Автоматика и телемеханика, № 1, 2022

Линейные системы

© 2022 г. **А.Р. ДАНИЛИН, д-р физ.-мат. наук (dar@imm.uran.ru),**
А.А. ШАБУРОВ, канд. физ.-мат. наук (alexandershaburov@mail.ru)
(Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского РАН, Екатеринбург)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ

Основное отличие статьи от предыдущих публикаций авторов заключается в том, что интегральная часть функционала качества имеет более общий вид и ограничения на управление определяются не шаром, а эллипсоидом. Доказано, что в случае конечного числа точек смены вида оптимального управления можно построить асимптотику начального вектора сопряженного состояния l_ε, который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр.

DOI: 10.31857/S0005231022010019

1. Введение

Статья посвящена исследованию асимптотики вектора сопряженного состояния в задаче оптимального управления [1–3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [4]), с интегральным выпуклым функционалом качества [3, гл. 3] и ограничениями на управление в виде эллипсоида.

В публикациях [5, 6] рассматривались проблемы, связанные с предельной задачей для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления рассматривалась в [7–9]. Отметим, что данный вид управляемой системы, но с терминальным критерием качества, зависящим только от медленных переменных, был рассмотрен в [8]. В [10] рассмотрена задача с функционалом качества, зависящим от медленных и быстрых переменных, но с верхнетреугольной матрицей системы.

В данной статье получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление. Главной отличительной особенностью задачи от рассмотренной в [11] является более общий вид критерия управления и ограничивающего множества для допустимых управлений.

Отметим, что в отличие от [11] в рассматриваемом случае оптимальное управление определяется неявно заданной функцией и построение асимптотического разложения по сравнению с [11] существенно усложняется.

2. Постановка задачи

Пусть управляемая система содержит быстрые и медленные переменные, а терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных:

$$
(1)\quad \begin{cases}
\dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + \widetilde{B}_1\widetilde{u}, & t\in[0,T], \quad \|D\widetilde{u}\|\leqslant 1,\\
\varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + \widetilde{B}_2\widetilde{u}, & x_\varepsilon(0)=x^0,\ \ y_\varepsilon(0)=y^0,\\
J_\varepsilon(\widetilde{u}) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \displaystyle\int_0^T \left\langle \widetilde{Q}\widetilde{u}(t),\widetilde{u}(t)\right\rangle dt \to \min,
\end{cases}
$$

где $x_\varepsilon\in\mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon\in\mathbb{R}^m$, $\widetilde{u}\in\mathbb{R}^r$; A_{ij}, $\widetilde{B}_i$, $i,j=1,2,$ — постоянные вещественнозначные матрицы соответствующей размерности, квадратная вещественнозначная матрица D невырожденная, вещественнозначная матрица $\widetilde{Q}$ симметрическая и положительная, а $\varphi(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция (в смысле выпуклого анализа) [12, § 13].

Нормы во всех рассматриваемых пространствах будем обозначать через $\|\cdot\|$, а скалярные произведения — через $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Если M — матрица, то, как и в [1, с. 134, формула (5)], M^* — оператор, сопряженный к оператору M, т.е. оператор, определяемый матрицей, получающейся из матрицы M транспонированием.

Приведем задачу (1) к некоторому "каноническому" виду.

Обозначив $v := D\widetilde{u}$, получим, что $\|v\|\leqslant 1$, а

$$
\left\langle \widetilde{Q}\widetilde{u}(t),\widetilde{u}(t)\right\rangle = \left\langle (D^{-1})^*\widetilde{Q}D^{-1}v(t),v(t)\right\rangle.
$$

Так как матрица $\widetilde{D} := (D^{-1})^*\widetilde{Q}D^{-1} > 0$, то существует ортогональная матрица P такая, что $Q := P^{-1}\widetilde{D}P = \operatorname{diag}\{q_1,\dots,q_r\}$ (см., например, [13, гл. 4, § 7, теорема 2]).

Обозначив $u := P^{-1}v$, а $B_i := \widetilde{B}_iD^{-1}P$ $(i=1,2)$, в силу $\|Pu\| = \|u\|$ получим следующую задачу оптимального управления

$$
(2)\quad \begin{cases}
\dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t\in[0,T], \quad \|u\|\leqslant 1,\\
\varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0)=x^0,\ \ y_\varepsilon(0)=y^0,\\
J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \displaystyle\int_0^T \langle Qu(t),u(t)\rangle\, dt \to \min,
\end{cases}
$$

где $Q = \operatorname{diag}\{q_1,\dots,q_r\} > 0$.

Отметим, что функция $\langle Qu, u\rangle$ строго выпукла по u.

В дальнейшем будем изучать задачу (2), при этом, не ограничивая общности, будем считать, что

$$0 < q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_r. \tag{3}$$

При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ управляемая система из (2) имеет вид:

$$\dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u,$$

где

$$z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon(0) = z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon := \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Будем говорить, что пара матриц (A, B) вполне управляема, если вполне управляема система $\dot{x} = Ax + Bu$.

Предположение 1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, т.е. rank $\big(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon\mathcal{B}_\varepsilon, \ldots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1}\mathcal{B}_\varepsilon\big) = n + m$.

Отметим, что пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ из (2) вполне управляема тогда и только тогда, когда вполне управляема пара матриц $(\mathcal{A}_\varepsilon, \widetilde{\mathcal{B}}_\varepsilon)$ из (1).

Предположение 2. Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части.

Определение 2. Вырожденной задачей для (2) называется задача

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A_0x_0 + B_0u, & A_0 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \\ x_0(0) = x^0, \quad t \in [0, T], \quad \|u\| \leqslant 1, & B_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \\ J_0(u) := \varphi(x_0(T)) + \displaystyle\int_0^T \langle Qu(t), u(t)\rangle\, dt \to \min, & \end{cases} \tag{4}$$

которая определяется формальной подстановкой $\varepsilon = 0$ в (2).

Предположение 3. Пары матриц (A_0, B_0) и (A_{22}, B_2) вполне управляемы.

Отметим, что выполнение предположений 2 и 3 влечет выполнение предположения 1 [6, теорема 1].

В рассматриваемом интегральном выпуклом функционале качества J_ε первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T, а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

Основная задача, которая ставится для (2), есть нахождение полного асимптотического разложения по степеням малого параметра ε оптимального управления u, оптимального значения функционала качества J_ε и оптимального процесса $(x_\varepsilon(t),\, y_\varepsilon(t))$.

