

© 2021 г. В.В. ХУТОРЦЕВ, д-р техн. наук (hvv.56@mail.ru)  
(Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи)

## УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ ОБЪЕКТОВ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ ОБЛАСТИ ОБЗОРА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена задача поиска объектов наблюдения для случая, когда модель их появления удовлетворяет закономерностям пространственно-временного пуассоновского потока, а область обзора информационно-измерительной системы является неоднородной. Дано вероятностное описание подобластей неоднородности, выявлены закономерности их учета при формировании апостериорной плотности интенсивности случайного потока. Определена процедура синтеза закона управления поиском для неоднородной области обзора. Приведен пример.

*Ключевые слова:* поиск объектов, неоднородная область обзора, пространственно-временной пуассоновский поток.

DOI: 10.31857/S0005231021090051

### 1. Введение

Поиск объектов наблюдения относится к одному из классов задач управления измерительными процессами, решаемых информационно-измерительными системами (ИИС) [1–4]. Рациональное распределение поисковых усилий актуально для повышения эффективности функционирования ИИС, связанной с сокращением времени поиска, повышением достоверности обнаружения объектов наблюдения, перераспределением энергетического потенциала ИИС при реализации различных режимов их работы и т.д.

Одной из разновидностей задач поиска, характерных для систем контроля воздушного и космического пространства, систем контроля транспортных потоков и т.д., является задача поиска объектов наблюдения, возникающих в области обзора (ОО) ИИС последовательно, как правило, в соответствии с закономерностями случайного потока. В [5–8] рассмотрены подходы к синтезу управления поиском объектов для пространственно-временной пуассоновской модели их появления при однородной ОО ИИС. Последнее условие часто оказывается неправомерным, например, из-за необходимости одновременного решения информационно-измерительной системой задачи сопровождения уже обнаруженных объектов наблюдения (как правило нескольких), находящихся в области обзора. В связи с этим дополнительных исследований требуется вопрос формирования поисковых стратегий в случае, когда ОО ИИС является неоднородной, включающей подобласти неоднородности, характери-

стики которых необходимо учитывать при задании плотности интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока объектов наблюдения.

К таким подобластям можно отнести, в частности, подобласти, порождаемые апостериорными плотностями распределения векторов состояний объектов наблюдения, уже находящихся в области обзора (сопровождаемых объектов), параметры траекторий которых измеряются ИИС.

Подходы к решению отдельных разновидностей аналогичных задач без привязки к модели пространственно-временного пуассоновского потока появления объектов наблюдения рассмотрены, в частности, в [1–3].

Представляется актуальным анализ особенностей управления поиском объектов для пространственно-временной пуассоновской модели их появления при неоднородной структуре ОО ИИС.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим область обзора  $X \in R^n$  ( $0 < n \leq 3$ ) с введенной в ней декартовой системой координат  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , в которой объекты наблюдения появляются в соответствии с закономерностями пространственно-временного пуассоновского потока  $\varphi$  [6–12].

Пусть для непересекающихся измеримых подмножеств  $X_r$  области  $X$  выполняются условия  $X = \bigcup_r X_r$ ,  $X_p \cap X_j = \emptyset$ ,  $p \neq j$ . Тогда любые два временных потока, определяемые как  $\varphi_{p\Sigma}(t) = \varphi(X_p, t)$ ,  $\varphi_{j\Sigma}(t) = \varphi(X_j, t)$ , будут независимыми и пуассоновскими, а интегральный временной пуассоновский поток событий определяется из  $\varphi$  в соответствии с соотношением [9]

$$(2.1) \quad \varphi_{\Sigma}(t) = \varphi(X, t) = \sum_r \varphi(X_r, t).$$

Через  $\nu(x, t)$  обозначим априорную (не учитывающую изменений, происходящих в ОО в процессе наблюдений) плотность интенсивности потока  $\varphi$  [6–9]. Меры интенсивности или интенсивности временных потоков событий, порождаемых  $\varphi$ , зададим через интеграл по мере Лебега от плотности интенсивности  $\nu(x, t)$  пространственно-временного пуассоновского потока [9, 12]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \xi_p(t) &= \int_{X_p} \nu(x, t) dx, & \xi_j(t) &= \int_{X_j} \nu(x, t) dx, \\ \xi(t) &= \int_X \nu(x, t) dx = \sum_r \int_{X_r} \nu(x, t) dx, \end{aligned}$$

где  $\xi_p(t)$ ,  $\xi_j(t)$  – меры интенсивности независимых временных пуассоновских потоков соответственно  $\varphi_{p\Sigma}(t)$ ,  $\varphi_{j\Sigma}(t)$ ;  $\xi(t)$  – мера интенсивности интегрального временного потока  $\varphi_{\Sigma}(t)$ ;  $dx = \prod_{i=1}^n dx_i$ ,  $0 < n \leq 3$ .

Распределение вероятностей для суммарного потока  $\varphi_{\Sigma}(t)$  на интервале времени  $[0, t]$  в соответствии с (2.2) составляет [13, 14]  $p_s(t) = \frac{1}{s!} \left[ \int_0^t \xi(t) dt \right]^s \exp \left\{ - \int_0^t \xi(t) dt \right\}$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ . Мера интенсивности  $\xi(t)$  в (2.2) определяет среднее количество  $\overline{M}$  объектов наблюдения, появляющихся в ОО ИИС на  $[0, t]$ :  $\overline{M} = \int_0^t \xi(t) dt$ .

Объекты наблюдения будем рассматривать как распределенные, занимающие подобласти пространства  $D_k(x, t) = D_k(t) \in R^n$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Очевидно, что

$$(2.3) \quad \bigcap_k D_k(t) = \emptyset.$$

Будем полагать, что формы и угловые положения  $D_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K}$  относительно их центров определены и неизменны, а положение самих центров меняется в  $X$  случайным образом. Предположим, что обнаруживаемые в ходе поиска объекты наблюдения берутся ИИС на сопровождение. Наличие в ОО ИИС сопровождаемых объектов приводит к необходимости корректировки модели плотности интенсивности случайного потока, используемой для формирования закона управления поиском. Действительно, с учетом (2.3) в области пространства, занимаемой сопровождаемым объектом, появление очередного объекта наблюдения полагается невозможным. Пусть ИИС осуществляет контроль  $X$  в течение времени

$$(2.4) \quad t \in \omega, \quad \omega = [0, \overline{t}].$$

Разобьем (2.4) на подынтервалы поиска

$$(2.5) \quad \omega_q = [t_q, t_{q+1}), \quad q = \overline{0, (Q-1)},$$

где  $t_q$ ,  $q = \overline{1, (Q-1)}$  – моменты обнаружения в области обзора очередных объектов наблюдения из потока;  $t_0 = 0$ ;  $t_Q = \overline{t}$ .

