Автоматика и телемеханика, № 9, 2021

Стохастические системы

© 2021 г. **В.И. ВОРОТНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (vorotnikov-vi@rambler.ru)**
(Сочинский институт Российского университета дружбы народов),
Ю.Г. МАРТЫШЕНКО, канд. физ.-мат. наук (j-mart@mail.ru)
(Российский государственный университет нефти и газа, Москва)

К ЗАДАЧЕ ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается система нелинейных дискретных уравнений, подверженных воздействию дискретного случайного процесса типа "белого" шума. Предполагается, что система допускает "частичное" (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Ставится задача частичной устойчивости по вероятности: устойчивости данного положения равновесия не по всем, а только по отношению к части определяющих его переменных. Для решения применяется дискретно-стохастический вариант метода функций Ляпунова при соответствующей конкретизации требований к функции Ляпунова. С целью расширения возможностей используемого метода предлагается проводить корректировку области, в которой строится вспомогательная функция Ляпунова; это достигается посредством введения дополнительной (векторной, вообще говоря) вспомогательной функции. Получены условия частичной устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности указанного вида. Приводится пример, показывающий особенности предложенного подхода.

Ключевые слова: система нелинейных дискретных (конечно-разностных) стохастических уравнений, частичная устойчивость, метод функций Ляпунова.

DOI: 10.31857/S000523102109004X

1. Введение

Задачи устойчивости относятся к основным задачам качественного анализа и синтеза нелинейных динамических систем, подверженных воздействию случайных возмущений и изменениям структуры. Как и в случае детерминированных систем, для их решения используется метод функций Ляпунова.

Существенное влияние на развитие стохастического варианта метода функций Ляпунова оказала идея И.Я. Каца и Н.Н. Красовского [1] использования *усредненной производной* функции Ляпунова, для вычисления которой достаточно знать лишь правые части системы и вероятностные характеристики воздействующего на систему случайного процесса. Данный подход, предложенный для систем дифференциальных уравнений, правая часть которых содержит однородную марковскую цепь с конечным числом состояний, в значительной степени предопределил многие последующие исследования: систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито [2, 3], а также более общих классов стохастических систем со случайными параметрами и (или) структурой [4, 5].

Отдельное направление исследований связано с анализом устойчивости *дискретных* (конечно-разностных) систем, подверженных воздействию случайных факторов. Повышенный интерес к дискретным системам связан с использованием цифровых систем управления, проблемами финансовой математики, динамики биоценозов, а также с задачами численного решения систем стохастических дифференциальных уравнений. На этом пути разработан [2, 6–13] соответствующий дискретно-стохастический вариант метода функций Ляпунова применительно к обладающей большой общностью задаче устойчивости *по отношению ко всем переменным* нулевого положения равновесия. Рассмотрена также [14] задача устойчивости компактных множеств в фазовом пространстве системы. Усредненная производная (или дифференциальный производящий оператор [2, 3, 5]) заменяется в данных случаях *усредненной конечной разностью* функции Ляпунова [6].

Начиная с публикаций В.В. Румянцева [15, 16] в теории устойчивости детерминированных систем, а затем и стохастических систем с непрерывной динамикой рассматриваются задачи *частичной устойчивости* (см. обзор [17]): устойчивости по отношению к части переменных нулевого положения равновесия, а также устойчивости по всем и по части переменных "частичного" (нулевого) положения равновесия. С формально-математической точки зрения задача устойчивости по всем переменным "частичного" положения равновесия относится к задаче устойчивости некомпактных (замкнутых, но неограниченных) множеств, в то время как задачи устойчивости по части переменных имеют самостоятельное значение и не сводятся, вообще говоря, к каким-либо задачам устойчивости множеств. Дело в том, что устойчивость по отношению к части переменных не предполагает близости траекторий, соответствующих возмущенным движениям и невозмущенному движению (положению равновесия) системы.

Содержательно указанные задачи частичной устойчивости естественным образом возникают в приложениях как исходя из требования нормального функционирования, так и при оценке возможностей проектируемой системы. Они также могут рассматриваться и как вспомогательные задачи при анализе устойчивости по всем переменным выделенных положений равновесия. Кроме того, возникают соответствующие задачи частичной стабилизации нелинейных управляемых систем, активно рассматриваемые в последние годы. Однако для систем стохастических дискретных уравнений задачи частичной устойчивости и стабилизации практически не изучались.

В данной статье рассматривается система нелинейных дискретных (конечно-разностных) уравнений общего вида, подверженных воздействию дискретного случайного процесса типа "белого" шума. Предполагается, что система допускает "частичное" (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Дается постановка задачи устойчивости по вероятности этого положения равновесия; устойчивость рассматривается по отношению к части определяющих его фазовых переменных. Анализируется возможность решения поставленной задачи на основе метода функций Ляпунова.

2. Определения. Постановка задачи

Рассмотрим линейное конечномерное пространство векторов $\mathbf{x}$ с евклидовой нормой $\|\mathbf{x}\|$. Введем разбиение вектора $\mathbf{x}$ на две части: $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ (T обозначает транспонирование). Обозначим через $\mathbb{Z}_+ = \{k = 0, 1, 2, \dots\}$ множество целых неотрицательных чисел.

Пусть дана конечномерная нелинейная система стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений [2, 6–14]

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)),$$

в которой: $k \in \mathbb{Z}_+$ – дискретное время; $\mathbf{x}(k)$ – последовательность значений фазового вектора, определяющих состояние системы; $\boldsymbol{\xi}(k)$ – последовательность независимых случайных векторов, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega,\ F,\ \mathbf{P})$, с одинаковыми законами распределения для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$. Здесь Ω – пространство элементарных событий $\{\omega\}$ с заданными на нем σ-алгеброй F измеримых множеств с фильтрацией F_k и вероятностной мерой $\mathbf{P}$: $F \to [0, 1]$.

С учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим рассматриваемую систему в виде двух групп уравнений

$$(1) \qquad \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{Y}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k), \boldsymbol{\xi}(k)), \quad \mathbf{z}(k+1) = \mathbf{Z}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k), \boldsymbol{\xi}(k)).$$

Если имеет место условие

$$\mathbf{Y}(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}(k), \boldsymbol{\xi}(k)) \equiv \mathbf{0},$$

то множество $M = \{\mathbf{x}(k) : \mathbf{y}(k) = \mathbf{0}\}$ является “частичным” положением равновесия системы (1).

Допустим также, что вектор-функция $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, определяющая правую часть системы (1), при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ *непрерывна* по $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\xi}$ в области $\|\mathbf{x}\| < \infty$. Начальное значение $\mathbf{x}_0$ фазового вектора будем считать *детерминированным*. Тогда (см., например, [9, 11]) для всех $k_0 \geq 0$, $\mathbf{x}_0$ существует единственный случайный многомерный марковский процесс, согласованный с потоком σ-алгебр F_k и являющийся в пространстве $\{\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\}$ случайной вектор-функцией $\{\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\xi}(k)\}$, реализации $\{\mathbf{x}(k, \omega) = \mathbf{x}(k, \omega; k_0, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\xi}(k, \omega)\}$ которой удовлетворяют системе (1). Данный случайный процесс и соответствующий ему набор реализаций случайной вектор-функции при всех $k \geq k_0$ определяют решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(k_0; k_0, \mathbf{x}_0)$, а также соответствующий этому решению набор выборочных траекторий системы (1). Марковское свойство решений системы (1) используется далее при обосновании условий частичной устойчивости по вероятности.

При сделанных предположениях “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) является инвариантным множеством этой системы. Предположение $\mathbf{X}(k, \mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}(k)) \equiv \mathbf{0}$ о существовании “полного” положения равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ не является необходимым и даже может противоречить смыслу решаемых задач.

Следуя подходу теории частичной устойчивости, будем анализировать устойчивость “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ не по всем определяющим его переменным, а только по отношению к их некоторой наперед *заданной* части. Для этого предположим, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2)^{\mathrm{T}}$, причем вектор $\mathbf{y}_1$ включает те компоненты вектора $\mathbf{y}$, устойчивость по отношению к которым рассматривается.

В данном случае входящие в вектор $\mathbf{z}$ переменные являются “неконтролируемыми”, хотя они существенно влияют на динамику $\mathbf{y}_1$-переменных. Для расширения функциональных возможностей рассматриваемых далее понятий $\mathbf{y}_1$-устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ введем произвольным образом разбиение $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ вектора $\mathbf{z}$ на две группы переменных.

Обозначим через D_δ область значений $\mathbf{x}_0$ таких, что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_{10}\| \le L$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$; область D_Δ получается заменой δ на Δ.

Определение. “Частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ (for a large values of $\mathbf{z}_{10}$ and on the whole with respect to $\mathbf{z}_{20}$):

1) *$\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности, если для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$ такое, что для всех $k \ge k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \ge k_0} ||\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)|| > \varepsilon\right\} < \gamma; \tag{2}$$

2) *равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$;*

3) *асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво, если оно равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности и, кроме того, для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\Delta(L) > 0$ такое, что для всех $k \ge k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{||\mathbf{y}_0|| \to 0} \mathbf{P}\left\{\lim_{k \to +\infty} ||\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)|| = 0\right\} = 1.$$

Замечание 1. Можно показать (см., например, [5]), что если $\mathbf{x}_0$ – случайная величина (не зависящая от $\boldsymbol{\xi}(k)$), а включения $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ выполняются почти наверное (с вероятностью единица), то получаем определения, эквивалентные введенным определениям частичной устойчивости.

Замечание 2. Наиболее близкими к введенным являются понятия частичной устойчивости: по всем [18, 19] и по отношению к части переменных [20] “частичного” положения равновесия стохастических систем дифференциальных уравнений в форме Ито. Предположения “в целом по $\mathbf{z}_0$” или “при больших значениях $\mathbf{z}_0$” характерны для определений устойчивости (как по всем, так и по части переменных) “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1), но приводят к различным требованиям к функциям Ляпунова. За счет разделения вектора $\mathbf{z}_0$ на две части возникают “промежуточные” понятия $\mathbf{y}_1$-устойчивости в смысле введенных определений 1–3. При этом надлежащий выбор разбиения $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ зависит от структуры системы (1) и является результатом поиска компромисса между содержательным смыслом понятия $\mathbf{y}_1$-устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова. Кроме того, введенные понятия устойчивости возникают при переходе (посредством обозначений $w = k$, $r = k - k_0$) от системы (1) к *стационарной* дискретной системе

$$\mathbf{x}(r+1) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(r), w(r), \boldsymbol{\xi}(r)), \quad w(r+1) = w(r) + 1,$$

когда требования равномерности (неравномерности) по k_0 в задачах $\mathbf{y}_1$-устойчивости при больших значениях $\mathbf{z}_0$ или в целом по $\mathbf{z}_0$ “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ заменяются требованиями “в целом по w_0” (“при больших значениях w_0”).