3. Основное уравнение

При выполнении предположения 1 принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое дает единственное решение задачи (2) [3, п. 3.5, теорема 14]. Для рассматриваемой задачи этот принцип имеет следующий вид: существует единственная пара (z, η) — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u^{opt}, \\ \dot{\eta} = -\mathcal{A}_\varepsilon^* \eta \end{cases} \tag{5}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} z_\varepsilon(0) = z^0, \\ \eta(T) = -\begin{pmatrix} \nabla\varphi(x(T)) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{6}$$

где единственное управление u^{opt} определяется из принципа максимума [3, с. 258]:

$$\begin{gathered} -\left\langle Qu^{opt}(t), u^{opt}(t)\right\rangle + \left\langle \mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t), u^{opt}(t)\right\rangle = \\ = \max_{\|u\|\leqslant 1}\left(-\langle Qu, u\rangle + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t), u\rangle\right) = -\min_{\|u\|\leqslant 1}\left(\langle Qu, u\rangle - \langle \mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t), u\rangle\right) \end{gathered} \tag{7}$$

и является оптимальным управлением в задаче (2).

Здесь и далее $\nabla\varphi(\cdot)$ — градиент выпуклой функции $\varphi(\cdot)$.

В общем случае оптимальное управление $u^{opt}(t)$ зависит от параметра ε и в дальнейшем будет обозначаться как $u_\varepsilon^{opt}(t)$.

Применяя условие максимума (7), выразим оптимальное управление $u_\varepsilon^{opt}(t)$ через функцию $\mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t)$.

Если при фиксированном значении t максимум в (7) достигается во внутренней точке, то согласно теореме Ферма градиент функции

$$(-\langle Qu, u\rangle + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t), u\rangle)$$

по переменной u равен нулю. Откуда получаем:

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = \frac{1}{2}Q^{-1}\mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t).$$

Из условия $\|u_\varepsilon^{opt}(t)\| < 1$ получим, что $\|Q^{-1}\mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t)\| < 2$.

Для нахождения значения оптимального управления, которое достигается на границе $\|u_\varepsilon^{opt}(t)\| = 1$, т.е. для нахождения соответствующего максимума в (7), можно применить теорему о достаточных условиях условного экстремума в форме множителей Лагранжа (или с учетом выпуклости $\langle Qu, u\rangle$ и $\|u\|^2$ — теорему Куна–Таккера о задаче выпуклого программирования, рассмотрев задачу на минимум в (7)). Функция Лагранжа в рассматриваемом случае имеет вид

$$L(u,\mu) = -\langle Qu, u\rangle + \langle \mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t), u\rangle - \mu\left(\|u\|^2 - 1\right).$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial u} L(u,\mu) = -2Qu + \mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t) - 2\mu u$, то u, на котором достигается максимум, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial}{\partial u} L(u,\mu) = 0$ и условию $\|u_\varepsilon^{opt}(t)\| = 1$.

Поэтому

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = \frac{1}{2}(Q + \mu I)^{-1}\mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t)$$

и, следовательно,

$$\left\|(Q + \mu I)^{-1}\mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t)\right\| = 2. \tag{8}$$

Так как $\frac{\partial^2}{\partial u^2} L(u,\mu) = -2Q - 2I\mu$, то для локального максимума достаточно выполнения неравенства $Q + \mu I > 0$, т.е. $\mu > -q_1$. Но на интервале $(-q_1, +\infty)$ уравнение (8) имеет единственное решение μ, которое при условии $\|Q^{-1}\mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t)\| \geqslant 2$ неотрицательно.

Таким образом, оптимальное управление $u_\varepsilon^{opt}(t)$ имеет вид

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = S(\mathcal{B}_\varepsilon^*\eta(t)), \tag{9}$$

где функция $S(\cdot)$ определена следующим образом:

$$S(\xi) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}Q^{-1}\xi, & \|Q^{-1}\xi\| < 2, \\ \widetilde{S}(\xi) := \dfrac{(Q + \mu(\xi)I)^{-1}\xi}{2}, & \|(Q + \mu(\xi)I)^{-1}\xi\| = 2, \\ & \|Q^{-1}\xi\| \geqslant 2,\ \mu(\xi) \geqslant 0. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $\lambda_\varepsilon := \eta(T)$, тогда в силу (5) и (6):

$$\eta(t) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T-t)}\lambda_\varepsilon, \quad \text{где} \quad \lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим:

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11}(t,\varepsilon) & \mathcal{W}_{12}(t,\varepsilon) \\ \mathcal{W}_{21}(t,\varepsilon) & \mathcal{W}_{22}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$C_\varepsilon(t) := \mathcal{W}_{11}(t,\varepsilon)B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_{12}(t,\varepsilon)B_2.$$

Тогда

$$\mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t) = \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T-t)} \lambda_\varepsilon = C_\varepsilon^*(T-t) l_\varepsilon$$

и в силу (9)

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = S(C_\varepsilon^*(T-t) l_\varepsilon). \tag{11}$$

Для нахождения асимптотического разложения вектора l_ε удобно продолжить функцию $\widetilde{S}(\xi)$ на более широкое множество. Поскольку функция

$$\widetilde{F}(\xi, \mu) \;:=\; \left\|(Q + \mu I)^{-1} \xi\right\|^2 - 4 \tag{12}$$

по переменной ξ – непрерывна, строго убывает при $\mu \in (-q_1, +\infty)$ и

$$\widetilde{F}(\xi, +\infty) = -4 < 0,$$

то естественным расширением $\widetilde{S}(\xi)$ будет новая функция (обозначение этой функции оставим старое), определенная на множестве

$$D(\widetilde{S}) := \left\{ \xi : \exists \tilde{\mu} > -q_1 \; \widetilde{F}(\xi, \tilde{\mu}) > 0 \right\},$$

и такая, что $\widetilde{S}(\xi)$ — единственное решение уравнения

$$\widetilde{F}(\xi, \mu) = 0, \quad \mu > -q_1.$$

Замечание 1. Функция $\widetilde{S}(\xi)$ совпадает с $S(\xi)$ только при $\|Q^{-1}\xi\| \geqslant 2$, поэтому функция $\widetilde{S}(\mathcal{B}_\varepsilon^* \eta(t))$, вообще говоря, не есть оптимальное управление и не удовлетворяет (7).

