

© 2021 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru),  
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ<sup>1</sup>

В последнее время стал очень популярным подход к линейным системам управления с точки зрения оптимизации. Например, в классической задаче о линейно-квадратичном регуляторе можно рассматривать матрицу линейной обратной связи как переменную и сводить проблему к минимизации показателя качества по этой переменной. Для этого можно применять градиентный метод и получать обоснование сходимости. Такой подход был успешно применен для ряда задач, включая оптимизацию обратной связи по выходу. В настоящей статье такой подход впервые применяется к задаче подавления ограниченных внешних возмущений. Выписан градиентный метод для отыскания статической обратной связи по состоянию или выходу и дано его обоснование. Рассмотрен ряд примеров, включающих в себя простой и двойной маятника.

*Ключевые слова:* линейные системы, внешние возмущения, обратная связь по выходу, обратная связь по состоянию, оптимизация, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231021090038

### 1. Введение

Задача о подавлении ограниченных внешних возмущений (*peak-to-peak gain minimization*) формулируется следующим образом. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x, \\ z &= C_2x + B_1u, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{r \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , измеряемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и измеримым по  $t$  внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-30005.

Никаких других ограничений на возмущение  $w(t)$  не накладываем; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Задача заключается в выборе стабилизирующего управления в форме обратной связи по состоянию (если оно доступно)  $u = Kx$  или по выходу  $u = Ky$ , чтобы уменьшить “пик” выхода  $z(t)$ , т.е. величину  $\max_t |z(t)|$ . Точное решение такой задачи затруднительно, однако возможна минимизация верхней грани этой величины, формулируемой с помощью понятия *инвариантного эллипсоида*. Такой подход впервые был применен в монографии С. Бойда и соавт. [1] и развит в публикациях [2–4]. Подробное изложение этой техники можно найти в книге [5]. При этом задача управления по состоянию с помощью замен переменных сводится к параметрической задаче *полуопределенного программирования*, т.е. к задаче выпуклой оптимизации при ограничениях в форме *линейных матричных неравенств* при наличии скалярного параметра. Для таких задач существуют удобные численные методы решения [6, 7]. В задаче управления по выходу такое сведение невозможно (впрочем, можно применять не статический, а динамический регулятор, и тогда задача записывается как выпуклая, см. [5]). Авторы настоящей статьи, однако, задаются управлением в форме статической обратной связи в силу простоты таких регуляторов; для таких задач требуются новые методы решения.

В связи с этим напомним о новых подходах для классической проблемы *линейно-квадратичного регулирования*. Ее можно рассматривать как задачу оптимизации, где переменной является матрица обратной связи, а минимизируется интегральный квадратичный показатель качества переходного процесса. Градиент такой функции (для управления по состоянию) выписан еще в основополагающей работе Калмана [8], а для обратной связи по выходу — в статье Левина и Атанса [9]. С тех пор неоднократно применялись итеративные методы оптимизации градиентного типа (см., например, обзор [10]), однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно, в [11–15]. В настоящей статье аналогичный подход впервые применяется к задачам с внешними возмущениями.

Структура статьи следующая. В разделе 2 мы напоминаем технику инвариантных эллипсоидов и приводим формулировку задачи анализа (нахождения минимального инвариантного эллипсоида для замкнутой системы). При этом предлагается новый эффективный алгоритм однопараметрической оптимизации. В разделе 3 задача синтеза регулятора, оптимально подавляющего помехи, записывается как задача невыпуклой матричной оптимизации. Раздел 4 посвящен исследованию возникающей функции, вычислению ее градиента, формулировке и обоснованию итеративного алгоритма оптимизации. Раздел 5 содержит описания результатов вычислений для нескольких примеров. В заключении обсуждаются возможные обобщения полученных результатов.

Всюду далее  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора,  $\|\cdot\|$  — спектральная норма матрицы,  $\|\cdot\|_F$  — фробениусова норма матрицы,  $^T$  — символ транспонирования,  $\text{tr}$  — след матрицы,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение Фробениуса для матриц,  $I$  — единичная матрица соответствующей размерности,  $\lambda_i(A)$  —

собственные значения матрицы  $A$ , а  $\sigma(A) = -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$  — степень устойчивости гурвицевой матрицы  $A$ . Все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

## 2. Метод инвариантных эллипсоидов и задача анализа

### 2.1. Формулировка задачи и алгоритм оптимизации

Для дальнейшего изложения напомним концепцию метода инвариантных эллипсоидов. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  и измеримым по  $t$  внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^l$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$(3) \quad |w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Никаких других ограничений на возмущение  $w(t)$  не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Будем полагать, что система (2) устойчива (т.е. матрица  $A$  гурвицева), пара  $A, D$  управляема,  $C$  — матрица полного ранга. Заметим, что наложены более жесткие требования к постановке задачи, чем обычно [3, 5, 16]: предполагается, что размерности выхода и состояния совпадают, а матрица  $C$  — невырожденная. Это предположение можно было бы ослабить, но цель авторов сейчас — получить наиболее простые и наглядные результаты.

*Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат*

$$(4) \quad \mathcal{E}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1} x \leq 1 \right\}, \quad P \succ 0,$$

называется инвариантным для динамической системы (2), (3), если из условия  $x(0) \in \mathcal{E}_x$  следует  $x(t) \in \mathcal{E}_x$  для всех моментов времени  $t \geq 0$ .

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде  $\mathcal{E}_x$ , при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему, в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде.

Инвариантный эллипсоид обладает следующим свойством:

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_x \quad \text{при } x(0) \notin \mathcal{E}_x$$

(при этом, возможно,  $x(t) \in \mathcal{E}_x$  при  $t \geq T$  для некоторого  $T > 0$ ), т.е. траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида  $\mathcal{E}_x$ , стремится к эллипсоиду  $\mathcal{E}_x$  с течением времени. Таким образом, инвариантный эллипсоид является также и притягивающим.

Соответственно, если начальное состояние системы принадлежит инвариантному эллипсоиду, имеем равномерную оценку поведения траекторий системы — в любой момент времени траектории принадлежат этому эллипсоиду при любых допустимых внешних возмущениях; если же начальные условия произвольны, имеем асимптотическую оценку поведения траекторий системы: при любых допустимых внешних возмущениях траектории будут стремиться к этому эллипсоиду с течением времени.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. А именно в рамках задачи анализа проблема состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В этой связи естественно интересоваться минимальными в том или ином смысле эллипсоидами, содержащими выход системы.

Нетрудно видеть, что если  $\mathcal{E}_x$  — инвариантный эллипсоид (4) с матрицей  $P$ , то выход системы (2) при  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  принадлежит эллипсоиду

$$(5) \quad \mathcal{E}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z^\top (CPC^\top)^{-1} z \leq 1 \right\}.$$

Эллипсоид (5) будем называть *ограничивающим (по выходу)*. Часто в качестве критерия его минимальности рассматривается линейная функция  $f(P) = \text{tr} CPC^\top$ , значение которой равно сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида. Нетрудно видеть, что справедлива оценка

$$|z(t)|^2 \leq \text{tr} CPC^\top.$$

Таким образом, получаем верхнюю оценку выхода при ограниченной помехе, ее и будем минимизировать.

В [1] был установлен результат, дающий критерий инвариантности эллипсоида в терминах линейных матричных неравенств. Несколько уточняя этот критерий (см. [5]), приходим к следующей одномерной оптимизационной задаче при наличии матричных ограничений типа равенств.

*Теорема 1.* Пусть матрица  $A$  гурвицева,  $\sigma = -\max_i \text{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ , пара  $(A, D)$  управляема, матрица  $C$  — квадратная невырожденная, а матрица  $P(\alpha) \succ 0$ ,  $0 < \alpha < 2\sigma$ , удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$(6) \quad \left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^\top + \frac{1}{\alpha}DD^\top = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^\top$$

на интервале  $0 < \alpha < 2\sigma$  и если  $\alpha^*$  — точка минимума и  $x(0)$  удовлетворяет условию  $x^\top(0)P^{-1}(\alpha^*)x(0) \leq 1$ , то гарантируется оценка

$$|z(t)|^2 \leq f(\alpha^*), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Поскольку уравнение (6) нелинейно по совокупности переменных  $P$  и  $\alpha$ , то в литературе по этой проблематике (см. [4] и др.) поиск минимального ограничивающего эллипсоида предлагалось проводить на одномерной сетке по параметру  $\alpha$ ; при этом вместо матричного уравнения (6) рассматривалось соответствующее матричное неравенство Ляпунова. В статье предлагается более эффективный способ оптимизации, основанный на свойствах минимизируемой функции и на явном виде ее производных. Сформулируем эти свойства.