3. Условия частичной устойчивости

В контексте метода функций Ляпунова будем рассматривать однозначные непрерывные по $\mathbf{x}$ при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ скалярные функции $V = V(k, \mathbf{x})$, $V(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные в области

$$\|\mathbf{y}_1\| < h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty. \tag{3}$$

Аналогом производных этих функций в силу исследуемой системы (1) являются их *усредненные разности* (приращения), вычисляемые по формуле [6, 9]

$$\mathbf{L}V(k, \mathbf{x}) = \mathbf{E}[V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)))|\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}] - V(k, \mathbf{x}),$$

где оператор $\mathbf{E}[V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)))|\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}]$ определяет условное математическое ожидание при $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}$ случайной величины $V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k)\boldsymbol{\xi}(k)))$, порожденной набором реализаций $\{\mathbf{x}(k, \omega), \boldsymbol{\xi}(k, \omega)\}$ процесса $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)\}$, являющегося решением системы (1).

Также для формулировки условий частичной устойчивости дополнительно будут использоваться следующие вспомогательные функции.

1) Скалярные функции $V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, $V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, необходимые для конкретизации (в соответствии с постановкой задачи) требований к V-функции Ляпунова, и вспомогательная векторная функция $\boldsymbol{\mu}(k, x)$, $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, посредством которой корректируется область, где строится основная V-функция Ляпунова. Эти функции при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ непрерывны по $\mathbf{x}$ в области (3).

2) Непрерывные монотонно возрастающие по $r > 0$ скалярные функции $a_i(r)$, $a_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ (функции типа Хана [16]), определяющие стандартные требования к основной V-функции Ляпунова.

Введение, наряду с основной V-функцией Ляпунова, дополнительной вспомогательной $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})$-функции мотивируется следующим обстоятельством. При исследовании $\mathbf{y}_1$-устойчивости по вероятности "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) в общем случае имеет место зависимость V-функций Ляпунова не только от k, $\mathbf{y}_1$, но и от $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}$. В такой ситуации анализ поставленной задачи $\mathbf{y}_1$-устойчивости в обычно рассматриваемой области

$$\|\mathbf{y}_1\| < h_1 < h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{4}$$

не всегда дает возможность выявить желаемые свойства V-функции Ляпунова или наделить ее этими свойствами. Причина в требовании $\|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty$, которое существенно затрудняет возможность получения необходимых оценок для V-функции Ляпунова и ее усредненной конечной разности.

Указанное требование представляет, по сути, расчет на "наихудший" случай изменения переменных $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{z}$, и его можно заменить более "мягким" требованием

$$\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})\| < h_1 < h, \quad \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty, \tag{5}$$

если иметь в виду "расширенную" $(\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu})$-устойчивость "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (1). В данном случае $\boldsymbol{\mu}$-функция не является изначально заданной и подбирается в процессе решения исходной задачи $\mathbf{y}_1$-устойчивости, причем расширение понятия $\mathbf{y}_1$-устойчивости может происходить за счет зависимости $\boldsymbol{\mu}$-функции не только от k, $\mathbf{y}$, но и от $\mathbf{z}$.

Поэтому выбор подходящей V-функции Ляпунова не только возможно, но и целесообразно согласовывать с выбором области $(k, \mathbf{x})$-пространства, в которой эта функция рассматривается. Указанного согласования можно добиться введением, наряду с *основной* V-функцией Ляпунова, *дополнительной* (векторной, вообще говоря) вспомогательной $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})$-функции для корректировки области, в которой строится основная V-функция Ляпунова.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1), *наряду с основной скалярной V-функцией Ляпунова, можно указать дополнительную векторную функцию $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, для которых при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области* (5) *выполняются условия:*

$$V(k, \mathbf{x}) \geq a_1(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})\|), \tag{6}$$

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), \quad V^*(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0, \tag{7}$$

$$\mathbf{L}V(k, \mathbf{x}) = \mathbf{E}[V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)) | \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}] - V(k, \mathbf{x}) \leq 0. \tag{8}$$

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) *$\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$.*

Если условия (7) *заменить условиями*

$$V(k,\mathbf{x}) \le V^*(\mathbf{y},\mathbf{z}_1), \quad V^*(\mathbf{0},\mathbf{z}_1) \equiv 0, \tag{9}$$

то "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k)=\mathbf{0}$ *системы* (1) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательства теоремы 1 и последующей теоремы 2 вынесены в Приложение.

В рамках рассматриваемого подхода можно сформулировать также и условия *асимптотической* $\mathbf{y}_1$-устойчивости по вероятности при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k)=\mathbf{0}$ системы (1). Приведем один из вариантов таких условий.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1), *наряду с основной скалярной* V*-функцией Ляпунова, можно указать дополнительную векторную функцию* $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, *для которых при каждом* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и достаточно малом* $h_1 > 0$ *в области* (5) *выполняются условия:*

$$a_1(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|) \le V(k,\mathbf{x}) \le a_2(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|), \tag{10}$$

$$\mathbf{L}V(k,\mathbf{x}) \le -a_3(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})\|), \tag{11}$$

а также условия (9).

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k)=\mathbf{0}$ *системы* (1) *асимптотически* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Замечание 3. Вспомогательная V-функция Ляпунова и ее усредненная разность (приращение) $\mathbf{L}V(k,\mathbf{x})$ в силу системы (1) в теоремах 1, 2 при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ являются, вообще говоря, *знакопеременными* функциями в области (4). Наряду с основной V-функцией Ляпунова дополнительная вспомогательная $\boldsymbol{\mu}$-функция вводится для наиболее рациональной замены области (4) областью (5).

Условия (7) являются "промежуточными" между менее ограничительным условием $V(k,\mathbf{0},\mathbf{z}) \equiv 0$ и более ограничительными условиями $V(k,\mathbf{x}) \le V^*(k,\mathbf{y})$, $V^*(k,\mathbf{0}) \equiv 0$, при выполнении которых "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k)=\mathbf{0}$ системы (1) соответственно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности при больших значениях $\mathbf{z}_0$ или $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности в целом по $\mathbf{z}_0$.

