

© 2022 г. А.С. АНТИПОВ (scholess18@mail.ru),
С.А. КРАСНОВА, д-р техн. наук (skrasnova@list.ru),
В.А. УТКИН, д-р техн. наук (viktorutkin013@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ СЛЕЖЕНИЯ С СИГМОИДАЛЬНЫМИ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ С ОБЕСПЕЧЕНИЕМ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ СЛЕЖЕНИЯ¹

Для нелинейных одноканальных объектов управления, математическая модель которых представима в треугольной форме вход – выход, рассматривается задача слежения в условиях внешних и параметрических возмущений. В рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза нелинейной обратной связи, обеспечивающая отслеживание выходной переменной целевого сигнала с заданной точностью за заданное время. Формализован новый тип сигмоидальных локальных связей из класса гладких и всюду ограниченных S-образных функций, обеспечивающих инвариантность по отношению к неконтролируемым ограниченными возмущениям, не принадлежащим пространству управления, без предположений об их гладкости. Приведены результаты моделирования разработанных алгоритмов для системы управления перевернутым маятником.

Ключевые слова: нелинейная SISO система, слежение, декомпозиция, инвариантность, сигма-функция, перевернутый маятник.

DOI: 10.31857/S0005231022010032

1. Введение

Базовой проблемой теории автоматического управления является задача слежения, при решении которой нужно обеспечить в замкнутой системе отработку выходными переменными целевых допустимых сигналов с заданными показателями переходных и установившихся процессов. Основные усилия специалистов направлены на решение этой задачи применительно к объектам, функционирующим при действиях внешних неконтролируемых возмущений. Наиболее разработанным является случай, когда аффинные внешние возмущения действуют в пространстве управления, т.е. условия согласования (англ. “matching conditions”) выполнены [1]. По отношению к согласованным возмущениям можно обеспечить инвариантность всего вектора состояния как

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00363А).

с помощью динамической, так и статической обратной связи. В первом случае предварительно нужно получить оценки внешних возмущений с помощью динамического компенсатора или наблюдателя возмущений (см., например, [1–6]) и компенсировать их действие с помощью комбинированного управления. Во втором случае для подавления внешних ограниченных возмущений используются “силовые” методы: глубокие обратные связи или разрывные управления с организацией скользящего режима [7–9].

Наибольшую сложность представляют объекты с несогласованными возмущениями, которые нельзя непосредственно компенсировать или подавить с помощью истинного управления. В задаче слежения к таким возмущениям относятся также производные целевых сигналов. Поэтому задача обеспечения инвариантности по отношению к возмущениям ставится только для регулируемых выходов (ошибок слежения), а остальные переменные вынуждены отрабатывать соответствующие внешние воздействия. Для синтеза следящей системы в предположении о гладкости внешних и параметрических возмущений используют генераторы задающих и возмущающих воздействий, наблюдатели возмущений, регрессоры и идентификаторы параметров [1, 10–12]. При этом динамический порядок замкнутой системы увеличивается в несколько раз по сравнению с размерностью модели объекта управления. Кроме того, построение адекватных динамических моделей внешних воздействий достаточно проблематично, если они меняются в процессе эксплуатации или недостаточно гладкие. Примером могут служить ударные нагрузки и силы сухого трения при управлении электромеханическими объектами [13–15]. В частном случае, когда негладкое возмущение отделено от истинного управления одним интегратором, можно подавить его с помощью “вихревого” статического управления с непрерывной и разрывной составляющими. Результат достигается за счет организации в системе колебательного переходного процесса, при котором часть переменных состояния автоматически компенсирует влияние неизвестных слагаемых [16].

В общем случае для обеспечения инвариантности ошибок слежения по отношению к несогласованным возмущениям, которые не подлежат дифференцированию, целесообразно использовать локальные связи специального вида и блочный принцип управления как методологическую основу для их реализации. При решении задачи слежения в рамках блочного подхода [17–22] уравнения внешней динамики приводятся к блочной форме вход–выход с аффинным вхождением фиктивных и истинных управлений. Она состоит из элементарных блоков, в каждом из которых размерность управляемых переменных равна рангу матрицы перед фиктивными управлениями, в качестве которых используются переменные следующего блока. Последовательно формируемые стабилизирующие локальные связи в каждом блоке в итоге обеспечивают выбором истинного управления. Внешние возмущения при блочной организации являются согласованными с фиктивными управлениями. Как было отмечено, классическими методами подавления внешних и параметрических ограниченных возмущений, действующих в пространстве управления, являются: 1) непрерывные линейные обратные связи с большими коэффици-

ентами усиления; 2) ограниченные по модулю разрывные управления с организацией скользящих режимов. При этом только управления первого типа (в силу гладкости) можно использовать для формирования локальных связей. Применению глубоких обратных связей на практике препятствует известная проблема всплесков в начале переходных процессов [23–24], на величину которых в практических приложениях накладываются ограничения. Гибридом линейного и разрывного управлений является кусочно-линейное управление с насыщением в виде sat-функции [25–26], которое сочетает в себе положительные свойства обоих методов, но свободно от их недостатков. С помощью ограниченного и непрерывного sat-управления в замкнутой системе обеспечиваются свойства, близкие к свойствам систем с разрывными управлениями, функционирующим в скользящем режиме. Негладкость sat-функции не является препятствием для ее использования в истинном управлении и в корректирующих воздействиях наблюдателей состояния [5, 18], но сужает возможности ее применения для синтеза фиктивных управлений в практических задачах.

Для универсального формирования инвариантных локальных связей требуются гладкие аналоги sat-функции — трансцендентные S-образные функции (арктангенс, гиперболический тангенс, логистическая функция и т.п.). Конструктивным инструментом для анализа и синтеза нелинейного управления представляется нечетный гиперболический тангенс $\text{th}(x) = 1 - 2/(\exp(2x) + 1)$, он зависит от экспоненты, его производные всюду ограничены и рекурсивно выражаются через первообразную. В данной работе используется более удобная для построений модификация гиперболического тангенса — сигма-функция $\sigma(x) = -\text{th}(-x/2)$.

Заметим, что с помощью сигма-функций можно с любой точностью аппроксимировать любую ограниченную функцию с конечным числом разрывов. Это свойство используется в задачах нейросетевого обучения, где сигмоиды служат функциями активации нейронов: из набора сигмоидов формируется нейронный слой, выходом которого является их линейная комбинация. Вычисление параметров нейронной сети (весовых коэффициентов и смещений) происходит в процессе обучения по заранее известной обучающей выборке (англ. “data set”) с целью минимизации функции потерь, в качестве которой выступает среднеквадратическая ошибка между целевыми значениями обучающей выборки и выходом нейронной сети. После завершения процесса обучения нейронная сеть применяется к новым данным и позволяет прогнозировать целевые значения на основе настроенных при обучении параметров [27].

В данной работе сигма-функции используются непосредственно в контуре обратной связи в качестве фиктивных и истинных управлений. Параметры регулятора выбираются на этапе синтеза исходя из наилучших допустимых значений параметров объекта управления и границ изменения внешних воздействий. В процессе регулирования сигмоидальные фиктивные и истинные управления за конечное время сходятся к согласованным с ними неизвестным сигналам и повторяют их форму с наперед заданной точностью. При этом

автоматически реализуется механизм компенсации возмущений, в том числе не принадлежащих пространству истинного управления, что и обеспечивает инвариантность выходных переменных. Таким образом, предлагаемый метод принципиально отличается от способа использования сигмоидальных функций в задачах нейросетевого управления, где параметры регулятора настраиваются по заранее известной обучающей выборке, при формировании которой требуется предусмотреть все возможные модификации регулируемого процесса [28].

Апробация сигмоидальных обратных связей в задачах наблюдения [3, 17], а также в задачах управления применительно к различным мехатронным объектам [15, 29–32] показала несомненное преимущество этого подхода по сравнению с линейной обратной связью с большими коэффициентами. К недостаткам метода можно отнести более сложную вычислительную реализацию, но с учетом постоянно наращиваемой мощности современных управляющих микропроцессоров это не является серьезным препятствием для его использования в системах управления современными и перспективными техническими объектами.

В данной работе блочный принцип управления с сигмоидальными обратными связями формализован для решения задачи слежения применительно к нелинейным одноканальным системам треугольного вида произвольной размерности, функционирующих в условиях параметрических и внешних несогласованных возмущений (без предположений об их гладкости). Обратим внимание, что динамические генераторы внешних воздействий в построения не вводятся; в оценивании параметрических и внешних возмущений нет необходимости. Задача рассматривается в детерминированной постановке: полагается, что весь вектор состояния объекта управления измеряется, шумы в измерениях отсутствуют.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся базовые сведения о сигма-функции и ее применении для синтеза инвариантной элементарной системы; описывается математическая модель объекта управления, формулируется постановка задачи слежения. В разделе 3 представлен основной результат: формализованы достаточные условия и разработана декомпозиционная процедура синтеза параметров сигмоидальных обратных связей на основе иерархических неравенств, обеспечивающих стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью за заданное время. В разделе 4 приведены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов для системы управления перевернутым маятником.

