Автоматика и телемеханика, № 1, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. И.Н. БАРАБАНОВ, канд. физ.-мат. наук (ivbar@ipu.ru),
В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЦИКЛА В СВЯЗАННОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ[1]

Исследуются механические системы, каждая из которых в отсутствие связи допускает семейство периодических движений. Доказывается, что необходимым условием существования цикла в связанной системе является невырожденность периодических движений в подсистемах; исключение быть может в одной подсистеме. Находятся структура и конкретный вид связующего управления, решаются задачи существования, устойчивости и естественной стабилизации колебания. Показывается, что в цикле происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе. В статье развивается идея стабилизации колебания связанной системы путем выбора подходящей связи-управления между подсистемами.

Ключевые слова: механическая система, связующее управление, колебание, цикл, стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231022010044

1. Введение

Для решения задачи стабилизации колебания модели, содержащей связанные подсистемы (МССП), в [1] предлагается выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и саму стабилизацию. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации колебания решается естественным образом, т.е. без привлечения иных управлений.

В рамках механической системы, подверженной действию позиционных сил, периодическое движение (одночастотное колебание) не может быть асимптотически устойчивым. Поэтому для стабилизации необходимо привлекать управление, нарушающее симметрию фазового портрета системы. Таким управлением для равновесия служит диссипация Релея. В уравнении Ван дер Поля используется нелинейная диссипация, которая линейна по скорости и приложена в текущей точке траектории. Здесь действие на линейный осциллятор управления с малым коэффициентом ε регулятора приводит к орбитально асимптотически устойчивому циклу. Физически управление реализуется посредством анодного тока в триоде, который не зависит явно от времени. Поэтому замкнутая система остается автономной и допускает цикл.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00146).

В уравнении Ван дер Поля в терминах МССП связь замыкает систему на себя: конструируется управлямаемая система с обратной связью. Такой подход к управляемой механичекой системе оказался продуктивным для произвольной механической системы [2, 3]. Возникает вопрос о перенесении подхода Ван дер Поля на связанную систему.

Связанные системы исследуются в различных областях знаний. Классическим примером в механике является симпатический маятник Зоммерфельда. Синхронизация находит применение в механических и электрических устройствах. Некоторые примеры, показыващие разнообразие постановок задач и исследуемых динамических свойств в связанных системах, даются в [4–14]. В этой статье приоритетными являются вопросы агрегирования консервативных систем в связанную систему с притягивающим циклом и управление посредством связей в сложной системе. Способы агрегирования сложной системы методом Ляпунова приводятся в [15].

Идея [1] о связях-управлениях развивается в статье для слабо связанных механических систем с одной степенью свободы. Предполагается, что в каждой из них в отсутствие связи существует семейство периодических движений. Устанавливается, что необходимым условием существования цикла в связанной системе является невырожденность семейства в подсистемах; исключение может быть в одной подсистеме. Находятся структура и конкретный вид связующего управления, решаются задачи существования, устойчивости и естественной стабилизации колебания связанной системы. Показывается, что в цикле происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе.

2. Связанные механические системы

Рассматриваются слабо связанные механические системы

$$\ddot{x}_s + f_s(x_s) = \varepsilon u_s(x, \dot{x}), \quad s = 1, \ldots, n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

где параметр ε можно интерпретировать как коэффициент усиления регулятора. При $\varepsilon > 0$ получается связанная система, в которой наличие малого ненулевого параметра ε может приводить к качественным изменениям в поведении механических систем. Функции $\varepsilon u_s(x, \dot{x})$ действуют как связи–управления. Они замыкают систему на себя: связанная система (1) становится замкнутой системой.

В случае $\varepsilon = 0$ система (1) распадается на независимые консервативные системы с интегралами энергии

$$E_s \equiv \frac{\dot{x}_s^2}{2} + \int f(x_s) dx_s = h_s \text{ (const)}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Фазовый портрет каждой системы симметричен относительно оси абсцисс; колебания пересекают эту ось в двух различных точках и представляют собой симметричные периодические движения (СПД).