Замечание 4. В рамках предложенного подхода нелинейные V-функции Ляпунова могут быть построены как знакоопределенные квадратичные формы (или формы более высокого порядка) $V(k,\mathbf{x}) \equiv V^*(k,\mathbf{y}_1,\boldsymbol{\mu}(k,\mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}_1$, $\boldsymbol{\mu}$. При этом выбор $\boldsymbol{\mu}$-функций должен быть согласован с условиями (7), (9): допустимы, например, вспомогательные $\boldsymbol{\mu}$-функции вида $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}_2,\mathbf{z}_1)$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0},\mathbf{z}_1) \equiv \mathbf{0}$.

Если от исходной системы (1) можно отделить подсистему вида

$$\mathbf{y}_1(k+1) = \mathbf{Y}_1\Big(k,\mathbf{y}_1(k),\boldsymbol{\mu}(k),\boldsymbol{\xi}(k)\Big),$$

$$\boldsymbol{\mu}(k+1) = \mathbf{Y}_1^*\Big(k,\mathbf{y}_1(k),\boldsymbol{\mu}(k),\boldsymbol{\xi}(k)\Big),$$

то построение V-функции Ляпунова можно провести, используя численный метод [11] применительно к задаче устойчивости по всем переменным (по $\mathbf{y}_1$, $\boldsymbol{\mu}$) нулевого положения равновесия этой подсистемы.

Замечание 5. Если система (1) допускает "полное" положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$, то в случае $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}(k) \equiv \mathbf{0}$, $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ при выполнении условий (6), (8) имеем дискретный вариант классической теоремы В.В. Румянцева [15] об устойчивости по отношению к части переменных. В случае $\boldsymbol{\xi}(k) \equiv \mathbf{0}$ теорема 1 переходит в дискретные варианты [21, 22] соответствующих теорем из [23, 24].

Замечание 6. Устойчивость по части переменных "в среднем" нулевого положения равновесия систем дискретных стохастических уравнений изучалась в [25, 26] на основе выделения "усеченных" подсистем [25], а также путем построения вспомогательных систем [26]. Возможности использования метода функций Ляпунова анализировались для решения задач частичной устойчивости (стабилизации) систем стохастических дифференциальных уравнений [27–31], в том числе для систем со случайной структурой [32–34]; для квазилинейных систем стохастических дифференциальных уравнений на модельном примере дано сравнение задач оптимальной стабилизации по всем и по части переменных [35].

4. Пример

Пусть дискретная система (1) состоит из уравнений

$$\begin{gathered} y_1(k+1) = [a + \alpha\xi_1(k)]y_1(k) + ly_2(k)z_1(k), \\ y_2(k+1) = [b + dy_1(k)]y_2(k), \\ z_1(k+1) = [c + ey_1(k)]z_1(k), \quad z_2(k+1) = Z_2(k, \mathbf{x}(k)), \end{gathered} \tag{12}$$

где $\xi_1(k)$ – последовательность независимых случайных величин с одинаковым стандартным нормальным распределением при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$; функция Z_2 произвольна и удовлетворяет только общим требованиям к системе (1); a, b, c, d, e, l, α – постоянные параметры.

Система (12) допускает "частичное" положение равновесия

$$y_1(k) = y_2(k) = 0. \tag{13}$$

Наряду с основной функцией Ляпунова

$$V(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2y_2^2z_1^2 \tag{14}$$

также рассмотрим вспомогательную функцию $\mu_1 = y_2z_1$.

Для V-функции Ляпунова в области (5) выполняются условия (9) и (10), а ее усредненная разность (приращение) $\mathbf{L}V(\mathbf{x})$ в силу системы (12) при всех

$k \in \mathbb{Z}_+$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{L}V(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\Big[\big(ay_1(k) + ly_2(k)z_1(k) + \alpha y_1(k)\xi_1(k)\big)^2 +$$
$$+ 2y_2^2(k)z_1^2(k)(b + dy_1(k))^2(c + ey_1(k))^2|\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}\Big] - y_1^2 - 2y_2^2z_1^2 =$$
$$= a^2y_1^2 + 2aly_1y_2z_1 + l^2y_2^2z_1^2 + \alpha^2y_1^2 + 2b^2c^2y_2^2z_1^2 +$$
$$+ r_1y_1y_2^2z_1^2 + r_2y_1^2y_2^2z_1^2 + r_3y_1^3y_2^2z_1^2 + 2d^2e^2y_1^4y_2^2z_1^2 - y_1^2 - 2y_2^2z_1^2 =$$
$$= (a^2 + \alpha^2 - 1)y_1^2 + 2aly_1\mu_1 + (l^2 + 2b^2c^2 - 2)\mu_1^2 + r_1y_1\mu_1^2 +$$
$$+ r_2y_1^2\mu_1^2 + r_3y_1^3\mu_1^2 + 2d^2e^2y_1^4\mu_1^2,$$
$$r_1 = bcr_0, \quad r_2 = 2(b^2e^2 + 4bcde + c^2d^2), \quad r_3 = der_0, \quad r_0 = 4(be + cd);$$

вычисление условного математического ожидания проведено с учетом соотношений $\mathbf{E}[\xi_1(k)] = 0$, $\mathbf{E}[\xi_1^2(k)] = 1$, определяющих стандартное нормальное распределение случайных величин $\xi_1(k)$.