2. Описание проблемы

2.1. Особенности сигмоидальной обратной связи

Рассмотрим гладкую и ограниченную сигма-функцию

$$\sigma(kx) = \frac{2}{1 + \exp(-kx)} - 1, \quad k = \text{const} > 0,$$

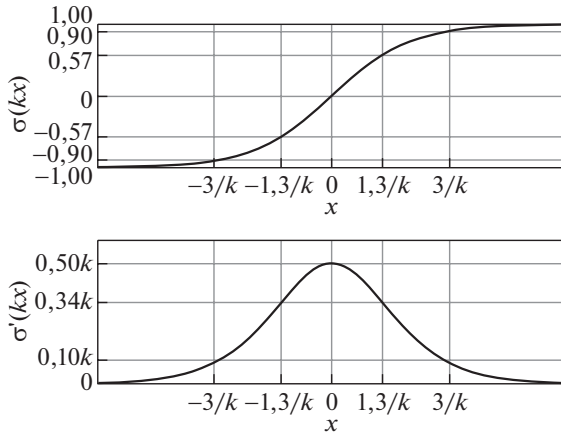


Рис. 1. Графики сигма-функции (сверху) и ее производной (снизу).

которая определена на всей числовой оси и имеет следующие свойства:

$$\sigma(-kx) = -\sigma(kx), \quad \sigma(kx) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} kx/2, \quad \sigma(kx) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sign}(x).$$

В аргументе специально выделен множитель k , который в дальнейших построениях играет роль большого коэффициента усиления в малой окрестности нуля. Производная сигма-функции имеет рекурсивный вид:

$$\sigma'(kx) = k(1 - \sigma^2(kx))/2 > 0, \quad x \in R, \quad \sigma'(-kx) = \sigma'(kx).$$

Для упрощения анализа нелинейной сигма-функции установим ее аналогию с кусочно-линейной sat-функцией. Рассмотрим некоторую окрестность нуля с радиусом $\Delta > 0$. Для сигма-функции и ее производной в указанных интервалах справедливы следующие оценки:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \sigma(k\Delta) < |\sigma(kx)| < 1, \quad 0 < \sigma'(kx) < \sigma'(k\Delta), \quad |x| > \Delta; \\ & \frac{\sigma(k\Delta)|x|}{\Delta} \leq |\sigma(kx)| \leq \sigma(k\Delta), \quad \sigma'(k\Delta) \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = \frac{k}{2}, \quad |x| \leq \Delta. \end{aligned}$$

Неравенства (2.1) демонстрируют, что при $|x| > \Delta$ сигма-функция близка к постоянной, а при $|x| \leq \Delta$ — к линейной функции (см. рис. 1). Для формализации абсцисс указанного разделения введем параметр $c = \text{const} > 0$: $|x| = \Delta = c/k$, который целесообразно выбирать из интервала

$$(2.2) \quad k\Delta = c \in [1,3; 3],$$

где: $\pm 1,3$ — абсциссы точек перегиба первой производной $\sigma'''(\pm 1,3) = 0$, при этом $\sigma(\pm 1,3) \approx \pm 0,57$, $\sigma'(\pm 1,3) \approx 0,34k$; ± 3 — абсциссы вершин сигма-функции, в которых ее кривизна достигает максимума, при этом $\sigma(\pm 3) \approx \pm 0,9$, $\sigma'(\pm 0,9) \approx 0,095k$ [17].

Поясним идею использования сигмоидальной обратной связи и выбора ее параметров в задаче обеспечения инвариантности на примере элементарной возмущенной системы

$$(2.3) \quad \dot{x} = f(t) + u,$$

где $x \in R$ – измеряемая переменная состояния, $f(t)$ – внешнее возмущение, которое описывается детерминированной, неизвестной, но ограниченной функцией времени, требование гладкости к ней не предъявляется, достаточно, чтобы она была кусочно-непрерывная. Переменную системы (2.3) можно трактовать как ошибку слежения, тогда $f(t)$ аддитивно включает производную задающего воздействия.

Ставится задача стабилизации системы (2.3) с помощью статической обратной связи. Управляющее воздействие u сформируем в виде сигма-функции

$$(2.4) \quad u = -m\sigma(kx)$$

с постоянной амплитудой $m = \text{const} > 0$.

Лемма. Если в системе (2.3), (2.4) внешнее возмущение ограничено известной константой $|f(t)| \leq F = \text{const} > 0$, $t \geq 0$, то тогда для любых сколь угодно малых $\Delta > 0$, $T > 0$ и любого начального условия $x(0)$ найдутся такие положительные действительные числа \bar{k} и \bar{m} , что при любых $k \geq \bar{k}$, $m \geq \bar{m}$ выполнится неравенство

$$(2.5) \quad |x(t)| \leq \Delta, \quad t \geq T.$$

Доказательство леммы. Заданное $\Delta > 0$ (2.5) и коэффициент k свяжем параметрически (2.2), что сводит проблему выбора k к выбору c из указанного диапазона.

Формализуем для замкнутой системы (2.3), (2.4) достаточные условия устойчивости: введем функцию Ляпунова $V = x^2/2$ и оценим ее производную. Вне области $|x| \leq \Delta$ с учетом (2.1)–(2.2) имеем:

$$(2.6) \quad \dot{V} = x(f(t) - m\sigma(kx)) \leq |x|(F - m\sigma(c)).$$

Из (2.6) следует, что неравенство $\dot{V} \leq |x|(F - m\sigma(c)) < 0$ справедливо, если

$$(2.7) \quad m > m^* = F/\sigma(c).$$

Выполнение (2.7) обеспечивает $|x(t)| \leq \Delta$ без учета времени сходимости, которое зависит от начального условия. В частном случае $|x(0)| \leq \Delta$ неравенство $|x(t)| \leq \Delta$ обеспечивается при (2.7) и $t \geq 0$, т.е. цель управления (2.5) достигается.

В общем случае $|x(0)| > \Delta$ для гарантированного достижения переменной состояния заданной области за заданное время $T > 0$ повысим нижнюю границу для выбора амплитуды (2.7). С учетом оценки решения системы (2.3)

на интервале $t \in [0; T]$

$$|x(t)| \leq |x(0)| + (F - m\sigma(c))T \leq \Delta, \quad t \geq T$$

получим

$$(2.8) \quad m \geq \bar{m} = \frac{1}{\sigma(c)} \left(\frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right) > m^*, \quad |x(0)| > \Delta.$$

Таким образом, принятое значение c (2.2) определяет \bar{m} (2.8) и \bar{k}

$$(2.9) \quad k \geq \bar{k} = c/\Delta,$$

отвечающие цели управления (2.5) при любом $x(0)$. Выбор амплитуды m управления (2.4) на основе неравенства (2.8) гарантирует попадание переменной состояния системы (2.3) из любого начального условия в окрестность нуля за заданное время (и чем больше m , тем быстрее). Если переменная изначально находится в этой области, то гарантированно не покинет ее в процессе регулирования. Выбор большого коэффициента k на основе (2.9) обеспечивает заданный радиус этой окрестности (и чем больше k , тем меньше радиус). Лемма доказана.

Замечание 1. В процессе доказательства леммы 1 формализованы достаточные условия (2.8), (2.9), гарантирующие выполнение целевых показателей (2.5). Однако предельный радиус окрестности нуля, достигаемой переменной $x(t)$ в стационарном режиме, будет несколько меньше заданного $\Delta > 0$. Действительно, при $t \geq T$ для замкнутой системы (2.3), (2.4) оценка производной функции Ляпунова (2.6) в силу (2.1) имеет вид

$$\dot{V} = x(f(t) - m\sigma(kx)) \leq |x|(F - m\sigma(c)|x|/\Delta).$$

Неравенство $\dot{V} < 0$ справедливо вне области

$$(2.10) \quad |x| \leq \Delta \frac{F}{m\sigma(c)} < \Delta,$$

к которой асимптотически стремится $x(t)$ и которая в силу (2.8) меньше заданной (2.5). Ее радиус сокращается с ростом амплитуды m .

Тем не менее на практике целесообразно выбирать k и m как можно ближе к базовым значениям \bar{k} (2.9) и \bar{m} (2.8) в целях экономии ресурса управления.

Рассмотрим вопрос о выборе параметра c из указанного диапазона (2.2). Принимая во внимание последующее использование сигма-функций для синтеза локальных связей в многомерных системах, в качестве критерия выбора примем минимум базовой оценки модуля скорости управления. Для замкнутой системы (2.3) имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -mk(1 - \sigma^2(kx))\dot{x}/2; \quad 0 < 1 - \sigma^2(kx) \leq 1, \quad x \in R; \\ | \dot{x}(t) | &< F + m < 2m, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.8), (2.9) следует базовая оценка скорости изменения управления:

$$(2.11) \quad |\dot{u}(t)| < m^2 k, \quad t \geq 0, \quad m^2 k \geq \bar{m}^2(c) \bar{k}(c) = \frac{c}{\sigma^2(c) \Delta} \left(\frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right)^2.$$

Из (2.11) при фиксированных значениях Δ , $|x(0)|$, T , F имеем целевое условие:

$$(2.12) \quad y(c) = \frac{c}{\sigma^2(c)} \rightarrow \min, \quad c > 0.$$

Исследуем на экстремумы функцию (2.12). Ее производная имеет вид

$$y' = \frac{(1 + e^c)(e^{2c} - 4ce^c - 1)}{(e^c - 1)^3},$$

из уравнения $y' = 0 \Rightarrow e^{2c} - 4ce^c - 1 = 0$ численно находим стационарную точку $c \approx 2,17$. На интервале $c \in (0; 2,17)$ функция убывает ($y' < 0$), на интервале $c \in (2,17; +\infty)$ — возрастает ($y' > 0$), следовательно, $c \approx 2,17 \in [1,3; 3]$ — точка минимума. Для удобства расчетов положим

$$(2.13) \quad \bar{c} = 2,2; \quad \sigma(\bar{c}) \approx 0,8; \quad \frac{1}{\sigma(\bar{c})} \approx 1,25.$$