Утверждение 1. Функция $\widetilde{S}(\xi)$ бесконечно дифференцируема на $D(\widetilde{S})$ и

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \widetilde{S}(\xi)}{\partial \xi} \Delta\xi = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\left\langle (Q + \mu(\xi) I)^{-2} \xi, \Delta\xi \right\rangle}{\left\langle (Q + \mu(\xi) I)^{-3} \xi, \xi \right\rangle} (Q + \mu(\xi) I)^{-2} \xi - (Q + \mu(\xi) I)^{-1} \Delta\xi \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Утверждение 2. При всех $\xi \in D(\widetilde{S})$ и при всех $\Delta\xi$: $\left\langle \frac{\partial \widetilde{S}(\xi)}{\partial \xi} \Delta\xi, \Delta\xi \right\rangle \geqslant 0$.

Утверждение 3. Функция $S(\xi)$ бесконечно дифференцируема при $\|Q^{-1}\xi\| \neq 2$ и липшицева на $\mathbb{R}^r$.

Из этого утверждения следует, что оптимальное управление непрерывно на $[0, T]$. Кроме этого, если l_ε – вектор, определяющий оптимальное управление, а $l_{N,\varepsilon}$ – его приближение, которое удовлетворяет условию

$$\|l_\varepsilon - l_{N,\varepsilon}\| = O(\varepsilon^N), \quad \varepsilon \to +0,$$

то

$$\left\| u_\varepsilon^{opt}(t) - S(C_\varepsilon^*(T-t)l_{N,\varepsilon}) \right\| = O(\varepsilon^N), \quad \varepsilon \to +0.$$

Поэтому асимптотическое разложение вектора l_ε дает асимптотическое разложение оптимального управления, следовательно, и состояния управляемой системы.

В силу формулы Коши, вида оптимального управления (11) и свойств кофинитных функций [12, теорема 26.6] второе равенство из (6) эквивалентно соотношению (в интеграле сделана замена переменной $\tau := T - t$)

$$\nabla\varphi^*(-l_\varepsilon) = \mathcal{W}_{11}(T,\varepsilon)x^0 + \mathcal{W}_{12}(T,\varepsilon)y^0 + \int\limits_0^T C_\varepsilon(t)S(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt, \tag{14}$$

где φ^* – сопряженная функция к функции φ в смысле выпуклого анализа.

Отметим, что свойства функции $\widetilde{S}(\xi)$ таковы, что построение и обоснование асимптотического разложения вектора l_ε можно проводить по стандартной схеме (см., например, [11]). Кратко эта схема описана в разделах 4–6.

4. Асимптотика матричной экспоненты и основные соотношения

Рассматривая $e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}$ как фундаментальную матрицу $\mathcal{W}(t,\varepsilon)$ решения системы в задаче (2) в случае $u_\varepsilon \equiv 0$ и следуя методу пограничных функций [14] при выполнении предположения 2, получаем для $\mathcal{W}(t,\varepsilon)$ равномерное на отрезке $[0,T]$ асимптотическое разложение при $\varepsilon \to 0$:

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\mathcal{W}_k(t) + \widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau) \right), \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon},$$

где для блоков $\mathcal{W}_{ij}(t,\varepsilon)$ справедливы асимптотические разложения, равномерные на $t \in [0,T]$ при каждом фиксированном $k \geqslant 0$:

$$\mathcal{W}_k(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11,k}(t) & \mathcal{W}_{12,k}(t) \\ \mathcal{W}_{21,k}(t) & \mathcal{W}_{22,k}(t) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{W}}_{11,k}(\tau) & \widetilde{\mathcal{W}}_{12,k}(\tau) \\ \widetilde{\mathcal{W}}_{21,k}(\tau) & \widetilde{\mathcal{W}}_{22,k}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{W}_k(t)$, $\widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$ — бесконечно дифференцируемые матричнозначные функции, которые определяются из равенства $\frac{d}{dt}\mathcal{W}(t,\varepsilon) = A_\varepsilon \mathcal{W}(t,\varepsilon)$ и начальных условий $\mathcal{W}(0,\varepsilon) = I$. В [15, формулы (2.4)–(2.8), с. 125] приведены формулы для построения этих разложений. В частности (при $\tau := t/\varepsilon$),

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{11,0}(t) = e^{A_0 t}, & \mathcal{W}_{12,0}(t) \equiv 0, & \mathcal{W}_{21,0}(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}e^{A_0 t}, \\ \widetilde{\mathcal{W}}_{11,0}(\tau) \equiv 0, & \widetilde{\mathcal{W}}_{12,0}(\tau) \equiv 0, & \widetilde{\mathcal{W}}_{21,0}(0) = e^{A_{22}\tau}A_{22}^{-1}A_{21}, \\ \mathcal{W}_{22,0}(t) \equiv 0, & \widetilde{\mathcal{W}}_{22,0}(\tau) = e^{A_{22}\tau}, & \mathcal{W}_{12,1}(t) = -e^{A_0 t}A_{12}A_{22}^{-1}, \\ \widetilde{\mathcal{W}}_{12,1}(\tau) = A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}. \end{cases} \tag{15}$$

Отметим, что все $\widetilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(\tau)$ экспоненциально убывают при $\tau \to +\infty$ (см., например, [15, утверждение 2.1]).

Из формул (15) простым вычислением получим, что при $\varepsilon \to +0$ [15, формулы (2.19)–(2.21)]

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2 + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}C_0(t) + \varepsilon^{-1}A_{12}e^{A_{22}\tau}B_2 + A_{12}e^{A_{22}\tau}A_{22}^{-1}A_{21}B_1 + \tag{16}$$

$$+ \Big(A_{11}A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau} + A_{12}\widetilde{B}_{22,1}(\tau)\Big)B_2 + O(\varepsilon).$$

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда

$$l_\varepsilon \to l_0 \text{ при } \varepsilon \to +0,$$

где l_ε – единственное решение уравнения (14), а l_0 – единственное решение уравнения

$$\nabla\varphi^*(-l_0) = e^{A_0 t}x^0 + \int_0^T C_0(t)S(C_0^*(t)l_0)dt. \tag{17}$$

Доказательство этой теоремы почти дословно (с соответствующими изменениями) повторяет доказательство теоремы 1 из [11].