*Лемма 1.* Пусть матрица  $A$  гурвицева,  $0 < \alpha < 2\sigma$ , пара  $(A, D)$  управляема, а матрица  $C$  такова, что  $C^\top C \succ 0$ . Тогда функция  $f(\alpha) = \text{tr} CPC^\top$ , где  $P = P(\alpha)$  удовлетворяет (6), обладает следующими свойствами:

а) функция  $f(\alpha)$  определена, положительна и сильно выпукла на интервале  $0 < \alpha < 2\sigma$ , а ее значения стремятся к бесконечности на концах интервала, причем существует  $c > 0$  такое, что

$$f(\alpha) \geq \frac{c}{\alpha(2\sigma - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 2\sigma;$$

б) производная функции  $f(\alpha)$  имеет вид

$$(7) \quad f'(\alpha) = \text{tr} Y \left( P - \frac{1}{\alpha^2} DD^\top \right),$$

где  $Y$  — решение уравнения Ляпунова

$$(8) \quad \left( A + \frac{\alpha}{2} I \right)^\top Y + Y \left( A + \frac{\alpha}{2} I \right) + C^\top C = 0;$$

в) вторая производная функции  $f(\alpha)$  определяется формулой

$$(9) \quad f''(\alpha) = 2 \text{tr} Y \left( X + \frac{1}{\alpha^3} DD^\top \right),$$

где  $X$  — решение уравнения Ляпунова

$$(10) \quad \left( A + \frac{\alpha}{2} I \right) X + X \left( A + \frac{\alpha}{2} I \right)^\top + P - \frac{1}{\alpha^2} DD^\top = 0,$$

причем  $f''(\alpha^*) > 0$  и  $f''(\alpha)$  монотонно возрастает слева и справа от  $\alpha^*$ .

Доказательства этого и последующих утверждений приведены в Приложении. Заметим, что для вычисления функции  $f(\alpha)$  и двух ее производных достаточно решить три уравнения Ляпунова.

Указанные свойства функции позволяют применить метод Ньютона для ее минимизации. Задаемся начальным приближением  $0 < \alpha_0 < 2\sigma$ , например  $\alpha_0 = \sigma$ , и применяем итерационный процесс

$$(11) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}.$$

Следующая теорема 2 гарантирует глобальную сходимость алгоритма.

*Теорема 2. В методе (11) справедливы оценки*

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f'''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где  $c > 0$  — некоторая константа (она может быть выписана явно).

Этот результат следует из утверждений леммы 1 и по существу является небольшой модификацией теорем 3.3 и 3.5 публикации [17], поэтому опускаем его доказательство. Таким образом, первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом  $1/2$ ), а вторая — квадратичную сходимость в окрестности решения. Реально требуется не более 3–4 итераций для получения решения с большой точностью (если только начальная точка не слишком близка к границам интервала).

Таким образом, авторы располагают быстрым алгоритмом для оптимизации по параметру  $\alpha$ .

### 3. Задача синтеза

#### 3.1. Формулировка задачи оптимизации

Перейдем к задаче синтеза и рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1 x, \\ z &= C_2 x, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^n$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющим ограничению (3); матрицы  $D$  и  $C_2$  — квадратные невырожденные. Отметим, что вновь рассматривается не самая общая постановка задачи по сравнению с (2): размерности  $x$ ,  $w$  и  $z$  совпадают, матрицы  $D$ ,  $C_2$  невырожденные, а в выходе  $z$  отсутствует управление (смысл последнего отличия будет пояснен далее).

Целью является нахождение регулятора  $K$  в форме статической линейной обратной связи по выходу

$$(13) \quad u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times l},$$

который стабилизирует замкнутую систему и подавляет воздействие внешних возмущений  $w$ , минимизируя размер ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$ . В качестве критерия оптимальности рассмотрим величину

$$(14) \quad \text{tr } C_2 P C_2^\top + \rho \|K\|_F^2.$$

Первая компонента (14) определяет размер ограничивающего эллипсоида по критерию следа, а вторая представляет штраф за величину управления (при этом коэффициент  $\rho > 0$  регулирует его важность). Наличие второй компоненты позволяет избежать появления больших значений матрицы регулятора: в частности, если управление и возмущение “приложены в одной точке” (т.е. матрицы  $B$  и  $D$  совпадают), то за счет больших величин  $K$  линейный выход системы может быть сделан сколь угодно малым. Обычно штраф за управление вводится путем добавления члена с управлением в регулируемый выход (см. выражение  $B_1 u$  в (1)); авторам статьи удобнее использовать форму показателя качества (14).

В целом вид целевой функции (14) аналогичен критерию оптимальности в задаче о линейно-квадратичном регуляторе, где также присутствуют члены, отвечающие за величину отклонения траектории и за величину управления; разница лишь в том, что там эти члены имеют вид интегралов, а не максимальных значений.

Таким образом, задача о синтезе регулятора, подавляющего внешние возмущения, свелась к следующей матричной оптимизационной задаче:

$$\min f(K, \alpha), \quad f(K, \alpha) = \text{tr} C_2 P C_2^\top + \rho \|K\|_F^2$$

при ограничении

$$(15) \quad \left( A_K + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left( A_K + \frac{\alpha}{2} I \right)^\top + \frac{1}{\alpha} D D^\top = 0, \quad A_K = A + B K C_1,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ . Запись  $f(K, \alpha)$  подчеркивает, что при заданных  $K$  и  $\alpha$  матрица  $P$  находится из уравнения Ляпунова (15); тем самым независимыми переменными являются  $K$  и  $\alpha$ . Однако минимизацию по  $\alpha$  можно производить достаточно эффективно, см. подраздел 2.1; нужно лишь матрицу  $A$  заменить на  $A_K$ . Поэтому будем интересоваться функцией

$$(16) \quad f(K) = \min_{\alpha} f(K, \alpha);$$

ее минимизацией и займемся. Предварительно исследуем свойства этой функции.

### 3.2. Свойства функции $f(K)$

В дальнейшем делаем следующее предположение.

*Предположение.* Известен стабилизирующий регулятор  $K_0$ , т.е. такой, что матрица  $A + B K_0 C_1$  гурвицева.

Это предположение существенно, поскольку проблема существования стабилизирующего статического регулятора по выходу является нерешенной.

Перейдем к описанию свойств функции  $f(K)$ .

*Лемма 2.* Функция  $f(K)$  определена и положительна на множестве  $S$  стабилизирующих регуляторов.

Действительно, если матрица  $A_K = A + BK C_1$  гурвицева, то  $\sigma(A_K) > 0$  и для  $0 < \alpha < 2\sigma(A_K)$  решение  $P \succ 0$  уравнения Ляпунова (15) существует. Тем самым определена функция  $f(K, \alpha) > 0$ ; при этом  $f(K) > 0$  в силу леммы 1. Множество ее определения  $\mathcal{S}$  может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими, см. примеры далее.

*Лемма 3. На множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих регуляторов функция  $f(K)$  коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на границе области), причем справедливы следующие оценки:*

$$(17) \quad f(K) \geq \frac{\lambda_{\min}(DD^\top)\lambda_{\min}(C_2C_2^\top)}{4\sigma^2(A_K)},$$

$$f(K) \geq \rho\|K\|^2.$$

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{K \in \mathcal{S} : f(K) \leq f(K_0)\}.$$

Из леммы 3 вытекает очевидное следствие 1.

*Следствие 1. Для любого регулятора  $K_0 \in \mathcal{S}$  множество  $\mathcal{S}_0$  ограничено.*

С другой стороны, у функции  $f(K)$  на множестве  $\mathcal{S}_0$  существует точка минимума (как у непрерывной функции на компактном множестве), но множество  $\mathcal{S}_0$  не имеет общих точек с границей  $\mathcal{S}$  в силу (17). Впоследствии будет показано, что  $f(K)$  дифференцируема на  $\mathcal{S}_0$ . Следовательно, справедливо следствие 2.

*Следствие 2. Существует точка минимума  $K_*$  на множестве  $\mathcal{S}$ , и в ней градиент обращается в нуль.*

Перейдем к свойствам функции  $f(K, \alpha)$ .

*Лемма 4. Функция  $f(K, \alpha)$  определена на множестве стабилизирующих обратных связей  $K$  и для  $0 < \alpha < 2\sigma(A_K)$ . На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями*

$$(18) \quad \nabla_K f(K, \alpha) = 2 \left( \rho K + B^\top Y P C_1^\top \right),$$

$$(19) \quad \nabla_\alpha f(K, \alpha) = \text{tr} Y \left( P - \frac{1}{\alpha^2} D D^\top \right),$$

где матрица  $Y$  является решением уравнения Ляпунова

$$(20) \quad \left( A_K + \frac{\alpha}{2} I \right)^\top Y + Y \left( A_K + \frac{\alpha}{2} I \right) + C_2^\top C_2 = 0.$$

Минимум  $f(K, \alpha)$  достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_K f(K, \alpha) = 0, \quad \nabla_\alpha f(K, \alpha) = 0.$$



При этом  $f(K, \alpha)$  как функция от  $\alpha$  строго выпукла на  $0 < \alpha < 2\sigma(A_K)$  и достигает минимума во внутренней точке этого интервала (см. подраздел 2.1).

