\beta} &= -\gamma \int \left(\sum_{i=1}^{n} \left(h_i \left(\frac{-M_i - M_i^*}{M_{Hi}} \psi_{1\alpha,i} + \frac{|\psi_{1,i}|^2 - {\psi^*}_{1,i}^2}{\psi_{1H,i}^2} \psi_{1\beta,i} \right)\right)\right) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Проверка работоспособности предложенного закона управления выполнена компьютерным моделированием для взрывозащищенных асинхронных электродвигателей ДКВ355L4, работающих на один вал и управляемых при помощи одного преобразователя частоты. В результате исследований показано, что с применением закона (7.53) для многодвигательных асинхронных электроприводов с групповым подключением двигателей к преобразователю частоты можно добиться высокого качества управления суммарным моментом привода при разбросе параметров АД в широком диапазоне.

8. АСГ в задачах физики, биологии, экологии

В ряде задач управления природными системами возникает необходимость изменить интенсивность колебательных процессов с целью создать или подавить резонансные режимы. Цель управления при этом часто удобно переформулировать как управление энергией физической системы или, в более общем случае, управление инвариантом ее свободного движения. АСГ с успехом применяются в подобных ситуациях. В [173] исследуется возможность использования управления с обратной связью для изменения условий индуцированного шумом перехода в модели из двух нелинейных уравнений, описывающих работу преобразователя изображения "полупроводник–газоразрядный промежуток" в переменных E – напряженность электрического поля в разрядном промежутке устройства и N – плотность свободных носителей заряда в зазоре. Управление пропорционально напряжению источника питания. В качестве целевой функции берется квадратичная форма отклонения состояния системы от неустойчивого равновесия, а для управления используется АСГ в конечной форме. Путем компьютерного моделирования установлено, что достаточно слабое управление позволяет существенно снизить возможность индуцированного шумом перехода , выводящего систему из области нормального функционирования.

Аналогичные задачи возникают при управлении экологическими системами, где требуется отдалить осциллирующую траекторию от области, где возможно вырождение популяции за счет исчезновения одного или нескольких видов. Решение подобных задач облегчается, если у свободной системы (при отсутствии управления) имеется инвариант – функция состояния системы, остающаяся постоянной вдоль движений свободной системы. Достаточно широкий класс моделей таких систем может быть сведен к многовидовой системе Лотки–Вольтерра, управление которой СГ-методом рассматривалось в [174]. Система описывается уравнениями

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= x_i(t)\left(S_i + \sum_{j=1}^{m} M_{ij}x_j(t)\right), \quad i = 1, \ldots, l_*, \\
\dot{x}_l &= x_l(t)\left(S_l + \sum_{j=1}^{m} M_{lj}x_j(t) + u_l(t)\right), \quad l = l_*, \ldots, m,
\end{aligned}
\right.
\tag{8.1}
$$

где x_i – переменные состояния, u_i – управляющие воздействия, S_i, M_{ij} – параметры системы (считается, что имеется $m - l_*$ управляющих воздействий и они прилагаются к последним $m - l_*$ уравнениям системы. Известно, что если у системы (8.1) при $u_i = 0$ существует равновесие $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)^{\mathrm{T}}$ в положительном ортанте:

$$x_i^* = n_i > 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{8.2}$$

то при выполнении условий

$$M_{ii} = 0, \quad M_{ij} = -M_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, m \tag{8.3}$$

функция

$$V_{qp}(x) = \sum_{i=1}^{m} n_i \left(\frac{x_i}{n_i} - \log \frac{x_i}{n_i} \right) \tag{8.4}$$

является инвариантом системы (8.1) при $u_l = 0$, $l = l_* + 1, \ldots, m$, $l_* \geqslant 1$.

В [174] предложено брать в качестве цели управления достижение заданной величины V_{qp}^*, т.е.

$$V_{qp}(x(t)) \to V_{qp}^* \ \text{ при } \ t \to \infty. \tag{8.5}$$

Задавая V_{qp}^*, можно увеличивать или уменьшать желаемый размах колебаний. Выбираем целевую функцию $Q(x)$:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \left(V_{qp}(x) - V_{qp}^* \right)^2. \tag{8.6}$$

Получаем АСГ в конечной форме

$$u_l(t) = -\gamma_l \left(V_{qp}(x) - V_{qp}^* \right) \left(x_l(t) - n_l \right), \tag{8.7}$$

где $\gamma_l > 0$, $l = l_*, \ldots, m$, $l_* \geqslant 1$ – коэффициенты усиления. В [174] показано, что такой АСГ обеспечивает достижение цели.

В [175] метод СГ применен к назначению лечения синдрома поликистозных яичников (СПКЯ) (*синдром Штейна–Левенталя*) – одной из типичных причин бесплодия, которым страдают около 10% женщин репродуктивного возраста. Назначение лечения основано на использовании математической модели, предложенной в [176] и представляющей собой систему из 13 нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Переменными состояния являются концентрации гормонов в гипофизе, в крови, массы фолликулярной ткани в фазе роста, масса лютеинизирующих фолликулов, масса лютеиновой ткани, обусловленной фазой роста, концентрации эстрадиола, прогестерона и ингибина. Для определения нужного количества лекарства в [175] применен АСГ в интегральной форме на основе локального целевого функционала в виде квадрата нормы разности переменных состояния пациентки и здоровой женщины. Поскольку не все нужные переменные измеряются, строится наблюдатель состояния, использующий операцию приближенного дифференцирования.

Управление энергией на микроуровне при помощи АСГ было предложено в качестве способа управления диссоциацией и изомеризацией молекулярных систем [177–179]. В [177] изучается проблема управления изомеризацией в классических ансамблях малых многоатомных нежестких молекул на примере системы LiNC/LiCN. Описаны и численно проанализированы два метода управления изомеризацией в классическом ансамбле молекулярной системы LiNC/LiCN, основанные на управлении полной энергией и изменении профиля минимальной энергии для определенной "репрезентативной" молекулы. Оба алгоритма управления разработаны с использованием принципа СГ. Показано, что разработанные алгоритмы управления достаточно эффективны (примерно в два раза эффективнее, чем интенсивный равновесный нагрев).

В [180] метод скоростного градиента применен к синтезу управления наблюдаемыми в конечно-уровневых квантово-механических системах. Показано, что при выполнении условий типа невырожденности цель управления достигается, если между начальным и целевым значениями наблюдаемой нет ее собственных чисел. Показано, что погрешность достижения цели управления пропорциональна погрешности задания начального состояния системы и погрешности реализации управляющего воздействия. Представлены численные результаты для задачи управления предиссоциацией молекулы фторводорода (HF). В [181] предложена версия АСГ в комплексном пространстве с ограничениями, которая была применена к синтезу алгоритмов селективного управления наблюдаемыми квантово-механических систем. Показана возможность достижения заданных значений энергии системы при ограничениях на энергию подсистем и показано, что погрешность достижения цели управления пропорциональна погрешности задания начального состояния системы и погрешности реализации управляющего воздействия. Представлены численные результаты для задачи селективного управления энергией молекул водорода (H_2) с разными изотопами.

Алгоритм расчета классического внешнего поля для эффективного управления состоянием кубита с обратной связью получен в [182]. Подход иллюстрируется двухуровневой атомной системой (с распадом), управляемой классическим оптическим полем. Аналитически и с помощью моделирования показано, что предложенный метод позволяет достичь желаемого состояния, выраженного как разность диагональных элементов матрицы плотности. В [183] продемонстрирована возможность применения этого подхода к защите запутанности (*entaglement*) от декогеренции в системе из двух кубитов при наличии шума в квантовом канале связи. АСГ для перевода энергии в двухуровневой квантовой системе на заданный уровень с использованием в качестве управления спектральной плотности некогерентных фотонов предложен в [184]. В [185] дается общая формулировка метода скоростного градиента для задачи генерации унитарных процессов в n-уровневых квантовых системах, изолированных от окружения, и анализируется условие стабилизируемости для АСГ в дифференциальной форме. Показано, что условие достижимости в дифференциальной форме в этой задаче не выполняется, и делается вывод о целесообразности исследования возможности применения АСГ в конечной форме. Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и в задаче управления энергией в классических гамильтоновых системах.

9. Метод СГ в задачах управления распределенными системами

В цикле работ [186–191] СГ метод применен для задач управления волновыми процессами в системах с распределенными параметрами. Целевые функции взяты как меры отклонения движений системы от локализованных волн постоянной формы и скорости, которые поддерживают заданный уровень энергии системы и соответствуют ее динамическому равновесному состоянию. Разработаны АСГ распределенного управления с обратной связью для локализации решений уравнения синус-Гордона в виде бризера и волны огибающей. Во всех случаях достигнуто решение требуемой формы и скорости. Показано, что АСГ могут также обеспечить распространение требуемых волн только в одном направлении. Исследовано поведение АСГ для разных значений параметров начальных условий и показано, что алгоритм при этом работает устойчиво.

9.1. АСГ локализации нелинейных волновых процессов

Более подробно приведем результаты [188] по построению АСГ для локализации нелинейных волновых процессов.

В [188] рассматривается одномерная цепочка, описываемая уравнением синус-Гордона

$$x_{tt}(r,t) - x_{rr}(r,t) + \sin x(r,t) + u(r,t) = 0, \tag{9.1}$$

которое модифицировано введением распределенного управления $u(r,t)$.

В цепочке (9.1) требуется получить желаемую бегущую волну $x^*(r,t)$ в виде “антикинка”, заданную уравнением

$$\begin{aligned} x^*(r,t) = \pi\bigl(1 - \tanh\bigl(k(r-Wt)\bigr)\bigr) + A\,\mathrm{sech}^2\bigl(k(r-Wt-r_1)\bigr) - \\ - B\,\mathrm{sech}^2\bigl(k(r-Wt-r_2)\bigr), \end{aligned} \tag{9.2}$$

где k, r_1, r_2, r_1, r_2 – начальные фазы, W – фазовая скорость. В отсутствие управления (т.е. при $u \equiv 0$) процесс (9.2) не соответствует никакому аналитическому решению уравнения (9.1).