Будем полагать, что априорная плотность интенсивности  $\nu(x, t)$  пространственно-временного пуассоновского потока  $\varphi$  и априорная интенсивность  $\xi(t)$  временного потока  $\varphi_{\Sigma}(t)$ , определяемого в соответствии с (2.1), имеют место при  $t \in \omega_0$ , а неоднородности ОО ИИС порождаются наличием в ней обнаруженных при  $t \geq t_1$  объектов наблюдения, взятых ИИС на сопровождение. Рассмотрим подынтервал  $\omega_q$ ,  $q > 0$ . Внутри области обзора может находиться  $K = K_q$  сопровождаемых объектов, где  $K_q \leq q$ . Знак неравенства связан с возможностью выхода некоторых сопровождаемых объектов на  $[t_0, t_{q+1})$  за пределы области обзора  $X$  и завершением относительно них процесса сопровождения.

Для каждой из подобластей  $D_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K_q}$  (2.3) при  $t \geq t_k$ ,  $k = \overline{1, K_q}$  поставим в соответствие случайный процесс  $\eta_k(t) \in X$ ,  $\eta_k(t_k) = \eta_{k0}$ , с плотностью распределения  $w_k(x, t)$ , описывающий координаты центра  $D_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K_q}$ . Здесь  $\eta_{k0} \in R^n$  – случайный вектор с плотностью распределения  $w_k(x, t_k)$ . С учетом этого будем полагать, что  $D_k(t) = D_k(x + \eta_k(t))$ ,  $t \geq t_k$ ,

$k = \overline{1, K}_q$ ,  $D_k(t_k) = D_k(x + \eta_{k0})$ ,  $D_k = D_k(x)$ . Последнее обозначение соответствует случаю, когда центр объекта наблюдения находится в начале координат.

Плотности вероятности  $w_k(x, t)$ ,  $k = \overline{1, K}_q$  полагаются апостериорными и могут быть получены в ИИС по результатам динамической фильтрации векторов состояния сопровождаемых объектов.

*Определение.* Под апостериорной плотностью интенсивности  $\tilde{\nu}_q(x, t)$  пространственно-временного пуассоновского потока, соответствующей подынтервалу  $\omega_q$ , будем понимать плотность интенсивности, учитывающую апостериорные вероятностные характеристики координат местоположения сопровождаемых объектов, находящиеся в ОО ИИС.

Рассмотрим закон управления поиском (стратегию поиска [1])  $\lambda(x, t)$ , для которого

$$(2.6) \quad \lambda(x, t) \begin{cases} > 0, & x \in X, \\ = 0, & x \notin X. \end{cases}$$

Функция  $\lambda(x, t)\Delta t + o(\Delta t)$  определяет вероятность наступления события, связанного с тем, что за интервал времени  $(t, t + \Delta t)$  очередной объект наблюдения будет найден при условии, что он находится в точке  $x \in X$  и до сих пор не обнаружен [1, 6–8]. Здесь  $o(\Delta t)$  – остаток порядка малости выше, чем  $\Delta t$ .

Определим на  $X \times \omega_q$ ,  $q = \overline{0, (Q-1)}$  плотность ненормированной вероятностной меры  $y(x, t)$  как функцию, непрерывно дифференцируемую по совокупности своих аргументов и определяющую вероятность наличия в  $X$  необнаруженного объекта [1, 6, 8],

$$(2.7) \quad \int_X y(x, t) dx = p_{1X}(t),$$

где  $p_{1X}(t)$  – вероятность нахождения в области обзора очередного необнаруженного объекта наблюдения.

С учетом (2.6), (2.7) рассмотрим критерий качества оптимизации поиска [6, 8]

$$(2.8) \quad \Psi = \int_X \left[ \alpha y(x, t) + \frac{1}{2} \beta \int_{\tau}^t \lambda^2(x, t) dt \right] dx \rightarrow \min_{\lambda(x, t), t \in \omega_q},$$

где  $\alpha, \beta > 0$  – весовые коэффициенты;  $t - \tau \ll 1$ ;  $t \leq t_{q+1}$ ;  $t - \tau \geq t_q$ .

Целевая функция критерия (2.8) включает две составляющие. Первая из них связана с вероятностью нахождения в  $X$  необнаруженного объекта наблюдения, вторая – с энергетическими характеристиками закона поиска.

Поставим задачу для неоднородной области обзора, подобласти неоднородности которой порождаются апостериорными плотностями вероятностей сопровождаемых объектов  $w_k(x, t)$ ,  $t \geq t_k$ ,  $k = \overline{1, K}_q$ , при условии (2.3) определить закон управления поиском (2.6), удовлетворяющий (2.8).

### 3. Закономерности учета структуры и характеристик подобластей неоднородности при формировании апостериорной плотности интенсивности потока объектов наблюдения

Рассмотрим последовательность формирования математической модели вероятностных характеристик подобластей неоднородности области обзора  $X$ .

Если некоторая точка декартовой системы координат  $\{x_1, \dots, x_n\}$  принадлежит подобласти  $D_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K_q}$  с центром в  $\eta_k(t)$ , то ей для каждого момента времени  $t \geq t_k$  может быть поставлена в соответствие случайная величина

$$(3.1) \quad \varsigma_k(t) = \eta_k(t) + \gamma_k(0),$$

где  $\gamma_k^T(0) = \gamma_k^T = [\gamma_{k1} \dots \gamma_{kn}]$  – координаты точки  $\{x_{k1}, \dots, x_{kn}\}$ , в случае, если центр объекта перенесен в начало координат, т.е.  $\gamma_k \in D_k$ ;  $\varsigma_k(t) \in D_k(t)$ ,  $t \geq t_k$ .