Предполагается, что каждая из систем допускает семейство СПД; решения содержат два параметра h_s и γ_s и обозначаются как

$$x_s = \varphi_s(h_s, t + \gamma_s), \quad s = 1, \ldots, n.$$

Нулевому значению сдвига γ_s начальной точки по времени отвечает в каждой системе четная функция $x_s = \varphi_s(h_s, t)$.

Семейство СПД бывает двух типов в зависимости от того, как ведет себя период с изменением энергии. Так, колебания линейного осциллятора имеют один и тот же период. В другом примере период колебаний математического маятника монотонно зависит от начального отклонения маятника от вертикали. Чтобы различать эти типы семейств СПД, будем пользоваться следующим определением для системы с одной степенью свободы.

Определение 1. Семейство СПД по параметру h называется невырожденным, если на нем производная от периода $T(h)$ по постоянной энергии h отлична от нуля. СПД невырожденного семейства называется невырожденным.

Вырожденное семейство СПД описывается формулой

$$x_s = A_s \cos \omega_s (t + \gamma_s),$$

где A_s — амплитуда колебания, ω_s — частота.

Для связанной автономной системы сдвиг будет единым для всех подсистем. Без ограничения общности полагается, что траектории в подсистемах пересекают оси абцисс в момент времени $t = 0$. Тогда $\gamma_s = \gamma$, $s = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим систему (1) при малых $\varepsilon \neq 0$ и запишем условие существования T^*-периодического решения в первом по ε приближении. Получится амплитудное, или бифуркационное, уравнение

$$(2) \qquad I \equiv \int_0^{T^*} \sum_{s=1}^{n} u_s(\varphi_1(h_1, t), \ldots, \varphi_n(h_n, t), \dot{\varphi}_1(h_1, t), \ldots, \dot{\varphi}_n(h_n, t)) \psi_s dt = 0,$$

где ψ_s — решение сопряженной линейной системы; для консервативной системы с одной степенью свободы $\psi_s = \dot{x}_s$ [1].

Выполнение условия (2) приводит к продолжению в первом по ε приближении T^*-периодического решения, которым обладала система при $\varepsilon = 0$. Найдем необходимые условия выполнения равенства (2) по частотам в случае двух систем. Для линейных осцилляторов выполнение (2) возможно только тогда, когда их частоты равны: $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi/T^*$. Для механических систем с невырожденными семействами СПД необходимым условием будут равенства $T^* = T_s(h_s(h^*))$, $s = 1, 2$, где в каждой подсистеме $T_s = T_s(h_s)$ — зависимость периода от параметра. Наконец, для механических систем с различными типами семейств СПД получается: $\omega_1 = 2\pi/T^*$ — для вырожденного семейства, $T^* = T_2(h_2^*)$ — для невырожденного семейства.

При действии автономного управления решение в (1) может быть изолированным периодическим решением автономной системы, т.е. циклом. Достаточное условие существования цикла в слабо связанной системе (1) дается неравенством (см. [1])

$$\frac{dI(h^*)}{dh} \neq 0, \tag{3}$$

гарантирующим простоту корня амплитудного уравнения.

Пусть необходимые условия по частотам для амплитудного уравнения (2) выполнены. Найдем условия для выполнения неравенства (3) в случае двух механических систем в (1). Если системы содержат вырожденные семейства СПД, то уравнение (2) содержит два независимых друг от друга неизвестных A_1 и A_2, поэтому простой корень в (2) невозможен и (3) не выполняется. В случае двух невырожденных семейств уравнение (2) составляется относительно одной неизвестной h и уравнение $I(h) = 0$ может допускать простой корень. Наконец, когда рассматриваются семейства различных типов, уравнение (2) содержит одну неизвестную A_1: простой корень уравнения (2) возможен.