В принятой точке $y(2,2) \approx 3,43322$, что практически не отличается от минимального значения функции $y(2,17) \approx 3,43299$. Тогда с учетом (2.13) оценки (2.1) примут следующий вид:

$$(2.14) \quad 0,8 < |\sigma(kx)| < 1, \quad 0 < \sigma'(kx) < 0,18k, \quad |x| > \bar{c}/k, \quad \bar{c} = 2,2;$$

$$\frac{0,8k|x|}{\bar{c}} = 0,36k|x| \leq |\sigma(kx)| \leq 0,8, \quad 0,18k \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = \frac{k}{2}, \quad |x| \leq \bar{c}/k.$$

Замечание 2. В элементарной возмущенной системе (2.3) с помощью сигмоидального управления обеспечивается монотонный переходный процесс и $|x(t)| \leq \bar{x} = \max\{|x(0)|, \Delta\}$, $t \geq 0$, что позволяет расширить класс рассматриваемых элементарных систем за счет систем вида

$$(2.15) \quad \dot{x} = f_1(x) + f_2(t) + b(x, t)u,$$

где значения $f_1(x)$ точно не известны, требование ограниченности на всей области определения к данной функции не предъявляется, достаточно выполнения условия $|f_1(x)| \leq F_1 = \text{const} > 0$ при $|x| \leq \bar{x} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любая малая величина; $f_2(t)$ — неизвестное ограниченное возмущение $|f_2(t)| \leq F_2 = \text{const} > 0$ при $t \geq 0$. Достаточное условие управляемости системы (2.15) в сделанных предположениях: $b(x, t)$ — знакопостоянная функция, т.е. $b(x, t) \neq 0$ при $|x| \leq \bar{x} + \varepsilon$, $t \geq 0$, допускается ее параметрическая неопределенность, но в указанных интервалах известны ее знак $\text{sign}(b(x, t)) = \text{const}$

и границы изменения $0 < b_{\min} \leq |b(x, t)| \leq b_{\max}$. Ко всем функциям системы (2.15) не предъявляется требование гладкости, достаточно, чтобы они были кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва первого рода.

Обозначим: $f(x, t) = f_1(x) + f_2(t)$, $|f(x, t)| \leq F = F_1 + F_2$ при $|x| \leq \bar{x} + \varepsilon$, $t \geq 0$. Управление

$$u = -\text{sign}(b)m\sigma(kx)$$

приводит к замкнутой системе

$$(2.16) \quad \dot{x} = f(x, t) - |b(x, t)| m\sigma(kx).$$

Зафиксируем большой коэффициент на основе (2.9) с учетом (2.13):

$$(2.17) \quad k \geq \bar{k} = \frac{\bar{c}}{\Delta} = \frac{2,2}{\Delta}.$$

Для замкнутой системы (2.15) при $\Delta < |x| < \bar{x} + \varepsilon$ аналогично (2.6), (2.7) имеем:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \dot{V} = x(f - |b|m\sigma(kx)) &\leq |x|(F - b_{\min}m\sigma(\bar{c})) = |x|(F - 0,8b_{\min}m), \\ 0,8b_{\min}m > F &\Leftrightarrow m > 1,25F/b_{\min} \Rightarrow \dot{V} < 0. \end{aligned}$$

Если $|x(0)| \leq \Delta$, то выполнение (2.17), (2.18) обеспечит $|x(t)| \leq \Delta$ при $t \geq 0$. В общем случае $\Delta < |x(0)| < \bar{x} + \varepsilon$ переменная состояния не выйдет из области $|x(t)| \leq \bar{x}$, $t \geq 0$, а цель управления (2.5) будет достигнута, если аналогично (2.8) амплитуда принята на основе неравенства

$$(2.19) \quad m \geq \bar{m} = \frac{1}{b_{\min}\sigma(\bar{c})} \left(\frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right) = \frac{1,25}{b_{\min}} \left(\frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right),$$

$$|x(0)| > \Delta.$$

Приведенные построения далее распространяются на неэлементарные управляемые системы.

2.2. Описание модели объекта управления. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается нелинейная одноканальная система, функционирующая при действии внешних несогласованных возмущений, математическая модель которой представима в треугольной (по составу аргументов функций ее подсистем) форме вход–выход:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, t) + b_i(x_1, \dots, x_i, t)x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, t) + b_i(x_1, \dots, x_n, t)u, \end{aligned}$$

где $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) \in X \subset R^n$ – измеряемый вектор состояния, X – открытая ограниченная область изменения переменных состояния, определяемая физикой процесса, границы области допустимых начальных значений переменных $x(0) \in X$ заранее известны; $x_1 \in X_1 \subset R$ – регулируемая переменная

(выход), $u \in R$ – управляющее воздействие (вход); $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ – функции от указанных переменных вектора состояния и внешних возмущений, которые в общем случае полагаются неизвестными функциями времени, ограниченными по модулю:

$$(2.21) \quad |f_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)| \leq F_i = \text{const} > 0, \quad x(t) \in X, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

характер вхождения параметрических и сигнальных возмущений не принципиален, так как задача их индивидуального оценивания и компенсации не ставится.

Замечание 3. Константы $F_i, i = \overline{1, n}$ (2.21) нужно знать заранее, поэтому самый простой вариант – предполагать, что функции $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ ограничены по всем указанным аргументам. Конечно, это сильно сужает класс допустимых систем, из рассмотрения сразу выпадают линейные системы. Отметим, что предлагаемая далее процедура синтеза всюду ограниченных обратных связей является удобным аналитическим инструментом для обеспечения в процессе регулирования заданных ограничений на переменные состояния и управления [15]. В данной работе эта проблема не рассматривается. Тем не менее если функции $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ не ограничены всюду по x_1, \dots, x_i , то имеется принципиальная возможность априори для худшего расчетного случая оценить область изменения переменных состояния X и соответствующие значения $F_i, i = \overline{1, n}$ при $x(t) \in X$ (см. замечание 2).

Система (2.20) является управляемой, а именно, $b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t) \neq 0, x(t) \in X, t \geq 0, i = \overline{1, n}$ [20]. Данные функции могут содержать различные неопределенности, но при этом известными считаются их знаки $\text{sign}(b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)) = \text{const}, t \geq 0$ и диапазоны изменения

$$(2.22) \quad 0 < b_{i,\min} \leq |b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)| \leq b_{i,\max}, \\ x(t) \in X, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Требование гладкости к функциям $f_i(t), b_i(t), i = \overline{1, n}$ (2.20) не предъявляется, достаточно, чтобы они были кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва первого рода.

Модель (2.20) без ограничения общности можно рассматривать как одну из подсистем уравнений внешней динамики многоканальной системы [1, 33]. Под такое описание попадает представительный класс динамических объектов управления, например теплообменные и электромеханические системы [9, 12–15, 19, 25, 26, 29–32, 34, 35]. Модели ряда других объектов можно представить в виде связного набора подсистем типа (2.20) с помощью невырожденных замен переменных без задействования в преобразованиях внешних возмущений.

Для объекта управления (2.20) ставится задача синтеза закона управления в форме статической обратной связи, обеспечивающего отслеживание выходной переменной $x_1(t)$ заданного допустимого сигнала $g(t)$, который поступает в систему управления в реальном времени из внешнего источника, его

аналитическое описание отсутствует, известны только его текущие значения, области изменения начальных условий и первой производной:

$$(2.23) \quad g(t) \in G \subseteq X_1, \quad |\dot{g}(t)| \leq G_1, \quad t \geq 0.$$

В сделанных предположениях задача слежения, а именно стабилизация ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$, может быть решена только с некоторой точностью. Пусть заданы точность стабилизации $\Delta_1 > 0$ и время $t_1 > 0$ ее достижения. Цель управления — обеспечить в замкнутой системе

$$(2.24) \quad |e_1(t)| \leq \Delta_1, \quad t \geq t_1.$$

В следующем разделе получены достаточные условия решения поставленной задачи (2.24) в рамках блочного подхода с использованием сигмоидальных обратных связей.

3. Декомпозиционная процедура синтеза сигмоидальных обратных связей с обеспечением заданной точности стабилизации ошибки слежения

Система (2.20) имеет структуру блочной формы управляемости [20–22]. Согласно идеологии блочного принципа управления каждое уравнение системы (2.20) трактуется как элементарный блок, аналогичный (2.15), относительно фиктивного или истинного управления. В i -м блоке ($i = \overline{1, n-1}$) в качестве фиктивного управления выступает переменная следующего блока x_{i+1} . Таким образом, неопределенности $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$, $i = \overline{1, n-1}$, которые не согласованы с истинным управлением, находятся в пространстве соответствующих фиктивных управлений. Чтобы избежать большого перерегулирования, характерного для линейных обратных связей с большими коэффициентами, которые стандартно используются для подавления неопределенностей [22–24, 30], стабилизирующие фиктивные управления предлагается выбрать в виде гладких и ограниченных сигма-функций:

$$(3.1) \quad x_i^* = -\text{sign}(b_{i-1})m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), \quad k_{i-1}, m_{i-1} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{2, n},$$

где e_1 — ошибка слежения, e_{i-1} ($i = \overline{3, n+1}$) — невязки между переменными x_i и выбранными фиктивными управлениями (3.1):

$$(3.2) \quad \begin{aligned} e_1 &= x_1 - g, \\ e_i &= x_i - x_i^* = x_i + \text{sign}(b_{i-1})m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

В замкнутой системе с помощью истинного управления, которое также для единообразия принимается в виде сигма-функции

$$(3.3) \quad u = -\text{sign}(b_n)m_n\sigma(k_n e_n), \quad k_n, m_n = \text{const} > 0,$$

требуется обеспечить стабилизацию невязок (3.2), в том числе ошибки слежения e_1 , что отвечает цели управления (2.24).