При выполнении неравенств

$$a^2 + \alpha^2 < 1, \quad (a^2 + \alpha^2 - 1)(l^2 + 2b^2c^2 - 2) > a^2l^2 \tag{15}$$

для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) (но не в области (4)) при любых значениях параметров d, e имеет место оценка $\mathbf{L}V(\mathbf{x}) \leq -\beta(y_1^2 + \mu_1^2)$, $\beta = \text{const} > 0$. Это значит, что для V-функции Ляпунова (14) в области (5) помимо условий (9), (10) также выполняется условие (11).

На основании теоремы 2 заключаем, что при выполнении условий (15) "частичное" положение равновесия (13) системы (12) при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} асимптотически y_1-устойчиво по вероятности.

Поясним геометрически данное свойство частичной устойчивости применительно к введенным в разделе 2 определениям 2, 3. Для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < h_1$), $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ в трехмерном пространстве $Oy_1y_2z_1$ граница допустимой области $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ начальных возмущений является цилиндром $\|\mathbf{y}_0\| = \delta$ высоты 2L, расположенном между двумя плоскостями $y_1 = \pm\varepsilon$ (рис. 1); при этом $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$. Если решения системы (12) начинаются при $k = k_0$ внутри этого δ-цилиндра (при произвольном значении z_{20}), то соответствующие указанным решениям выборочные траектории в пространстве $Oy_1y_2z_1$ будут с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, оставаться при всех $k \geq k_0$ между указанными двумя ε-плоскостями.

Также можно указать число $\Delta = \Delta(\gamma, L, h_1) > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq k_0} |y_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| \geq h_1\right\} < \gamma, \\ &\mathbf{P}\left\{\lim_{k \to +\infty} y_1(k; k_0, \mathbf{x}_0) = 0\right\} \geq 1 - \gamma \end{aligned} \tag{16}$$

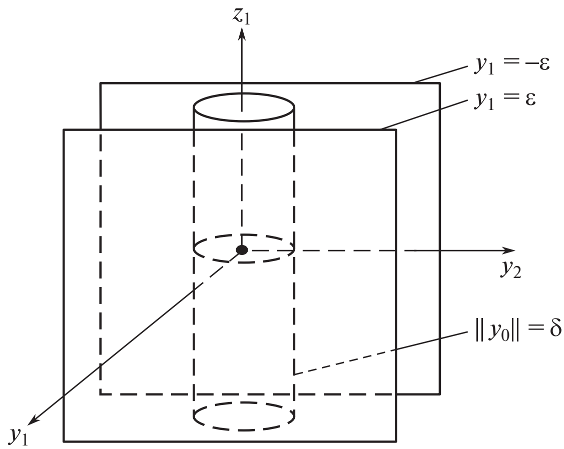

Рис. 1. Области допустимых начальных и текущих отклонений от инвариантного множества $y_1(k) = y_2(k) = 0$.

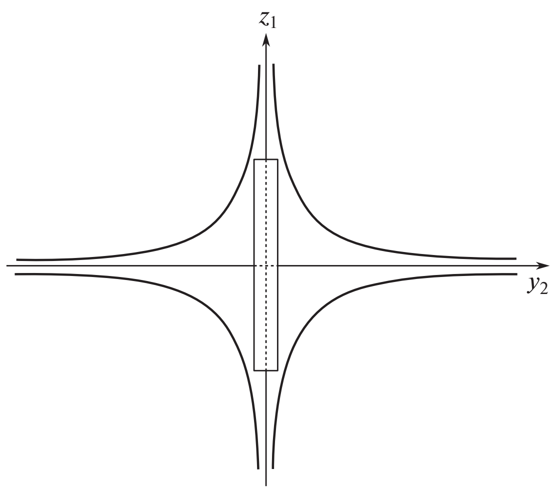

Рис. 2. Области допустимых начальных и текущих отклонений (в проекции на плоскости Oy_2z_1.

для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$. Если решения системы (12) начинаются при $k = k_0$ внутри Δ-цилиндра $\|\mathbf{y}_0\| = \Delta$ высоты $2L$ (при произвольном значении z_{20}), то соответствующие этим решениям выборочные траектории в пространстве $Oy_1y_2z_1$ будут с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, не только оставаться при всех $k \geq k_0$ между ε-плоскостями, но и при $k \to \infty$ будут сходиться к плоскости $y_1 = 0$.

Однако в рамках рассматриваемого подхода, основанного на переходе от области (4) к области (5), имеет место "расширенная" равномерная (y_1, μ_1)-устойчивость "частичного" положения равновесия (13) системы (12), обеспечивающая правомерность такого перехода. Поэтому δ-цилиндр распо-

Таблица

k	$\xi_1(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$	$\xi_1(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$
0	0	0,1	0,1	1	0	0,1	0,1	1
1	0	0,15	0,16	0,4333	-1	0,1167	0,16	0,4333
2	0	0,1443	0,2640	0,2094	1	0,1665	0,2587	0,1950
3	0	0,1275	0,4340	0,1000	1	0,1891	0,4311	0,0975
4	0	0,1072	0,7063	0,0461	0	0,1366	0,7282	0,0509
5	0	0,0861	1,1352	0,0203	-1	0,0599	1,1918	0,0239
6	0	0,0661	1,8005	0,0085	-1	0,0385	1,8590	0,0094
7	0	0,0484	2,8198	0,0034	1	0,0496	2,8601	0,0035
8	0	0,0338	4,3662	0,0013	0	0,0348	4,4320	0,0013
9	0	0,0226	6,6969	0,0005	0	0,0233	6,8022	0,0005
10	0	0,0145	10,197	0,00017	1	0,0227	10,362	0,00017
...	...	...	...	...	...	...	...	...
15	0	0,0009	79,001	$7{,}6 \times 10^{-7}$	-1	0,0007	82,073	$9{,}1 \times 10^{-7}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	0	0,000048	600,69	$3{,}2 \times 10^{-9}$	-1	0,000017	623,28	$3{,}7 \times 10^{-9}$

ложен в области D^* пространства $Oy_1y_2z_1$, ограниченной поверхностью $y_1^2 + y_2^2z_1^2 = \varepsilon^2$. (На рис. 2 расположение δ-цилиндра показано в проекции на плоскость Oy_2z_1; соответствующий прямоугольник со сторонами длины 2δ и $2L$ находится в области, границами которой являются ветви гипербол $y_2z_1 = \pm\,\varepsilon$.) Если решения системы (12) начинаются при $k = k_0$ внутри δ-цилиндра (при произвольном значении z_{20}), то соответствующие указанным решениям выборочные траектории в пространстве $Oy_1y_2z_1$ будут с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, оставаться при всех $k \geq k_0$ в области D^*.