Свойства гессиана функции  $f(K, \alpha)$  представлены следующим утверждением.

*Лемма 5.* Функция  $f(K, \alpha)$  дважды дифференцируема по  $K$ , причем действие гессиана функции на произвольную матрицу<sup>2</sup>  $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$  дается выражением

$$(21) \quad \frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K)[E, E] = \rho \langle E, E \rangle + 2 \langle B^\top Y P' C_1^\top, E \rangle,$$

где  $P'$  — решение уравнения Ляпунова

$$(22) \quad \left( A_K + \frac{\alpha}{2} I \right) P' + P' \left( A_K + \frac{\alpha}{2} I \right)^\top + B E C_1 P + P (B E C_1)^\top = 0.$$

Градиент функции  $f(K, \alpha)$  по  $K$  не является липшицевым на множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих регуляторов, однако он обладает этим свойством на его подмножестве  $\mathcal{S}_0$ . Соответствующий результат представлен далее.

*Лемма 6.* На множестве  $\mathcal{S}_0$  градиент функции  $f(K, \alpha)$  по  $K$  липшицев с константой

$$(23) \quad L = \rho + 8\sqrt{n} \|B\|_F \|C_1\| \frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}(C_2^\top C_2) \lambda_{\min}^2(DD^\top)} \times \\ \times \left( \|A\| + \sqrt{f(K_0)} \|B\| \|C_1\| \right)^2 \left( \frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^\top C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \right).$$

Полученные свойства минимизируемой функции и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

### 3.3. Алгоритм оптимизации

Ограничение в оптимизационной задаче (15) невыпукло по совокупности переменных  $P$  и  $K$ . В случае управления по состоянию (т.е. при  $C_1 = I$ ) задачу можно свести к эквивалентной линейной, введя вспомогательную матричную переменную и исключив матрицу регулятора  $K$  (подробнее см. [4]). Однако в случае управления по выходу такой подход неприменим. Отметим еще, что даже в случае управления по состоянию минимизируемая функция не является выпуклой.

Авторы предлагают итеративный подход к решению этой задачи; в его основе лежит применение градиентного метода по переменной  $K$  и минимизации по  $\alpha$ , описанной в подразделе 2.1. Приведем принципиальную схему алгоритма.

<sup>2</sup> Понимаемое в смысле второй производной по направлению.

Алгоритм 1 для минимизации  $f(K, \alpha)$ :

- 1) Задаемся параметрами  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $0 < \tau < 1$  и начальным стабилизирующим приближением  $K_0$ . Вычисляем величину  $\alpha_0 = \sigma(A + BK_0C_1)$ .
- 2) На  $j$ -й итерации заданы  $K_j$ ,  $\alpha_j$ . Вычисляем  $A_j = A + BK_jC_1$ , решаем уравнение (20) и находим  $Y$ , вычисляем градиент  $H_j = \nabla_K f(K_j, \alpha_j)$  из уравнения (18). Если  $\|H_j\| \leq \varepsilon$ , то  $K_j$  принимаем за приближенное решение.
- 3) Делаем шаг градиентного метода

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага  $\gamma_j > 0$  подбираем дроблением  $\gamma$  до выполнения условий:

- a.  $K_{j+1}$  — стабилизирующий регулятор;
  - б.  $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) - \tau\gamma_j\|H_j\|^2$ .
- 4) Для полученного  $K_{j+1}$  решаем задачу минимизации  $f(K_{j+1}, \alpha)$  по  $\alpha$  (см. раздел 2), получаем  $\alpha_{j+1}$ . Переходим к п. 2.

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

*Теорема 3. В алгоритме 1 на каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений  $\gamma_j$ , функция  $f(K_j)$  монотонно убывает и градиент стремится к нулю*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|H_j\| = 0$$

*со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство (в Приложении) использует обычную схему анализа градиентного метода для безусловной минимизации функций с липшицевым градиентом [18], при этом способ подбора шага в алгоритме гарантирует, что величины  $K_j$  остаются в области  $\mathcal{S}_0$ , для которой лемма 6 обеспечивает липшицевость градиента. Естественно, что трудно рассчитывать на сходимость к глобальному минимуму, поскольку область определения  $f(K)$  может быть даже несвязной. Однако, по-видимому, для задачи управления по состоянию ( $C_1 = I$ ) можно гарантировать и глобальную сходимость к единственной точке минимума подобно тому, как это удается доказать для задачи о линейно-квадратичном регуляторе [15].

Заметим еще, что способ выбора шага в алгоритме 1 отнюдь не является самым быстрым с вычислительной точки зрения. Например, весьма перспективным является способ, аналогичный предложенному в [15] и основанный на использовании вторых производных. При этом пробный шаг выбирается по формуле

$$(24) \quad \gamma_j = \frac{\|H_j\|^2}{\nabla_K^2 f(K)[H_j, H_j]},$$

где вычисление выражения в знаменателе делается с помощью формулы (21), после чего он корректируется так же, как в алгоритме 1. Отметим, что использование вторых производных требует всего лишь решения еще одного уравнения Ляпунова, т.е. не сильно усложняет вычисления.

Смысл формулы (24) в том, что это один шаг метода Ньютона для минимизации одномерной функции  $\phi(\gamma) = f(K_j - \gamma H_j)$ . Свойства такого метода описаны в [15]; как правило, он (назовем его в нашем контексте *Алгоритмом 2*) дает заметно более быструю сходимость, чем алгоритм 1; это подтверждается приводимыми далее примерами.

#### 4. Примеры

*Пример 1.* Рассмотрим математический маятник (рис. 1), движущийся в вязкой среде, на который действует ограниченное внешнее возмущение. Полагая параметры единичными, приходим к линеаризованной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + w, \quad |w| \leq 1, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая в качестве выхода состояние системы ( $C = I$ ), приходим к задаче

$$\min \operatorname{tr} P \quad \text{при} \quad AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top = 0$$

относительно  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  и  $0 < \alpha < -2 \max \operatorname{Re} \lambda(A) = 1$ .

Зная первую (7) и вторую (9) производные минимизируемой функции, с помощью метода Ньютона находим оптимальное значение  $\alpha^* = 0,4618$  и соответствующую матрицу

$$P^* = \begin{pmatrix} 2,4461 & -0,5649 \\ -0,5649 & 2,1422 \end{pmatrix}$$

эллипса, содержащего траектории системы; при этом  $\operatorname{tr} P^* = 4,5883$ .

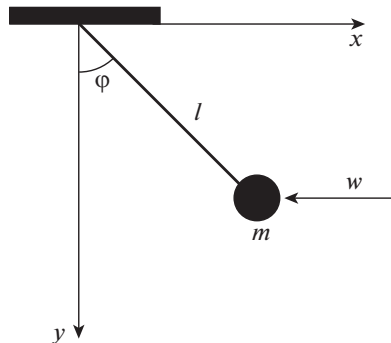


Рис. 1. Математический маятник из примера 1.

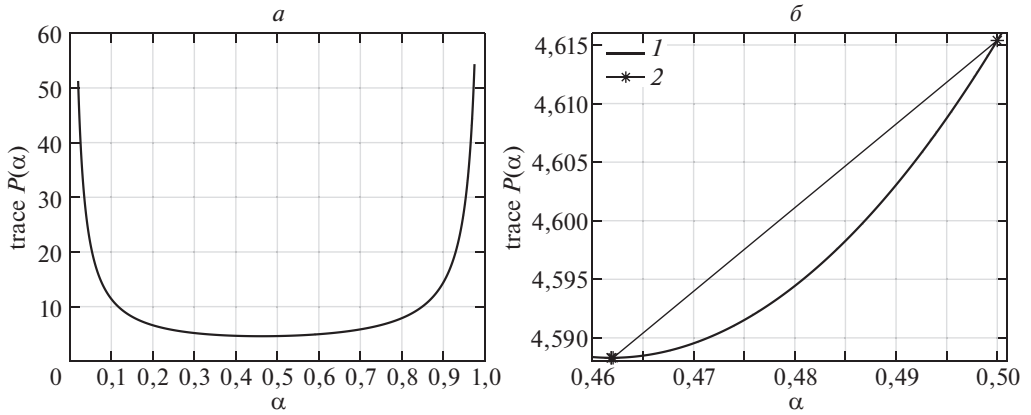


Рис. 2. Оптимизационная процедура в примере 1.

На рис. 2,*a* показан график функции  $f(\alpha) = \text{tr } P(\alpha)$ , а на рис. 2,*б* — динамика оптимизационной процедуры (линия 1 соответствует функции  $f(\alpha)$ , а линия 2 — собственно оптимизационной процедуре). По существу, уже первая итерация дает решение с достаточной точностью.