Перепишем замкнутую систему (2.20), (3.3) относительно невязок (3.2):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -|b_1| m_1 \sigma(k_1 e_1) + f_1 - \dot{g} + b_1 e_2; \\ \dot{e}_i &= -|b_i| m_i \sigma(k_i e_i) + f_i + \Lambda_{i-1} + b_i e_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ \dot{e}_n &= -|b_n| m_n \sigma(k_n e_n) + f_n + \Lambda_{n-1}, \end{aligned}$$

где слагаемые

$$(3.5) \quad \Lambda_i = \text{sign}(b_i) m_i \frac{k_i (1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} \dot{e}_i, \quad i = \overline{1, n-1}$$

являются производными соответствующих фиктивных управлений (3.1), которые возникают при переходе к новому координатному базису (3.2).

Для настройки параметров сигмоидальных обратных связей в системе (3.4) используем блочный подход, в котором реализуется принцип декомпозиции [34, 35]. Задача сводится к последовательному решению элементарных задач синтеза в подсистемах (блоках), аналогичных (2.16). Отличие заключается в том, что только последняя, n -я подсистема регулируется непосредственно истинным управлением, а в остальных в качестве фиктивных управлений выступают переменные следующего блока. Как следствие, в общем случае ненулевых начальных значений невязок только в последнем блоке гарантируется монотонный переходный процесс. Формализуем достаточные условия стабилизации системы (3.4).

Теорема. Если в системе (3.4) выполняются условия (2.21)–(2.23), то тогда для любых начальных условий $x(0) \in X$ и любых, сколь угодно малых $\Delta_1 > 0$, $t_1 > 0$ найдутся такие действительные числа $\bar{k}_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $0 < \bar{m}_i < \bar{m}_i$, $i = \overline{1, n-1}$, $\bar{m}_n > 0$, что при любых $k_i \geq \bar{k}_i$, m_i : $\bar{m}_i < m_i \leq \bar{m}_i$, $m_n \geq \bar{m}_n$ неравенство (2.24) выполнится.

В Приложении приведено конструктивное доказательство теоремы, в ходе которого получена декомпозиционная процедура выбора параметров фиктивных и истинного управлений на основе неравенств, обеспечивающая решение поставленной задачи (2.24). Заметим, что на стадии проектирования следящей системы в полученные оценки для выбора амплитуд вместо конкретных значений $|x_i(0)|$, $i = \overline{1, n}$, $|g(0)|$ (2.23) следует подставлять граничные значения областей допустимых начальных условий соответствующих переменных состояния.

Для упрощения вычислительной реализации в качестве истинного управления вместо (3.3) можно также использовать всюду ограниченную, но негладкую sat-функцию [25, 26].

Замечание 4. Для управления механическими системами часто используют электрические безынерционные исполнительные устройства, построенные на базе силовых электронных элементов, которые могут функционировать исключительно в ключевом режиме. В этом случае вместе с сигмоидальными локальными связями (3.2) естественно вместо непрерывного управления (3.3) использовать закон разрывного управления:

$$(3.6) \quad u = -\text{sign}(b_n) m_n \text{sign}(e_n).$$

Разрывное управление (3.6) имеет один настраиваемый параметр — амплитуду, которая выбирается на основе неравенства, аналогичного (П.22), а именно:

$$(3.7) \quad m_n \geq \bar{m}_n = \frac{1}{b_{n,\min}} \left(\frac{|x_n(0)| + m_{n-1}^*}{t_n^*} + F_n + k_{n-1}^* (m_{n-1}^*)^2 b_{n-1,\max} \right).$$

При выполнении (3.7) в замкнутой системе (2.20), (3.2), (3.6) за конечное время $0 < t_n^* < 0,2b_{n-1,\min}t_{n-1}^*/b_{n-1,\max} < t_1$ возникнет скользящий режим [7–9]. В теории — на поверхности $e_n = 0$ в виртуальном пространстве невязок $(e_1, \dots, e_n) \in R^n$, а в реальности из-за различного рода неидеальностей движение изображающей точки происходит в пограничном слое поверхности переключения $|e_n(t)| \leq \Delta_n$, $t \geq t_n^*$, ширина которого пропорциональна амплитуде разрывного управления. При этом неравенства (П.1), а следовательно, и цель управления (2.24) обеспечиваются.

Необходимо отметить, что параметры обратной связи в предложенной процедуре определяются на основе неравенств, составленных для худшего расчетного случая, что не требует перенастройки регулятора при изменении внутренних и внешних факторов в допустимых пределах. Кроме того, показана принципиальная возможность в рамках предложенного подхода обеспечить любую, сколь угодно малую ошибку слежения с любым, достаточно малым перерегулированием (П.11) за любое, сколь угодно малое время при любых начальных условиях. Но эти построения имеют больше теоретическую значимость, поскольку уменьшение показателей цели управления (2.24), (П.11) обернется ростом параметров регулятора. Это может привести к избыточным величинам фиктивных и истинных управлений в переходном процессе, недопустимым в реальных системах автоматического управления.

Замечание 5. При использовании разработанной в доказательстве теоремы процедуры настройки в практических приложениях рекомендуется фиксировать коэффициенты обратной связи как можно ближе к нижним базовым границам. Учитывая консервативность полученных оценок, можно несколько завышать целевые показатели (2.24) при выполнении расчетов, так как реально в установившемся режиме будет достигаться меньшая ошибка слежения (2.10) и/или меньшее время регулирования (см. раздел 4).

Обратим внимание, что в силу организации локальных обратных связей (3.1) в замкнутой системе (2.20), (3.6) переменные состояния $x_i(t)$, $i = \overline{2, n}$ будут “отслеживать” ограниченные сигмоидальные сигналы, при этом максимальные отклонения фиктивных управлений от “задающих воздействий” ограничены (П.6), а точность слежения будет зависеть от задаваемой точности стабилизации невязок (3.2) (“ошибок слежения”). Этот факт является предпосылкой для использования данного подхода при решении задачи слежения в условиях проектных ограничений на переменные состояния и управления.

4. Результаты моделирования

Для иллюстрации разработанного метода рассмотрим задачу синтеза следящей системы для перевернутого математического маятника. За точку от-

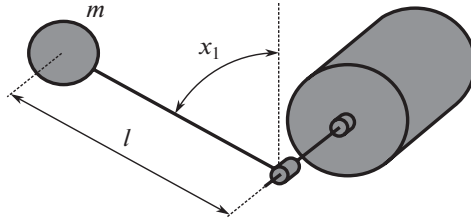


Рис. 2. Схема перевернутого маятника.

счета принято верхнее вертикальное положение $x_1 = 0$, которое является неустойчивым (см. рис. 2).

Математическая модель с учетом редуцированной динамики двигателя постоянного тока (ДПТ) аналогична (2.20) и имеет третий порядок:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \sin x_1 - a_{22} x_2 + b_2 x_3 + \eta(t), \\ \dot{x}_3 &= -a_{32} x_2 - a_{33} x_3 + b_3 u, \end{aligned}$$

где a_{ij} , b_i – положительные конструктивные коэффициенты

$$(4.2) \quad \begin{aligned} a_{21} &= \tilde{g}/l, & a_{22} &= \kappa/l, & b_2 &= k_a/(\tilde{m}l^2), \\ a_{32} &= c/L, & a_{33} &= R/L, & b_3 &= 1/L, \end{aligned}$$

которые не определены и могут изменяться в известных диапазонах. Описание переменных состояния $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$ системы (4.1), которые подлежат прямым измерениям, и параметров (4.2) приведено в табл. 1.