Начальные условия в (9.1) взяты в виде

$$\begin{aligned} x(r,0) &= 4\arctan\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}(r-r_0)\right)\right), \\ x_t(r,0) &= \frac{2V\ \mathrm{sech}\left(\frac{r-r_0}{\sqrt{1-V^2}}\right)}{\sqrt{1-V^2}}. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Вводится следующая цель управления:

$$e(r,t) = x(r,t) - x^*(r,t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{9.4}$$

Для применения СГ-метода в [188] используется локальный целевой функционал

$$Q(u) = \frac{1}{2}\big(\tau e_t(r,t) + e(r,t)\big)^2, \tag{9.5}$$

в котором параметр $\tau > 0$ служит для задания желаемой скорости убывания рассогласования $e(r,t)$ во времени. Действуя далее по схеме СГ, запишем:

$$Q_t = (\tau e_t + e)\big(\tau(x_{rr} - \sin x - u) + \ldots\big), \tag{9.6}$$

где $\ldots$ обозначает не зависящие от u слагаемые. Вычисляя согласно СГ методу функцию $w(r,t) = \frac{\partial Q_t(u)}{\partial u}$, получим АСГ вида

$$u(r,t) = \gamma\big(\tau e_t(r,t) + e(r,t)\big), \tag{9.7}$$

в котором параметр $\gamma > 0$ – коэффициент усиления алгоритма.

Численные исследования в [188] выполнены при $V = 0{,}95$, $k = 0{,}5$, $A = 3$, $B = 1{,}5$, $r_0 = 0$, $r_1 = -1$, $r_2 = 2$, $W = 1{,}1$, $\gamma = 40$, $\tau = 1{,}25$. Как показывают результаты моделирования, по истечении некоторого времени, цель управления (9.2) выполняется, а управляющее воздействие затухает.

9.2. Управление энергией одномерной распределенной цепочки с помощью АСГ в скользящем режиме

Применение метода СГ для управления энергией и оценивания состояния распределенных одномерных цепочек показано в [192–195] (управление и оценивание через граничные условия) и [196–198] (управление, распределенное по пространственной координате). В отличие от большинства имеющихся публикаций в этих работах ставится цель управления, направленная не только на снижение, но и на увеличение энергии объекта управления, что имеет важное значение для вибрационных технологий, генерирования волновых колебаний в радиолокационных и лазерных системах и в других приложениях [74, 145, 199]. Рассмотрим некоторые результаты подробнее.

Управление и оценивание через граничные условия. Задача граничного управления энергией для класса полулинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных изучается в [193], где приводится ее решение на основе гладкого и разрывного АСГ для нелинейной системы Клейна–Гордона.

Рассмотрена одномерная цепочка, описываемая нелинейным уравнением Клейна–Гордона с указанными начальными и граничными условиями

$$x_{tt}(t,r) - kx_{rr}(t,r) + \Pi'\big(x(t,r)\big) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad r \in [0,1], \tag{9.8}$$

$$x(0,r) = x^0(r), \quad x_t(0,r) = x^1(r), \tag{9.9}$$

$$x(t,0) = 0, \quad x_r(t,1) = u(t), \tag{9.10}$$

$$y(t) = \big(x_t(t,1), H\big(x(t)\big)\big)\,,$$

где $\Pi \in C^1(\mathbb{R})$ – неотрицательная функция, $k > 0$ – заданный параметр, $u(t)$ – управляющий вход, $y(t)$ – выход, x^0, $x^1 : [0,1] \to R$ – заданные функции и

$$H(x) = \int_0^1 \left(\frac{x_t^2}{2} + k\frac{x_r^2}{2} + \Pi(x) \right) \mathrm{d}r \tag{9.11}$$

– гамильтониан уравнения (9.8), который рассматривается как энергия системы (9.8) в момент времени t.

Ставится задача нахождения закона управления $u(t)$, обеспечивающего выполнение цели управления

$$H\big(x(t)\big) \to H^*, \tag{9.12}$$

где $x(t)$ – решение (9.8)–(9.10), $H^* \geqslant 0$ – заданное значение.

Синтез управления выполняется по методу СГ. Для этого вводится целевая функция

$$Q_1\big(x(t)\big) = \frac{1}{2}\Big(H\big(x(t)\big) - H^*\Big)^2$$

как мера разности между текущим и заданным значениями энергии. Дифференцируя $Q_1\big(x(t)\big)$ по времени вдоль решений (9.8)–(9.10), получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_1\big(x(t)\big) = \Big(H\big(x(t)\big) - H^*\Big)\int_0^1 \big(x_t x_{tt} + kx_r x_{rt} + \Pi'(x)x_t\big)\mathrm{d}r.$$

Подстановкой $x_{tt} = kx_{rr}(t,r) - \Pi'\big(x(t,r)\big)$ (согласно (9.8)), интегрированием слагаемого $x_r x_{rt}$ по частям и с учетом того, что из (9.9) следует $x_t(t,0) = 0$, получим

$$w(t,u) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_1\big(x(t)\big) = \Big(H\big(x(t)\big) - H^*\Big)ku(t)x_t(t,1).$$

Метод СГ приводит к закону управления

$$u(t) = -\gamma\psi\Big(H\big(x(t)\big) - H^*\Big)x_t(t,1), \tag{9.13}$$

где $\gamma > 0$ – скалярный коэффициент усиления, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функция, удовлетворяющая условию псевдоградиентности $\psi(s)s > 0$ для всех $s \neq 0$ и $\psi(0) = 0$ (см. (2.7)). При $\psi(s) = \operatorname{sign}(s)$ получается разрывный (“релейный”) закон управления

$$u(t) = -\gamma \operatorname{sign}\Big(H\big(x(t)\big) - H^*\Big)x_t(t,1), \tag{9.14}$$

который соответствует целевой функции $Q_2\big(x(t)\big) = |H\big(x(t)\big) - H^*|$.

В [193] показано, что при $H(0) > 0$ разрывный АСГ (9.14) приводит систему к любому заранее заданному ненулевому уровню энергии за конечное время, в то время как гладкий (непрерывный) АСГ обеспечивает только асимптотическую сходимость. В статье приводятся результаты моделирования системы (9.8)–(9.10), (9.13) с $\psi(s) = s$, $\Pi(x) = \beta x^{2\kappa}$, $\beta = 0{,}2$, $\kappa = 2$, $k = 0{,}12$, $\gamma = 0{,}25$, $x^0(r) = \mu\big(1 - \cos(2\pi r)\big)$, $x^1(r) \equiv 0$ для $\mu = 0{,}05$ и $\mu = 2{,}5$, $H^* = 5$ и $H^* = 20$, согласующиеся с теоретическими выводами.

Исследование наблюдателя типа Луенбергера (*Luenberger*) для распределенной одномерной цепочки синус-Гордона выполнено в [195], где получены явные ограничения на параметры системы, обеспечивающие экспоненциальное затухание ошибки оценивания. В основу синтеза наблюдателя положен метод СГ.

Рассматривается следующее уравнение синус-Гордона:

$$x_{tt}(t,r) - kx_{rr}(t,r) + \beta\sin x(t,r) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad r \in [0,1], \tag{9.15}$$

$$x(0,r) = x^0(r), \quad x_t(0,r) = x^1(r), \tag{9.16}$$

$$x(t,0) = 0, \quad x_r(t,1) = u(t), \tag{9.17}$$

$$y(t) = x_t(t,1), \tag{9.18}$$

где $k > 0$, β – заданные параметры; $u(t)$ – управляющий вход; $y(t)$ – измеряемый выход; x^0, $x^1 : [0,1] \to R$ – заданные функции.

Синтез наблюдателя состояния для системы (9.15)–(9.18) выполняется в [195] при предположении, что измеряется только переменная $y(t) = x_t(t,1)$ (а также известен сигнал управления $u(t)$, который вырабатывается регулятором). По аналогии с [200, 201] вводится следующий наблюдатель состояния луенбергерского типа:

$$\widehat{x}_{tt}(t,r) - k\widehat{x}_{rr}(t,r) + \beta\sin\widehat{x}(t,r) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad r \in [0,1], \tag{9.19}$$

$$\widehat{x}(0,r) = \widehat{x}^0(r), \quad \widehat{x}_t(0,r) = \widehat{x}^1(r), \tag{9.20}$$

$$\widehat{x}(t,0) = 0, \quad \widehat{x}_r(t,1) = u(t) + \alpha\big(y(t) - \widehat{x}_t(t,1)\big), \tag{9.21}$$

где $\widehat{x}(t,r)$ служит оценкой состояния $x(t,r)$ системы (9.15), $\alpha > 0$ – выбираемый при синтезе коэффициент усиления.

Обоснование сходимости процесса наблюдения выполнено в [195] с использованием СГ метода. Для этого вводится ошибка оценивания $e(t,r) = x(t,r) - \widehat{x}(t,r)$ и квадратичный ("энергетический") целевой функционал $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e_t^2 + ke_r^2\right) \mathrm{d}r$. Решена задача нахождения параметров k, β, α наблюдателя (9.19)–(9.21), гарантирующих экспоненциальное убывание $E(t)$.

С использованием наблюдателя (9.19)–(9.21) для управления энергией системы синус-Гордона по измеряемому выходу цепочки методом СГ находится обратная связь, имеющая вид

$$u(t) = -\gamma\psi\Big(H\big(\widehat{x}(t)\big) - H^*\Big)\, y(t). \tag{9.22}$$

В [195] показано, что время переходного процесса по энергии близко к времени процесса по ошибке наблюдения, тем самым основную роль в переходном режиме играет процесс оцеивания состояния. Также показано, что условия, налагаемые на коэффициент усиления наблюдателя, достаточные для сходимости ошибки оценки состояния, "почти" необходимы в том смысле, что нарушение этих условий делает переходные процессы ошибки оценки состояния слишком затянутыми.

Управление, распределенное по пространственной координате. Следуя [202], рассмотрим задачу управления энергией цепочки, заданной волновым уравнением

$$x_{tt}(r,t) = x_{rr}(r,t) - \rho x_t(r,t) + u(r,t), \tag{9.23}$$

где $x = x(r,t)$ – состояние объекта; t – время; $r \in (0,1)$ – пространственная переменная; $u(r,t)$ – распределенное по пространству управление; $\rho \geqslant 0$ – параметр диссипации. Заданы следующие граничные условия Дирихле: $x(0,t) = 0$, $x(1,t) = 0$.