С учетом (3.1) плотность распределения точек  $k$ -го сопровождаемого объекта может быть представлена как

$$(3.2) \quad w_k(x - \gamma_k, t), \quad t \geq t_k, \quad k = \overline{1, K_q}.$$

Вероятностные характеристики (3.2) подобластей неоднородности области обзора лежат в основе формирования для  $t \in \omega_q$  апостериорной плотности интенсивности  $\tilde{\nu}_q(x, t)$  пространственно-временного пуассоновского потока. Определение  $\tilde{\nu}_q(x, t)$  основано на предположении о том, что очередной объект наблюдения не может появиться в областях пространства, занятых сопровождаемыми объектами.

Будем полагать, что  $\nu(x, t)$  и  $\tilde{\nu}_q(x, t)$  являются функциями интегрируемы и непрерывными по совокупности своих аргументов.

*Теорема.* Для  $t \in \omega_q$  при наличии в области обзора  $X$   $K_q \leq q$  сопровождаемых объектов, занимающих подобласти  $D_k(t)$ ,  $k = \overline{1, K_q}$ ,  $\bigcap_k D_k(t) = \emptyset$  с центрами в точках  $\eta_k(t)$ , характеризующихся плотностями вероятности  $w_k(x, t)$ , апостериорная плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока объектов наблюдения определяется соотношением

$$(3.3) \quad \tilde{\nu}_q(x, t) = \nu(x, t) \times \left( 1 - \sum_{k=1}^{K_q} \left[ \int_{D_k} w_k(x - \gamma_k, t) d\gamma_k \prod_{m \neq k} \left( 1 - \int_{D_m} w_m(x - \gamma_m, t) d\gamma_m \right) \right] \right), \quad x \in X,$$

где  $\gamma_k$  рассматривается как векторная переменная;  $d\gamma_k = \prod_{i=1}^n d\gamma_{ki}$ ,  $0 < n \leq 3$ .

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

В соответствии с (3.3) определим подобласть неоднородности как под-  
область, внутри которой относительное рассогласование между априор-  
ной  $\nu(x, t)$  и апостериорной  $\tilde{\nu}_q(x, t)$  плотностями интенсивности превышает  
некоторое заданное значение  $\frac{\nu(x, t) - \tilde{\nu}_q(x, t)}{\nu(x, t)} \geq \mu$ , или  $\mu \leq \sum_{k=1}^{K_q} \left[ \int_{D_k} w_k(x - \gamma_k, t) \times \right.$   
 $\left. \times d\gamma_k \prod_{m \neq k}^{K_q} \left( 1 - \int_{D_m} w_m(x - \gamma_m, t) d\gamma_m \right) \right]$ .

#### 4. Пример определения апостериорной плотности интенсивности

Для  $t \in \omega_1$ ,  $K_q = 1$  результат (3.3), в частности, приобретает вид

$$(4.1) \quad \tilde{\nu}_1(x, t) = \nu(x, t) \left( 1 - \int_{D_1} w_1(x - \gamma_1, t) d\gamma_1 \right).$$

Характеристики вариации апостериорной интенсивности и, как следствие, характеристики подобласти неоднородности зависят от двух факторов – параметров плотности распределения координат местоположения центра сопровождаемого объекта и характеристик подобласти  $D_1$ .

Покажем, что в зависимости от характеристик апостериорной плотности распределения размеры подобласти неоднородности (подобласти, внутри которой апостериорная плотность интенсивности отличается от априорной) могут существенно превышать физические размеры сопровождаемого объекта. Пусть,  $X \in R^1$ ,  $D_1 = [-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$ ,  $w_1(x) = N\{0, \delta_1^2\}$ , где  $N\{0, \delta_1^2\}$  – нормальная плотность распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\delta_1^2$ , и  $\nu(x, t) = \nu = \text{const}$ . Тогда  $\tilde{\nu}_1(x) = \nu \left( 1 - \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} w_1(x - \gamma_1) d\gamma_1 \right)$  или  $\tilde{\nu}_1(x) = \nu \left( 1 - \Phi \left[ \frac{\frac{\Delta}{2} - x}{\delta_1} \right] + \Phi \left[ \frac{-\frac{\Delta}{2} - x}{\delta_1} \right] \right)$ , где  $\Phi[\bullet]$  – интеграл вероятности.

Графики зависимостей  $\tilde{\nu}_1(x)$  при различных значениях  $\delta_1^2$  для  $\nu = 1$ ,  $\Delta = 1$  представлены на рис. 1. Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $\delta_1^2 = 0, 1, 10$  (здесь и далее – в безразмерных единицах).

Рассчитать значения нижней  $x_n$  и верхней  $x_b$  границ подобласти неоднородности в условиях примера можно из решения уравнения  $\mu = \Phi \left[ \frac{x + \frac{\Delta}{2}}{\delta_1} \right] - \Phi \left[ \frac{x - \frac{\Delta}{2}}{\delta_1} \right]$ , где  $\mu$  – заданное относительное отклонение апостериорной плотности интенсивности от априорной (обычно  $\mu \ll 1$ ). При малых значениях  $\mu$   $x_n < -\frac{\Delta}{2}$ ,  $x_b > \frac{\Delta}{2}$ . Кроме того, из приведенного соотношения следует, что  $\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} x_n = -\frac{\Delta}{2}$ ,  $\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} x_b = \frac{\Delta}{2}$ .

График зависимости  $\chi = \frac{\Delta \mu}{\Delta}$ , определяемой как отношение ширины  $\Delta_\mu = x_b - x_n$  подобласти неоднородности по уровню пятипроцентного отклоне-

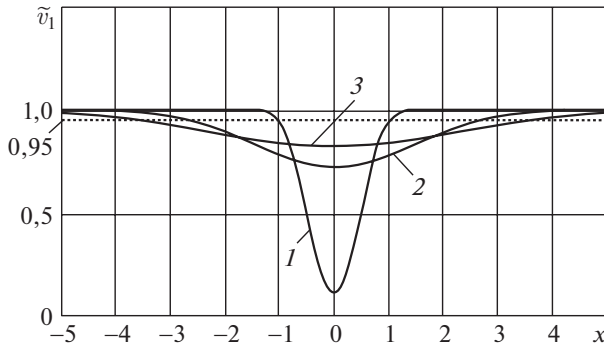


Рис. 1.