*Пример 2.* Рассмотрим математический маятник, на который воздействует ограниченное внешнее возмущение, для компенсации которого к нему приложено управляющее воздействие:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u + w, \quad |w| \leq 1. \end{aligned}$$

При этом измеряемым выходом служит все состояние системы (т.е.  $y = x$ ). Отметим, что в данном примере (и ряде следующих) не выполнено одно из предположений теоремы 3: здесь размерность возмущений меньше числа состояний, однако алгоритм оптимизации применим и работает.

В результате имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = I, \quad K = (k_1 \ k_2).$$

Для

$$C_2 = (1 \ 0), \quad \rho = 1,$$

решая на двумерной сетке по  $k_1$  и  $k_2$  уравнение Ляпунова (15) и вычисляя  $\min_{\alpha} \text{tr } C_2 P(\alpha) C_2^{\top}$ , численным образом находим функцию

$$f(k_1, k_2) = C_2 P(K) C_2^{\top} + \|K\|^2.$$

Ее линии уровня показаны на рис. 3. В данном случае линии уровня гладкие и выпуклые.

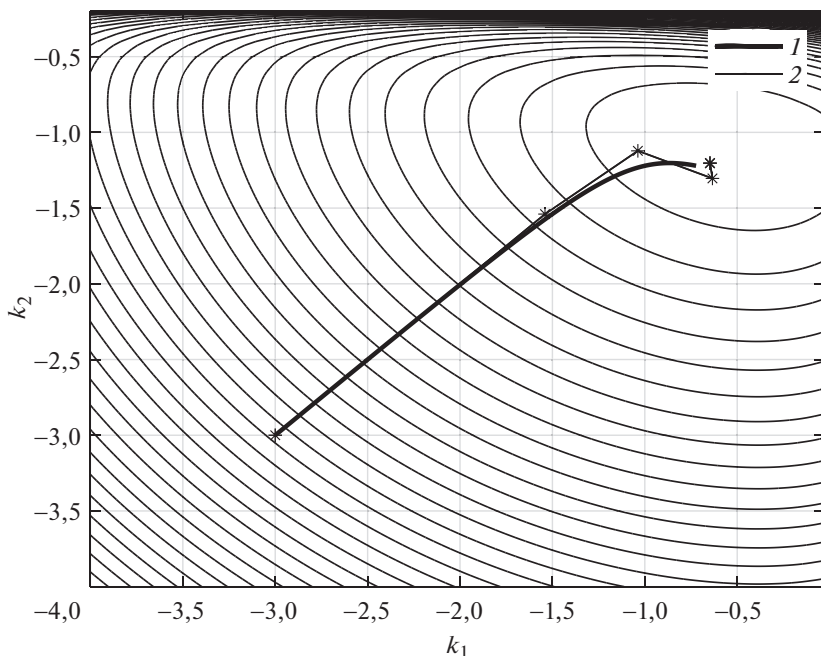


Рис. 3. Линии уровня и оптимизационная процедура в примере 2.

Для начального регулятора

$$K_0 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \end{pmatrix}$$

вычисления в соответствии с алгоритмом 1 доставляют на 119-й итерации регулятор

$$K_* = \begin{pmatrix} -0,7224 & -1,2205 \end{pmatrix},$$

при котором  $f(K_*) = 2,9377$  (линия 1 на рис. 3). Алгоритм 2 требует всего лишь 7 итераций и приводит к регулятору

$$K_* = \begin{pmatrix} -0,6477 & -1,2038 \end{pmatrix},$$

для которого  $f(K_*) = 2.8670$  (линия 2 на рис. 3).

*Пример 3.* Рассмотрим систему с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad B = D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = I, \quad \rho = 1.$$

При  $a = -1,4$  функция

$$f(k) = \text{tr} \left( C_2 P(k) C_2^T \right) + k^2$$

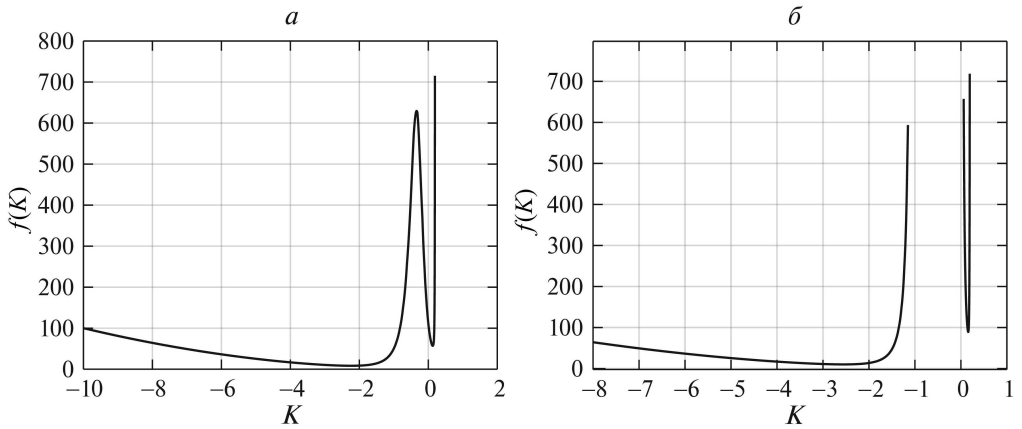


Рис. 4. Графики целевой функции в примере 3.

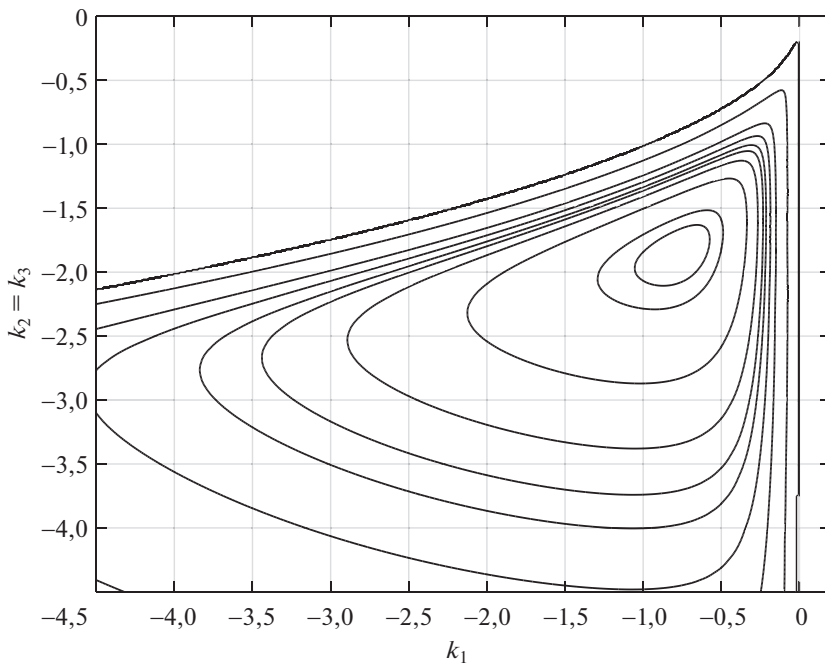


Рис. 5. Линии уровня в примере 4.

имеет два локальных минимума (см. рис. 4,а), а при  $a = -1$  ее область определения несвязна (см. рис. 4,б). Ясно, что отыскивать глобальный минимум в такой задаче очень трудно.

Заметим, что в данном примере используется управление по выходу, тогда как в предыдущем — управление по состоянию.

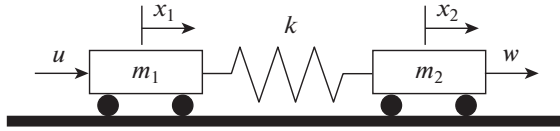


Рис. 6. Двухмассовая система из примера 5.

*Пример 4.* Для системы с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = C_2 = I, \quad \rho = 1,$$

сечение области определения функции  $f(K) = \text{tr}(C_2 P(K) C_2^\top) + \|K\|_F^2$  плоскостью  $k_2 = k_3$  невыпукло, см. рис. 5. Более того, сама область  $\mathcal{S}$  негладкая, а области уровня  $\mathcal{S}_0$  — гладкие.

*Пример 5.* Рассмотрим задачу управления двухмассовой системой из двух твердых тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных пружиной с коэффициентом упругости  $k$ , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (см. рис. 6); к левому телу приложено управление  $u$ , а к правому — внешнее возмущение  $|w| \leq 1$ . Эта задача часто используется как тестовая для различных методов синтеза регуляторов, чему способствуют ее реальное происхождение и разумная размерность модели.

Обозначим через  $x_1, v_1$  координату и скорость левого тела, а через  $x_2, v_2$  — правого тела. Тогда

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad v_1 \quad v_2)^\top$$

есть вектор фазового состояния рассматриваемой динамической системы, полностью описывающий ее поведение.