Отметим также, что $u_0^{opt}(t) = S(C_0^*(T-t)l_0)$ есть единственное оптимальное управление в вырожденной задаче (4).

5. Точки смены вида подынтегрального выражения

Если на промежутке $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ выполняется условие

$$\forall\, t \in [t_1, t_2]\ \left\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\right\| < 2 \qquad \text{либо} \qquad \forall\, t \in [t_1, t_2]\ \left\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\right\| > 2,$$

то $S(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)$ на этом промежутке определяется одной из двух формул

$$\frac{Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{2} \qquad \text{либо} \qquad \widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon). \tag{18}$$

Интеграл из равенства (14) на этом промежутке будет иметь вид

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} C_\varepsilon Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon dt \qquad \text{либо} \qquad \int_{t_1}^{t_2} C_\varepsilon(t)\widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt.$$

Определение 3. Точки $t_{i,\varepsilon}$ — решения уравнения $\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2$ будем называть точками смены вида подынтегрального выражения в (14), а точки $t_{i,0}$ — решения уравнения $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$ будем называть точками смены вида подынтегрального выражения в (17).

Замечание 2. В дальнейшем точки смены вида подынтегрального выражения будем называть просто *точками смены* в (14) или в (17) соответственно.

Отметим, что в силу формулы (14) решения уравнения $\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2$ не будут временами смены вида оптимального управления. Если t_ε — решение этого уравнения, то соответствующее ему время смены оптимального управления равно $T - t_\varepsilon$.

Из формул (16) следует, что при $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ справедливы асимптотические формулы

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}C_0(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

При $t \in [0, \sqrt{\varepsilon}]$ функция $C_\varepsilon(t)$ после замены переменной $\tau := t/\varepsilon$ перепишется как $\widetilde{C}_\varepsilon(\tau) := C_\varepsilon(\varepsilon\tau)$, которая при $\tau \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ определяется асимптотической формулой

$$\widetilde{C}_\varepsilon(\tau) = \psi(\tau) + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\widetilde{C}_\varepsilon(\tau) = A_{12}e^{A_{22}\tau}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

где

$$\psi(\tau) := B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2.$$

Таким образом, существуют $K_1 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ справедливы неравенства

$$\|C_\varepsilon^*(t) - C_0^*(t)\| \leqslant K_1\varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon^*(t) - \frac{d}{dt}C_0^*(t)\right\| \leqslant K_1\varepsilon.$$

Следовательно, можно ожидать, что решения уравнения $\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2$ при $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ находятся вблизи решений уравнения $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$, т.е. вблизи точек смены в (17), а при $\tau \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ — вблизи решений уравнения

$$\|Q^{-1}\psi^*(\tau)l_0\| = 2, \qquad \text{где} \qquad \psi^*(\tau) := B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*. \tag{19}$$

Определение 4. Решение t_* уравнения $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$ будем называть регулярным, если $\frac{d}{dt}\|Q^{-1}C_0^*(t_*)l_0\|^2 \neq 0$.

Аналогично τ_* — решение уравнения $\|Q^{-1}\psi^*(\tau)l_0\| = 2$ будем называть регулярным, если $\frac{d}{d\tau}\|Q^{-1}\psi^*(\tau_*)l_0\|^2 \neq 0$.

Предположение 4. Матрицы Q, B_0^* и вектор l_0 таковы, что выполняется следующее соотношение: $\|Q^{-1}B_0^*l_0\| \neq 2$.

Утверждение 4. При выполнении предположений 3, 4 уравнение $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$ при $t \in [0, T]$ и уравнение $\|Q^{-1}\psi^*(\tau)l_0\| = 2$ при $\tau > 0$ имеют не более чем конечное число решений.

Доказательство утверждения следует из аналитичности функций

$$\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|^2 - 4, \qquad \|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\|^2 - 4, \qquad \|Q^{-1}\psi^*(\tau)l_0\|^2 - 4. \tag{20}$$

Как и в случае $Q = I$ (см., [15, теорема 2.1]) справедлива теорема о количестве точек смены в (14).

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1–4, $\{t_i\}_1^p \subset [0,T]$ *— все решения уравнения* $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$, *а* $\{\tau_j\}_1^q \subset [0,+\infty)$ *— все решения уравнения* (19). *Кроме того, при* $i = 1,\ldots,p$ *и* $j = 1,\ldots,q$ *все такие решения – регулярные.*

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любого* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *существуют* $\{t_{i,\varepsilon}\}_1^p \subset [\sqrt{\varepsilon},T]$ *и* $\{\tau_{j,\varepsilon}\}_1^q \subset [0,1/\sqrt{\varepsilon}]$ *– точки смены в* (14). *Других точек смены в* (14) *нет, и при всех* $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,q$ *справедливы соотношения* $t_{i,\varepsilon} \to t_i$, $\tau_{j,\varepsilon} \to \tau_j$, $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 2 интеграл из (14) разобьется в конечную сумму интегралов с подынтегральными функциями вида (18).

6. Построение асимптотики вектора l_ε

Для технического упрощения, и не ограничивая общности рассуждений, будем вести это построение в случае, когда имеется лишь одна точка t_0 смены вида в (17), а в (19) таких точек две, т.е. выполнено предположение 5.

Предположение 5. Пусть $t_1 = \varepsilon\tau_1$, $t_2 = \varepsilon\tau_2$, *где* τ_1, τ_2 *— все решения уравнения* (19), *а у уравнения* $\|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| = 2$ *имеется единственное решение* t_0. *Решения* t_0, τ_1, τ_2 *— регулярны.*

Отметим, что все условия в предположении 5 есть условия общего положения.