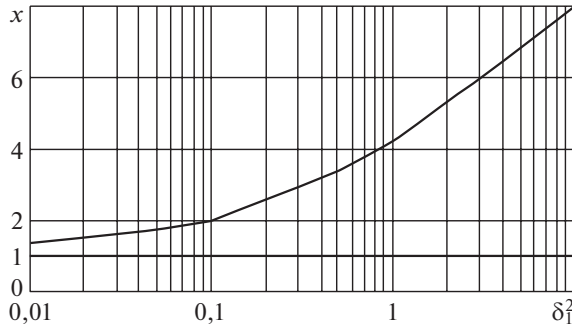


Рис. 2.

ния  $\tilde{v}_1$  от  $\nu$  ( $\mu = 0,05$ ) к размеру сопровождаемого объекта  $\Delta$ , от  $\delta_1^2$  представлен на рис. 2. Из рисунка следует, что размеры подобласти неоднородности могут во много раз превосходить физические размеры сопровождаемого объекта.

Конкретизируем интеграл в (4.1). Для  $R^3$ , например, получим

$$(4.2) \quad \int_{D_1} w_1(x - \gamma_1, t) d\gamma_1 = \int_{\Delta_{н1}}^{\Delta_{в1}} \left\{ \int_{\phi_{н1}(\gamma_{11})}^{\phi_{в1}(\gamma_{11})} \left\{ \int_{\psi_{н1}(\gamma_{11}, \gamma_{12})}^{\psi_{в1}(\gamma_{11}, \gamma_{12})} w_1(x_1 - \gamma_{11}, x_2 - \gamma_{12}, x_3 - \gamma_{13}, t) d\gamma_{13} \right\} d\gamma_{12} \right\} d\gamma_{11},$$

где  $\{\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}\}$  – оси системы декартовых координат с центром в точке  $\eta_1$ ;  $\Delta_{н1}, \Delta_{в1}$  – соответственно нижняя и верхняя границы проекции подобласти  $D_1$  на ось  $\gamma_{11}$ ;  $\gamma_{12} = \phi_{н1}(\gamma_{11})$ ,  $\gamma_{12} = \phi_{в1}(\gamma_{11})$  – уравнения нижней и верхней частей кривой, ограничивающей площадь проекции подобласти  $D_1$  на плоскость  $\{\gamma_{11}, \gamma_{12}\}$  при  $\gamma_{11} \in [\Delta_{н1}, \Delta_{в1}]$ ;  $\gamma_{13} = \psi_{н1}(\gamma_{11}, \gamma_{12})$ ,  $\gamma_{13} = \psi_{в1}(\gamma_{11}, \gamma_{12})$  – уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающих подобласть  $D_1$ .

Необходимо отметить, что

$$(4.3) \quad \int_X \int_{D_1} w_1(x - \gamma_1, t) d\gamma_1 dx = |D_1|,$$

где  $|D_1|$  – мера Лебега множества  $D_1$ .

В частности, для  $X \in R^1$ ,  $D_1 = [-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} w_1(x - \gamma_1) d\gamma_1 \right) dx = \Delta.$$

Иными словами, определенный интеграл в (4.3) инвариантен к параметрам апостериорной плотности распределения и полностью определяется размерами подобласти  $D_1$ .

В дальнейшем будем полагать, что для всех сопровождаемых объектов размеры и форма занимаемых ими подобластей известны.

### 5. Синтез закона управления поиском для неоднородной области обзора

Решение задачи будем искать в условиях следующих ограничений [6]:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \xi(t) < C\lambda(x, t), \quad \tilde{\xi}_q(t) < C\lambda(x, t), \\ C = 10^{-2}, \quad \forall x, x \in X, \quad \forall t, \quad t \in \omega_q, \quad q = \overline{1, Q-1}, \end{aligned}$$

где

$$(5.2) \quad \tilde{\xi}_q(t) = \int_X \tilde{v}_q(x, t) dx$$

– апостериорная мера интенсивности потока объектов наблюдения в неоднородной области обзора.

Указанные ограничения, как показано в [6], позволяют приближенно свести модель эволюции во времени вероятностных характеристик, описывающих процесс поиска и обнаружения объектов наблюдения, к модели дискретного марковского процесса с двумя состояниями [6, 8]. Условие (5.1) связано с высоким энергетическим потенциалом ИИС и существенным преобладанием интенсивности поисковых усилий такой системы над интенсивностью потока объектов наблюдения в области обзора. Указанное условие характерно для большого класса систем контроля воздушного и космического пространства, систем контроля морской поверхности, систем контроля транспортных потоков и т.д.

Рассмотрим вначале интервал времени  $\omega_q$ , для которого предполагается присутствие в ОО ИИС  $K_q$  сопровождаемых объектов. Уравнение относительно  $y(x, t)$  для этого случая предполагает использование апостериорной



плотности интенсивности  $\tilde{\nu}_q(x, t)$  пространственно-временного пуассоновского потока. В соответствии с [6] такое уравнение имеет вид

$$(5.3) \quad \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -y(x, t)(\lambda(x, t) + \tilde{\xi}_q(t)) + \tilde{\nu}_q(x, t), \quad y(x, t_q) = y_{q0}, \quad t \in \omega_q,$$

где  $\tilde{\nu}_q(x, t)$  определяется из (3.3).

Для критерия качества (2.8) оптимальное управление поиском задается соотношением [6, 8]

$$(5.4) \quad \lambda_{\text{опт}}(x, t) = \frac{\alpha}{\beta} y(x, t).$$

С учетом (5.4) уравнение (5.3) для эволюции на  $\{\omega_q, X\}$  оптимальной плотности ненормированной вероятностной меры приобретает вид

$$(5.5) \quad \frac{\partial y_{\text{опт}}(x, t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{\beta} y_{\text{опт}}^2(x, t) - y_{\text{опт}}(x, t)\tilde{\xi}_q(t) + \tilde{\nu}_q(x, t),$$

$$y(x, t_q) = y_{q0}, \quad t \in \omega_q.$$

Решение (5.5) полностью определяет на  $\{\omega_q, X\}$  закон управления параллельным поиском [6, 8]

$$(5.6) \quad \lambda_{\text{опт}}(x, t) = \frac{\alpha}{\beta} y_{\text{опт}}(x, t).$$

Таким образом, последовательность формирования  $\lambda_{\text{опт}}(t)$  для неоднородной ОО предполагает:

1) определение по результатам динамической фильтрации апостериорных плотностей распределения  $w_k(x, t)$ ,  $t \geq t_k$ ,  $k = \overline{1, K_q}$  объектов наблюдения, обнаруженных на интервале времени  $[0, t_{q-1}]$  и взятых ИИС на сопровождение;

2) формирование в соответствии с (3.3) апостериорной плотности интенсивности  $\tilde{\nu}_q(x, t)$  пространственно-временного потока объектов наблюдения;

3) определение из (5.2) апостериорной интенсивности  $\tilde{\xi}_q(t)$  потока объектов наблюдения в неоднородной ОО;

4) решение уравнения (5.5) и формирование на  $\omega_q$  плотности ненормированной вероятностной меры  $y_{\text{опт}}(x, t)$ ;

5) определение в соответствии с (5.6) оптимального плана поиска  $\lambda_{\text{опт}}(t)$ .