Непрерывная модель колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w. \end{aligned}$$

При единичных параметрах системы ( $k = m_1 = m_2 = 1$ ) приходим к системе с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

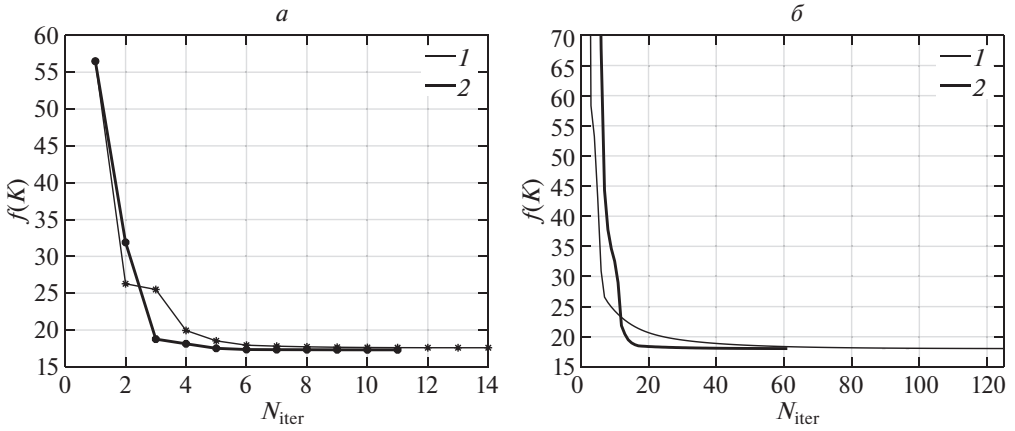


Рис. 7. Оптимизационная процедура в примере 5.

Пусть измерению доступно все состояние системы ( $C_1 = I$ ), а в качестве минимизируемого выхода возьмем координаты левого и правого тела:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть также  $\rho = 1$ .

Сначала в качестве начальной точки выберем некоторый начальный стабилизирующий регулятор

$$K_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующее ему допустимое начальное значение параметра

$$\alpha_0 = \sigma(A + BK_0C_1).$$

Критерием останова процесса будет служить уменьшение целевой функции на некотором шаге менее, чем на 0,001.

На рис. 7,а линия 1 соответствует динамике изменения критерия  $f(K) = \text{tr } C_2 P C_2^\top + \|K\|_F^2$  в соответствии с алгоритмом 1. Процесс завершился нахождением регулятора

$$K_* = \begin{pmatrix} -1,3800 & -0,0836 & -1,5482 & -0,8047 \end{pmatrix},$$

при этом  $f(K_*) = 17,5974$ .

Линия 2 на рис. 7,а соответствует вычислениям по алгоритму 2. Получен регулятор

$$K_* = \begin{pmatrix} -1,0921 & -0,1720 & -1,4263 & -0,5916 \end{pmatrix}.$$

При этом значение целевой функции  $f(K_*) = 17,3148$  улучшилась менее, чем на 2%, однако число итераций сократилось.



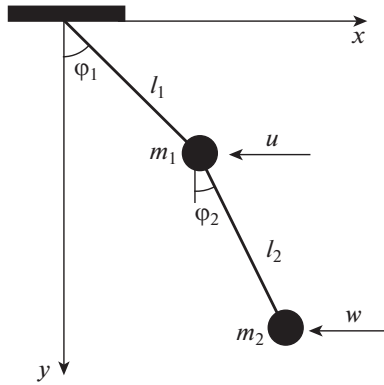


Рис. 8. Двойной математический маятник из примера 6.

Далее, для начального регулятора

$$K_0 = (-2 \quad 0 \quad -3 \quad 1)$$

итерационный процесс на порядок более длителен; его динамика показана на рис. 7,б. Линией 1 показан расчет в соответствии с алгоритмом 1; на 125-й итерации процесс завершился нахождением регулятора

$$K_* = (-1,6245 \quad -0,0794 \quad -1,5570 \quad -0,9869);$$

при этом  $f(K_*) = 18,0417$ .

Линия 2 на рис. 7,б соответствует алгоритму 2. Процесс завершается быстрее (61 итерация) и доставляет регулятор

$$K_* = (-1,6234 \quad -0,0793 \quad -1,5565 \quad -0,9843);$$

при этом значение целевой функции  $f(K_*) = 18,0367$  практически не изменилось.

Таким образом, здесь из разных начальных точек получаем очень близкие оптимальные регуляторы и близкое значение критерия.

*Пример 6.* Рассмотрим двойной математический маятник, состоящий из двух невесомых стержней длины  $l_1$  и  $l_2$ , на концах которых укреплены грузики массами  $m_1$  и  $m_2$ . Система движется в вязкой среде с коэффициентом сопротивления  $\gamma$ , в вертикальной плоскости  $xy$ , и положение маятника определяется углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отклонения стержней от вертикали, см. рис. 8.

На “нижнее” тело воздействует ограниченное внешнее возмущение  $|w| \leq 1$ , для компенсации которого к “верхнему” телу приложено управляющее воздействие  $u$ .

Вводя переменные

$$\varphi_3 = \dot{\varphi}_1, \quad \varphi_4 = \dot{\varphi}_2,$$

приходим к линеаризованной системе

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_3,$$

$$\dot{\varphi}_2 = \varphi_4,$$

$$\dot{\varphi}_3 = - \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{g}{l_1} \varphi_1 + \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \varphi_2 - \frac{\gamma}{m_1} \varphi_3 + \frac{1}{m_1} u,$$

$$\dot{\varphi}_4 = \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{g}{l_2} \varphi_1 - \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{g}{l_2} \varphi_2 - \frac{\gamma}{m_2} \varphi_4 + \frac{1}{m_2} w.$$

При

$$m_1 = m_2 = 1, \quad l_1 = l_2 = g, \quad \gamma = 0,2$$

матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве наблюдаемого выхода выберем

$$y = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в качестве регулируемого выхода — вектор

$$z = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим также  $\rho = 1$ .

Поскольку разомкнутая система устойчива, в качестве начального приближения для регулятора выберем

$$K_0 = (0 \ 0).$$

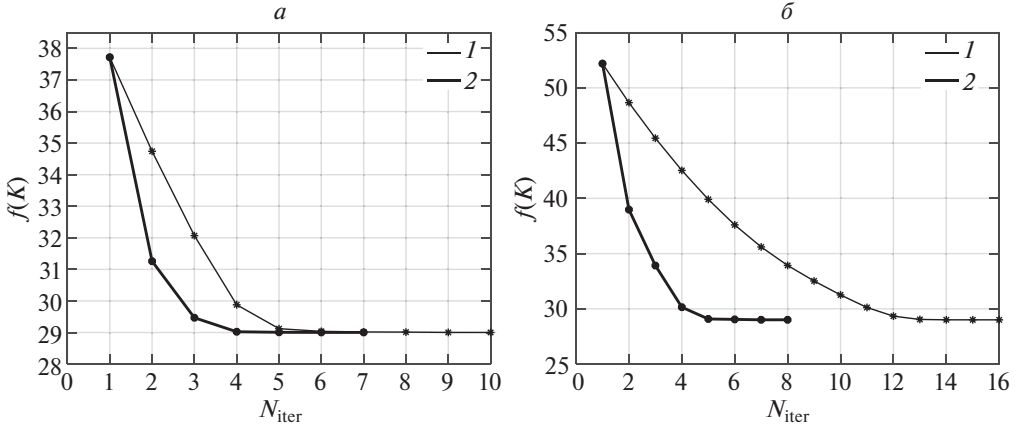


Рис. 9. Оптимизационная процедура в примере 6.

При расчете по алгоритму 1 динамика изменения критерия  $f(K) = \text{tr } C_2 P C_2^T + \|K\|_F^2$  показана линией 1 на рис. 9,а. Процесс завершился на 10-м шаге нахождением стабилизирующего регулятора по выходу

$$K_* = (0,0088 \quad -0,8657) ;$$

при этом  $f(K_*) = 29,0021$ . При выборе шага по алгоритму 2 (линия 2 на рис. 9,а) процесс завершается на 7-м шаге и доставляет регулятор

$$K_* = (0,0083 \quad -0,8680) ;$$

при этом значение целевой функции  $f(K_*) = 29,0029$  практически не изменилось.

Теперь в качестве начального выберем регулятор

$$K_0 = (-1 \quad 1) .$$

При выборе шага в соответствии с алгоритмом 1 процесс (линия 1 на рис. 9,б) завершается на 16-й итерации и доставляет стабилизирующий регулятор по выходу

$$K_* = (0,0086 \quad -0,8697) ,$$

при этом целевая функция  $f(K_*) = 29,0040$ . При выборе шага по алгоритму 2 (линия 2 на рис. 9,б) процесс вновь завершается раньше — на 8-й итерации — и дает регулятор

$$K_* = (0,0165 \quad -0,8711) ,$$

при этом значение целевой функции  $f(K_*) = 29,0071$  вновь практически не изменилось.