Полная энергия цепочки находится из выражения

$$E(x_r, x_t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \Big((x_t)^2 + (x_r)^2\Big)\,\mathrm{d}r. \tag{9.24}$$

Ставится задача управления энергией – обеспечение предельного соотношения

$$\lim_{t\to\infty} E(x_r(t), x_t(t)) = E^* \tag{9.25}$$

при заданном постоянном значении энергии $E^* \geqslant 0$.

Выведем АСГ, решающий поставленную задачу. Введем целевую функцию (согласно СГ-методу – "локальный целевой функционал")

$$V(t) = \frac{1}{2}\big(E(x_r, x_t) - E^*\big)^2. \tag{9.26}$$

Вычислим производную от целевой функции (9.26) по времени в силу системы. Получим

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \dot V = \big(E(x_r, x_t) - E^*\big)\int\limits_0^1 (u_\gamma - \rho x_t)x_t\,\mathrm{d}u. \tag{9.27}$$

Выберем функцию $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, удовлетворяющую условию псевдоградиентности $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\nabla_u w(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqslant 0$ в виде (2.9), т.е. примем $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \gamma x_t \operatorname{sign}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Отсюда следует АСГ в релейной форме

$$u(x_r, x_t) = -\gamma x_t \operatorname{sign}\big(E(x_r, x_t) - E^*\big). \tag{9.28}$$

Проверим выполнение условия достижимости (2.10). Поскольку

$$\dot{V} \leqslant -(\gamma-\rho) \times \big|E(x_r(t), x_t(t)) - E^*\big| \int\limits_0^1 {x_t}^2\, dr \leqslant 0,$$

то при $\gamma > \rho$ энергия $E(x_r(t), x_t(t))$ под управлением предложенного алгоритма стремится к E^* и, следовательно, цель управления достигается.

В [202] проведено моделирование процесса управления энергией при значениях параметров $\rho = 1$, $\gamma = 10$, $E^* = 10$ и начальном состоянии $x(r, 0) = A\big(1-\cos(2\pi r)\big)^7$, $x_t(r, 0) = 0$, демонстрирующее достижение поставленной цели как для случая $A = 10^{-3}$ (начальная энергия меньше заданной), так и для $A = 0{,}02$ (начальная энергия больше заданной).

Работа [197] посвящена численной оценке эффективности алгоритмов СГ, разработанных в [196, 202] для управления энергией пространственно-распределенных систем синус-Гордона с несколькими внутренними параметрами и доменными приводами. Влияние квантования по уровню сигнала управления с обратной связью по состоянию (возможно, связанного с временно́й дискретизацией) на установившуюся ошибку энергии и устойчивость замкнутой системы исследуются путем моделирования. Учитываются следующие типы квантования: квантование сигнала управления по времени дискретизации, квантование уровня для управления, непрерывное во времени; квантование сигнала управления по уровню совместно с временно́й дискретизацией; передача управляющего сигнала по двоичному каналу связи с инвариантным во времени кодером первого порядка; передача сигнала управления по двоичному каналу связи с кодером первого порядка и масштабированием по времени; передача управляющего сигнала по двоичному каналу связи с адаптивным кодером первого порядка.

10. Принцип скоростного градиента в динамике физических процессов

В монографии [25] предложено использовать метод СГ для вывода законов динамики физических систем. Оказывается, известные и новые уравнения движения ряда физических систем могут быть выведены как АСГ при соответствующем выборе структуры уравнения объекта и целевой функции. В физике подобные постановки рассматриваются на основе вариационных принципов построения моделей систем. По аналогии можно сформулировать “Вариационный принцип скоростного градиента” (ВПСГ): среди всех возможных движений в системе реализуются лишь те, для которых входные переменные изменяются пропорционально скоростному градиенту от некоторого “целевого” функционала Q_t.

Как показано в [25], применяя ВПСГ, можно получить ряд классических уравнений механики и физики. Кроме того, принцип позволяет получить законы динамики для новых задач, некоторые из которых перечислены ниже. В [203] предложено применять ВПСГ для построения моделей и предсказания переходных процессов в системах, установившееся движение которых подчиняется принципу максимума энтропии (принципу Гиббса–Джейнса). Вычислительный эксперимент по проверке ВПСГ на примере прогнозирования с его помощью динамики процессов в методе частиц описан в [204].

Новая концепция высокоскоростных процессов в твердых телах разработана в [205, 206] с использованием нелокальной теории неравновесного переноса и метода скоростного градиента. В разработанной теории общая интегральная зависимость напряжения от деформации в зависимости от скорости деформации и длительности внешнего импульса описывает как реакцию упругой среды на внешнюю нагрузку, так и переход к пластическому течению. Модель показывает разницу между ударным нагружением и непрерывным, которая растет с увеличением скорости нагружения. Построенная на интегральном соотношении модель упруго-пластической ударной волны, изменяющей свою форму при распространении вдоль материала, способна описать весь комплекс экспериментально наблюдаемых закономерностей, которые не могут быть объяснены в рамках традиционной механики сплошных сред.

В [207–209] предложены новые уравнения, описывающие динамику нестационарных процессов максимизации и минимизации различных энтропийных функционалов: энтропий Шеннона, Цаллиса, Реньи, относительной энтропии Кульбака–Лейблера (*Kullback–Liebler*), Бурга (*Burg*), энтропии Кресси–Рида (*Cressie–Read*) и других. Исследуются единственность и устойчивость предельного распределения вероятностей при ограничениях сохранения массы и энергии. Предлагаемые уравнения позволяют просто прогнозировать динамику сложных неравновесных систем.

Применение СГ принципа к неравновесным распределенным системам вдали от термодинамического равновесия исследовано в [21]. Обсуждаются варианты применения принципа СГ для описания процессов неравновесного переноса в реальных средах. Исследование эволюции неравновесной системы на различных масштабных уровнях с помощью принципа СГ позволяет по-новому взглянуть на проблемы термодинамики, связанные с поведением энтропии системы. Предлагаются обобщенные динамические уравнения для конечного и бесконечного числа ограничений. Показано, что стационарное решение уравнений, вытекающее из принципа СГ, полностью совпадает с локально равновесной функцией распределения, полученной Д.Н. Зубаревым [210]. Предлагается новый подход к описанию временной эволюции систем, далеких от равновесия, основанный на применении принципа СГ на промежуточном масштабном уровне внутренней структуры системы. Обсуждается проблема высокоскоростного сдвигового течения вязкой жидкости вблизи жесткой плоской пластины. Показано, что принцип СГ позволяет строить замкнутые математические модели неравновесных процессов.

В [211] исследуется взаимосвязь между структурой GENERIC (общее уравнение для неравновесной обратимо-необратимой связи, англ. – *general equation for the quilibrium reversible-irreversible coupling*), возникшей в неравновесной термодинамике, и принципом СГ. GENERIC известен как общая структура для различных уравнений эволюции во времени для неравновесных систем. Рассмотрены несколько примеров применения СГ-принципа и показано его соответствие рамкам GENERIC. Результат [211] также может быть использован для демонстрации того, как соотносятся уравнения Фоккера–Планка и принцип СГ. Развитый подход распространен на квантовомеханические системы применительно к задаче максимизации энтропии фон Неймана [212].

11. Модификации и обобщения АСГ

11.1. Модификации АСГ

За полвека существования АСГ подвергались различным модификациям и обобщениям. В [213] предложена версия АСГ для систем с запаздыванием. Для постановки задачи и для доказательства используются функционалы Ляпунова–Красовского. Например, в задаче адаптивной стабилизации линейного объекта с запаздыванием по состоянию для синтеза алгоритма адаптации используется функционал

$$J\big(x_t(s)\big) = 0{,}5\left(x^{\mathrm{T}}Hx + \int\limits_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Kx(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

где $x_t(s) = \{x(t+s)\}$, $s \in [t-\tau, t]$, τ – запаздывание, H, K – положительно определенные матрицы. При этом алгоритм адаптации имеет тот же вид, что и для систем без запаздывания.

В [18] предложены алгоритмы, названные "алгоритмами скоростной разности" (АСР), позволяющие ослабить обычное для АСГ условие выпуклости. В [18] доказан следующий результат.

Пусть объект управления описывается уравнениями

$$\dot{x} = F(x, v, t), \tag{11.1}$$

$$\dot{v} = \Phi(x, v, t), \tag{11.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^N$, u, v – скаляры, $t \geqslant 0$. Пусть для нее выполнены стандартные условия применимости АСГ, см. раздел 2.1 и [18, 25]. Тогда алгоритм управления

$$u = u(x, v, t) = \tag{11.3}$$

$$= \begin{cases} \Psi\big(x, v, -\gamma_0(v - U_*(x,t))\big) - \gamma_1 \dfrac{\partial_0 Q(x,v,t) - \partial_0 Q(x, U_*, t)}{v - U_*} + \partial_0 U_*(x,v,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad v \neq U_*, \\ \Psi\big(x, v, -\gamma_0(v - U_*(x,t))\big) - \gamma_1 \dfrac{\partial}{\partial v}\big(\partial_0 Q(x, U_*, t)\big) + \partial_0 U_*(x,v,t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad v = U_*, \end{cases}$$

где $\partial_0 U_*(x,v,t) = \partial/\partial t\big(U_*(x,t)\big) + \partial/\partial x\big(U_*(x,t)\big)F(x,v,t)$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, обеспечивает ограниченность траекторий системы (11.1), (11.2) и достижение целей управления $Q\big(x(t),t\big) \to 0$, $v(t) - U_*\big(x(t),t\big) \to 0$.

Предложены также схемы итеративного синтеза алгоритмов управления, для АСГ и для АСР, аналогичные известным схемам бэкстеппинга [14]. В книге [25] представлены обобщения АСГ на объекты управления, описываемые неявно заданными уравнениями $F(x, \dot{x}, \theta, t)$, объекты, заданные дифференциально-алгебраическими уравнениями, а также стохастические объекты, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Рассмотрены АСГ с коэффициентом усиления, зависящим от времени и от состояния объекта, в частности АСГ с $\Gamma(t)$, изменяющимся по алгоритмам, аналогичным алгоритму фильтра Калмана.