По своему содержанию рассмотренная процедура может быть интерпретирована как процедура совместного поиска объектов наблюдения и фильтрации параметров траекторий сопровождаемых объектов.

## 6. Анализ влияния характеристик неоднородной области обзора на качественные показатели поиска

Анализ влияния характеристик неоднородной ОО на качественные показатели поиска проведем для случая, когда  $X \in R^1$ ,  $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ , где  $\underline{x}$  – нижняя,

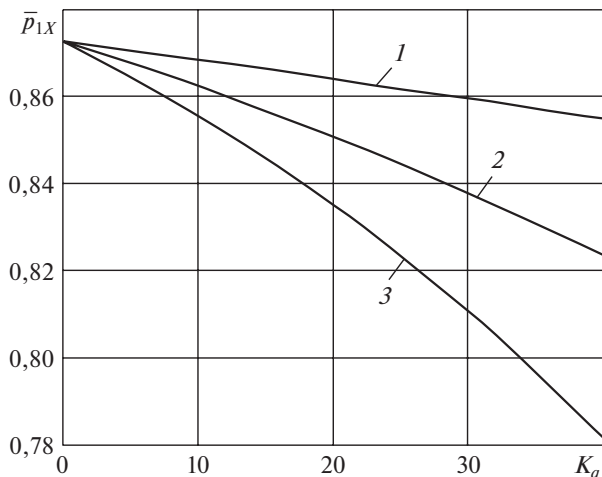


Рис. 3.

$\bar{x}$  — верхняя границы области обзора,  $\tilde{\nu}_q(x, t) = \tilde{\nu}_q(x)$ ,  $\tilde{\xi}_q(t) = \tilde{\xi}_q$ . Предположим, что до обнаружения очередного объекта наблюдения на  $\omega_q$  плотность ненормированной вероятностной меры  $y_{\text{опт}}(x, t)$  успевает достичь установившегося значения  $\bar{y}_{\text{опт}}(x)$ , описываемого с учетом условия  $\frac{\partial \bar{y}_{\text{опт}}(x)}{\partial t} = 0$  алгебраическим уравнением

$$(6.1) \quad -\frac{\alpha}{\beta} \bar{y}_{\text{опт}}^2(x) - \bar{y}_{\text{опт}}(x) \tilde{\xi}_q + \tilde{\nu}_q(x) = 0.$$

Анализ влияния характеристик неоднородной ОО на качественные показатели поиска осуществлялся на основании решений (6.1).

Полагалось, что  $q = 40$ ,  $K_q = 1 \div 40 \leq q$  (т.е. на  $\omega_q$  рассматривалось количество сопровождаемых объектов от одного до сорока), апостериорные плотности вероятности для центров сопровождаемых объектов полагались гауссовскими  $w_k(x, t) = w_k(x) = N\{m_k, \delta_k^2\}$ ,  $t \geq t_k$ ,  $k = \overline{1, K_q}$ . Решение задачи проводилось при следующих значениях параметров:  $\underline{x} = 10\,000$ ,  $\bar{x} = 20\,000$ ,  $m_k = \underline{x} + k \cdot 200$ ,  $\Delta = 30, 60, 90$ . Априорная плотность интенсивности потока объектов наблюдения полагалась равной  $\nu = 1,2 \cdot 10^{-6}$ .

Для каждого значения  $K_q$  в соответствии с (3.3) определялась апостериорная плотность интенсивности пространственно-временного потока объектов наблюдения, т.е.  $\tilde{\nu}_q(x) = \tilde{\nu}_{K_q}(x)$ , и соответствующая ей мера интенсивности потока  $\tilde{\xi}_q = \tilde{\xi}_{K_q}$ . По результатам решения (6.1) формировалась вероятность нахождения в области обзора очередного необнаруженного объекта наблюдения

$$(6.2) \quad \int_X \bar{y}_{\text{опт}}(x) dx = \bar{p}_{1X}.$$

Графики зависимостей  $\bar{p}_{1X}$  от  $K_q$  для различных размеров объектов наблюдения представлены на рис. 3. Кривая 1 получена для  $\Delta = 30$ , кривая 2 —

для  $\Delta = 60$ , кривая 3 – для  $\Delta = 90$ . Отметим, что качественные характеристики поиска для случая неучета неоднородности области обзора определялись для  $K_q = 0$  и соответствовали априорной плотности интенсивности потока объектов наблюдения  $\nu = 1,2 \cdot 10^{-6}$ .

Необходимо отметить, что в соответствии с (4.3) представленные на рис. 3 зависимости инвариантны к значениям  $\delta_k^2$ .

Учет при поиске объектов наблюдения характеристик подобластей неоднородности, порождаемых вероятностными характеристиками координат местоположения сопровождаемых объектов, влечет за собой снижение вероятности  $\bar{p}_{1X}$  нахождения в области обзора необнаруженного очередного объекта наблюдения. Уменьшение  $\bar{p}_{1X}$  тем существеннее, чем больше размеры сопровождаемых объектов и чем больше их находится в  $X$ . Это в первую очередь связано с рациональным перераспределением поисковых усилий ИИС за счет снижения их интенсивности в подобластях неоднородности и, напротив, увеличения интенсивности в подобластях, не занятых сопровождаемыми объектами.