В силу теоремы 2 у рассматриваемой управляемой системы будут три точки смены вида в (14): $t_{1,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{1,\varepsilon}$, $t_{2,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}$ и $t_{0,\varepsilon}$. При этом $\tau_{1,\varepsilon} \to \tau_1$, $\tau_{2,\varepsilon} \to \tau_2$ и $t_{0,\varepsilon} \to t_0$ при $\varepsilon \to 0$, а интеграл $\int_0^T C_\varepsilon(t)S(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt$ разбивается в сумму четырех интегралов

$$\int_0^T C_\varepsilon(t)S\left(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\right)dt =$$

$$= \int_0^{t_{1,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)\widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt + \frac{1}{2}\int_{t_{1,\varepsilon}}^{t_{2,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\,dt +$$

$$+ \int_{t_{2,\varepsilon}}^{t_{0,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)\widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon)dt + \frac{1}{2}\int_{t_{0,\varepsilon}}^{T} C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\,dt.$$

Пусть

$$\Delta l_\varepsilon := l_\varepsilon - l_0, \quad \Delta t_\varepsilon := t_{0,\varepsilon} - t_0, \quad \Delta\tau_{1,\varepsilon} := \tau_{1,\varepsilon} - \tau_1, \quad \Delta\tau_{2,\varepsilon} := \tau_{2,\varepsilon} - \tau_2.$$

Тогда

$$\Delta l_\varepsilon = o(1), \quad \Delta t_\varepsilon = o(1), \quad \Delta\tau_{1,\varepsilon} = o(1), \quad \Delta\tau_{2,\varepsilon} = o(1) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Величины Δl_ε, $\Delta\tau_{1,\varepsilon}$, $\Delta\tau_{2,\varepsilon}$ и Δt_ε, являются решением следующей системы уравнений, зависящей от параметра $\varepsilon > 0$:

$$\tag{21} \begin{cases} 0 = F(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2) := -\nabla\varphi^*(-l) + \nabla\varphi^*(-l_0) + \\ + \varepsilon\mathcal{W}_{11,1}(T,\varepsilon)x^0 + \varepsilon\mathcal{W}_{12,1}(T,\varepsilon)y^0 + \displaystyle\int\limits_0^{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)} C_\varepsilon(t)\widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l)dt + \\ + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)}^{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)} C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l\,dt + \displaystyle\int\limits_{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)}^{t_0+\Delta t} C_\varepsilon(t)\widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l)dt + \\ + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{t_0+\Delta t}^{T} C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l\,dt - \displaystyle\int\limits_0^{t_0} C_0(t)\widetilde{S}(C_0^*(t)l)dt - \\ - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{t_0}^{T} C_0(t)Q^{-1}C_0^*(t)l\,dt, \\ 0 = G_1(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_1) := \left\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1))(l_0+\Delta l)\right\|^2 - 4, \\ 0 = G_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_2) := \left\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2))(l_0+\Delta l)\right\|^2 - 4, \\ 0 = G_3(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) := \left\|Q^{-1}C_\varepsilon^*(t_0+\Delta t)(l_0+\Delta l)\right\|^2 - \left\|Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0\right\|^2. \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем индекс ε у вектора l_ε, а также у величин Δl_ε, $\Delta\tau_{1,\varepsilon}$, $\Delta\tau_{2,\varepsilon}$, Δt_ε опустим.

Согласно (20) функции F и G_i (при $i = 1,2,3$) непрерывны, а G_i — бесконечно дифференцируемые. Рассмотрим их асимптотические разложения относительно бесконечно малых Δl, $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$ и Δt.

Поскольку функции φ^* и G_i бесконечно дифференцируемые, то их степенные асимптотические разложения есть ряды Тейлора, построенные в окрестности точки $(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \Delta t) = 0$, в частности,

$$\tag{22} -\nabla\varphi^*(-l_0 - \Delta l) + \nabla\varphi^*(-l_0) \sim D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \sum_{k=2}^{\infty}\Phi_k(\Delta l),$$

где $D^2\varphi^*(-l_0)$ — дифференциал второго порядка от φ^* в точке $(-l_0)$, а $\Phi_k(\Delta l)$ — однородные степени k известные функции (многочлены от компонент вектора Δl).

Степенное асимптотическое разложение интегральных слагаемых из (21) строится так же, как и в случае $Q = I$ (см. [15, раздел 3]): в частности, используется представление интегралов из (21) в следующем виде:

$$\int\limits_0^{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)} C_\varepsilon(t)\widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l)dt = \int\limits_0^{\varepsilon\tau_1} + \int\limits_{\varepsilon\tau_1}^{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)},$$

$$\int\limits_{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)}^{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)} C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l\,dt = \int\limits_{\varepsilon(\tau_1+\Delta\tau_1)}^{\varepsilon\tau_1} + \int\limits_{\varepsilon\tau_1}^{\varepsilon\tau_2} + \int\limits_{\varepsilon\tau_2}^{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)},$$

$$\int\limits_{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)}^{t_0+\Delta t} C_\varepsilon(t)\widetilde{S}(C_\varepsilon^*(t)l)dt = \int\limits_{\varepsilon(\tau_2+\Delta\tau_2)}^{\varepsilon\tau_2} + \int\limits_{\varepsilon\tau_2}^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t},$$

$$\int\limits_{t_0+\Delta t}^{T} C_\varepsilon(t)Q^{-1}C_\varepsilon^*(t)l\,dt = \int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{T}.$$

Отметим, что продолжение функции $\widetilde{S}$ требовалось для возможности такого представления интегралов из (21).

Покажем, что оператор первого приближения в системе (21) обратим.

Обозначим линейную часть по $\triangle l$ функции F как $\mathcal{F}(\Delta l)$. В силу представления (22) непосредственным вычислением (используя формулу (13), в которой нужно ξ заменить на $C_0^*(t)l_0$, а $\Delta\xi$ — на $C_0^*(t)\Delta l$), получаем равенство

$$\begin{gathered} F(\varepsilon, \Delta l, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \Delta t) = \\ = D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \varepsilon f_1 + F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2) + \\ + \int\limits_0^{t_0} C_0(t)\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\xi}(C_0^*(t)l_0)C_0^*(t)\Delta l dt + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} C_0(t)Q^{-1}C_0^*(t)\Delta l dt =: \\ =: \mathcal{F}(\Delta l) + \varepsilon f_1 + F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2), \end{gathered} \tag{23}$$

где

$$F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta\tau_1, \Delta\tau_2) = O\Big(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta t)^2 + (\Delta\tau_1)^2 + (\Delta\tau_2)^2\Big),$$

а f_1 — известная величина.