11.2. Дискретизация АСГ

Цифровая (компьютерная) реализация алгоритмов управления ставит вопрос о сохранении свойств непрерывной динамической системы при дискретном (sampled data) алгоритме управления. Вопросы дискретизации линейных и нелинейных систем рассматривались во многих работах. Применительно к алгоритмам скоростного градиента сошлемся на результат, сформулированный в [25, теорема 5.5]. Пусть объект

$$\dot{x} = F(x, \theta, t) + f(t), \tag{11.4}$$

где $f(t)$ – ограниченное возмущение, управляется дискретизованным регуляризованным АСГ

$$\begin{aligned} &\theta(t) = \theta(t_k) \quad \text{при} \quad \theta(t_k) \leqslant \theta(t) < \theta(t_{k+1}), \\ &\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) - \gamma_k\Big(\gamma \nabla_\theta w\big(x(t_k), \theta(t_k)\big) - \alpha\big(\theta(t_k) - \bar{\theta}\big)\Big). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Если система (11.4), управляемая непрерывным алгоритмом скоростного градиента

$$\dot{\theta}(t) = \gamma \nabla_\theta w\big(x(t), \theta(t)\big) - \alpha\big(\theta(t) - \bar{\theta}\big) \tag{11.6}$$

экспоненциально диссипативна, то при дискретизации алгоритма управления с достаточно малыми шагами γ_k система сохраняет предельную диссипативность при $\gamma_k \to 0$ и оценка предельного множества приближается к оценке предельного множества для непрерывной системы. В [25] предложена и дискретизованная версия АСГ с зоной нечувствительности [25, теорема 5.6]. В этом случае условие экспоненциальной диссипативности не выполняется, применимость АСГ обеспечивается введением в алгоритм “памяти”, предотвращающей возникновение нежелательных скользящих режимов.

11.3. Неевклидовы алгоритмы скоростного градиента

Идея связать переменность матрицы коэффициентов усиления в АСГ с переменностью метрики в пространстве состояний объекта или в пространстве настраиваемых параметров (управлений) имеет далеко идущее развитие. По-видимому, впервые она возникла в [25, Приложение 4], где введена функция Ляпунова

$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + 0{,}5(\theta-\theta_*)^{\mathrm{T}} R(x,t)(\theta-\theta_*). \tag{11.7}$$

Метрическая матрица $R(x,t)$ в (11.7) симметрична, положительно определена и определяет вид расширенного "неевклидова" АСГ

$$R(x,t)\ddot{\theta} = -\nabla\dot{Q} - \dot{R}(\theta-\theta_*), \tag{11.8}$$

где $\dot{R} = \partial R(x,t)/\partial t + \partial R(x,t)/\partial x F(x,\theta,t)$.

В работе Н. Боффи и Ж.Ж. Слотина [214] получен целый ряд новых "неевклидовых" алгоритмов управления, оценивания, адаптации, обучения на основе функций Ляпунова, в которых используется так называемая дивергенция Брэгмана [215], введенная Л.М. Брэгманом в 1967 г. и получившая в последние годы многочисленные применения в различных областях прикладной математики. По заданной гладкой функции $\varphi(\theta)$ дивергенция Брегмана $d_\varphi(\theta_*|\theta)$ определяется следующим образом:

$$d_\varphi(\theta_*|\theta) = \varphi(\theta_*) - \varphi(\theta) - \big(\nabla\varphi(\theta)\big)^{\mathrm{T}}(\theta_*-\theta). \tag{11.9}$$

Для строго выпуклых функций $\varphi(\theta)$ дивергенция $d_\varphi(\theta_*|\theta)$ также строго выпукла и $d_\varphi(\theta_*|\theta) > 0$ при $\theta \neq \theta_*$. Дивергенция от положительно определенной квадратичной формы совпадает с ней самой.

В [214] новые алгоритмы типа АСГ строятся на основе замены стандартной функции Ляпунова

$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + 0{,}5(\theta-\theta_*)^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}(\theta-\theta_*), \tag{11.10}$$

используемой для обоснования АСГ в дифференциальной форме (2.14), на функцию

$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + d_\varphi(\theta_*|\theta). \tag{11.11}$$

Стандартные вычисления приводят к алгоритму управления/адаптации вида

$$\dot{\theta} = -\big(\nabla^2\varphi\big)^{-1}\nabla_\theta\dot{Q}. \tag{11.12}$$

Выбор неквадратичных функций $\phi(\theta)$ открывает новые возможности для модификаций и обобщения АСГ, соответствующие введению в пространстве управлений или настраиваемых параметров неевклидовой (римановой) метрики. Например, функцию $\varphi(\theta)$ можно рассматривать как барьерную функцию, ограничивающую траектории в пространстве настраиваемых параметров, и выбирать ее по заданному множеству Θ допустимых значений θ, чтобы исключить сложнореализуемое проектирование на Θ.

Новый класс алгоритмов — это конечно-дифференциальные неевклидовы АСГ

$$\frac{d}{dt}\big(\theta + \psi(x,t)\big) = -\big(\nabla^2\varphi(\theta)\big)^{-1}\nabla_\theta \dot{Q} \tag{11.13}$$

для заданной ограниченной вектор-функции $\psi(x,t)$. Для их обоснования используется функция Ляпунова

$$V(x,\theta,t) = Q(x,t) + d_\varphi(\theta_*|\theta - \psi(x,t)). \tag{11.14}$$

Новый, расширенный класс функций Ляпунова можно назвать функциями Ляпунова–Брэгмана. В [214] рассмотрены расширения АСГ, получающиеся при включении в функцию Ляпунова дивергенций от различных функций, приводящие к новым классам алгоритмов, в том числе высших порядков.

11.4. АСГ для нелинейно параметризованных систем

Начиная с самых первых результатов [7, 24] условия применимости АСГ допускали нелинейную параметризацию объекта управления, иногда встречающуюся в приложениях. При этом требовалась выпуклость по θ скорости изменения целевой функции $w(x,\theta,t)$. В дальнейшем эти результаты были расширены [216–218] для различных классов нелинейно параметризованных систем адаптивного управлении. Были разработаны различные модификации для случаев выпуклой и вогнутой параметризации. В работах [127, 129] и др. развит метод "погружения и инвариантности" (*Immersion&Invariance*, I&I), в рамках которого глобальная сходимость устанавливается при выполнении некоторого условия типа монотонности. В [219] на основе аналогичного подхода решается задача идентификации системы. В [220] вводится условие монотонности, которое по существу идентично условиям, необходимым для обучения обобщенных линейных моделей в машинном обучении и статистике, и позволяет разработать устойчивые алгоритмы адаптивного управления для нелинейно параметризованных систем в этих условиях. Эти результаты можно обобщить и далее на основе функций Ляпунова–Брэгмана. Подобные обобщения подробно рассмотрены в [214, 221, 222], где получаемые алгоритмы названы "естественными" (*natural*) алгоритмами адаптации.

12. Заключение

В статье представлены основные положения и результаты применения метода скоростного градиента. Показано, что это полезный и эффективный инструмент для решения широкого спектра инженерных задач, подтверждающий, что он «обеспечивает прозрачный компромисс между характеристиками управления и проектными параметрами» [17]. На протяжении более чем 40 лет существования СГ-метод используется многими авторами, которые применяют его для решения широкого круга задач в различных областях. В течение последнего десятилетия возрос интерес к методу скоростного градиента и как к эффективному инструменту для понимания законов природы, таких как динамика экологических систем или фундаментальные законы физики. Недавние исследования [214] показывают, что метод может служить мостиком между теорией управления и областью машинного обучения, вскрывающим общность многих подходов в этих областях. Однако есть и недостаточно изученные вопросы, такие как сходимость АСГ при наличии ограничений и при вырождении условия достижимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах // АиТ. 1966. № 1. С. 23–61.
2. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
3. *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д.* Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем. М.: Машиностроение, 1972.
4. *Lindorff D.P., Carroll R.L.* Survey of Adaptive Control Using Liapunov Design // Int. J. Control. 1973. No. 5. P. 897–914.
5. *Landau I.D.* A Survey of Model Reference Adaptive Techniques – Theory and Applications // Automatica. 1974. Jan. Vol. 10. No. 4. P. 353–379.
6. *Asher R., Andrisani D., Dorato P.* Bibliography on Adaptive Control Systems // Proc. IEEE. 1976. Aug. Vol. 64. No. 8. P. 1226–1240.
7. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АиТ. 1979. № 9. С. 90–101.

   Fradkov A.L. A Scheme of Speed Gradient and its Application in Problems of Adaptive Control // Autom. Remote Control. 1980. Vol. 40. No. 9. P. 1333–1342.
8. *Андриевский Б.Р., Стоцкий А.А., Фрадков А.Л.* Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации // АиТ. 1988. № 12. С. 3–39.

   Andriievskii B.R., Stotskii A.A. Fradkov A.L. Velocity Gradient Algorithms in Control and Adaptation // Autom. Remote Control. 1988. Vol. 49. No. 12. P. 1533–1564.
9. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Сб. тр. 9-й Всесоюзной школы-семинара по адаптивным системам. Алма-Ата: КазПТИ, 1979. С. 139–143.
10. *Неймарк Ю.И.* Автоматные модели управления и адаптации // Сб. тр. 9-й Всесоюзной школы-семинара по адаптивным систмам. Алма-Ата: КазПТИ, 1979. С. 107–110.
11. *Красовский А.А.* Оптимальные алгоритмы в задаче идентификации с адаптивной моделью // АиТ. 1976. № 12. С. 75–82.

    Krasovskii A.A. Optimal Algorithms in the Problem of Identification with an Adaptive Model // Autom. Remote Control. 1976. Vol. 37. No. 12. P. 1851–1857.
12. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
13. *Jurdjevic V., Quinn J.P.* Controllability and Stability // J. Different. Equat. 1978. June. Vol. 28. No. 3. P. 381–389.
14. *Sepulchre R., Janković M., Kokotović P.V.* Constructive Nonlinear Control. New York: Springer-Verlag, 1997.