Наибольший относительный выигрыш по сравнению с поиском, осуществляемым по закону, сформированному с использованием априорной плотности интенсивности (без учета характеристик подобластей неоднородности), в условиях примера составил  $\varepsilon = (\bar{p}_{1X}^{pr} - \bar{p}_{1X}^{ps}) / \bar{p}_{1X}^{pr} = 0,104$ , где  $\bar{p}_{1X}^{pr}$  – вероятность нахождения в ОО очередного необнаруженного объекта наблюдения, полученная для априорной плотности интенсивности потока объектов наблюдения;  $\bar{p}_{1X}^{ps}$  – аналогичная вероятность, соответствующая апостериорной плотности интенсивности потока. Наибольший относительный выигрыш имеет место при  $K_q = 40$ ,  $\Delta = 90$ .

## 7. Заключение

Рассмотренные особенности решения задачи поиска объектов наблюдения основаны на учете свойств неоднородной структуры ОО ИИС. Такая область включает подобласти неоднородности, порождаемые апостериорными плотностями распределения, формируемыми по результатам решения задачи фильтрации параметров траекторий, уже обнаруженных и взятых информационно-измерительной системой на сопровождение объектов наблюдения. Показано, что размеры подобластей неоднородности могут во много раз превосходить физические размеры сопровождаемых объектов.

Выявленные закономерности влияния апостериорных вероятностных характеристик координат местоположения сопровождаемых объектов на плотность интенсивности потока объектов наблюдения позволяют определять эволюцию во времени вероятностных характеристик поиска и формировать на их основе закон управления наблюдениями.

Синтез стратегии поиска проводился в условиях ограничений (5.1). Они дают возможность приближенно интерпретировать процедуру поиска в терминах дискретного марковского процесса с двумя состояниями [6, 8].

Проведенный анализ влияния характеристик неоднородной области обзора на качество поиска показал, что увеличение в ней количества обнаруженных и взятых на сопровождение объектов наблюдения и учет апостериорных вероятностных характеристик их местоположения (вероятностных характеристик подобластей неоднородностей) влечет за собой снижение вероятности нахождения в ОО очередного необнаруженного объекта наблюдения. Это обусловлено рациональным перераспределением поисковых усилий ИИС, направленным на их уменьшение в подобластях неоднородности и увеличение в подобластях, не связанных с сопровождаемыми объектами. В условиях примера максимальный относительный выигрыш составил более десяти процентов.

Рассмотренный подход предполагает использование апостериорных плотностей распределения векторов состояний сопровождаемых объектов, формируемых на основании решения задачи динамической фильтрации. В силу этого его можно рассматривать как базу для решения комплексной задачи совместного поиска и сопровождения объектов наблюдения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы.* Рассмотрим подобласть области обзора

$$(П.1) \quad X_{\Xi}(x) \in X,$$

где  $X_{\Xi}(x)$  – малая окрестность точки  $x$  с мерой Лебега  $|X_{\Xi}| \ll 1$ , и определим для нее две гипотезы

$$(П.2) \quad \begin{aligned} H_0 : X_{\Xi}(x) \notin \bigcup_k D_k(t), \quad H_1 : X_{\Xi}(x) \in \bigcup_k D_k(t), \\ t \in [t, t + \Delta t], \quad \Delta t \ll 1, \end{aligned}$$

для которых  $P\{H_0\} = P_0$ ,  $P\{H_1\} = P_1$ ,  $P_0 + P_1 = 1$ .

Обозначим через  $A$  событие, связанное с появлением в  $X_{\Xi}(x)$  последующих объектов наблюдения из потока на интервале времени  $[t, t + \Delta t]$ . Ему соответствуют две условные вероятности  $P(A/H_0)$ ,  $P(A/H_1)$ . Тогда [13]

$$(П.3) \quad P(A) = P(A/H_0)P_0 + P(A/H_1)P_1.$$

В рамках допущения о невозможности появления очередного объекта наблюдения в областях пространства, занимаемых сопровождаемыми объектами, полагается, что  $P(A/H_1) = 0$ , тогда

$$(П.4) \quad P(A) = P(A/H_0)(1 - P_1).$$

Определим значения  $P(A)$ ,  $P(A/H_0)$ :

$$(П.5) \quad \begin{aligned} P(A) &= P\left\{\varphi_{q\Xi}(x, t + \Delta t) - \varphi_{q\Xi}(x, t) = 1, 2, 3, \dots\right\} = \\ &= 1 - \exp\left\{-\int_t^{t+\Delta t} \tilde{\xi}_{q\Xi}(x, t) dt\right\}, \end{aligned}$$

$$(II.6) \quad P(A/H_0) = P\left\{\varphi_{\Xi}(x, t + \Delta t) - \varphi_{\Xi}(x, t) = 1, 2, 3, \dots\right\} = \\ = 1 - \exp\left\{-\int_t^{t+\Delta t} \xi_{\Xi}(x, t) dt\right\},$$

где  $\varphi_{q\Xi}(x, t) = \varphi_q(X_{\Xi}(x), t)$ ;  $\varphi_{\Xi}(x, t) = \varphi(X_{\Xi}(x), t)$ ;  $\tilde{\xi}_{q\Xi}(x, t)$ ,  $\xi_{\Xi}(x, t)$  – апостериорная и априорная меры интенсивности случайного потока в  $X_{\Xi}(x)$  соответственно для  $P\{H_1\} = P_1$  и  $P\{H_0\} = 1$ .

С учетом малости  $|X_{\Xi}|$  получим

$$(II.7) \quad \xi_{\Xi}(x, t) = \int_{X_{\Xi}(x)} \nu(x, t) dx = \nu(x, t) |X_{\Xi}| + o(|X_{\Xi}|), \\ \tilde{\xi}_{q\Xi}(x, t) = \int_{X_{\Xi}(x)} \tilde{\nu}_q(x, t) dx = \tilde{\nu}_q(x, t) |X_{\Xi}| + o(|X_{\Xi}|),$$

где  $o(|X_{\Xi}|)$  – остаток порядка малости выше, чем  $|X_{\Xi}|$ .