Аналогично для функций G_i:

$$
\begin{gathered}
G_1(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_1)=2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_1)l_0, Q^{-1}\psi^*(\tau_1)\Delta l+Q^{-1}B_2^*e^{A_{22}^*\tau_1}A_{12}^*\Delta\tau_1 l_0\right\rangle+\\
+2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_1)l_0,\varepsilon Q^{-1}B_1^*\mathcal{W}_{11,1}^*(t_0)l_0+\varepsilon Q^{-1}B_1^*A_{21}^*(A_{22}^{-1})^*e^{A_{22}^*\tau_1}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*l_0\right\rangle+\\
+2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_1)l_0,\varepsilon Q^{-1}B_2^*\mathcal{W}_{12,2}^*(t_0)l_0\right\rangle+G_{1,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_1),
\end{gathered}
$$

(24)
$$
\begin{gathered}
G_2(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_2)=2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_2)l_0, Q^{-1}\psi^*(\tau_2)\Delta l+Q^{-1}B_2^*e^{A_{22}^*\tau_2}A_{12}^*\Delta\tau_2 l_0\right\rangle+\\
+2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_2)l_0,\varepsilon Q^{-1}B_1^*\mathcal{W}_{11,1}^*(t_0)l_0+\varepsilon Q^{-1}B_1^*A_{21}^*(A_{22}^{-1})^*e^{A_{22}^*\tau_2}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*l_0\right\rangle+\\
+2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_2)l_0,\varepsilon Q^{-1}B_2^*\mathcal{W}_{12,2}^*(t_0)l_0\right\rangle+G_{2,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_2),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
G_3(\varepsilon,\Delta l,\Delta t)=2\left\langle Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0, Q^{-1}C_0^*(t_0)\Delta l+Q^{-1}\frac{\partial}{\partial t}C_0^*(t_0)l_0\Delta t\right\rangle+\\
+2\left\langle Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0,\varepsilon Q^{-1}B_1^*\mathcal{W}_{11,1}^*(t_0)l_0+\varepsilon Q^{-1}B_2^*\mathcal{W}_{12,2}^*(t_0)l_0\right\rangle+G_{3,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta t),
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{aligned}
G_{1,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_1)&=O\Big(\varepsilon^2+\|\Delta l\|^2+(\Delta\tau_1)^2\Big),\\
G_{2,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta\tau_2)&=O\Big(\varepsilon^2+\|\Delta l\|^2+(\Delta\tau_2)^2\Big),\\
G_{3,2}(\varepsilon,\Delta l,\Delta t)&=O\Big(\varepsilon^2+\|\Delta l\|^2+(\Delta t)^2\Big).
\end{aligned}
$$

Согласно равенствам (23), (24) оператор первого приближения для системы (21) имеет вид

$$
\mathcal{H}:=\begin{pmatrix}
\mathcal{F}(\Delta l)\\
2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_1)l_0,Q^{-1}\psi^*(\tau_1)\Delta l\right\rangle+2\Delta\tau_1\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_1)l_0,Q^{-1}B_2^*e^{A_{22}^*\tau_1}A_{12}^*l_0\right\rangle\\
2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_2)l_0,Q^{-1}\psi^*(\tau_2)\Delta l\right\rangle+2\Delta\tau_2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_2)l_0,Q^{-1}B_2^*e^{A_{22}^*\tau_2}A_{12}^*l_0\right\rangle\\
2\left\langle Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0,Q^{-1}C_0^*(t_0)\Delta l\right\rangle+2\Delta t\left\langle Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0,Q^{-1}\frac{\partial}{\partial t}C_0^*(t_0)l_0\right\rangle
\end{pmatrix},
$$

а система первого приближения для (21) запишется в виде

(25)
$$
\begin{cases}
\mathcal{F}(\Delta l_1)=-\varepsilon f_1,\\
2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_1)l_0,Q^{-1}\psi^*(\tau_1)\Delta l_1+Q^{-1}B_2^*e^{A_{22}^*\tau_1}A_{12}^*l_0\Delta\tau_{1,1}\right\rangle=\varepsilon g_{1,1},\\
2\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_2)l_0,Q^{-1}\psi^*(\tau_2)\Delta l_1+Q^{-1}B_2^*e^{A_{22}^*\tau_2}A_{12}^*l_0\Delta\tau_{2,1}\right\rangle=\varepsilon g_{2,1},\\
2\left\langle Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0,Q^{-1}C_0^*(t_0)\Delta l_1+Q^{-1}\frac{\partial}{\partial t}C_0^*(t_0)l_0\Delta t_1\right\rangle=\varepsilon g_{3,1},
\end{cases}
$$

где $g_{i,1}$, $i=1,2,3$, — известные величины (в силу (24)).

В силу условий строгой выпуклости функции φ (из постановки задачи) линейный оператор $D^2\varphi^*(-l_0)$ – положительный, а в силу утверждения 2 остальные слагаемые в определении линейного оператора $\mathcal{F}$ – неотрицательны (после скалярного умножения на вектор $Q^{-1}C^*(t)\triangle l$ подынтегрального выражения в (23)). Поэтому оператор $\mathcal{F} > 0$ и, таким образом, из первого уравнения в системе (25) однозначно находится значение $\Delta l_1 = \varepsilon\mathcal{F}^{-1}(-f_1) =:$ $=: \varepsilon l_1$.

Поскольку в силу регулярности точек $\tau_{j,0}$ при $j = 1, 2$ и t_0:

$$\left\langle Q^{-1}\psi^*(\tau_j)l_0, Q^{-1}B_2^* e^{A_{22}^*\tau_j} A_{12}^* l_0 \right\rangle \neq 0,$$

то из второго и третьего уравнения в системе (25) по Δl_1 однозначно находятся значения $\Delta\tau_{1,1}$, $\Delta\tau_{2,1}$ и они имеют вид $\Delta\tau_{1,1} = \varepsilon\tau_1$, $\Delta\tau_{2,1} = \varepsilon\tau_2$ и

$$\left\langle Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0, Q^{-1}C_0^*(t_0)l_0 \right\rangle \neq 0,$$

а из четвертого уравнения в (25) по Δl_1 однозначно находится Δt_1, имеющее вид $\Delta t_1 = \varepsilon t_1$.