Эти рассуждения распространяются на случай произвольного числа механических систем с учетом того, что вырожденное семейство допускается только в одной системе.

Лемма 1. Цикл в слабо связанной системе (1) *существует только в случае, когда все механические системы, за исключением, быть может, одной системы с вырожденным семейством СПД, содержат невырожденные семейства СПД.*

Пусть $\varepsilon = 0$ и каждая система в (1) допускает невырожденное семейство СПД. Тогда справедлива следующая лемма 2.

Лемма 2. Если при $\varepsilon = 0$ в системе (1) *содержатся только невырожденные семейства СПД и* (1) *допускает периодическое движение, то*:

1) *движение принадлежит к семейству СПД*;

2) *периоды СПД во всех механических системах в* (1) *возрастают* (*убывают*).

Доказательство. При $\varepsilon = 0$ в (1) получается обратимая механическая система с фазовым портретом, симметричным относительно неподвижного множества $M = \{x, \dot{x} : \dot{x} = 0\}$. Поэтому каждое невырожденное СПД системы принадлежит семейству (см., например, [16]). Это семейство для системы с n степенями свободы содержит в качестве составляющих семейства систем с одной степенью свободы, которые, следовательно, имеют одновременно возрастающие (убывающие) периоды на семействах СПД. Лемма 2 доказана.

Семейство СПД системы (1) при $\varepsilon = 0$ обозначается через Σ. СПД содержат два скалярных параметра h и γ и описываются векторной функцией $\varphi(h, t + \gamma)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

3. Поиск управления

При доказательстве леммы 2 указывалось, что при $\varepsilon = 0$ системы с одной степенью свободы в (1) объединяются в обратимую механическую систему с n степенями свободы, содержащую семейство Σ невырожденных СПД. В случае, когда управления $u_s(x, \dot{x})$ удовлетворяют условиям

$$u_s(x, \dot{x}) = u_s(x, -\dot{x}), \tag{4}$$

система (1) сохраняет свою принадлежность к классу обратимых механических систем при $\varepsilon > 0$ и согласно [16] по-прежнему обладает невырожденным семейством СПД.

Таким образом, справедлива лемма 3.

Лемма 3. Если управления в (1) *удовлетворяют условиям* (4)*, то система* (1) *допускает невырожденное семейство СПД, наследующее монотонную зависимость периода СПД в подсистемах.*

Условия (4) гарантируют симметрию фазового портрета связанной системы (1). Поэтому при конструировании цикла в управляемой системе необходимо нарушать данную симметрию. Пример необходимого для этого управления находится в правой части уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

Это управление вполне удовлетворяет условиям (2), (3). При этом отрицательность производной (3) гарантирует существование притягивающего цикла.

Изохронность семейства СПД осциллятора не стала препятствием для обобщения результата Ван дер Поля на семейство невырожденных колебаний. Результат по существованию орбитально асимптотически устойчивого цикла переносится в [1] на общий случай консервативной системы с одной степенью свободы. При этом для одного уравнения стабилизируется колебание управляемой системы, близкой к неуправляемой системе. Тогда для рассматриваемых здесь n механических систем ставится задача стабилизации колебания всей связанной системы: при отсутствии связи нет самой связанной системы.

Выбор управления основывается на следующих наблюдениях. Для связанной системы управляющие связи должны быть такими, чтобы в случае одной подсистемы переходили в управление, найденное в [1]. В уравнении Ван дер Поля управление представляется диссипацией, действующей в текущей точке цикла. В связанной системе текущая точка единая для всех подсистем. Наконец, требуется выполнение амплитудного уравнения.

В результате находятся управления

$$u_s = \left(1 - K\|x\|^2\right)\dot{x}_s, \quad \|x\|^2 = \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \tag{5}$$

где положительное число K гарантирует выполнение амплитудного уравнения. В связанной системе реализуется колебание, рождающееся из колебания системы (1) при $\varepsilon = 0$, т.е. порождающего решения. Поэтому $K(h)$ будет функцией параметра h, отвечающего порождающему решению.