Анализ структуры системы (12) позволяет дополнить сделанные выводы: при выполнении условий (15) выборочные траектории в пространстве $Oy_1y_2z_1$, соответствующие решениям системы (12), начинающимся внутри Δ-цилиндра $\|\mathbf{y}_0\| = \Delta$ высоты $2L$ (при произвольном значении z_{20}), с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, "фокусируются" при $k \to \infty$ или вдоль оси Oy_2, или вдоль оси Oz_1. Действительно, в силу имеющей место "расширенной" асимптотической (y_1, μ_1)-устойчивости "частичного" положения равновесия (13) системы (12) второе и третье уравнения этой нелинейной системы можно представить в виде *линейных* рекуррентных уравнений

$$y_2\,(k+1) = [b + dy_1\,(k;\; k_0, \mathbf{x}_0)]\, y_2(k),$$
$$z_1\,(k+1) = [c + ey_1\,(k; k_0, \mathbf{x}_0)]\, z_1(k),$$

причем для компоненты $y_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ любого решения системы (12), начавшегося внутри Δ-цилиндра высоты $2L$, выполнены соотношения (16). Поэтому при выполнении условий (15) для этих решений системы (12) при $k \to \infty$ с вероятностью, не меньшей $1 - \gamma$, имеют место соотношения $|y_2(k)| \to \infty$ и $|z_1(k)| \to 0$ (при $|b| > 1$, $|c| < 1$) или соотношения $|y_2(k)| \to 0$ и $|z_1(k)| \to \infty$ (при $|b| < 1$, $|c| > 1$).

Для численной конкретизации сделанных выводов в левой части таблицы для "невозмущенного" случая $\xi_1(k) \equiv 0$ приводятся результаты вычислений по рекуррентным соотношениям (12) на отрезке $k \in [0, 20]$ при $y_1(0) = y_2(0) = 0{,}1$ и $z_1(0) = 1$, а также при значениях параметров $a = 1/2$, $b = 3/2$, $c = 1/3$, $d = e = l = 1$. При случайном воздействии $\xi_1(k)$ выборочные траектории группируются около "невозмущенной" траектории, фокусирующейся при $k \to \infty$ вдоль оси Oy_2. Для оценки влияния случайного воздействия на динамику системы (12) в правой части таблицы при $\alpha = 1/3$ и тех же значениях параметров приводятся результаты вычислений в случае, когда допустимая реализация $\xi_1(k)$ на отрезке $k \in [0, 20]$ определяется последовательностью $\{0, -1, 1, 1, 0, -1, -1, 1, 0, 0, 1, 1, -1, 0, 0, -1, 1, 0, -1, 1, -1\}$.

5. Заключение

Для нелинейной системы стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений, подверженных действию дискретного случайного процесса типа "белого" шума, дана поставка задачи устойчивости (асимптотической устойчивости) по части переменных "частичного" нулевого положения равновесия. Начальные значения "неконтролируемых" переменных, не определяющих рассматриваемое "частичное" положение равновесия, предполагаются большими (ограниченными по норме любым наперед заданным числом) по одной их части и произвольными по другой.

Приводятся достаточные условия разрешимости этой задачи в контексте дискретно-стохастического варианта метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. Наряду с основной V-функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная $\boldsymbol{\mu}$-функция для корректировки области, в которой строится основная V-функция Ляпунова. Целесообразность такого подхода заключается в том, что в результате основная V-функция Ляпунова, а также ее усредненная разность (приращение) в силу рассматриваемой системы могут быть знакопеременными.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. I. Пусть при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области (5) выполняются условия (6)–(8).

Возьмем произвольное число ε $(0 < \varepsilon < h_1)$, рассмотрим произвольный момент времени k_0, а также начальную точку $\mathbf{x}_0$ из области

$$D_\varepsilon = \Big\{ \|\mathbf{y}_0\| < \varepsilon,\ \|\mathbf{z}_{10}\| \le L,\ \|\mathbf{z}_{20}\| < \infty \Big\}.$$

Рассмотрим случайный процесс $\mathbf{x}(k; t_0, \mathbf{x}_0)$ $(k \ge k_0)$, являющийся решением системы (1), и обозначим через τ_ε "целочисленный" момент первого выхода этого процесса из области $\|\mathbf{y}_1\| \le \varepsilon$. Если некоторые траектории ни за какое конечное время не выходят из области $\|\mathbf{y}_1\| \le \varepsilon$, то для них τ_ε считаем равным ∞. Положим

$$\tau(k) = \min(\tau_\varepsilon, k); \quad \tau(k_0) = k_0.$$

Имеют место равенства

$$V\Big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V(k_0, \mathbf{x}_0) =$$

$$= V\Big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V\Big(\tau(k-1), \mathbf{x}(\tau(k-1); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) +$$

$$+ V\Big(\tau(k-1), \mathbf{x}(\tau(k-1); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V\Big(\tau(k-2), \mathbf{x}(\tau(k-2); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) +$$

$$\cdots$$

$$+ V\Big(\tau(k_0+1), \mathbf{x}(\tau(k_0+1); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V(k_0, \mathbf{x}_0) =$$

$$= \sum_{s=k_0}^{k-1} \Delta V\Big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\Big);$$

$$\Delta V\Big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) =$$

$$= V\Big(\tau(s+1), \mathbf{x}(\tau(s+1); k_0, \mathbf{x}_0)\Big) - V\Big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\Big).$$