Таким образом, оператор первого приближения обратим. Построение и обоснование асимптотики величин происходит аналогично случаю $Q = I$ [15, раздел 3]. Справедлива теорема 3.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* 2–5. *Тогда вектор* l_ε *и моменты времени* $t_{i,\varepsilon}$, $i = 0, 1, 2$, *раскладываются в степенные асимптотические ряды*

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{0,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_k, \quad t_{1,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{1,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon\tau_1 + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{1,k},$$
$$t_{2,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{2,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon\tau_2 + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{2,k}, \quad \varepsilon \to 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

В общем случае оператор $\mathcal{F}(\Delta l)$ (см. (23)) имеет вид

$$\mathcal{F}(\Delta l) = D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \mathcal{F}_0,$$

где

$$\mathcal{F}_0 := \int\limits_{E_1} \frac{C_0(t)Q^{-1}C_{1,0}^*(t)\Delta l}{2} dt + \int\limits_{E_2} C_0(t)\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\xi}(C_0^*(t)l_0) \cdot C_0^*(t)\Delta l dt,$$

$$E_1 = \left\{t \in [0, T] \,:\, \|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| \leqslant 2\right\},$$
$$E_2 = \left\{t \in [0, T] \,:\, \|Q^{-1}C_0^*(t)l_0\| \geqslant 2\right\},$$

и $\mathcal{F}_0 \geqslant 0$.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения 2–4, условия теоремы 2. Тогда вектор l_ε и моменты времени $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \ldots, t_{p,\varepsilon}\}$ раскладываются в степенные асимптотические ряды на промежутке $[\sqrt{\varepsilon}, T]$

$$l_\varepsilon \overset{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{i,\varepsilon} \overset{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_{i,k}, \quad i = 1, \ldots, p, \quad \varepsilon \to 0,$$

и дополнительные точки $\{\tau_{1,\varepsilon}, \tau_{2,\varepsilon}, \ldots, \tau_{q,\varepsilon}\}$ раскладываются в степенные асимптотические ряды на промежутке

$$\tau_{j,\varepsilon} \overset{as}{=} \tau_j + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{j,k}, \varepsilon \to 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

В силу теоремы 4 в общем случае для нахождения асимптотического разложения указанных в теореме 4 величин можно сразу искать их в виде рядов с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты этих рядов находятся стандартным образом — приравниванием в формальном асимптотическом разложении основного уравнения слагаемых одного порядка малости по ε.

7. Заключение

Статья носит теоретический характер. Результаты статьи дополняют теорию асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления для системы с медленными и быстрыми переменными и гладкими геометрическими ограничениями на управление с интегрально выпуклым критерием качества. Терминальная часть функционала качества есть непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго–выпуклая и кофинитная функция, а интегральная часть содержит строго выпуклую функцию, зависящую от управления. Показано, что решение задачи с ограничениями на управление в виде эллипсоида сводится к решению задачи с ограничением на управление в виде шара.

В статье предложен алгоритм определения всех коэффициентов асимптотического разложения по малому параметру определяющего вектора l_ε, который задает вид оптимального управления. Главная особенность и сложность рассматриваемой задачи определяются тем, что оптимальное управление в ней определяется через неявно заданную функцию.

Авторы статьи выражают благодарность рецензенту, сделавшему ряд ценных замечаний, учет которых при подготовке статьи к печати позволил авторам улучшить ее текст.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим функцию $\mu(\xi)$. Она задана неявно уравнением $\widetilde{F}(\xi, \mu) = 0$.

Функция $\widetilde{F}(\xi,\mu) \in D(\tilde{S})$, определенная в (12), бесконечно дифференцируема на области $\{(\xi,\mu) : \xi \in D(\widetilde{S}), \mu > -q_1\}$. При этом

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F(\xi,\mu)}{\partial \xi}\Delta\xi = 2\left\langle (Q+\mu I)^{-2}\xi, \Delta\xi\right\rangle, \\ (\text{П.1}) \qquad &\frac{\partial F(\xi,\mu)}{\partial \mu} = -2\left\langle (Q+\mu I)^{-3}\xi, \xi\right\rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

и

$$\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-3}\xi, \xi\right\rangle \neq 0$$

при всех $\xi \in D(\tilde{S})$ силу положительности $(Q+\mu(\xi)I)$. Поэтому по теореме о дифференцируемости функции, заданной неявно, функция $\mu(\xi)$ — бесконечно дифференцируема при $\xi \in D(\widetilde{S})$ и в силу (П.1)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mu(\xi)}{\partial \xi}\Delta\xi = -\left(\frac{\partial F(\xi,\mu)}{\partial \mu}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F(\xi,\mu)}{\partial \xi}\Delta\xi\right) = \\ (\text{П.2}) \qquad &= \frac{\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-2}\xi, \Delta\xi\right\rangle}{\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-3}\xi, \xi\right\rangle} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Поскольку $\widetilde{S}(\xi) = (Q+\mu(\xi)I)^{-1}\xi/2$, то

$$\frac{\partial \widetilde{S}(\xi)}{\partial \xi}\Delta\xi = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(Q+\mu(\xi+t\Delta\xi)I)^{-1}(\xi+t\Delta\xi)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-(Q+\mu(\xi)I)^{-2}\xi\left(\frac{\partial\mu(\xi)}{\partial\xi}\Delta\xi\right) + (Q+\mu(\xi)I)^{-1}\Delta\xi\right) \overset{(\text{П.2})}{=}$$

$$\overset{(\text{П.2})}{=} -\frac{1}{2}\left(\frac{\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-2}\xi, \Delta\xi\right\rangle}{\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-3}\xi, \xi\right\rangle}(Q+\mu(\xi)I)^{-2}\xi - (Q+\mu(\xi)I)^{-1}\Delta\xi\right).$$

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. При любом $\xi \in D(\widetilde{S})$ в силу определения $D(\widetilde{S}) : (Q+\mu(\xi)I)^{-1} > 0$, поэтому в $\mathbb{R}^r$ можно ввести новое скалярное произведение $\langle \xi_1, \xi_2\rangle_\mu := \left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-1}\xi_1, \xi_2\right\rangle$.

Тогда

$$\left\langle \frac{\partial \widetilde{S}(\xi)}{\partial \xi}\Delta\xi, \Delta\xi \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-1}\Delta\xi, \Delta\xi\right\rangle -$$

$$-\frac{\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-2}\xi, \Delta\xi\right\rangle}{\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-3}\xi, \xi\right\rangle}\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-2}\xi, \Delta\xi\right\rangle\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-3}\xi,\xi\right\rangle}\times$$
$$\times\left(\|\Delta\xi\|_\mu^2\cdot\|(Q+\mu(\xi)I)^{-1}\xi\|_\mu^2 - \left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-1}\xi,\Delta\xi\right\rangle_\mu^2\right).$$

Выражение в скобках неотрицательно в силу неравенства Коши–Буняковского.