## 5. Обсуждение

1. Рассмотрены проблемы подавления внешних возмущений при достаточно жестких ограничениях: предполагалось, что размерность возмущений и регулируемых выходов совпадает с числом состояний. Это было сделано для того, чтобы получить строгое доказательство сходимости предлагаемого алгоритма (теорема 3). Однако метод применим и в более общей ситуации. В частности, рассмотренные примеры демонстрируют, что метод работает и достаточно эффективен и при отсутствии таких ограничений. Его обоснование представляет важную задачу.

2. Второй открытой проблемой является обоснование глобальной сходимости метода к единственной точке минимума в случае управления по состоянию (т.е. когда измеряемый выход  $y$  совпадает с  $x$ ). Можно ожидать, что в этом случае минимизируемая функция удовлетворяет *условию градиентного доминирования* подобно ситуации с линейно-квадратичным регулятором [15].

3. В статье рассмотрена задача управления по выходу. Возможно обобщение на более широкий класс задач (в [10] аналогичные задачи названы *параметрическими LQR*); именно управление имеет вид

$$u = \sum_{i=1}^m k_i C_i x,$$

где  $k_i$  — параметры управления. К такому классу управлений относятся, например, ПИД-регуляторы.

4. Возможны заметно более быстрые методы минимизации первого порядка, чем градиентный метод (алгоритм 1). В частности, формула (24) дает основу для применения метода сопряженных градиентов подобно тому, как это сделано в [15]. Подробная проверка более эффективных методов на задачах большой размерности предполагается в будущем; в данной статье авторам важна принципиальная возможность нового подхода к задачам подавления возмущений.

5. В статье рассмотрена лишь задача синтеза статического регулятора. Для динамических регуляторов в принципе возможен аналогичный подход — матрицы, задающие динамический регулятор, можно рассматривать как переменные и вести по ним оптимизацию. Однако развитие такого подхода требует серьезного обоснования.

## 6. Заключение

Предложен новый подход к задаче синтеза регулятора, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения. Он основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменной является матрица обратной связи (по состоянию или по выходу). Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Многочисленные примеры демонстрируют эффективность предлагаемого алгоритма.

Представляет интерес обобщение данного подхода на новые классы задач, в частности на параметрические регуляторы типа ПИД-регуляторов, где переменными являются коэффициенты этих регуляторов, а также на случай динамических регуляторов.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А.А. Трембе и анонимному рецензенту за интерес к статье, критические замечания и предложения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Лемма П.1.* Пусть  $X$  и  $Y$  — решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей  $A$ :

$$A^T X + X A + W = 0$$

и

$$A Y + Y A^T + V = 0.$$

Тогда

$$\text{tr}(XV) = \text{tr}(YW).$$

*Доказательство леммы П.1.* В самом деле, прямым вычислением имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(XV) &= \text{tr}\left(X(-AY - YA^T)\right) = \\ &= -\text{tr}(XAY) - \text{tr}(XYA^T) = \\ &= -\text{tr}(XAY)^T - \text{tr}(A^T XY)^T = \\ &= \text{tr}\left(Y(-A^T X - XA)\right) = \text{tr}(YW). \end{aligned}$$

Лемма П.1 доказана.

Следующая лемма содержит некоторые хорошо известные результаты (см., например, [19]), необходимые для дальнейшего изложения.

*Лемма П.2.*

1. Для матриц  $A$  и  $B$  соответствующих размерностей справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|AB\|_F &\leq \|A\|_F \|B\|, \\ |\text{tr} AB| &\leq \|A\|_F \|B\|_F, \\ \|A\| &\leq \|A\|_F, \end{aligned}$$

$$AB + B^T A^T \leq \varepsilon AA^T + \frac{1}{\varepsilon} B^T B \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

2. Для неотрицательно определенных матриц  $A$  и  $B$  справедливы соотношения

$$0 \leq \lambda_{\min}(A)\lambda_{\max}(B) \leq \lambda_{\min}(A) \operatorname{tr} B \leq \operatorname{tr} AB \leq \lambda_{\max}(A) \operatorname{tr} B \leq \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B.$$

Лемма П.3. Для решения  $P$  уравнения Ляпунова

$$AP + PA^\top + Q = 0$$

с гурвицевой матрицей  $A$  и  $Q \succ 0$  справедливы оценки:

$$(П.1) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\sigma}, \quad \lambda_{\min}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\|A\|},$$

где  $\sigma = -\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$ .

Если же  $Q = DD^\top$  и пара  $(A, D)$  управляема, то

$$(П.2) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \frac{\|u^*D\|^2}{2\sigma} > 0,$$

где

$$u^*A = \lambda u^*, \quad \operatorname{Re} \lambda = -\sigma, \quad \|u\| = 1,$$

т.е.  $u$  — левый собственный вектор матрицы  $A$ , отвечающий собственному значению  $\lambda$  матрицы  $A$  с наибольшей вещественной частью. Вектор  $u$  и число  $\lambda$  могут быть комплексными; здесь  $u^*$  означает комплексное сопряжение и транспонирование.

Доказательство леммы П.3. Оценки (П.1) хорошо известны, см., например, [20]. Докажем справедливость оценки (П.2). Явное решение уравнения Ляпунова для гурвицевой матрицы имеет вид

$$P = \int_0^{+\infty} e^{At} DD^\top e^{A^\top t} dt.$$

Умножая это равенство справа на  $u$  и слева на  $u^*$  и учитывая, что  $u^*e^{At} = e^{\lambda t}u^*$ ,  $e^{A^\top t}u = e^{\lambda^* t}u$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(P) &\geq u^*Pu = \int_0^{+\infty} u^*e^{At} DD^\top e^{A^\top t} u dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(\lambda+\lambda^*)t} u^* DD^\top u dt = \frac{\|u^*D\|^2}{2\sigma}, \end{aligned}$$

причем  $\|u^*D\| > 0$  в силу управляемости пары  $(A, D)$ , см., например, [5, теорема Д.1.5]. Лемма П.3 доказана.

*Доказательство леммы 1.*

а. Уравнение (6) представимо в виде

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^\top = -\frac{1}{\alpha}DD^\top$$

и согласно [5, лемма 1.2.3] имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица  $A + \frac{\alpha}{2}I$  гурвицева:  $\operatorname{Re} \lambda_i(A + \frac{\alpha}{2}I) < 0$ , т.е. при  $0 < \alpha < 2\sigma$ .

Оценим величину  $f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^\top$ , используя лемму П.3 с очевидными заменами:

$$f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^\top \geq \lambda_{\min}(C^\top C)\lambda_{\max}(P(\alpha)) \geq \frac{\|u^*D\|^2 \lambda_{\min}(C^\top C)}{\alpha(2\sigma - \alpha)},$$

где  $u$  имеет тот же смысл, что и в лемме П.3, а величина  $\|u^*D\|^2$  положительна в силу предположения об управляемости пары  $(A, D)$  (а тем самым и пары  $(A + \frac{\alpha}{2}I, D)$ ).

Покажем теперь, что функция  $f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^\top$  строго выпукла на интервале  $(0, 2\sigma)$ . В соответствии с [5, лемма 1.2.3] решение уравнения (6) представимо в явном виде как

$$P(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)t} \frac{1}{\alpha} DD^\top e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)^\top t} dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}}_{g(\alpha, t)} \underbrace{e^{At} DD^\top e^{A^\top t}}_{h(t)} dt.$$

Но  $g(\alpha, t) > 0$ ,  $h(t) > 0$  при  $\alpha > 0$ , поэтому на интервале  $(0, 2\sigma)$  имеем

$$P(\alpha) = \int_0^{+\infty} g(\alpha, t)h(t)dt > 0, \quad f(\alpha) = \operatorname{tr} P(\alpha)C_2^\top C_2 > 0.$$

Прямым вычислением получаем

$$g''(\alpha, t) = ((\alpha t - 1)^2 + 1) \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^3} \geq \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^3} = \frac{1}{\alpha^2} g(\alpha, t)$$

(здесь дифференцирование производится по  $\alpha$ ), так что

$$f''(\alpha) = \int_0^{+\infty} g''(\alpha, t)h(t)dt \geq \frac{1}{\alpha^2} f(\alpha) \geq \frac{1}{4\sigma^2} f(\alpha^*) > 0.$$

Таким образом, вторая производная функции  $f(\alpha)$  положительна и стремится к бесконечности на концах интервала  $(0, 2\sigma)$ .

Аналогичным образом прямым вычислением четвертой производной получаем

$$g^{(IV)}(\alpha, t) = ((\alpha t - 2)^2 \alpha^2 t^2 + 2(2\alpha t - 3)^2 + 6) \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^5} \geq \frac{6}{\alpha^5} e^{\alpha t} = \frac{6}{\alpha^4} g(\alpha, t),$$

таким образом,

$$f^{(IV)}(\alpha) \geq \frac{6}{\alpha^4} f(\alpha) > 0,$$

т.е. вторая производная  $f''(\alpha)$  сама является выпуклой и растет на границах интервала.