В системе (4.1) регулируемой (выходной) переменной является угловое положение маятника $x_1(t)$, для которого ставилась задача отслеживания заданного сигнала $g(t)$ (2.23). Для обеспечения (2.24) применялся разработанный метод с формированием сигмоидальных локальных связей и синтеза разрыв-

Таблица 1. Описание переменных состояния и параметров объекта управления

Обозначение	Описание, единица измерения	Обозначение	Описание, единица измерения
$x_1(t)$	угловое положение маятника, $[-\pi; \pi]$ [рад]	l	длина маятника, [м]
$x_2(t)$	угловая скорость маятника, $[-2; 2]$ [рад/с]	κ	коэффициент вязкого трения, $[\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2]$
$x_3(t)$	ток якоря ДПТ, $[-4; 4]$ [А]	c	коэффициент противо-ЭДС ДПТ, $[\text{В} \cdot \text{с}/\text{рад}]$
$\eta(t)$	неконтролируемое возмущение, $[\text{Н} \cdot \text{м}]$	R	сопротивление якоря ДПТ, [Ом]
$\tilde{g} = 9,81$	ускорение свободного падения, $[\text{м}/\text{с}^2]$	L	индуктивность якоря ДПТ, [Гн]
\tilde{m}	масса маятника, [кг]	k_a	коэффициент пропорциональности, $[\text{Н} \cdot \text{м}/\text{А}]$

Таблица 2. Параметры объекта управления, принятые при моделировании

	Диапазон изменения	Вид или значение			
		Эксперимент 1	Эксперимент 2	Эксперимент 3	Эксперимент 4
$\eta(t)$	$[-0,5; 0,5]$	$0,25t, t \in [(k-1)T, kT], k = 1, 2, \dots, T = 2$		$0,5 \cos t$	$0,3 \sin t$
$g(t)$	$[-0,5; 0,5]$ $ \dot{g}(t) \leq 0,5$	$0,2 \sin t$		$0,5 \sin t $	$0,25 \sin 2t$
\tilde{m}	$[0,18; 0,25]$	0,18	0,25	$0,07 \cos(t/2) + 0,18$	
l	$[0,2; 0,3]$	0,2	0,3	0,25	0,23
κ	$[2; 4]$	2	4	3	3,8
c	$[0,27; 0,33]$	0,27	0,33	0,3	0,28
R	$[4,15; 4,2]$	4,15	4,2	4,18	4,1
L	$[0,012; 0,013]$	0,012	0,013	0,013	0,012
k_a	$[1,68; 1,75]$	1,68	1,75	1,7	1,69

ного управления, аналогично (3.1), (3.6) соответственно, где $n = 3$, u – напряжение питания якорной цепи ДПТ, [В].

В табл. 2 приведены рассматриваемые диапазоны изменения внешних воздействий, параметров объекта, а также конкретные функции и значения, принятые при моделировании.

По данным табл. 2 были рассчитаны допустимые диапазоны для коэффициентов (4.2):

$$a_{21} \in [32,70; 49,05], \quad a_{22} \in [6,67; 20], \quad b_2 \in [74,67; 243,06], \\ a_{32} \in [20,76; 27,5], \quad a_{33} \in [319,23; 350], \quad b_3 \in [76,92; 83,34].$$

На их основе, а также с учетом заданных (завышенных, см. замечание 5) показателей (2.24)

$$(4.3) \quad \Delta_1 = 0,1 \text{ [рад]}, \quad t_1 = 5 \text{ [с]}$$

и принятых $E_1 = 2,05$ (П.11), $\Delta_2 = 0,64$, $\Delta_3 = 0,05$ (П.1) для худшего расчетного случая на основе неравенств (П.2), (П.16), (П.21), (П.22) были выбраны следующие коэффициенты обратной связи:

$$(4.4) \quad m_1 = 1,96, \quad k_1 = 22; \quad m_2 = 3,54, \quad k_2 = 3,44; \quad m_3 = 190.$$

Моделирование проводилось в среде MATLAB-Simulink, для численного интегрирования системы (4.1) использовался метод Эйлера с постоянным шагом 10^{-5} . Как показано в табл. 2, в первых двух экспериментах были приняты граничные значения параметров объекта из допустимых диапазонов (в первом – наименьшие, во втором – наибольшие). В третьем и четвертом экспериментах масса маятника полагалась переменной негладкой величиной, задающее воздействие – негладким (в третьем) и гладким (в четвертом), параметры приняты в виде промежуточных значений из допустимых диапазонов. Все четыре эксперимента проводились при одинаковых коэффициентах обратной связи (4.4) и одинаковых начальных условиях $x_1(0) = \pi/3$, $x_2(0) = 0,64$, $x_3(0) = 0,5$.

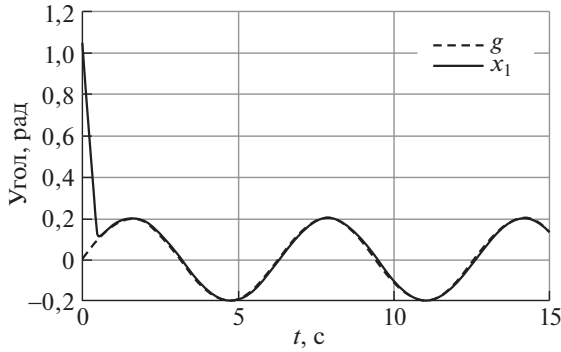


Рис. 3. Графики $g(t)$, $x_1(t)$ (эксперимент 1).

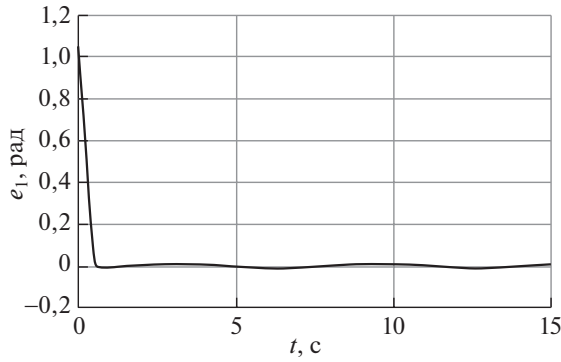


Рис. 4. График $e_1(t)$ (эксперимент 2).

На рис. 3 для эксперимента 1 представлены графики задающего воздействия $g(t)$ и регулируемой переменной $x_1(t)$, ее поведение во втором эксперименте практически не отличается от показанного на рис. 3. На рис. 4 представлен график ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ [рад] для эксперимента 2. На рис. 5–6 для экспериментов 3 и 4 приведены графики задающего воздействия $g(t)$ и регулируемой переменной $x_1(t)$ (снизу), а также ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ [рад] (сверху).

В табл. 3 для всех экспериментов представлены показатели регулирования ошибки слежения $e_1(t)$: время регулирования t_* : $|e_1(t)| \leq 0,1$, $t \geq t_*$; величина перерегулирования $e_{1,\max} \geq |e_1(t)|$, $t \geq 0$; точность $\delta_1 \geq |e_1(t)|$, достигаемая при $t \geq 5$ [с].

Таким образом, из рис. 3–6 и табл. 3 следует, что цель управления достигается во всех случаях, все показатели не превышают заданных значений. Следует отметить, что в силу выбора параметров регулятора из достаточных условий, радиусы областей сходимости ошибок слежения в установившемся режиме оказались примерно в 4–10 раз меньше заданного, а время регулирования — в 10–12 раз меньше заданного (4.3).

Конечно, высокоточные системы слежения потребуют индивидуальной настройки каждого рабочего режима в условиях полной определенности пара-

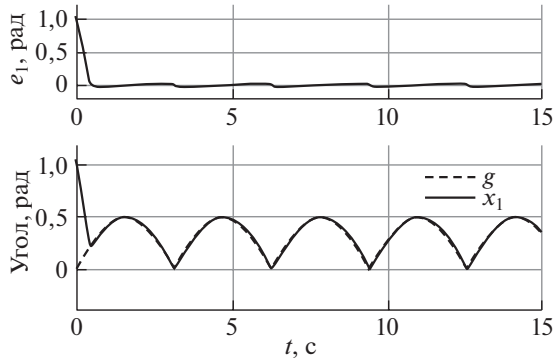


Рис. 5. Графики $g(t)$, $x_1(t)$, $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ (эксперимент 3).

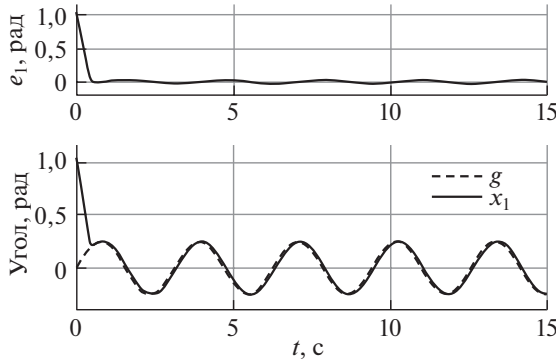


Рис. 6. Графики $g(t)$, $x_1(t)$, $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ (эксперимент 4).

метров объекта управления и внешних воздействий. Для системы (4.1), функционирующей в условиях неопределенности, можно обеспечить лучшие, чем указанные в табл. 3, показатели регулирования путем увеличения коэффициентов обратной связи (4.4). Предельные значения зависят от проектных ограничений на переменные состояния и управления конкретного объекта управления.

Таблица 3. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Требования (не более)	Эксперимент 1	Эксперимент 2	Эксперимент 3	Эксперимент 4
t_* , с	5	0,4532	0,4714	0,4067	0,4138
$e_{1,\max}$, рад	2,05	1,0474	1,0477	1,0473	1,0472
δ_1 , рад	0,1	0,0093	0,0096	0,0242	0,0240

5. Заключение

Предложен метод синтеза сигмоидальных обратных связей, который принципиально отличается от способа использования сигмоидов в задачах нейросетевого обучения. Цель исследований заключалась в синтезе системы слежения для нелинейного объекта одноканального управления при воздействии

параметрических и внешних возмущений без предположений об их гладкости, о которых известны только границы диапазонов их изменения. Поставленная цель была достигнута за счет распространения блочного подхода на формирование нелинейных, всюду ограниченных сигмоидальных локальных связей, обеспечивающих ε -инвариантность по отношению к возмущениям, не согласованным с истинным управлением. Результаты моделирования подтвердили эффективность разработанных алгоритмов.