15. *Фрадков А.Л.* Методы адаптивного управления в системных исследованиях // Всесоюзная школа “Прикладные проблемы управления макросистемами”. Тезисы докладов (Всесоюзная школа “Прикладные задачи управления макросистемами”. Тезисы докладов). М.: ВНИИСИ, 1985.

16. *Фрадков А.Л.* Интегродифференцирующие алгоритмы скоростного градиента // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 4. С. 832–835.

17. *Jordán M., Bustamante J.* A Speed-Gradient Adaptive Control With State/Disturbance Observer for Autonomous Subaquatic Vehicles // Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control, CDC 2006. 2006. P. 2008–2013.

18. *Дружинина М.В., Фрадков А.Л.* Алгоритмы скоростного градиента и скоростной разности в задаче нелинейного управления: Пошаговый синтез // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1861–1867.

19. *Fradkov A.L.* Cybernetical Physics: From Control of Chaos to Quantum Control. Berlin-Heiderlberg: Springer-Verlag, 2007.

20. *Селиванов А.А.* Динамика процессов максимизации квантовой энтропии в конечноуровневых системах // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2011. Т. 44. № 4. С. 71–79.

21. *Khantuleva T., Shalymov D.* Modelling Non-Equilibrium Thermodynamic Systems from the Speed-Gradient Principle // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2017. Vol. 375. No. 2088.

22. *Khantuleva T., Shalymov D.* Evolution of Complex Equilibrium Systems Based on Extensive Statistical Mechanics // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 175–179.

23. *Plotnikov S.A., Lehnert J., Fradkov A.L., Schöll E.* Adaptive Control of Synchronization in Delay-Coupled Heterogeneous Networks of Fitzhugh-Nagumo Nodes // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26. No. 04.

24. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит-ры, 1981.

25. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит-ры, 1990.

26. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Y.* Speed-Gradient Control of Chaotic Continuous-Time Systems // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 1996. Vol. 43. No. 11. P. 907–913.

27. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Y.* Introduction to Control of Oscillations and Chaos. Singapore: World Scientific Publishers, 1998. 391 p.

28. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.

29. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке Matlab. СПб.: Наука, 1999. 467 с.

30. *Андриевский Б.Р., Бобцов А.А., Фрадков А.Л.* Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2018.

31. *Dolgopolik M., Fradkov A.L.* Nonsmooth and Discontinuous Speed-Gradient Algorithms // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2017. Vol. 25. P. 99–113.

32. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат лит-ры, 1983.

33. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.

34. *Dolgopolik M., Fradkov A.L.* Speed-Gradient Control of the Brockett Integrator // SIAM J. Control Optim. 2016. Vol. 54. No. 4. P. 2116–2131.

35. *Dolgopolik M.V., Fradkov A.L.* Finite-Differential Nonsmooth Speed-Gradient Control: Stability, Passivity, Robustness // SIAM J. Control Optim. 2021. (in press).
36. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Под. ред. Я.З. Цыпкина. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1999.
37. *Peaucelle D., Fradkov A.L.* Robust Adaptive L2-Gain Control of Polytopic MIMO LTI Systems – LMI results // Syst. Control. Lett. 2008. Vol. 57. P. 881–887.
38. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.* Пассивность и пассификация нелинейных систем (обзор) // АиТ. 2000. № 3. С. 3–37.

    Polushin I.G., Fradkov A.L., Khill D.D. Passivity and Passification of Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 2000. Vol. 61. No. 3. P. 355–388.
39. *Kalman R.E.* When is a Linear Control System Optimal? // Trans. ASME Ser. D: J. Basic Eng. 1964. Vol. 86. P. 1–10.
40. *Красовский А.А.* Задачи аналитического конструирования регуляторов при заданной работе управлений и управляющих сигналов // АиТ. 1969. № 7. С. 7–17.

    Krasovsky A.A. Generalization of Problem of Constructing Regulators at Set Functioning of Controls and Controlling Signals // Autom. Remote Control. 1970. Vol. 30. No. 7. P. 1023–1031.
41. *Krasovski A.A.* A New Solution to the Problem of a Control System Analytical Design // Automatica. 1971. Vol. 7. P. 45–50.
42. *Moylan P.J., Anderson B.D.O.* Nonlinear Regulator Theory and an Inverse Optimal Control Problem // IEEE Trans. Automat. Contr. 1973. Vol. 18. P. 460–465.
43. *Luo W., Chu Y.-C., Ling K.-V.* Inverse Optimal Adaptive Control for Attitude Tracking of Spacecraft // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. Vol. 50. No. 11. P. 1639–1654.
44. *Krstic M.* Inverse Optimal Adaptive Control – The Interplay Between Update Laws, Control Laws, and Lyapunov Functions // Proc. American Control Conf. 2009. P. 1250–1255.
45. *Коган М.М.* Решение некоторых обратных вариационных задач минимаксного управления нелинейными системами // АиТ. 1999. № 1. С. 9–19.

    Kogan M.M. Solution of Some Inverse Variational Problems of the Minimax Control of Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 1999. Vol. 60. No. 1. P. 6–14.
46. *Зубов В.И.* Теория оптимального управления. Л.: Судостроение, 1966.
47. *Коган М.М., Неймарк Ю.И.* Адаптивное локально-оптимальное управление // АиТ. 1987. № 8. С. 126–136.
48. *Коган М.М.* Локально-минимаксное и минимаксное управления линейными дискретными системами // АиТ. 1997. № 11. С. 33–44.

    Kogan M.M. Local Minimax and Minimax Control of Linear Discrete System// Autom. Remote Control. 1997. Vol. 58. No. 11. P. 1732–1741.
49. *Фрадков А.Л.* Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сиб. мат. журн. 1976. № 2. С. 436–446.
50. *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* О синтезе самонастраивающейся системы управления с эталонной моделью // АиТ. 1966. № 3. С. 70–77.
51. *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспоисковых самонастраивающихся систем с моделью // АиТ. 1967. Т. 28. № 6. С. 88–94.
52. *Landau Y.D.* Adaptive Control: The Model Reference Approach. New York: Marcel Dekker, 1979.

53. *Фрадков А.Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // АиТ. 1974. № 12. С. 96–103.

Fradkov A.L. Synthesis of Adaptive System of Stabilization of Linear Dynamic Plants // Autom. Remote Control. 1974. Vol. 35. No. 12. P. 1960–1966.

54. *Andrievsky B., Fradkov A.L.* Implicit Model Reference Adaptive Controller Based On Feedback Kalman-Yakubovich Lemma // Proc. IEEE Intern. Conf. on Control and Applications (CCA'94), Glasgow, UK, 24–26 Aug. 1994. Vol. 2. IEEE, 1994. P. 1171–1174.

55. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. 2006. № 11. С. 3–37.

Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Method of Passification in Adaptive Control, Estimation, and Synchronization // Autom. Remote Control. 2006. Vol. 67. No. 11. P. 1699–1731.

56. *Андриевский Б.Р., Селиванов А.А.* Новые результаты по применению метода пассификации. Обзор // АиТ. 2018. № 6. С. 3–48.

Andrievskii B.R., Selivanov A.A. New Results on the Application of the Passification Method. A Survey //Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 6. P. 957–995.

57. *Ioannou P., Kokotovic P.* Instability Analysis And Improvement of Robustness of Adaptive Control // Automatica. 1984. Vol. 20. No. 5. P. 583–594.

58. *Hsu L., Costa R.* Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using Only Input and Output Measurements: Part 1 // Int. J. Control. 1989. Vol. 49. No. 2. P. 399–416.

59. *Narendra K.S., Kudva P.* Stable Adaptive Schemes for System Identification and Control – Part I // IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. 1974. Vol. SMC-4. No. Nov. P. 542–551.

60. *Shiriaev A., Fradkov A.L.* Stabilization of Invariant Sets for Nonlinear Non-Affine Systems // Automatica. 2000. Vol. 36. No. 11. P. 1709–1715.

61. *Fradkov A.L.* A Nonlinear Philosophy for Nonlinear Systems // Proc. IEEE Conf. Decision and Control, CDC 2000. Vol. 5. 2000. P. 4397–4402.

62. *Fradkov A.L., Andrievsky B.* Singular Perturbation Analysis of Energy Control Systems // J. Vibration and Control. 2006. Vol. 12. No. 4. P. 331–353.

63. *Aracil J., Fradkov A.L., Gordillo F.* Speed-Gradient Algorithms for Underactuated Nonlinear Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2005. Vol. 16. P. 842–847.

64. *Григоренко Н.Л.* Задача управления с доминирующей неопределенностью // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 4. С. 64–72.

65. *Fradkov A.L.* Feedback Resonance in Nonlinear Oscillators // Proc. European Control Conf., ECC 1999. 2015. P. 3599–3604.

66. *Polushin I., Fradkov A.L., Putov V., Rogov K.* Energy Control of One-Degree-Of-Freedom Oscillators in Presence of Bounded Force Disturbances // Proc. European Control Conf., ECC 1999. 2015. P. 3440–3445.

67. *Fradkov A.L., Stotsky A.* Speed Gradient Adaptive Control Algorithms for Mechanical Systems // Int. J. Adaptive Control Signal Processing. 1992. Vol. 6. No. 3. P. 211–220.

68. *Дунская Н.В., Пятницкий Е.С.* Стабилизация управляемых механических и электромеханических систем // АиТ. 1988. № 12. С. 40–51.

Dunskaya N.V., Pyatnitskii E.S. Stabilization of mechanical and electromechanical systems // Autom. Remote Control. 1988. Vol. 49. No.12. P. 1565–1574.

69. *Ortega R., Spong M.W.* Adaptive Motion Control of Rigid Robots: A Tutorial // Automatica. 1989. Vol. 25. P. 877–888.

70. *Slotine J., Li W.* On The Adaptive Control of Robot Manipulators // Int. J. Robot. Res. 1987. Vol. 6. No. 3. P. 49–59.

71. *Slotine J., Li W.* Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.

72. *Fradkov A.L.* Nonlinear Adaptive Control: Regulation-Tracking-Oscillations // IFAC Proceedings Volumes. 1994. Vol. 27. No. 11. P. 385–390. IFAC Workshop on New Trends in Design of Control Systems. Smolenice, Slovak Republic, 7–10 September. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017476804.