Из этих равенств следует, что для последовательности $v(k)$ случайных величин $v(k) = V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0))$, порожденных реализациями $\{\mathbf{x}(k,\omega), \boldsymbol{\xi}(k,\omega)\}$ случайного процесса $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)\}$, определяемого системой (1), имеют место "усредненные" соотношения

$$\mathbf{E}\big[V\big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\big) - V(k_0, \mathbf{x}_0)\big] =$$

$$= \mathbf{E}V\big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\big) - V(k_0, \mathbf{x}_0) =$$

$$= \sum_{s=k_0}^{k-1} \mathbf{E}\Delta V\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\big).$$

Учитывая равенства (полученные с учетом правила вычисления повторного математического ожидания)

$$\mathbf{E}\big[\Delta V\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\big)\big] =$$

$$= \mathbf{E}\big[V\big(\tau(s+1), \mathbf{X}\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0), \boldsymbol{\xi}(\tau(s))\big) - V\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\big)\big)\big] =$$

$$= \mathbf{E}\big\{\mathbf{E}\big[V\big(\tau(s+1), \mathbf{X}\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s), \boldsymbol{\xi}(\tau(s))|\mathbf{x}(\tau(s))))\big) = \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\big)\big]\big\} -$$

$$- \mathbf{E}\big[V\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\big)\big] =$$

$$= \mathbf{E}\big\{\mathbf{E}\big[V\big(\tau(s+1), \mathbf{X}\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s), \boldsymbol{\xi}(\tau(s))))\big)|\mathbf{x}(\tau(s)) = \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\big)\big] -$$

$$- V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))\big\} = \mathbf{E}\big[\mathbf{L}V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))\big],$$

приходим к соотношению (дискретный вариант формулы Дынкина) [9]

$$\mathbf{E}V\big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\big) - V(k_0, \mathbf{x}_0) =$$

$$= \sum_{s=k_0}^{k-1} \mathbf{E}\big[\mathbf{L}V\big(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)\big)\big].$$

В результате на основании условия (8) получаем неравенство

$$\text{(П.1)} \qquad \mathbf{E}V\big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\big) \le V(k_0, \mathbf{x}_0) < \infty.$$

Если справедливо неравенство $k > \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau(k) = \tau_\varepsilon$), то выполняются соотношения $\|\mathbf{y}_1(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon; k_0, \mathbf{x}_0)\| \ge \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $k < \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau(k) = k$), то на основании неравенства Чебышева–Маркова и оценки (П.1) находим

$$\text{(П.2)} \qquad \begin{gathered} \mathbf{P}\big[\|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon\big] \le a_1^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}\big[a_1(||\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)||)\big] \le \\ \le a_1^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}\big[a_1(||\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)|| + ||\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))||)\big] \le \\ \le a_1^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}\big[V\big(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)\big)\big] = \\ = a_1^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}\big[V\big(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)\big)\big] \le a_1^{-1}(\varepsilon)V(k_0, \mathbf{x}_0). \end{gathered}$$

Поскольку при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ функция Ляпунова $V(k, \mathbf{x})$ непрерывна, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, а также выполняются условия (7), то для всех $k_0 \ge 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение

$$\text{(П.3)} \qquad \lim_{||\mathbf{y}_0|| \to 0} V(k_0, \mathbf{x}_0) = 0$$

выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \le L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

Поэтому для всех $k_0 \ge 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (П.2), (П.3) имеем предельное соотношение

$$\lim_{||\mathbf{y}_0|| \to 0} \mathbf{P}\left[\sup_{k > k_0} ||\mathbf{y}_1(k; t_0, \mathbf{x}_0)|| > \varepsilon\right] = 0,$$

выполняющееся при $\|\mathbf{z}_{10}\| \le L$ равномерно по $\|z_{20}\| < \infty$.

В результате для каждого $k_0 \le 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $k \ge k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности.

II. Если вместо условий (7) выполняются условия (9), то для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение (П.3) выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \le L$ равномерно не только по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$, но и по $k_0 \ge 0$. В результате для каждого $k_0 \ge 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется независимое от k_0 число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $k \ge k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ “частичное” положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. При выполнении условий теоремы "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$.

На основании неравенства (П.1) последовательность $v(k)$ случайных величин $v(k) = V(\tau(k),\, \mathbf{x}(\tau(k);\, k_0,\, \mathbf{x}_0))$, порожденных реализациями $\{\mathbf{x}(k,\omega),\, \boldsymbol{\xi}(k,\omega)\}$ случайного процесса $\{\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\xi}(k)\}$, определяемого системой (1), образует неотрицательный супермартингал, являющийся аналогом монотонно убывающей последовательности в детерминированном случае. Поэтому на основании неравенства (П.1) для каждой начальной точки $\mathbf{x}_0$ из области D_ε с вероятностью единица имеет место предельное соотношение [36]

$$v(k) = V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) \to v_*, \quad k \to \infty.$$