Представленный материал является установочным для дальнейшего практикоориентированного решения задачи слежения с учетом проектных ограничений на переменные состояния и управление. Эта проблема, а также распространение данного метода на многоканальные системы, представимые в блочной форме управляемости с блоками разной размерности, составит предмет дальнейших исследований авторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Согласно идеологии блочного подхода в замкнутой системе (3.4) нужно обеспечить следующую последовательность сходимости невязок:

$$(П.1) \quad \begin{aligned} & |e_n(t)| \leq \Delta_n (t \geq t_n > 0) \Rightarrow |e_{n-1}(t)| \leq \\ & \leq \Delta_{n-1} (t \geq t_{n-1} > t_n) \Rightarrow \dots \Rightarrow |e_1(t)| \leq \Delta_1 (t \geq t_1 > t_2), \end{aligned}$$

где $\Delta_1 > 0$, $t_1 > 0$ заданы (2.24), $\Delta_i > 0$, $i = \overline{2, n}$ назначаются произвольно, зависимости t_i от начальных значений невязок и принятых $\Delta_i > 0$ устанавливаются в процессе доказательства.

Из леммы следует существование $\bar{k}_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ таких, что для любых $k_i \geq \bar{k}_i$, $i = \overline{1, n}$ гарантируются желаемые радиусы $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ (П.1) окрестностей нуля, в которые невязки сойдутся в указанные моменты времени (П.1). С учетом (2.13) аналогично (2.17) зафиксируем значения больших коэффициентов k_i на основе неравенств:

$$(П.2) \quad k_i^* \geq \bar{k}_i = 2,2/\Delta_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сходимость невязок в установленные области за указанное время (П.1) обеспечивается с помощью выбора m_i , $i = \overline{1, n}$.

Стабилизация системы (3.4) осуществляется “снизу вверх” (П.1). Достаточные условия для выбора амплитуд, аналогичные (2.18), справедливы при выполнении указанных условий:

$$(П.3) \quad \begin{aligned} & 0,8b_{1,\min}m_1 > F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2, \quad |e_2| \leq \Delta_2; \\ & 0,8b_{i,\min}m_i > F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i,\min}\Delta_{i+1}, \quad |e_{i+1}| \leq \Delta_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ & 0,8b_{n,\min}m_n > F_n + |\Lambda_{n-1}|. \end{aligned}$$

Выполнение (П.2)–(П.3) обеспечивает последовательную стабилизацию невязок с заданной точностью без учета времени сходимости, которое зависит от начальных условий. В частном случае $|e_i(0)| \leq \Delta_i$, $i = \overline{1, n}$ выполнение (П.2)–(П.3) обеспечит $|e_i(t)| \leq \Delta_i$, $i = \overline{1, n}$ при $t \geq 0$, т.е. цель управления

(2.24) достигается. Заметим, что если $|e_i(0)| \leq \Delta_i$, $i = \overline{n, j+1}$, $|e_j(0)| > \Delta_j$, то переходный процесс невязки $e_j(t)$ будет монотонным; в частности, при $j = 1$ у ошибки слежения $e_1(t)$ переходный процесс будет без перерегулирования.

В общем случае $|e_i(0)| > \Delta_i$, $i = \overline{1, n}$ в рамках данных построений монотонный переходный процесс гарантируется только для $e_n(t)$. Пока переменные нижних блоков системы (3.4) не достигнут установленных окрестностей нуля (П.1), переменные верхних блоков растут по модулю и достигают максимального значения не позже, чем в следующие моменты времени:

$$(П.4) \quad \begin{aligned} |e_n(t)| &\leq |e_n(0)| = e_{n,\max}, \\ |e_i(t)| &\leq |e_i(t_{i+1})| = e_{i,\max}, \quad i = \overline{n-1, 1}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

В силу построений (3.2) оценим начальные значения невязок:

$$(П.5) \quad \begin{aligned} |e_1(0)| &\leq |x_1(0)| + |g(0)|, \\ |e_i(0)| &\leq |x_i(0)| + m_{i-1}\sigma(k_{i-1}|e_{i-1}(0)|) \leq |x_i(0)| + m_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.4), (П.3), (П.5) и учитывая, что собственные движения в замкнутой системе (3.4) устойчивые, составим оценки максимальных значений (П.4):

$$(П.6) \quad \begin{aligned} e_{1,\max} &= |e_1(0)| + b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2)t_2; \\ e_{i,\max} &= |x_i(0)| + m_{i-1} + b_{i,\max}(e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1})t_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ e_{n,\max} &= |x_n(0)| + m_{n-1}. \end{aligned}$$

Для обеспечения заданного времени сходимости требуется увеличить нижние границы для выбора амплитуд (П.3). Предварительно дадим оценки производных фиктивных управлений (3.5). Они отличаются на разных интервалах и зависят от соответствующих оценок производных сигма-функций и производных соответствующих невязок (3.4). Для производных невязок $e_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$ с учетом (П.3) справедливы оценки:

$$(П.7) \quad \begin{aligned} t \in [0; t_2) : |\dot{e}_1(t)| &\leq \\ &\leq \underbrace{F_1 + G_1 + b_{1,\max}\Delta_2 + b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2) + b_{1,\max}m_1}_{< 0,8b_{1,\min}m_1} < \\ &< 2b_{1,\max}m_1 + b_{1,\max}(e_{2,\max} - \Delta_2), \\ t \geq t_2 : |\dot{e}_1(t)| &\leq F_1 + G_1 + b_{1,\max}\Delta_2 + b_{1,\max}m_1 < 2b_{1,\max}m_1; \\ t \in [0; t_{i+1}) : |\dot{e}_i(t)| &= \\ &= \underbrace{F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i,\max}\Delta_{i+1} + b_{i,\max}(e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}) + b_{i,\max}m_i}_{< 0,8b_{i,\min}m_i} < \\ &< 2b_{i,\max}m_i + b_{i,\max}(e_{i+1,\max} - \Delta_i), \\ t \geq t_{i+1} : |\dot{e}_i(t)| &= F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i,\max}\Delta_{i+1} + b_{i,\max}m_i < \\ &< 2b_{i,\max}m_i, \quad i = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

Для производной сигма-функции в силу (2.14) на указанных интервалах имеем:

$$(П.8) \quad \begin{aligned} |e_i(t)| &> \bar{c}/k_i, \quad t \in [0; t_i) : 0 < 0,5k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i)) < 0,18k_i, \\ |e_i(t)| &\leq \bar{c}/k_i, \quad t \geq t_i : 0,18k_i \leq 0,5k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i)) \leq 0,5k_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Объединяя (П.7)–(П.8), получим оценки производных фиктивных управлений (3.5) на указанных интервалах:

$$\begin{aligned} |\Lambda_i| &= m_i \frac{k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} |\dot{e}_i| \leq \\ &\leq \begin{cases} 0,36k_i m_i^2 b_{i,\max} + 0,18k_i m_i b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}), & t \in [0; t_{i+1}); \\ 0,36k_i m_i^2 b_{i,\max}, & t \in [t_{i+1}; t_i); \\ k_i m_i^2 b_{i,\max}, & t \geq t_i; \quad i = \overline{1, n-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Для того чтобы единообразно принять в качестве оценки

$$(П.9) \quad |\Lambda_i| \leq k_i m_i^2 b_{i,\max}, \quad t \geq 0; \quad i = \overline{1, n-1},$$

нужно обеспечить

$$0,18k_i m_i b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}) \leq 0,64k_i m_i^2 b_{i,\max} \Rightarrow e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1} \leq 3,5m_i, \\ i = \overline{1, n-1}.$$

С этой целью введем ограничения на пиковые значений невязок, несколько снизив предельные оценки для удобства расчетов:

$$(П.10) \quad e_{i,\max} \leq 3m_{i-1} + \Delta_i, \quad i = \overline{2, n}.$$

Для единообразия введем ограничение для перерегулирования по ошибке слежения:

$$(П.11) \quad |e_1(0)| < e_{1,\max} \leq E_1.$$

В частном случае $|e_1(0)| < \Delta_1$ выполнение $e_{1,\max} \leq E_1 = \Delta_1$ обеспечит $|e_1(t)| \leq \Delta_1, t \geq 0$.

С учетом (П.10)–(П.11) неравенства (П.6) примут вид

$$(П.12) \quad \begin{aligned} e_{1,\max} &= |e_1(0)| + 3b_{1,\max} m_1 t_2 \leq E_1; \\ e_{i,\max} &= |x_i(0)| + m_{i-1} + 3b_{i,\max} m_i t_{i+1} \leq 3m_{i-1} + \Delta_i, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ e_{n,\max} &= |x_n(0)| + m_{n-1} \leq 3m_{n-1} + \Delta_n, \end{aligned}$$

откуда следуют дополнительные условия, которые надо учитывать при выборе $t_i, i = \overline{n, 2}$ ($0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_2 < t_1$) и амплитуд фиктивных управлений:

$$(П.13) \quad 0 < m_1 \leq \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max} t_2}, \quad 0 < m_i \leq \frac{2m_{i-1} + \Delta_i - |x_i(0)|}{3b_{i,\max} t_{i+1}}, \quad i = \overline{2, n-1};$$

$$(П.14) \quad m_i > \frac{|x_{i+1}(0)| - \Delta_{i+1}}{2}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Заметим, что по построениям (П.3) $m_{i-1} > \Delta_i$, $i = \overline{2, n}$, при этом $\Delta_i > 0$ могут быть приняты как меньше, так и больше величин $|x_i(0)|$, требования малости к ним не предъявляются. Для упрощения расчетов можно изначально зафиксировать $\Delta_i = |x_i(0)|$, $i = \overline{2, n}$, что снимает необходимость проверки выполнения условий (П.14).