73. *Fradkov A.L.* Swinging Control of Nonlinear Oscillations // Int. J. Control. 1996. Vol. 64. No. 6. P. 1189–1202.

74. *Андриевский Б.Р., Гузенко П.Ю, Фрадков А.Л.* Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента // АиТ. 1996. № 4. С. 4–17.

   Andrievskii B.R., Guzenko P.Yu., Fradkov A.L. Control of Nonlinear Oscillation in Mechanic Systems by the Steepest Gradient Method // Autom. Remote Control 1996. Vol.57. No. 4. P. 456–467.

75. *Fradkov A.L., Makarov I.A., Shiriaev A.S., Tomchina O. P.* Control of Oscillations in Hamiltonian Systems // Proc. European Control Conf., ECC'97. 1997. P. 1243–1248.

76. *Fradkov A.L., Miroshnik I., Nikiforov V.* Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer, 1999.

77. *Andrievsky B., Fradkov A.L.* Feedback Resonance in Single and Coupled 1-DOF Oscillators // Int. J. Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1999. Vol. 9. No. 10. P. 2047–2057.

78. *Kumon M., Washizaki R., Sato J., et al.* Controlled Synchronization of Two 1-DOF Coupled Oscillators // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2002. Vol. 15. No. 1. P. 109–114.

79. *Acosta J., Gordillo F., Aracil J.* Swinging Up the Furuta Pendulum By the Speed Gradient Method // Proc. European Control Conf., ECC 2001. 2001. P. 469–474.

80. *Acosta J., Aracil J., Gordillo F.* Nonlinear Control Strategies for the Furuta Pendulum // Control and Intelligent Systems. 2001. Vol. 29. No. 3. P. 101–107.

81. *Gordillo F., Acosta J., Aracil J.* A New Swing-Up Law for the Furuta Pendulum // Int. J. Control. 2003. Vol. 76. No. 8. P. 836–844.

82. *Ludvigsen H., Shiriaev A., Egeland O.* Stabilization of Stable Manifold of Upright Position of the Spherical Pendulum // Modeling, Identification and Control. 2001. Vol. 22. No. 1. P. 3–14.

83. *Shiriaev A., Fradkov A.L.* Stabilization of Invariant Sets for Nonlinear Systems with Applications to Control of Oscillations // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2001. Vol. 11. No. 3. P. 215–240.

84. *Shiriaev A., Egeland O., Ludvigsen H., Fradkov A.L.* VSS-Version of Energy-Based Control for Swinging Up a Pendulum // Syst. Control Lett. 2001. Vol. 44. No. 1. P. 45–56.

85. *Andrievsky B.* Computation of The Excitability Index For Linear Oscillators // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control, and the European Control Conf., CDC-ECC '05. Vol. 2005. 2005. P. 3537–3540.

86. *Jordän M., Bonitatibus J.* Speed-Gradient Control With Non-Linearity in The Parameters For A Chaotic Colpitts Oscillator // Proc. Int. Conf. on Physics and Control, PhysCon 2005. Vol. 2005. 2005. P. 266–271.

87. *Kennedy M.* Chaos in the Colpitt's Oscillator // IEEE Trans. Circuits Syst. I. 1994. Vol. 41. No. 11. P. 771–774.

88. *Fradkov A., Andrievsky B., Boykov K.* Control of the Coupled Double Pendulums System // Mechatronics. 2005. Vol. 15. No. 10. P. 1289–1303.

89. *Lehnert J., Hövel P., Flunkert V., et al.* Adaptive Tuning of Feedback Gain in Time-Delayed Feedback Control // Chaos. 2011. Vol. 21. No. 4.

90. *Semenov D., Fradkov A.L.* Adaptive Synchronization of Two Coupled Non-Identical Hindmarsh-Rose Systems by the Speed Gradient Method // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 12–14.

91. *Fradkov A.L., Lashkov S., Andrievsky B.* Energy Synchronization of Pendulum Mechanisms // Proc. 5th Int. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2018. 2018. P. 1257–1262.

92. *Seifullaev R., Plotnikov S.* Attractor Estimates for an Energy-Controlled Pendulum in Presence of Irregular Bounded Disturbance // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 132–137.

93. *Seifullaev R., Fradkov A., Liberzon D.* Energy Control of a Pendulum With Quantized Feedback // Automatica. 2016. Vol. 67. P. 171–177.

94. *Fradkov A.L., Usik E., Andrievsky B.* Simple Energy Control in Frenkel–Kontorova Model // Advanced Structured Materials. Switzerland: Springer Nature, 2019. Vol. 103. P. 209–222.

95. *Zhang F.-F., Liu S.-T., Yu W.-Y.* Modified Projective Synchronization With Complex Scaling Factors of Uncertain Real Chaos and Complex Chaos // Chinese Physics B. 2013. Vol. 22. No. 12.

96. *Zhang F., Liu S.* Adaptive Complex Function Projective Synchronization of Uncertain Complex Chaotic Systems // J. Comput. Nonlinear Dynam.. 2016. Vol. 11. No. 1.

97. *Fradkov A., Andrievsky B.* Singular Perturbations of Systems Controlled by Energy-Speed-Gradient Method // Proc. IEEE Conf. Decision and Control, CDC 2004. Vol. 4. 2004. P. 3441–3446.

98. *Yao J., Guan Z.-H., Hill D.J., Wang H.O.* On Passivity and Impulsive Control of Complex Dynamical Networks with Coupling Delays // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and the European Control Conf. 2005. P. 1595–1600.

99. *Yu W., DeLellis P., Chen G., et al.* Distributed Adaptive Control of Synchronization in Complex Networks // IEEE Trans. Automat. Contr. 2012. Vol. 57. No. 8. P. 2153–2158.

100. *Джунусов И.А., Фрадков А.Л.* Адаптивная синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем Лурье // АиТ. 2009. № 7. С. 111–126.

    Dzhunusov I.A., Fradkov A.L. Adaptive Synchronization of a Network of Interconnected Nonlinear Lur'e Systems // Autom. Remote Control. 2009. Vol. 70. No. 7. P. 1190–1205.

101. *Selivanov A., Lehnert J., Dahms T., et al.* Adaptive Synchronization in Delay-Coupled Networks of Stuart-Landau Oscillators // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2012. Vol. 85. No. 1.

102. *Tomchin D., Tomchina O., Fradkov A.L.* Controlled Passage Through Resonance for Flexible Vibration Units // Mathematical Problems in Engineering. 2015. Vol. 2015. 8 p.

103. *Gorlatov D., A.Tomchin D., Tomchina O.* Controlled Passage through Resonance for Two-Rotor Vibration Unit: Influence of Drive Dynamics // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No. 11. P. 313–318.

104. *Fradkov A.L., Tomchina O., Tomchin D., Gorlatov D.* Time-Varying Observer of The Supporting Body Velocity for Vibration Units // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49. No. 14. P. 18–23.

105. *Fradkov A.L., Gorlatov D., Tomchina O., Tomchin D.* Control of Oscillations in Vibration Machines: Start Up and Passage Through Resonance // Chaos. 2016. Vol. 26. No. 11.

106. *Boikov V., Andrievsky B., Shiegin V.* Experimental Study of Unbalanced Rotors Synchronization of the Mechatronic Vibration Setup // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. No. 1. P. 5–11.

107. *Bartkowiak R.* Controlled Synchronization at The Existence Limit for an Excited Unbalanced Rotor // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 91. P. 95–102.

108. *Плотников С.А., Фрадков А.Л., Шепелявый А.И.* Метод скоростного градиента в обратной задаче Стокера для синхронной электрической машины // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). № 1. С. 111–118.

109. *Plotnikov S., Shepeljavyi A.* Energy Control of Electric Machine: Inverse Stoker Problem // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 22–26.

110. *Roozegar M., Mahjoob M., Ayati M.* Adaptive Estimation of Nonlinear Parameters of a Nonholonomic Spherical Robot Using a Modified Fuzzy-based Speed Gradient Algorithm // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. Vol. 22. No. 3. P. 226–238.

111. *Fradkov A.L., Andrievsky B.* Passification-Based Robust Flight Control Design // Automatica. 2011. Vol. 47. No. 12. P. 2743–2748.

112. *Боднер В.А.* Системы управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1973. 698 с.

113. *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.

114. *Ефремов А.В., Захарченко В.Ф., Овчаренко В.Н., Суханов В.Л.* Динамика полета: учебник для студентов высших учебных заведений / Под. ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Машиностроение, 2011.

115. *Andrievsky B.R., Churilov A., Fradkov A.* Feedback KAlman–YAkubovich LEmma and its Applications to Adaptive Control // Proc. 35th IEEE Conf. Dec. Contr. Kobe, Japan: 1996. P. 4537–4542.

116. *Fradkov A.L.* Adaptive Stabilization for Minimum-Phase Multi-Input Plants Without Output Derivatives Measurement // Physics-Doklady. 1994. Vol. 39. No. 8. P. 550–552.

117. *Iwai Z., Mizumoto I.* Robust and Simple Adaptive Control Systems // Int. J. Control. 1992. Vol. 55. P. 1453–1470.

118. *Kaufman H., Bar-Kana I., Sobel K.* Direct Adaptive Control Algorithms. New York: Springer Verlag, 1994.

119. *Bar-Kana I.* Adaptive Control Can Robustify Uncertain Control systems // Proc. American Control Conf., ACC 1994. Baltimore, Maryland: 1994. June. P. 63–67.

120. *Amelin K., Andrievsky B., Tomashevich S., Fradkov A.L.* Data Exchange with Adaptive Coding between Quadrotors in a Formation // Autom. Remote Control. 2019. Vol. 80. No. 1. P. 150–163.

121. *Furtat I., Fradkov A.L., Peaucelle D.* Robust Control of Aircraft Lateral Movement // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2014. Vol. 19. P. 5199–5204.