б. Выведем теперь формулу для производной функции  $f(\alpha)$ . В уравнении (6) решение  $P$  является функцией от  $\alpha$ . Продифференцируем это уравнение; под  $P'$  будем понимать производную по  $\alpha$ :

$$AP' + P'A^\top + \alpha P' + P - \frac{1}{\alpha^2} DD^\top = 0.$$

Сравнивая уравнения для  $P'$  и  $Y$  и применяя лемму П.1, получаем желаемую формулу

$$f'(\alpha) = \text{tr} CP'C^\top = \text{tr} Y \left( P - \frac{1}{\alpha^2} DD^\top \right).$$

в. Аналогично получим выражение для второй производной  $f(\alpha)$ . Дифференцируя уравнение для  $P'$  по  $\alpha$ , получаем

$$AP'' + P''A^\top + \alpha P'' + 2P' + \frac{2}{\alpha^3} DD^\top = 0.$$

Вновь применяя лемму П.1 к этому уравнению и уравнению (10) (и имея в виду, что  $X = P'$ ), получаем

$$f''(\alpha) = \text{tr} CP''C^\top = 2 \text{tr} Y \left( X + \frac{1}{\alpha^3} DD^\top \right).$$

Лемма 1 доказана.

*Доказательство леммы 3.* Рассмотрим последовательность стабилизирующих регуляторов  $\{K_j\} \subseteq \mathcal{S}$  такую, что  $K_j \rightarrow K \in \partial\mathcal{S}$ , т.е.  $\sigma(A+BKC_1) = 0$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что неравенство

$$|\sigma(A+BK_jC_1) - \sigma(A+BKC_1)| = \sigma(A+BK_jC_1) < \varepsilon$$

справедливо для всех  $j \geq N(\varepsilon)$ .

Пусть  $P_j$  — решение уравнения Ляпунова (15), ассоциированного с регулятором  $K_j$ :

$$\left( A_{K_j} + \frac{\alpha_j}{2} I \right) P_j + P_j \left( A_{K_j} + \frac{\alpha_j}{2} I \right)^\top + \frac{1}{\alpha_j} DD^\top = 0,$$

а  $Y_j$  — решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$\left( A_{K_j} + \frac{\alpha_j}{2} I \right)^\top Y_j + Y_j \left( A_{K_j} + \frac{\alpha_j}{2} I \right) + C_2 C_2^\top = 0.$$



Тогда

$$\begin{aligned}
f(K_j) &= \operatorname{tr} \left( C_2 P_j C_2^\top \right) + \rho \|K_j\|_F^2 \geq \operatorname{tr} \left( P_j C_2 C_2^\top \right) = \operatorname{tr} \left( Y_j \frac{1}{\alpha_j} D D^\top \right) \geq \\
&\geq \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D\|_F^2 \geq \frac{1}{\alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^\top)}{2\|A + B K_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\|} \|D\|_F^2 \geq \\
&\geq \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^\top)}{4\sigma(A + B K_j C_1)\|A + B K_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\|} \|D\|_F^2 \geq \\
&\geq \frac{\lambda_{\min}(C_2 C_2^\top)}{4\varepsilon(\|A + B K_j C\| + \varepsilon)} \|D\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty,
\end{aligned}$$

поскольку

$$0 < \alpha_j < 2\sigma(A + B K_j C_1) \quad \text{и} \quad \sigma \left( A + B K_j C_1 + \frac{\alpha_j}{2} I \right) \leq \sigma(A + B K_j C_1).$$

С другой стороны,

$$f(K_j) = \operatorname{tr} (C_2 P_j C_2^\top) + \rho \|K_j\|_F^2 \geq \rho \|K_j\|_F^2 \geq \rho \|K_j\|^2 \xrightarrow{\|K_j\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма 3 доказана.

*Доказательство леммы 4.* Система (12), замкнутая обратной связью (13), принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned}
(\text{П.3}) \quad \dot{x} &= (A + B K C_1)x + D w, \\
z &= C_2 x.
\end{aligned}$$

Применяя к системе (П.3) теорему 1, приходим к задаче

$$\min f(K, \alpha), \quad f(K, \alpha) = \operatorname{tr} C_2 P C_2^\top + \rho \|K\|_F^2$$

при ограничении в виде уравнения Ляпунова относительно матрицы  $P$  инвариантного эллипсоида:

$$(A + B K C_1)P + P(A + B K C_1)^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D D^\top = 0.$$

Дифференцирование по  $\alpha$  делается так же, как и выше, с заменой  $A$  на  $A_K = A + B K C_1$ . Для дифференцирования по  $K$  дадим ему приращение  $\Delta K$  и обозначим соответствующее приращение  $P$  через  $\Delta P$ :

$$\begin{aligned}
(A + B(K + \Delta K)C_1)(P + \Delta P) + (P + \Delta P)(A + B(K + \Delta K)C_1)^\top + \\
+ \alpha(P + \Delta P) + \frac{1}{\alpha} D D^\top = 0
\end{aligned}$$

или, после линеаризации и вычитания этого и предыдущего уравнений,

$$\begin{aligned}
(\text{П.4}) \quad \left( A + B K C_1 + \frac{\alpha}{2} I \right) \Delta P + \Delta P \left( A + B K C_1 + \frac{\alpha}{2} I \right)^\top + \\
+ B \Delta K C_1 P + P (B \Delta K C_1)^\top = 0.
\end{aligned}$$

Вычислим приращение функционала  $f(K)$ , линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned}\Delta f(K) &= \text{tr} C_2 \Delta P C_2^\top + \rho \text{tr} K^\top \Delta K + \rho \text{tr} (\Delta K)^\top K = \\ &= \text{tr} C_2^\top C_2 \Delta P + 2\rho \text{tr} K^\top \Delta K.\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (20), двойственное к (П.4). По лемме П.1 из уравнений (П.4) и (20) имеем

$$\Delta f(K) = \text{tr} 2C_1 P Y B \Delta K + 2\rho \text{tr} K^\top \Delta K = \langle 2(\rho K + B^\top Y P C_1^\top), \Delta K \rangle.$$

Таким образом,

$$\nabla_K f(K, \alpha) = 2(\rho K + B^\top Y P C_1^\top).$$

Лемма 4 доказана.

*Доказательство леммы 5.* Вычислим

$$\nabla_K^2 f(K)[E, E] = \langle \nabla_K^2 f(K)[E], E \rangle,$$

взяв производную по направлению  $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$  от  $\nabla_K f(K)[E] = \langle \nabla_K f(K), E \rangle$ .

Линеаризуя соответствующие величины, вычислим приращение функционала  $\nabla_K f(K)[E]$  по направлению  $E$ :

$$\begin{aligned}\Delta \nabla_K f(K)[E] &= 2 \left( \rho K + \rho \delta E + B^\top (Y + \Delta Y)(P + \Delta P) C_1^\top \right) - \\ &\quad - 2 \left( \rho K + B^\top Y P C_1^\top \right) = \\ &= 2 \left( \rho K + \rho \delta E + B^\top (Y + \delta Y'(K)[E])(P + \delta P'(K)[E]) C_1^\top \right) - \\ &\quad - 2 \left( \rho K + B^\top Y P C_1^\top \right) = 2\delta \left( \rho E + B^\top (Y P'(K)[E] + Y'(K)[E] P) C_1^\top \right),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(K + \delta E) - P(K) = \delta P'(K)[E], \\ \Delta Y &= Y(K + \delta E) - Y(K) = \delta Y'(K)[E].\end{aligned}$$

Таким образом, обозначая  $P' = P'(K)[E]$  и  $Y' = Y'(K)[E]$ , имеем

$$\frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K)[E, E] = \langle \rho E + B^\top (Y P' + Y' P) C_1^\top, E \rangle.$$

Далее,  $P = P(K)$  есть решение уравнения (15); запишем его в приращениях по направлению  $E$ :

$$\begin{aligned}(A + B(K + \delta E) C_1) (P + \delta P') + (P + \delta P') (A + B(K + \delta E) C_1)^\top + \\ + \alpha (P + \delta P') + \frac{1}{\alpha} D D^\top = 0,\end{aligned}$$

или

$$(A + BKC_1)(P + \delta P') + (P + \delta P')(A + BKC_1)^\top + \\ + \alpha(P + \delta P') + \delta (BEC_1 P + P(BEC_1)^\top) + \frac{1}{\alpha} DD^\top = 0.$$

Вычитая из полученного соотношения уравнение (6), приходим к уравнению (22).