Используя известную схему [2, 3, 9] анализа, можно показать, что равенство $v_* = 0$ выполняется с вероятностью единица. Действительно, применяя операцию математического ожидания и переходя к пределу в обеих частях неравенства (11), с вероятностью единица получаем

$$\mathbf{E}[a_3(||\mathbf{y}_1(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)||)] \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поэтому в силу условий (10), (11) и леммы Фату справедливо равенство $\mathbf{E}[a_3(a_2^{-1}(v_*))] = 0$, которое означает, что $v_* = 0$. Но в случае $v_* = 0$ при $\|\mathbf{y}_0\| \to 0$ имеет место предельное соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{k\to+\infty} ||\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)|| = 0\right\} = 1$$

и, следовательно, "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 809–823.
2. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969.
3. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
4. *Kats I.Ya., Martynyuk A.A.* Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure. London: Taylor & Francis, 2002.
5. *Mao X.R., Yuan C.G.* Stochastic Differential Equations with Markovian Swit-ching. London: Imperial College Press, 2006.
6. *Ахметкалиев Т.* О связи между устойчивостью стохастических систем разностных и дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 8. С. 1016–1026.
7. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

8. *Константинов В.М.* Об устойчивости стохастических разностных систем // Пробл. передачи информ. 1970. Т. 6. Вып. 1. С. 81–86.

9. *Пакшин П.В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Физматлит, 1994.

10. *Ажмяков В.В., Пятницкий Е.С.* Нелокальный синтез систем стабилизации дискретных стохастических объектов управления // АиТ. 1994. № 2. С. 68–78.

    Azhmyakov V.V., Pyatnitskiy E.S. Nonlocal Synthesis of Systems for Stabilization of Discrete Stochastic Controllable Objects // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 2. P. 202–210.

11. *Барабанов И.Н.* Построение функций Ляпунова для дискретных систем со случайными параметрами // АиТ. 1995. № 11. С. 31–41.

    Barabanov I.N. Construction of Lyapunov Functions for Discrete Systems with Stochastic Parameters // Autom. Remote Control. 1995. V. 56. No. 11. P. 1529–1537.

12. *Jian X.S., Tian S.P., Zhang T.L., Zhang W.H.* Stability and Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2019. V. 29. No. 18. P. 6419–6437.

13. *Qin Y., Cao M., Anderson B.D.O.* Lyapunov Criterion for Stochastic Systems and its Applications in Distributed Computation // IEEE Trans. Autom. Control. 2020. V. 65. No. 2. P. 546–560.

14. *Teel A.R., Hespanha J.P., Subbaraman A.* Equivalent Characterizations of Input-to-State Stability for Stochastic Discrete-Time Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 2. P. 516–522.

15. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.

16. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

17. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.

    Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 4. P. 511–561.

18. *Rajpurohit T., Haddad W.M.* Stochastic Finite-Time Partial Stability, Partial-State Stabilization, and Finite-Time Optimal Feedback Control // Math. Control, Signals, Syst. 2017. V. 29. No. 2. art. 10.

19. *Rajpurohit T., Haddad W.M.* Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems // J. Dynam. Syst., Measurement, and Control. 2017. V. 139. No. 9. P. DS-15-1602.

20. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // АиТ. 2019. № 5. С. 86–98.

    Vorotnikov V.I., Martyshenko Y.G. On the Partial Stability in Probability of Nonlinear Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 5. P. 856–866.

21. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18. № 6. С. 371–375.

22. *Ramírez-Llanos E., Martínez S.* Distributed and Robust Fair Optimization Applied to Virus Diffusion Control // IEEE Trans. Network Sci. Engineer. 2017. V. 4. No. 1. P. 41–54.

23. *Воротников В.И.* Об устойчивости и устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия нелинейных динамических систем // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 3. С. 332–337.

24. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23–31.

25. *Юдаев Г.С.* Об устойчивости стохастических разностных систем // Изв. Вузов. Матем. 1979. № 8. С. 74–78.

26. *Phillis Y.A.* y-Stability and Stabilization in the Mean of Discrete-Time Sto-chastic Systems // Int. J. Control. 1984. V. 40. No. 1. P. 149–160.

27. *Шаров В.Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // АиТ. 1978. № 11. С. 63–71.

Sharov V.F. Stability and Stabilization of Stochastic Systems vis-a-vis Some of the Variables // Autom. Remote Control. 1978. V. 39. No. 11. P. 1629–1636.

28. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.

29. *Ignatyev O.* Partial Asymptotic Stability in Probability of Stochastic Differential Equations // Statist. Probab. Lett. 2009. V. 79. No. 5. P. 597–601.

30. *Zuyev A., Vasylieva I.* Partial Stabilization of Stochastic Systems with Application to Rotating Rigid Bodies // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 52. No. 16. P. 162–167.

31. *Sultanov O.* Capture into Parametric Autoresonance in the Presence of Noise // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. V. 75. P. 14–21.

32. *Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H.* Stability in Mean of Partial Variables for Stochastic Reaction-Diffusion Systems with Markovian Switching // J. Franklin Institute. 2014. V. 351. No. 1. P. 500–512.

33. *Socha L., Zhu Q.X.* Exponential Stability with Respect to Part of the Variab-les for a Class of Nonlinear Stochastic Systems with Markovian Switching // Math. Comp. Simul. 2019. V. 155. P. 2–14.

34. *Socha L.* Stability and Positivity with Respect to Part of the Variables for Positive Markovian Jump Systems // Bull. Polish Acad. Sci.: Tech. Sci. 2019. V. 67. No. 4. P. 769–775.

35. *Хрусталев М.М., Онегин Е.Е.* Необходимые и достаточные условия в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем // АиТ. 2019. № 7. С. 89–104.

Khrustalev M.M., Onegin E.E. Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Stabilization of Quasi-Linear Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 7. P. 1252–1264.

36. *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 05.10.2020

После доработки 20.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021