122. *Hsu C., Lan E.* Theory of Wing Rock // J. Aircraft. 1985. Vol. 22. P. 920–924.
123. *Ng T., Malcolm G., Lewis L.* Experimental Study of Vortex Flows Over Delta Wings in Wing-Rock Motion // AIAA paper 89-2187-CP. 1989.
124. *Ng T., Ong L., Suarez J., Malcolm G.* Wing Rock Suppression Using Forebody Vortex Control // Proc. 9th Applied Aerodynamics Conf. Baltimore, MD, USA. AIAA, 1991. 23–25 September. art. No. A91-53745.
125. *Katz J.* Wing/Vortex Interactions and Wing Rock // Progress in Aerospace Sciences. 1999. Vol. 35. P. 727–750.
126. *Lee K., Ghorawat P., Singh S.* Wing Rock Control by Finite-Form Adaptation // J. Vibration and Control. 2016. Vol. 22. No. 11. P. 2687–2703.
127. *Astolfi A., Ortega R.* Immersion And Invariance: A New Tool for Stabilization and Adaptive Control of Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. Vol. 48. No. 4. P. 590–606.
128. *Lee K., Singh S.* Noncertainty-Equivalent Adaptive Wing-Rock Control via Chebyshev Neural Network // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2014. Vol. 37. No. 1. P. 123–133.
129. *Liu X., Ortega R., Su H., Chu J.* Immersion and Invariance Adaptive Control of Nonlinearly Parameterized Nonlinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2010. Vol. 55. No. 9. P. 2209–2214.
130. *Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N., et al.* Suppression of Nonlinear Wing-Rock Oscillations by Adaptive Control with the Implicit Reference Model // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2046.
131. *Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N., Kuznetsova O.* Aircraft Wing Rock Oscillations Suppression by Simple Adaptive Control // Aerospace Sci. Technology. 2020. Oct. Vol. 105.
132. *Zribi M., Alshamali S., Al-Kendari M.* Suppression of the Wing-Rock Phenomenon Using Nonlinear Controllers // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 71. No. 1–2. P. 313–322.
133. *Kori D., Kolhe J., Talole S.* Extended State Observer Based Robust Control of Wing Rock Motion // Aerospace Sci. Technology. 2014. Vol. 33. No. 1. P. 107–117.
134. *Tewari A.* Nonlinear Optimal Control of Wing Rock Including Yawing Motion // Proc. AlAA Guidance, Navigation, and Controls Conf. Denver, U.S.A.: 2000. Aug. 14–17. Paper No. AIAA-2000-4251.
135. *Malekzadeh M., Khosravi A., Rasouli H., Noei A.* Wing Rock Suppression via Backstepping Controller // Proc. 2015 2nd Int. Conf. Knowledge-Based Engineering and Innovation (KBEI-2015), Tehran, Iran. IEEE, 2016. P. 792–796.
136. *Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N. et al.* Simple Adaptive Control of Aircraft Roll Angle, Suppressing the Wing Rock Oscillations // Mathem. Engineer. Sci. Aerospace. 2019. Vol. 10. No. 3. P. 373–386.
137. *Sobel K., Kaufman H., Mabius I.* Implicit Adaptive Control for a Class of MIMO Systems // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1982. Vol. 18. P. 576–589.
138. *Iwai Z., Mizumoto I.* Robust and Simple Adaptive Control Systems // Int. J. Control. 1992. Vol. 55. P. 1453–1470.
139. *Barkana I.* Adaptive Control? But is so Simple!: A Tribute to the Efficiency, Simplicity and Beauty of Adaptive Control // J. Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications. 2016. Vol. 83. No. 1. P. 3–34.
140. *Andrievsky B., Fradkov A., Peaucelle D.* Adaptive Control Experiments for LAAS "Helicopter" Benchmark // Proc. Int. Conf. on Physics and Control, PhysCon 2005. 2005. P. 760–765.

141. *Andrievsky B., Peaucelle D., Fradkov A.L.* Adaptive Control of 3DOF Motion for LAAS Helicopter Benchmark: Design and Experiments // Proc. American Control Conf., ACC 2007. 2007. P. 3312–3317.

142. *Andrievsky B., Kudryashova E., Kuznetsov N., et al.* Simple Adaptive Control for Airfoil Flutter Suppression // Mathem. Engineer. Sci. Aerospace. 2018. Vol. 9. No. 1. P. 5–20.

143. *Chen C.-L., Peng C.C., Yau H.-T.* High-Order Sliding Mode Controller With Backstepping Design for Aeroelastic Systems // Commun. Nonlinear Sci. Numerical Simulation. 2012. Vol. 17. No. 4. P. 1813 – 1823. URL: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570411005028`.

144. *Abdelkefi A., Vasconcellos R., Nayfeh A., Hajj M.* An Analytical and Experimental Investigation into Limit-Cycle Oscillations of an Aeroelastic System // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 71. No. 1–2. P. 159–173.

145. *Andrievsky B., Guzenko P.Y.* Energy Speed-Gradient Control of Nonlinear Satellite Oscillations // Cybernetics and Physics. 2014. Vol. 3. No. 1. P. 9–15. URL: `http://lib.physcon.ru/doc?id=e7ac7c9cefa5`.

146. *Meehan P.A., Asokanthan S.F.* Analysis of Chaotic Instabilities in a Rotating Body With Internal Energy Dissipation // Int. J. Bifurc. Chaos. 2006. Jan. Vol. 16. No. 1. P. 1–19.

147. *Shahov E.M.* Oscillations of Probe Satellite Towed by Non-Stretched Thread in Heterogeneous Atmosphere // Appl. Math. and Mech. 1988. Vol. 52. No. 4. P. 567–572.

148. *Beletsky V.V., Levin E.M.* Dynamics of Space Tethered Systems. San Diego: Am. Astronautical Soc., 1993.

149. *Druzhinina M., Stefanopoulou A., Moklegaard L.* Speed Gradient Approach to Longitudinal Control of Heavy-Duty Vehicles Equipped With Variable Compression Brake // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 2002. Vol. 10. No. 2. P. 209–220.

150. *Kolmanovsky I., Druzhinina M., Sun J.* Speed-Gradient Approach to Torque and Air-To-Fuel Ratio Control in DISC Engines // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 2002. Vol. 10. No. 5. P. 671–678.

151. *Jordán M., Bustamante J.* A Totally Stable Adaptive Control for Path Tracking of Time-Varying Autonomous Underwater Vehicles // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2008. Vol. 41. No. 2. P. 15985–15990.

152. *Fossen T.* Guidance and Control of Ocean Vehicles. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1994.

153. *Kreuzer E., Pinto F.* Controlling the Position of a Remotely Operated Underwater Vehicle // App. Math. Comp. 1996. Vol. 78. P. 175–185.

154. *Jordán M., Bustamante J.* An Adaptive Control System for Perturbed Rovs in Discrete Sampling Missions with Optimal-Time Characteristics // Proc. IEEE Conf. Decision and Control, CDC 2007. 2007. P. 1300–1305.

155. *Dyda A., Os'kin D.* Underwater Robot Intelligent Control Based on Multilayer Neural Network // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2010. Vol. 43. No. 20. P. 179–183.

156. *Oskin D., Dyda A.* Underwater Robot Intelligent Control Based on Multilayer Neural Network // Proc. 2013 IEEE 7th Int. Conf. on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems, IDAACS 2013. Vol. 2. 2013. P. 921–924.

157. *Dyda A., Oskin D., Dyda P.* An Application of Speed Gradient Method to Neural Network Control for Underwater Robot // CEUR Workshop Proc. Vol. 1623. 2016. P. 689–700.

158. *Fossen T.I.* Marine Control Systems: Guidance, Navigation and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles. Trondheim, Norway: Marine Cybernetics, 2002. ISBN: 82-92356-00-2.

159. *Дыда А.А.* Адаптивное и нейросетевое управление сложными динамическими объектами. Владивосток: Дальнаука, 2007. ISBN: 9785804408115.

160. *Pchelkina I., Fradkov A.L.* Combined Speed-Gradient Controlled Synchronization of Multimachine Power Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2013. Vol. 46. No. 12. P. 59–63.

161. *Lastire E., Alanis A., Sanchez E.* Inverse Optimal Neural Control with Speed Gradient for a Power Electric System With Changes in Loads // Proc. 9th Int. Conf. on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE 2012. 2012.

162. *Alanis A., Lastire E., Arana-Daniel N., Lopez-Franco C.* Inverse Optimal Control with Speed Gradient for A Power Electric System Using a Neural Reduced Model // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Vol. 2014.

163. *Furtat I., Tergoev N., Tomchina O., et al.* Speed-Gradient-Based Control of Power Network: Case Study // Cybernetics and Physics. 2016. Vol. 5. No. 3. P. 85–90.

164. *Gavrilenko A., Merkuryev I., Podalkov V.* Algorithms for the Control of Oscillations of the Wave Solid-State Gyroscope Resonator // Proc. 15th Saint Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2008. 2008. P. 34–36.

165. *Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 77–89.

166. *Putty M., Najafi K.* A Micromachined Vibrating Ring Gyroscope // Proc. Digest, Solid-State Sensors and Actuators Workshop, Hilton Head, SC. 1994. P. 213–220.

167. *Ayazi F., Najafi K.* A HARPSS Polysilicon Vibrating Ring Gyroscope // J. Microelectromechanical System. 2001. Vol. 10. No. 2. P. 169–179.

168. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974.

169. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10-ти т. 4-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. Т. I. Механика.

170. *Каширских В.Г., Завьялов В.М., Переверзев С.С.* Формирование алгоритма управления плавным пуском асинхронного электродвигателя на основе метода скоростного градиента // Вестник КузГТУ. 2005. № 2. С. 7–9.

171. *Семыкина И.Ю., Завьялов В.М., Глазко М.А.* Градиентное управление многодвигательным асинхронным электроприводом // Изв. Томского политехн. ун-та. 2009. Т. 315. № 4. С. 65–69.

172. *Завьялов В.М.* Снижение динамических нагрузок в трансмиссиях горных машин. Кемерово: КузГТУ, 2008.

173. *Astrov Y., Fradkov A.L., Guzenko P.* Control of a Noise-Induced Transition in a Nonlinear Dynamical System // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2008. Vol. 77. No. 2.

174. *Pchelkina I., Fradkov A.L.* Control of Oscillatory Behavior of Multispecies Populations // Ecological Modelling. 2012. Vol. 227. P. 1–6.