В общем случае $\Delta_i < |x_i(0)|$, $i = \overline{2, n}$ неравенства нижней границы выбора амплитуд m_i , $i = \overline{1, n-1}$ будут содержать две базовые компоненты. С помощью первой компоненты m_{i1} , а также m_n аналогично (2.19) обеспечивается сходимость невязок $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$ на интервалах $[t_2; t_1], [t_3; t_2], \dots, [0; t_n]$ соответственно из пиковых значений (П.6), (П.12) в заданные области (П.1) за заданное время (2.24); а с помощью второй m_{i2} — ограничения (П.14). При этом в отличие от амплитуды истинного управления m_n , которая выбирается только на основе нижней оценки, для выбора амплитуд фиктивных управлений имеются ограничения сверху (П.13).

Формализуем пошаговую процедуру последовательного “сверху вниз” выбора амплитуд сигмоидальных управлений и допустимых моментов времени t_i , $i = \overline{2, n}$ при заданных Δ_1 , t_1 , назначенных E_1 (П.11), $\Delta_i > 0$, $i = \overline{2, n}$ и принятых на их основе k_i^* , $i = \overline{1, n}$ (П.2). В процессе процедуры допускается варьирование свободных параметров.

Шаг 1. С учетом (П.12) первое неравенство (П.3) примет вид:

$$\begin{aligned} 0,8b_{1,\min}m_1 &\geq \frac{|e_1(0)| + 3b_{1,\max}m_1t_2 - \Delta_1}{t_1 - t_2} + F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_{11} &\geq \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)(t_1 - t_2)}{0,8b_{1,\min}t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max})t_2}, \end{aligned}$$

откуда следует ограничение на выбор $0 < t_2 < t_1$:

$$(П.15) \quad 0,8b_{1,\min}t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max})t_2 > 0 \Rightarrow t_2 < 0,2\frac{b_{1,\min}}{b_{1,\max}}t_1.$$

Выбираем $t_2^* > 0$ на основе (П.15) и подставляем его в двойное неравенство

$$(П.16) \quad \max\{m_{11}; m_{12}\} < \bar{m}_1 < \bar{\bar{m}}_1,$$

где

$$(П.17) \quad \begin{aligned} m_{11} &= \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)(t_1 - t_2^*)}{0,8b_{1,\min}t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max})t_2^*}, \\ m_{12} &= \frac{|x_2(0)| - \Delta_2}{2}, \quad \bar{\bar{m}}_1 = \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max}t_2^*}. \end{aligned}$$

Если (П.16) выполняется, то тогда фиксируем t_2^* , $m_1^* \in (\bar{m}_1; \bar{\bar{m}}_1]$ и переходим на второй шаг. При невыполнении (П.3) следует варьировать произвольные параметры. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Если требуется обеспечить принятое E_1 (П.11), то тогда варьировем Δ_2 и/или t_2 . Если при изначально принятом $0 < t_2^* <$

$< 0, 2b_{1,\min}t_1/b_{1,\max}$ имеет место $m_{12} > m_{11}$ (П.17), то путем увеличения Δ_2 (вплоть до $\Delta_2 = |x_2(0)|$) нужно обеспечить $m_{11} > m_{12}$. Если при новом Δ_2^* неравенство (П.16) не выполняется или изначально $m_{11} > m_{12}$, то тогда снижаем t_2^* . Критическое значение $\bar{t}_2 > 0 : m_{11}(\bar{t}_2) = \bar{m}_1(\bar{t}_2)$ существует и равно

$$\bar{t}_2 = \frac{\sqrt{p_{12}^2 - 4p_{11}p_{13}} - p_{12}}{2p_{11}},$$

где

$$\begin{aligned} p_{11} &= -3b_{1,\max}(F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2), \\ p_{12} &= 0,8b_{1,\min}(E_1 - |e_1(0)|) + 3b_{1,\max}(E_1 - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)t_1), \\ p_{13} &= -0,8b_{1,\min}(E_1 - |e_1(0)|)t_1. \end{aligned}$$

Из предельного соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow +0} m_{11}(t_2) &= \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)t_1}{0,8b_{1,\min}t_1} = \\ \text{(П.18)} \quad &= \text{const} < \lim_{t_2 \rightarrow +0} \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max}t_2} = +\infty \end{aligned}$$

следует, что \bar{m}_1 можно сделать сколь угодно большим и при любом $t_2^* > 0 : 0 < t_2^* < \bar{t}_2$ неравенство (П.16) будет выполнено.

Таким образом, путем снижения t_2 можно обеспечить любое, достаточно малое перерегулирование по ошибке слежения (П.11). Однако это может привести к существенному росту нижних границ для выбора амплитуд в следующих блоках.

Второй способ. Если отказаться от принятого E_1 (П.11) и увеличить его значение:

$$E_1 > \bar{E} = |e_1(0)| + 3b_{1,\max}m_1^*t_2^*,$$

где \bar{E} – минимально возможное перерегулирование ошибки слежения при изначально принятом $0 < t_2^* < 0, 2b_{1,\min}t_1/b_{1,\max}$, то тогда можно произвольно увеличить верхнюю границу \bar{m}_1 для выбора амплитуды (П.16).

Допустимые значения t_2^* , m_1^* , Δ_2^* и $k_2^*(\Delta_2^*)$ фиксируются, переходим на второй шаг.

Шаг i ($i = \bar{2}, n-1$). Соответствующее номеру шага неравенство (П.1), а именно $|e_i(t)| \leq \Delta_i$ ($t \geq t_i > t_{i+1}$), обеспечивается путем выбора m_i . С учетом (П.9), (П.12) i -е неравенство (П.3) примет вид

$$\begin{aligned} \text{(П.19)} \quad 0,8b_{i,\min}m_i &\geq \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* + 3b_{i,\max}m_it_{i+1} - \Delta_i^*}{t_i^* - t_{i+1}} + \\ &+ F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1} \Rightarrow \\ m_{i1} &\geq \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* - \Delta_i^* + (F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1})(t_i^* - t_{i+1})}{0,8b_{i,\min}t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max})t_{i+1}}, \end{aligned}$$

откуда следует ограничение на выбор $0 < t_{i+1} < t_i^*$, аналогичное (П.15):

$$(П.20) \quad 0,8b_{i,\min}t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max})t_{i+1} > 0 \Rightarrow t_{i+1} < 0,2\frac{b_{i,\min}}{b_{i,\max}}t_i^*.$$

Выбираем $t_{i+1}^* > 0$ на основе (П.20) и подставляем его в двойное неравенство

$$(П.21) \quad \max\{m_{i1}; m_{i2}\} < \bar{m}_i < \bar{\bar{m}}_i,$$

где $m_{i1}(t_{i+1}^*)$ (П.19),

$$m_{i2} = \frac{|x_{i+1}(0)| - \Delta_{i+1}}{2}, \quad \bar{\bar{m}}_i = \frac{2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|}{3b_{i,\max}t_{i+1}^*}.$$

Если (П.21) выполняется, то тогда фиксируем t_{i+1}^* , $m_i^* \in (\bar{m}_i; \bar{\bar{m}}_i]$ и переходим на следующий шаг. При невыполнении (П.21) следует варьировать произвольные параметры Δ_{i+1} и/или t_{i+1} . Если изначально $m_{i2} > m_{i1}$, то путем увеличения Δ_{i+1} (вплоть до $\Delta_{i+1} = |x_{i+1}(0)|$) нужно обеспечить $m_{i1} > m_{i2}$. Если при новом Δ_{i+1}^* неравенство (П.21) не выполняется или изначально $m_{i1} > m_{i2}$, то тогда снижаем t_{i+1}^* . Критическое значение $\bar{t}_{i+1} > 0 : m_{i1}(\bar{t}_{i+1}) = \bar{\bar{m}}_i(\bar{t}_{i+1})$ существует и равно

$$\bar{t}_{i+1} = \frac{\sqrt{p_{i2}^2 - 4p_{i1}p_{i3} - p_{i2}}}{2p_{i1}},$$

где

$$\begin{aligned} p_{i1} &= -3b_{i,\max}(F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1}), \\ p_{i2} &= 3b_{i,\max}(3m_{i-1}^* + (F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1})t_i^*) + \\ &\quad + 0,8b_{i,\min}(2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|), \\ p_{i3} &= -0,8b_{i,\min}(2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|)t_i^*, \quad i = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

Из предельного соотношения, аналогичного (П.18), а именно

$$\begin{aligned} &\lim_{t_{i+1} \rightarrow +0} m_{i1}(t_{i+1}) = \\ &= \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* - \Delta_i^* + (F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2b_{i-1,\max} + b_{i,\min}\Delta_{i+1})t_i^*}{0,8b_{i,\min}t_i^*} = \text{const} < \\ &< \lim_{t_{i+1} \rightarrow +0} \frac{2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|}{3b_{i,\max}t_{i+1}} = +\infty, \end{aligned}$$

следует, что при любом $t_{i+1}^* > 0 : 0 < t_{i+1}^* < \bar{t}_{i+1}$ неравенство (П.3) будет выполнено.