С учетом (II.5), (II.6) соотношение (II.4) приобретает вид

$$(II.8) \quad 1 - \exp\left\{-\int_t^{t+\Delta t} \tilde{\xi}_{q\Xi}(x, t) dt\right\} = \left\{1 - \exp\left\{-\int_t^{t+\Delta t} \xi_{\Xi}(x, t) dt\right\}\right\} (1 - P_1).$$

Разложим левую и правую части (II.8) в ряд в окрестности  $t$ . С учетом условия  $\Delta t \ll 1$  получим

$$(II.9) \quad \tilde{\xi}_{q\Xi}(x, t) \Delta t + o(\Delta t) = (\xi_{\Xi}(x, t) \Delta t + o(\Delta t))(1 - P_1).$$

Разделим левую и правую части (II.9) на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Учитывая, что  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ , из (II.9) следует, что

$$(II.10) \quad \tilde{\xi}_{q\Xi}(x, t) = \xi_{\Xi}(x, t)(1 - P_1).$$

Подставляя в (II.10) значения из (II.7), получим

$$(II.11) \quad \tilde{\nu}_q(x, t) |X_{\Xi}| + o(|X_{\Xi}|) = (\nu(x, t) |X_{\Xi}| + o(|X_{\Xi}|))(1 - P_1).$$

Разделив левую и правую части (II.10) на  $|X_{\Xi}|$ , переходя к пределу при  $|X_{\Xi}| \rightarrow 0$  и учитывая, что  $\lim_{|X_{\Xi}| \rightarrow 0} \frac{o(|X_{\Xi}|)}{|X_{\Xi}|} = 0$ , придем к соотношению, связывающему априорную и апостериорную плотности интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока,

$$(II.12) \quad \tilde{\nu}_q(x, t) = \nu(x, t)(1 - P_1).$$

Необходимо отметить, что соотношение (П.10) по своей структуре аналогично соотношению, определяющему интенсивность пуассоновского потока, получаемого при случайном разрядении [14].

Определим значение  $P_1$ . Для этого для составляющих векторной переменной  $\gamma_k$ , соответственно  $\{\gamma_{k1} \dots \gamma_{kn}\}$   $0 < n \leq 3$ , введем дискретизацию  $\left\{ \gamma_{k1}^{-L_k} = -L_k \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{k1}^{-l_{k1}} = -l_{k1} \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{k1}^{-1} = -\Delta \gamma_k, 0, \gamma_{k1}^1 = \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{k1}^{l_{k1}} = l_{k1} \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{k1}^{L_k} = L_k \Delta \gamma_k \right\}, \dots, \left\{ \gamma_{kn}^{-L_k} = -L_k \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{-l_{kn}} = -l_{kn} \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{-1} = -\Delta \gamma_k, 0, \gamma_{kn}^1 = \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{l_{kn}} = l_{kn} \Delta \gamma_k, \dots, \gamma_{kn}^{L_k} = L_k \Delta \gamma_k \right\}$  с шагом  $\Delta \gamma_k$ , где  $[l_{k1} \dots l_{kn}] = \bar{l}_k^T$  – вектор индексов,  $l_{k1} = -\overline{L_k}, \overline{L_k}, \dots, l_{kn} = -\overline{L_k}, \overline{L_k}$ .

Значения  $L_k$  и  $\Delta \gamma_k$  для всех  $n$  полагаются одинаковыми. Мера Лебега  $n$ -мерного куба  $\Delta \gamma_k$  со сторонами  $\Delta \gamma_k$ , определяемая как  $|\Delta \gamma_k| = (\Delta \gamma_k)^n$ , существенно меньше единицы  $|\Delta \gamma_k| \ll 1$ .

Значения  $L_k$  и  $\Delta \gamma_k$  выбираются таким образом, чтобы область  $D_k$ , соответствующая положению объекта наблюдения в начале координат, полностью попадала в  $n$ -мерный куб со сторонами  $[-L_k \Delta \gamma_k, L_k \Delta \gamma_k]$ .

Поставим в соответствие  $k$ -му сопровождаемому объекту в момент времени  $t \in \omega_q$  случайные величины, порождаемые векторами индексов  $\bar{l}_{D_k}^T = [l_{1D_k} \dots l_{nD_k}]$ , такими что  $\bar{l}_{D_k} \Delta \gamma_k \in D_k$

$$(П.13) \quad \zeta_k^{\bar{l}_k}(t) = \eta_k(t) + \bar{l}_{D_k} \Delta \gamma_k.$$

Условие  $\bar{l}_{D_k} \Delta \gamma_k = \begin{bmatrix} l_{1D_k} \Delta \gamma_k \\ \vdots \\ l_{nD_k} \Delta \gamma_k \end{bmatrix} \in D_k$  определяет точки, принадлежащие

области  $D_k$ , когда центр объекта наблюдения находится в начале координат. Очевидно, что  $M(\bar{l}_{D_k}) \in M(\bar{l}_k)$ , где  $M(\bar{l}_k)$  – множество точек, соответствующих векторам индексов  $\bar{l}_k$ ,  $M(\bar{l}_{D_k})$  – множество точек, соответствующих векторам индексов  $\bar{l}_{D_k}$ .

Плотности распределения случайных величин (П.13) представим в виде

$$w_k^{\bar{l}_k}(x - \bar{l}_k \Delta \gamma_k, t) = \begin{cases} w_k(x - \bar{l}_k \Delta \gamma_k, t), & \bar{l}_k \in M(\bar{l}_{D_k}), \\ 0, & \bar{l}_k \notin M(\bar{l}_{D_k}). \end{cases}$$

Вероятность попадания  $\zeta_k^{\bar{l}_k}(t)$  в момент времени  $t$  в  $X_{\mathfrak{A}}(x)$  при некотором  $\bar{l}_k$  определяется соотношением

$$(П.14) \quad P \left\{ \zeta_k^{\bar{l}_k}(t) \in X_{\mathfrak{A}}(x) \right\} = P_{1k\bar{l}_k}^{\Delta}(x, t) = w_k^{\bar{l}_k}(x - \bar{l}_k \Delta \gamma_k, t) |X_{\mathfrak{A}}| + o(|X_{\mathfrak{A}}|).$$

Положим, что

$$(П.15) \quad |\Delta \gamma_k| = |X_{\mathfrak{A}}|.$$

События, связанные с попаданием случайных величин из совокупности (П.13), соответствующей  $k$ -му сопровождаемому объекту, в  $X_{\mathfrak{A}}(x)$ , являются несовместными. Действительно, два различных элемента одного и того же сопровождаемого объекта из дискретной совокупности элементов, определяемых в соответствии с (П.13), в силу (П.15) не могут одновременно находиться в одной элементарной области пространства  $X_{\mathfrak{A}}(x)$ . Для несовместных событий имеет место соотношение

$$(П.16) \quad P_{1k}^{\Delta}(x, t) = \sum_{l_{k1}=-L_k}^{L_k} \dots \sum_{l_{kn}=-L_k}^{L_k} w_k^{\bar{l}_k}(x - \bar{l}_k \Delta \gamma_k, t) |X_{\mathfrak{A}}| + o(|X_{\mathfrak{A}}|), \quad 0 < n \leq 3.$$