Утверждение 2 доказано.

Доказательство утверждения 3. Справедливость первого утверждения следует из определения функции $S(\cdot)$ из (10) и утверждения 1.

Пусть $\|Q^{-1}\xi\| > 2$, тогда $\|(Q+\mu(\xi)I)^{-1}\xi\| = 2$ и $\mu(\xi) > 0$.

Теперь оценим знаменатель в первом слагаемом из (13):

$$\left\langle (Q+\mu(\xi)I)^{-3}\xi,\xi\right\rangle = \sum_{k=1}^{r}\frac{\xi_k^2}{(q_k+\mu(\xi))^3} \overset{(3)}{\geqslant} \frac{\|\xi\|^2}{(q_r+\mu(\xi))^3}.$$

Таким образом, в силу (13)

$$\left\|\frac{\partial\widetilde{S}(\xi)}{\partial\xi}\right\| \leqslant$$

$$\text{(П.3)}\qquad \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\|(Q+\mu(\xi)I)^{-2}\|^2\|\xi\|^2(q_r+\mu(\xi))^3}{\|\xi\|^2} + \|(Q+\mu(\xi)I)^{-1}\|\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(q_r+\mu(\xi))^3}{(q_1+\mu(\xi))^4} + \frac{1}{(q_1+\mu(\xi))}\right) \to 0 \text{ при } \mu(\xi)\to+\infty.$$

Поэтому существует такое $K(\widetilde{S})$, что $\left\|\frac{\partial\widetilde{S}(\xi)}{\partial\xi}\right\| \leqslant K(\widetilde{S})$ при всех ξ: $\|Q^{-1}\xi\| > 2$.

Если $\|Q^{-1}\xi\| = 2$, то $\mu(\xi) = 0$, поэтому $\widetilde{S}(\xi) = \|Q^{-1}\xi\|$. Таким образом, функция $\widetilde{S}$ непрерывна на $\mathbb{R}^k$.

Если $\|Q^{-1}\xi_i\| < 2$ $(i = 1, 2)$, то $\|S(\xi_2) - S(\xi_1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|Q^{-1}\|\cdot\|\xi_2-\xi_1\|$.

Если $\|Q^{-1}\xi_i\| > 2$ $(i = 1, 2)$, то в силу формулы конечных приращений Лагранжа из (П.3) получим

$$\|S(\xi_2) - S(\xi_1)\| = \|\widetilde{S}(\xi_2) - \widetilde{S}(\xi_1)\| \leqslant K(\widetilde{S})\|\xi_2-\xi_1\|.$$

Наконец, пусть $\|Q^{-1}\xi_1\| < 2$ и $\|Q^{-1}\xi_2\| \geqslant 2$. Тогда найдется единственная точка $\widetilde{\xi}\in[\xi_1,\xi_2]$ такая, что $\|Q^{-1}\widetilde{\xi}\| = 2$. Поэтому

$$\|S(\xi_2) - S(\xi_1)\| \leqslant \|S(\xi_2) - S(\widetilde{\xi})\| + \|S(\widetilde{\xi}) - S(\xi_1)\| \leqslant$$
$$\leqslant K(\widetilde{S})\|\xi_2-\widetilde{\xi}\| + \frac{1}{2}\|Q^{-1}\|\cdot\|\widetilde{\xi}-\xi_1\| \leqslant K_1(\|\xi_2-\widetilde{\xi}\| + \|\widetilde{\xi}-\xi_1\|).$$

Но $\|\xi_2-\widetilde{\xi}\| + \|\widetilde{\xi}-\xi_1\| = \|\xi_2-\xi_1\|$.

Утверждение 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968.

3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

4. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ. 1982. Т. 20. С. 3–77. https://doi.org/10.1007/BF01262406.

   Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in problems of optimal control // J. Soviet Math. 1986. V. 34. No. 3. P. 1579–1629.

   https://doi.org/10.1007/BF01262406.

5. *Дончев А.* Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987.

6. *Kokotovic P.V., Haddad A.H.* Controllability and Time-Optimal Control of Systems with Slow and Fast Models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. V. 20. No. 1. P. 111–113.

7. *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451. № 6. С. 612–614. https://doi.org/10.7868/S086956521325004X.

   Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-Optimal Control of a Small Mass Point without Environmental Resistance // Doklady Mathematics. 2013. V. 88. No. 1. P. 465–467. https://doi.org/10.7868/S086956521325004X.

8. *Данилин А.Р., Парышева Ю.В.* Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае // Тр. ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 55–65.

   https://doi.org/10.1134/S0081543807060053.

   Danilin A.R., Parysheva Yu.V. The Asymptotics of the Optimal Value of the Performance Functional in a Linear Optimal Control Problem in the Regular Case // Proc. Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues). 2007. V. 259. suppl. 2. S83–S94. https://doi.org/10.1134/S0081543807060053.

9. *Калинин А.И., Семенов К.В.* Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 3. С. 432–443.

   Kalinin A.I., Semenov K.V. The Asymptotic Optimization Method for Linear Singularly Perturbed Systems with the Multidimensional Control // Comput. Math. Math. Phys. 2004. V. 44. No. 3. P. 407–417.

10. *Данилин А.Р., Шабуров А.А.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных // Уфимск. матем. журн. 2019. Т. 11. № 2. С. 83–98. https://doi.org/10.13108/2019-11-2-82.

    Danilin A.R., Shaburov A.A. Asymptotic Expansion of Solution to Singularly Perturbed Optimal Control Problem with Convex Integral Quality Functional with Terminal Part Depending on Slow and Fast Variables // Ufa Math. J. 2019. V. 11. No. 2. P. 82–96. https://doi.org/10.13108/2019-11-2-82.

11. *Шабуров А.А.* Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ с интегральным выпуклым критерием качества // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 303–310. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-303-310.

12. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

13. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

14. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

15. *Шабуров А.А.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Вестн. российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 125. С. 119–136.

https://doi.org/10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 19.02.2021

После доработки 16.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021