Далее,  $Y = Y(K)$  есть решение уравнения Ляпунова (20); запишем его в приращениях по направлению  $E$ :

$$(A + B(K + \delta E)C_1)^\top (Y + \delta Y') + (Y + \delta Y')(A + B(K + \delta E)C_1) + \\ + \alpha(Y + \delta Y') + C_2^\top C_2 = 0,$$

или

$$(A + BKC_1)^\top (Y + \delta Y') + (Y + \delta Y')(A + BKC_1) + \\ + \alpha(Y + \delta Y') + \delta \left( (BEC_1)^\top Y + YBEC_1 \right) + C_2^\top C_2 = 0.$$

Вычитая из полученного соотношения уравнение (8), имеем

$$(П.5) \quad \left( A + BKC_1 + \frac{\alpha}{2} I \right)^\top Y' + Y' \left( A + BKC_1 + \frac{\alpha}{2} I \right) + \\ + (BEC_1)^\top Y + YBEC_1 = 0.$$

Из (22) и (П.5) имеем соотношение

$$\text{tr } P' Y B E C_1 = \text{tr } Y' B E C_1 P,$$

так что

$$\frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K)[E, E] = \rho \langle E, E \rangle + \langle B^\top (Y P' + Y' P) C_1^\top, E \rangle = \\ = \rho \langle E, E \rangle + 2 \langle B^\top Y P' C_1^\top, E \rangle.$$

Лемма 5 доказана.

*Следствие П.1.* Для действия гессиана функции  $f(K)$  на матрицу  $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$ , такую что  $\|E\|_F = 1$ , справедлива оценка

$$\frac{1}{2} \sup_{\|E\|_F=1} |\nabla_K^2 f(K)[E, E]| \leq \rho + 2\|P'\|_F \|Y\| \|B\|_F \|C_1\|.$$

*Доказательство следствия П.1.* Согласно (21)

$$\frac{1}{2} \sup_{\|E\|_F=1} |\nabla_K^2 f(K)[E, E]| \leq \sup_{\|E\|_F=1} \rho \langle E, E \rangle + 2 \sup_{\|E\|_F=1} |\langle B^\top Y P' C_1^\top, E \rangle| = \\ = \rho \sup_{\|E\|_F=1} \|E\|_F^2 + 2 \sup_{\|E\|_F=1} |\langle P', Y B E C_1 \rangle| \leq \rho + 2\|P'\|_F \sup_{\|E\|_F=1} \|Y B E C_1\|_F \leq \\ \leq \rho + 2\|P'\|_F \|Y\| \|B\|_F \|C_1\|,$$

поскольку с учетом леммы П.2

$$\|YBEC_1\|_F \leq \|Y\| \|B\|_F \|E\|_F \|C_1\|.$$

Следствие П.1 доказано.

*Доказательство леммы 6.* Согласно следствию П.1 достаточно оценить сверху величину

$$\rho + 2\|P'\|_F \|Y\| \|B\|_F \|C_1\|.$$

Имеем оценку для  $\|Y\|$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min}(DD^\top) \|Y\| &\leq \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min}(DD^\top) \operatorname{tr} Y \leq \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr} YDD^\top = \operatorname{tr} Y \frac{1}{\alpha} DD^\top = \\ &= \operatorname{tr} PC_2^\top C_2 = \operatorname{tr} C_2 PC_2^\top = f(K) - \rho \|K\|_F^2 \leq f(K) \leq f(K_0), \end{aligned}$$

откуда

$$(П.6) \quad \|Y\| \leq \frac{\alpha}{\lambda_{\min}(DD^\top)} f(K_0).$$

Оценка для  $\alpha$  устанавливается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha &< 2\sigma(A + BKC_1) \leq 2\|A + BKC_1\| \leq \\ &\leq 2(\|A\| + \|B\| \|K\| \|C_1\|) \leq 2(\|A\| + \|B\| \|K\|_F \|C_1\|) \leq \\ &\leq 2(\|A\| + \|B\| \sqrt{f(K)} \|C_1\|) \leq 2(\|A\| + \sqrt{f(K_0)} \|B\| \|C_1\|), \end{aligned}$$

так что

$$\|Y\| \leq 2 \frac{\|A\| + \sqrt{f(K_0)} \|B\| \|C_1\|}{\lambda_{\min}(DD^\top)} f(K_0).$$

Теперь оценим сверху  $\|P\|$ :

$$\lambda_{\min}(C_2^\top C_2) \|P\| \leq \operatorname{tr}(C_2 PC_2^\top) = f(K) - \rho \|K\|_F^2 \leq f(K) \leq f(K_0),$$

откуда

$$\|P\| \leq \frac{f(K_0)}{\lambda_{\min}(C_2^\top C_2)}.$$

Наконец, оценим сверху  $\|P'\|_F$ . С учетом леммы П.2 заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}\left(BEC_1 P + P(BEC_1)^\top\right) &= \\ &= \|BEC_1 P + P(BEC_1)^\top\| \leq \|P^2 + BEC_1(BEC_1)^\top\| \leq \\ &\leq \|P\|^2 + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \|E\|_F^2 \leq \frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^\top C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 = \xi \frac{1}{\alpha} \lambda_{\min}(DD^\top) \end{aligned}$$

при

$$\xi = \frac{\alpha}{\lambda_{\min}(DD^\top)} \left( \frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^\top C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \right).$$

Поэтому для решения  $P'$  уравнения Ляпунова (22) справедлива оценка

$$\begin{aligned} P' &\preceq \xi P \preceq \frac{\alpha}{\lambda_{\min}(DD^T)} \left( \frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^T C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \right) \frac{f(K_0)}{\lambda_{\min}(C_2^T C_2)} I \preceq \\ &\preceq 2f(K_0) \frac{\|A\| + \sqrt{f(K_0)} \|B\| \|C_1\|}{\lambda_{\min}(DD^T) \lambda_{\min}(C_2^T C_2)} \left( \frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^T C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \right) I, \end{aligned}$$

откуда

$$(II.7) \quad \begin{aligned} \|P'\|_F &\leq 2\sqrt{n} f(K_0) \times \\ &\times \frac{\|A\| + \sqrt{f(K_0)} \|B\| \|C_1\|}{\lambda_{\min}(DD^T) \lambda_{\min}(C_2^T C_2)} \left( \frac{f^2(K_0)}{\lambda_{\min}^2(C_2^T C_2)} + \|B\|^2 \|C_1\|^2 \right). \end{aligned}$$

С учетом оценок (II.6) и (II.7) приходим к величине (23). Лемма 6 доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Прежде всего, алгоритм 1 определен корректно в начальной точке, так как  $K_0$  является стабилизирующим регулятором в силу предположения. Далее, при достаточно малых  $\gamma_j$  в алгоритме происходит монотонное уменьшение  $f(K)$  (движение по антиградиенту), т.е.  $K_j$  остаются в области  $\mathcal{S}_0$  и тем самым можно применять результаты леммы 6 о липшицевости градиента.

Таким образом, применимы результаты о сходимости градиентного метода для безусловной минимизации [18]. В частности, условие б на шаге 3 алгоритма 1 будет выполнено после конечного числа дроблений, а в градиентном методе будет иметь место сходимость по градиенту с линейной скоростью. Теорема 3 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A Linear Matrix Inequality Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1996. V. 6. No. 9–10. P. 899–927.
3. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.  
*Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V.* Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
4. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // АиТ. 2011. № 11. С. 9–59.  
*Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M.* Optimization of Linear Systems Subject to Bounded Exogenous Disturbances: The Invariant Ellipsoid Technique // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 11. P. 2227–2275.

5. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
6. Grant M., Boyd S. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. URL <http://cvxr.com/cvx>
7. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
8. Kalman R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. V. 5. No. 1. P. 102–119.
9. Levine W., Athans M. On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
10. Mäkilä P.M., Toivonen H.T. Computational Methods for Parametric LQ Problems – A Survey // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. 32. No. 8. P. 658–671.
11. Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M. Global Convergence of Policy Gradient Methods for the Linear Quadratic Regulator // Proc. 35th Int. Conf. Machine Learning. Stockholm, Sweden, July 10–15, 2018. V. 80. P. 1467–1476.
12. Mohammadi H., Zare A., Soltanolkotabi M., Jovanović M.R. Global Exponential Convergence of Gradient Methods Over the Nonconvex Landscape of the Linear Quadratic Regulator // Proc. 2019 IEEE 58th Conf. Decision Control. Nice, France, December 11–13, 2019. P. 7474–7479.
13. Zhang K., Hu B., Başar T. Policy Optimization for  $\mathcal{H}_2$  Linear Control with  $\mathcal{H}_\infty$  Robustness Guarantee: Implicit Regularization and Global Convergence // arXiv: 1910.09496, 2020.
14. Bu J., Mesbahi A., Fazel M., Mesbahi M. LQR through the Lens of First Order Methods: Discrete-Time Case // arXiv:1907.08921, 2019.
15. Fatkhullin I., Polyak B. Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. on Control and Optimization (in press), arXiv:2004.09875, 2020.
16. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.  
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
17. Nesterov Y., Protasov V.Y. Computing Closest Stable Non-Negative Matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2020. V. 41. Iss. 1. P. 1–28.
18. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. 2-е изд. М.: УРСС, 2014.
19. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
20. Lee C.-H. New Results for the Bounds of the Solution for the Continuous Riccati and Lyapunov Equations // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. No. 1. P. 118–123.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 25.01.2021

После доработки 16.04.2021

Принята к публикации 29.04.2021