Учитывая (П.15) и переходя в (П.16) к пределу, получим вероятность нахождения в точке  $x$  какого-либо из элементов  $k$ -го сопровождаемого объекта

$$(П.17) \quad \begin{aligned} P_{1k}(x, t) &= \lim_{\substack{|\Delta \gamma| \rightarrow 0 \\ L_k \rightarrow \infty}} P_{1k}^{\Delta}(x, t) = \\ &= \lim_{\substack{|\Delta \gamma_k| \rightarrow 0 \\ L_k \rightarrow \infty}} \sum_{l_{k1}=-L_k}^{L_k} \dots \sum_{l_{kn}=-L_k}^{L_k} w_k^{\bar{l}_k}(x - \bar{l}_k \Delta \gamma_k, t) |\Delta \gamma_k| + o(|\Delta \gamma_k|) = \\ &= \int_{D_k} w_k(x - \gamma_k, t) d\gamma_k. \end{aligned}$$

Если в точку  $x$  попал какой-либо элемент  $k$ -го сопровождаемого объекта, то ей не может принадлежать никакой элемент других сопровождаемых объектов.

Вероятность события, связанного с тем, что никакой элемент  $m$ -го сопровождаемого объекта ( $m = \overline{1, K_q}$ ,  $m \neq k$ ) не принадлежит  $x$ , может быть определена в соответствии с (П.17)

$$(П.18) \quad 1 - P_{1m}(x, t) = 1 - \int_{D_m} w_m(x - \gamma_m, t) d\gamma_m.$$

Рассмотрим событие  $B$ , состоящее в попадании в момент времени  $t$  в элементарную область пространства  $X_{\mathfrak{A}}(x)$  одной из случайных величин из совокупностей  $\{S_k^{\bar{l}_k}(t), \bar{l}_k \in M(\bar{l}_{D_k}), k = \overline{1, K_q}\}$ , соответствующих всем сопровождаемым объектам. Это событие может осуществляться несколькими способами, т.е. распадается на несколько несовместных вариантов:

– в момент времени  $t$  в  $X_{\mathfrak{A}}(x)$  попадает одна из случайных величин первой группы  $\{S_1^{\bar{l}_1}(t), \bar{l}_1 \in M(\bar{l}_{D_1})\}$  (событие  $B_1$ ), а случайные величины остальных групп  $\{S_m^{\bar{l}_m}(t), \bar{l}_m \in M(\bar{l}_{D_m}), m = \overline{2, K_q}\}$  в  $X_{\mathfrak{A}}(x)$  не попадают (события  $\overline{B_2}, \overline{B_3}, \dots, \overline{B_{K_q}}$ );

– в момент времени  $t$  в  $X_{\Xi}(x)$  попадает одна из случайных величин второй группы  $\{\bar{s}_2^{\bar{l}_2}(t), \bar{l}_2 \in M(\bar{l}_{D_2})\}$  (событие  $B_2$ ), а случайные величины остальных групп  $\{\bar{s}_m^{\bar{l}_m}(t), \bar{l}_m \in M(\bar{l}_{D_m}), m = 1, 3, \dots, K_q\}$  в  $X_{\Xi}$  не попадают (события  $\bar{B}_1, \bar{B}_3, \dots, \bar{B}_{K_q}$ ); и т.д.

Следовательно,

$$(П.19) \quad B = B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \dots \bar{B}_{K_q} + B_2 \bar{B}_1 \bar{B}_3 \dots \bar{B}_{K_q} + \dots + B_{K_q} \bar{B}_1 \bar{B}_2 \dots \bar{B}_{K_q-1}.$$

Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей и используя свойство противоположных событий, получим

$$(П.20) \quad P_1 = P(B) = P(B_1)P(\bar{B}_2) \dots P(\bar{B}_{K_q}) + \\ + P(B_2)P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_3) \dots P(\bar{B}_{K_q}) + \dots + P(B_{K_q})P(\bar{B}_1) \dots P(\bar{B}_{K_q-1}).$$

С учетом (П.17), (П.18) для (П.20) получим

$$(П.21) \quad P_1(x, t) = \sum_{k=1}^{K_q} \left[ \int_{D_k} w_k(x - \gamma_k, t) d\gamma_k \prod_{m \neq k}^{K_q} \left( 1 - \int_{D_m} w_m(x - \gamma_m, t) d\gamma_m \right) \right], \\ x \in X.$$

Из (П.12), (П.21) следует утверждение теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. М.: Наука, 1985.
2. Альведе Р., Вегнер И. Задачи поиска. М.: Мир, 1985.
3. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов. М.: Сов. радио, 1977.
4. Аркин В.И. Задача оптимального распределения поисковых усилий // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9. № 1. С. 179–180.
5. Болдырихин Н.В., Хуторцев В.В. Управление наблюдениями за потоками случайных процессов // АИТ. 2006. № 12. С. 43–55.  
*Boldyrikhin N.V., Khutortsev V.V. Control of observations over random processes fluxes // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 12. P. 1900–1912.*
6. Баранов И.В., Хуторцев В.В. Текущая оптимизация поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 6. С. 24–34.
7. Хуторцев В.В., Баранов И.В. Оптимальное управление наблюдениями в задаче дискретного поиска для пуассоновской модели потока объектов наблюдения // Радиотехника. 2010. № 3. С. 20–24.
8. Хуторцев В.В. Оптимизация последовательно-параллельного поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 31–41.
9. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.
10. Last G. Stochastic analysis for Poisson processes // Peccati G. and Reitzner M. (eds.) Stochastic Analysis for Poisson Point Processes. Springer, Milan. 2016. P. 1–36.



11. *Daley D.J., Vere-Jones D.* An introduction to the theory of point processes. New York: Springer, 2013. 702 p.
12. *Хуторцев В.В.* Плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока с нулевой вероятностью наступления событий на стохастических подмножествах его пространственной области определения // Математика и математическое моделирование. 2020. № 3. С. 15–28.
13. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964.
14. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.*

Поступила в редакцию 20.11.2020

После доработки 15.04.2021

Принята к публикации 29.04.2021