175. *Saito H., Ohmori H.* Control of an Abnormal Human Menstrual Cycle in PCOS by Speed Gradient Algorithm // SICE Annual Conf. 2011, Tokyo, Japan. 2011. Sep. 13–18. P. 1436–1441.

176. *Selgrade J. F.* Bifurcation Analysis of a Model for Hormonal Regulation of The Menstrual Cycle // Mathematical Biosciences. 2010. Vol. 225. No. 2. P. 108–114. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0025556410000350`.

177. *Efimov A., Ananyevskiy M., Borondo F., et al.* Control of Isomerization In Ensembles of Nonrigid Molecules Based on Classical and Quantum-Mechanical Models, LiCN // Proc. 20th European Conf. Modelling and Simulation: Modelling Methodologies and Simulation Key Technologies in Academia and Industry, ECMS 2006. 2006. P. 495–500.

178. *Efimov A., Borondo F., Benito R.* Control of Isomerization in Classical Ensembles of Nonrigid Molecular Systems, LiCN // Proc. Int. Conf. on Physics and Control, PhysCon 2005. Vol. 2005. 2005. P. 933–938.

179. *Ananjevsky M.S., Vetchinkin A., Sarkisov O., et al.* Quantum Control of Dissociation of an Iodine Molecule by One and Two Femtosecond Laser Pulses Excitation // Proc. 2005 International Conf. Physics and Control, 2005., St. Petersburg, Russia. IEEE, 2005. P. 636–641.

180. *Ананьевский М.С., Фрадков А.Л.* Управление наблюдаемыми в конечноуровневых квантовомеханических системах // АиТ. 2005. № 5. С. 63–75.

    Anan'evskii M.S., Fradkov A.L. Control of the Observables in the Finite-Level Quantum Systems // Autom. Remote Control. 2005. Vol. 66. No. 5. P. 734–745.

181. *Ананьевский М.С.* Селективное управление наблюдаемыми в ансамбле квантовомеханических молекулярных систем // АиТ. 2007. № 8. С. 32–43.

    Anan'evskii M. Selective Control of the Observables in the Ensemble of Quantum Mechanical Molecular Systems // Autom. Remote Control. 2007. Vol. 68. No. 8. P. 1322–1332.

182. *Borisenok S., Fradkov A.L., Proskurnikov A.* Speed Gradient Control of Qubit State // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2010. Vol. 4. No. PART 1. P. 81–85.

183. *Alaubaidy M.N.* Quantum Entanglement Recovery Using Speed Gradient over Noisy Quantum Channels // Journal of Critical Reviews. 2020. Vol. 7. No. 6. P. 1012–1020. http://www.jcreview.com/?mno=104261. URL: `http://www.jcreview.com/?mno=104261`.

184. *Pechen A., Borisenok S.* Energy Transfer in Two-Level Quantum Systems via Speed Gradient-Based Algorithm // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No. 11. P. 446–450.

185. *Печень А.Н.* О методе скоростного градиента для генерации унитарных квантовых операций в замкнутых квантовых системах // УМН. 2016. Т. 71. № 3 (429). С. 205–206.

186. *Porubov A., Fradkov A.L., Andrievsky B.* Feedback Control for Some Solutions of the Sine-Gordon Equation // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 269. P. 17–22.

187. *Porubov A., Fradkov A.L., Andrievsky B., Bondarenkov R.* Feedback Control of the Sine-Gordon Antikink // Wave Motion. 2016. Vol. 65. P. 147–155.

188. *Porubov A., Andrievsky B.* Control Methods for Localization of Nonlinear Waves // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2017. Vol. 375. No. 2088.

189. *Porubov A., Bondarenkov R., Bouche D., Fradkov A.* Two-Step Shock Waves Propagation for Isothermal Euler Equations // Appl. Math. Comput. 2018. Vol. 332. P. 160–166.

190. *Porubov A., Antonov I., Indeitsev D., Fradkov A.L.* Mechanical System Allowing Distributive Control with Feedback // Mechanics Research Communications. 2018. Vol. 93. P. 124–127.

191. *Porubov A., Antonov I., Fradkov A.L.* Boundary Control of Nonlinear Strain Waves in Di-Atomic Crystal Layer // Wave Motion. 2019. Vol. 91.

192. *Dolgopolik M., Fradkov A.L., Andrievsky B.* Boundary Energy Control of the Sine-Gordon Equation // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49. No. 14. P. 148–153.

193. *Dolgopolik M., Fradkov A.L., Andrievsky B.* Boundary Energy Control of a System Governed by The Nonlinear Klein–Gordon Equation // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2018. Vol. 30. No. 1.

194. *Dolgopolik M., Fradkov A.L.* Energy Tracking for the Sine-Gordon Equation with Dissipation via Boundary Control // Proc. European Control Conf., ECC 2018. 2018. P. 3025–3030.

195. *Dolgopolik M., Fradkov A., Andrievsky B.* Observer-Based Boundary Control of the Sine-Gordon Model Energy // Automatica. 2020. Vol. 113.

196. *Orlov Y., Fradkov A.L., Andrievsky B.* Energy Control of Distributed Parameter Systems via Speed-Gradient Method: Case Study of String and Sine-Gordon Benchmark Models // Int. J. Control. 2017. Vol. 90. No. 11. P. 2554–2566.

197. *Andrievsky B., Orlov Y.* Numerical Evaluation of Sine-GOrdon Chain Energy Control via Subdomains State Feedback under Quantization and Time Sampling // Cybernetics and Physics. 2019. Vol. 8. No. 1. P. 18–28.

198. *Orlov Y., Fradkov A., Andrievsky B.* Output Feedback Energy Control of the Sine-Gordon PDE Model Using Collocated Spatially Sampled Sensing and Actuation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65. No. 4. P. 1484–1498. cited By 3.

199. *Андриевский Б.Р., Блехман И.И., Борцов Ю.А., и др.* Управление мехатронными вибрационными установками / Под. ред. Блехмана И.И., Фрадкова А.Л. Сер.: Анализ и синтез нелинейных систем. СПб: Наука, 2001.

200. *Fridman E.* Observers and Initial State Recovering for a Class of Hyperbolic Systems via Lyapunov Method // Autom. 2013. Vol. 49. P. 2250–2260.

201. *Fridman E., Terushkin M.* New Stability and Exact Observability Conditions for Semilinear Wave Equations // Automatica. 2016. Vol. 63. P. 1–10.

202. *Orlov Y., Fradkov A.L., Andrievsky B.* Sliding Mode-based Speed-gradient Control of the String Energy // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. No. 1. P. 8484–8489.

203. *Fradkov A.L.* Speed-gradient Entropy Principle for Nonstationary Processes // Entropy. 2008. Vol. 10. No. 4. P. 757–764.

204. *Fradkov A., Krivtsov A.* Speed-Gradient Principle for Description of Transient Dynamics in Systems Obeying Maximum Entropy Principle // AIP Conf. Proc. 2010. Vol. 1305. P. 399–406.

205. *Fradkov A.L., Khantuleva T.* Cybernetic Model of The Shock Induced Wave Evolution in Solids // Procedia Structural Integrity. 2016. Vol. 2. P. 994–1001.

206. *Khantuleva T.* Thermodynamic Evolution Far From Equilibrium // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 1959. URL: `https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5034750`.

207. *Fradkov A.L., Shalymov D.* Speed Gradient and MaxEnt Principles for Shannon and Tsallis Entropies // Entropy. 2015. Vol. 17. No. 3. P. 1090–1102.

208. *Shalymov D., Fradkov A.L.* Dynamics of the F-Divergence Minimization Processes Based on the Speed-Gradient Principle // Proc. IEEE Conf. Norbert Wiener in the 21st Century, 21CW 2016. 2016. P. 7–11.

209. *Shalymov D., Fradkov A., Liubchich S., Sokolov B.* Dynamics of the Relative Entropy Minimization Processes // Cybernetics and Physics. 2017. Vol. 6. No. 2. P. 80–87.

210. *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.

211. *Shalymov D., Fradkov A.L.* GENERIC and Speed-Gradient Principle // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 33. P. 121–126.

212. *Селиванов А.А.* Динамика процессов максимизации квантовой энтропии в конечноуровневых системах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2011. № 4. С. 71–79.

213. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы скоростного градиента для систем с запаздыванием // АиТ. 1987. № 3. С. 97–106.

214. *Boffi N., Slotine J.* Implicit Regularization and Momentum Algorithms in Nonlinearly Parameterized Adaptive Control and Prediction // Neural Computation. 2021. Vol. 33. P. 590–673.

215. *Брэгман Л.М.* Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 3. С. 620–631.

216. *Ai-Poh Loh, Annaswamy A., Skantze F.* Adaptation in the Presence of a General Nonlinear Parameterization: An Error Model Approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. Vol. 44. No. 9. P. 1634–1652.

217. *Fradkov A.L., Ortega R., Bastin G.* Semi-Adaptive Control of Convexly Parametrized Systems with Application to Temperature Regulation of Chemical Reactors // Int. J. Adaptive Control Signal Processing. 2001. Vol. 15. No. 4. P. 415–426.

218. *Tyukin I., Prokhorov D., Terekhov V.* Adaptive Control with Nonconvex Parameterization // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. Vol. 48. No. 4. P. 554–567.

219. *Ortega R., Gromov V., Nuño E., et al.* Parameter Estimation of Nonlinearly Parameterized Regressions without Overparameterization: Application to adaptive control // Automatica. 2021. Vol. 127. P. 109544.

220. *Tyukin I., Prokhorov D., van Leeuwen C.* Adaptation and Parameter Estimation in Systems with Unstable Target Dynamics and Nonlinear Parametrization // IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. Vol. 52. No. 9. P. 1543–1559.

221. *Lee T., Kwon J., Park F.* A Natural Adaptive Control Law for Robot Manipulators // Proc. 2018 IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems. Piscataway, NJ: IEEE, 2018. P. 1–9.

222. *Wensing P., Slotine J.-J.* Beyond Convexity – Contraction and Global Convergence of Gradient Descent // PLoS ONE. 2020. Vol. 15. No. 8. e0236661.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 31.08.2020

После доработки 12.04.2021

Принята к публикации 29.04.2021