Заметим, что на i -м шаге (в отличие от первого) обеспечить выполнение (П.21) можно только указанным способом. Увеличение верхней границы $\bar{\bar{m}}_i$

путем увеличения m_{i-1}^* приведет также к росту нижней границы $\bar{m}_i(m_{i1})$, причем более быстрыми темпами.

Допустимые значения t_{i+1}^* , m_i^* , Δ_{i+1}^* и $k_{i+1}^*(\Delta_{i+1}^*)$ фиксируются, переходим на следующий шаг.

Шаг n (последний). С учетом (П.9), (П.12) третье неравенство (П.3) примет вид, аналогичный (2.19):

$$(П.22) \quad m_n \geq \bar{m}_n = \frac{1,25}{b_{n,\min}} \left(\frac{|x_n(0)| + m_{n-1}^* - \Delta_n^*}{t_n^*} + F_n + k_{n-1}^*(m_{n-1}^*)^2 b_{n-1,\max} \right).$$

На основе (П.22) фиксируем m_n^* . Процедура настройки амплитуд закончена.

Таким образом, существуют такие $\bar{k}_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ (П.2), $0 < \bar{m}_i < \bar{\bar{m}}_i$, $i = \overline{1, n-1}$ (П.16)–(П.17), (П.21) и $\bar{m}_n > 0$ (П.22), что для любых $k_i \geq \bar{k}_i$, $m_i : \bar{m}_i < m_i \leq \bar{\bar{m}}_i$, $\forall m_n \geq \bar{m}_n$ в замкнутой системе (3.4) переменные последовательно сходятся в указанные области за указанное время (П.1), что и обеспечивает цель управления (2.24). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wonham W.M.* Linear Multivariable control: a geometric approach. N.Y.: Springer-Verlar, 1979.
2. *Никифоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
3. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // ПУ. № 5. 2015. С. 27–36.
Krasnova S.A., Utkin A.V. Sigma Function in Observer Design for States and Perturbations // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1676–1688.
4. *Маликов А.И.* Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // АИТ. 2018. № 3. С. 21–43.
Malikov A.I. Synthesis of State Unknown Input Observers for Nonlinear Lipschitz Systems with Uncertain Disturbances // Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 3. P. 406–424.
5. *Краснова С.А.* Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // УБС. 2018. Вып. 76. С. 6–25.
Krasnova S.A. Estimating the Derivatives of External Perturbations Based on Virtual Dynamic Models // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 5. P. 897–910.
6. *Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы // АИТ. 2020. № 9. С. 3–61.
Andrievsky B.R., Furtat I.B. Disturbance Observers: Methods and Applications. I. Methods // Autom. Remote Control. 2020. Vol. 81. No. 9. P. 1563–1610.
7. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи. М.: Наука. Физматлит, 1997.
8. *Edwards C., Spurgeon S.* Sliding mode control: theory and applications. Taylor & Francis Ltd, 1998.

9. *Utkin V.I., Guldner J., Shi J.* Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. N.Y.: CRC Press, 2009.
10. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // *АиТ.* 2014. № 9. С. 62–81.
Utkin V.A., Utkin A.V. Problem of Tracking in Linear Systems with Parametric Uncertainties under Unstable Zero Dynamics // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 9. P. 1577–1592.
11. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* Nonlinear and adaptive control design. N.Y.: Wiley, 1995.
12. *Ebrahim A., Murphy G.V.* Adaptive backstepping controller design of an inverted pendulum // *Proc. Thirty-Seventh Southeastern Symposium on System Theory.* 2005. P. 172–174.
13. *Feng H., Qiao W., Yin C., Yu H., Cao D.* Identification and compensation of nonlinear friction for a electro-hydraulic system // *Mechanism and Machine Theory.* 2019. V. 141. P. 1–13.
14. *Hidalgo M., Garcia C.* Friction compensation in control valves: Nonlinear control and usual approaches // *Control Engineering Practice.* 2018. V. 58. P. 42–53.
15. *Антипов А.С., Краснова С.А.* Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 1. С. 3–20.
Antipov A.S., Krasnova S.A. Block-Based Synthesis of a Tracking System for a Twin-Rotor Electromechanical System with Constraints on State Variables // *Mech. Solids.* 2021. V. 56. No. 7. P. 43–56.
16. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Обеспечение инвариантности за счет создания колебательных режимов // *ДАН.* 2013. Т. 452. № 6. С. 1–6.
Kochetkov S.A., Utkin V.A. Providing the invariance property on the basis on oscillation modes // *Doklady Mathematics.* 2013. Vol. 88. No. 2. P. 618–623.
17. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // *АиТ.* 2014. № 2. С. 106–128.
Krasnova S.A., Mysik N.S. Cascade Synthesis of a State Observer with Nonlinear Correction Influences // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 2. P. 263–280.
18. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // *АиТ.* 2017. № 12. С. 26–53.
Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V. Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 12. P. 2120–2140.
19. *Антипов А.С., Краснов Д.В., Уткин А.В.* Декомпозиционный синтез системы управления электромеханическими объектами в условиях неполной информации // *Прикладная математика и механика.* 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 530–548.
Antipov A.S., Krasnov D.V., Utkin A.V. Decomposition Synthesis of the Control System of Electromechanical Objects in Conditions of Incomplete Information // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. No. 5. P. 47–60.
20. *Лукьянов А.Г.* Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // *АиТ.* 1998. № 7. С. 14–34.
Luk'yanov A.G. A block method of synthesis of nonlinear systems at sliding modes // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 7. Part 1. P. 916–933.

21. *Краснова С.А., Сиروتина Т.Г., Уткин В.А.* Структурный подход к робастному управлению // *АиТ.* 2011. № 8. С. 65–95.
Krasnova S.A., Sirotina T.G., Utkin V.A. A structural approach to robust control // *Autom. Remote Control.* 2011. Vol. 72. No. 8. P. 1639–1666.
22. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // *АиТ.* 2001. № 11. С. 73–94.
Utkin V.A. Invariance and Independence in Systems with Separable Motion // *Autom. Remote Control.* 2001. V. 62. No. 11. P. 1825–1843.
23. *Tsyupkin Y., Polyak B.* High-Gain Robust Control // *European J. Control.* 1999. Vol. 5. P. 3–9.
24. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербakov П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // *АиТ.* 2015. № 6. С. 18–41.
Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // *Autom. Remote Control.* 2015. Vol. 76. No. 6. С. 957–976.
25. *Slotine J.E., Li W.* Applied Nonlinear Control. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
26. *Пестерев А.В.* Оценка области притяжения нулевого решения для аффинных систем с ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. № 4. С. 3–20.
Pesterev A.V. Attraction domain estimate for single-input affine systems with constrained control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 4. P. 581–594.
27. *Бенджио И., Гудфеллоу Я., Курвилль А.* Глубокое обучение. М.: ДМК-Пресс, 2018.
Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. The MIT Press, 2016.
28. *Шумихин А.Г., Бояршинова А.С.* Идентификация сложного объекта управления по частотным характеристикам, полученным экспериментально на его нейросетевой динамической модели // *АиТ.* 2015. № 4. С. 125–132.
Shumikhin A.G., Boyarshinova A.S. Identification of a complex control object with frequency characteristics obtain with its dynamic neural network model // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No 4. P. 650–657.
29. *Краснова С.А., Антипов А.С.* Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // *ПУ.* 2016. № 4. С. 10–21.
Krasnova S.A., Antipov A.S. Hierarchical Design of Sigmoidal Generalized Moments of Manipulator under Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2018. Vol. 79. No. 3. P. 554–570.
30. *Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S.* Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables // *IFAC-PapersOnLine.* 2017. V. 50. No. 1. P. 1042–1047.
31. *Антипов А.С., Краснова С.А.* Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2019. Т. 20. № 10. С. 609–614.
Antipov A.S., Krasnova S.A. Sistema stabilizatsii polozheniya telezhki krana s ispol'zovaniyem sigmoidal'noy funktsii (Stabilization System of Convey-Crane Position Via Sigmoidal Function) // *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye.* 2019. V. 20. No. 10. P. 41–54. (In Russian)

32. *Kokunko Yu., Krasnova S.* Synthesis of a tracking system with restrictions on UAV state variables // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA). 2019. Vol. 10. No. 4. P. 695–705.
33. *Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И.* Об уравнения нулевой динамики некоторых аффинных нелинейных систем // ДУ. 2018. Т. 54. № 12. С. 1695–1709.
Fomichev V.V., Kraev A.V., Rogovskii A.I. On the zero dynamics equations of some nonlinear systems affine in control // Differ. Equations. 2018. V. 54. No. 12. P. 1654–1668.
34. *Живанович М.М., Лазаревич М.П.* Применение принципа декомпозиции для стабилизации с заданной точностью номинального движения механической системы // АиТ. 2012. № 12. С. 65–88.
Živanović, M.M., Lazarević, M.P. Using the decomposition principle to stabilize the nominal motion of a mechanical system with given accuracy // Autom. Remote Control. 2012. Vol. 73. No. 12. P. 2001–2020.
35. *Юркевич В.Д.* Синтез многоканальной системы управления роботами–манипуляторами на основе метода разделения движений // Автометрия. 2016. Т. 52. № 2. С. 107–114.
Yurkevich V.D. Multi-channel control system design for a robot manipulator based on the time-scale method // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2016. V. 52. No. 2. P. 196–202.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 04.03.2021

После доработки 02.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021