Функция $K(h)$ выбирается так, чтобы амплитудное уравнение

$$\int_0^{T(h^*)} \left(1 - K(h^*)\|\varphi(h,t)\|^2\right) \|\dot\varphi(h,t)\|^2 dt = 0$$

имело бы корнем число $h = h^*$. В результате для T^*-периодического движения, $T^* = T(h^*)$, находится число $K(h^*)$, которое вычисляется как отношение интегралов в правой части равенства при $h = h^*$. Теперь, рассматривая h^* как переменную, получим, что

$$K(h) = \frac{\int\limits_0^{T(h)} \|\dot\varphi(h,t)\|^2 dt}{\int\limits_0^{T(h)} \|\varphi(h,t)\|^2 \|\dot\varphi(h,t)\|^2 dt}.$$

Функция $K(h)$ становится характеристикой семейства СПД связанной системы, гарантирующей выполнение амплитудного уравнения при всех h^*. Поэтому для СПД с коэффициентом $K(h^*)$ амплитудное уравнение имеет корень $h = h^*$.

Применение управлений вида (5) обосновывается в [2, 3].

4. Цикл связанной системы

Для найденного связующего управления (5) амплитудное уравнение (2) принимает вид

$$I(h) \equiv \int_0^{T^*} \left(1 - K(h^*)\|\varphi(h,t)\|^2\right) \|\dot\varphi(h,t)\|^2 dt = 0. \tag{6}$$

Вычислим

$$\begin{gathered} \frac{dI(h^*)}{dh} = \chi\nu, \\ \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu = \int_0^{T^*} \|\varphi(h^*,t)\|^2 \|\dot\varphi(h^*,t)\|^2 dt > 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Определение 2. Точка, в которой $\chi = 0$, называется критической точкой семейства СПД по характеристике $K(h)$.

С использованием определения 2 формулируется достаточное условие существования цикла связанной системы.

Т е о р е м а 1. *Пусть каждая консервативная система с одной степенью свободы допускает семейство невырожденных СПД, принадлежащее семейству* Σ *по параметру* h *несвязанной системы. Тогда при выборе связующих управлений* (5) *связанная система в каждой точке, не являющейся критической по характеристике* $K(h)$, *допускает единственный цикл.*

З а м е ч а н и е 1. Согласно лемме 2 существование семейства Σ гарантируется существованием хотя бы одного СПД системы (1) при $\varepsilon = 0$.

З а м е ч а н и е 2. В цикле происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе.

З а м е ч а н и е 3. В случае отдельной системы теорема 1 доставляет условия существования предельного цикла Понтрягина [17].

Теперь обратимся к задаче стабилизации цикла. Система (1), (5) записывается в виде

$$\ddot{x}_s + f_s(x_s) = \varepsilon \Psi \dot{x}_s, \quad \Psi \equiv 1 - K(h^*) \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \quad s = 1, \dots, n. \tag{8}$$

При этом для s-й системы справедливо дифференциальное равенство

$$\frac{dE_s}{dt} = \varepsilon \Psi \dot{x}_s^2, \quad s = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Следствием равенств (9) будет закон изменения полной механической энергии $E = \sum_{s=1}^{n} E_s$ системы из n консервативных систем с одной степенью свободы

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon \Psi \sum_{s=1}^{n} \dot{x}_s^2. \tag{10}$$

Из (10) при $h = h^*$ получается амплитудное уравнение:

$$I(h) \equiv \int_0^{T^*} E(h,t)dt = 0. \tag{11}$$

Отсюда с использованием (9) вычисляется приращение ΔE энергии E на отрезке $[0, T^*]$:

$$\Delta E = \varepsilon \chi \nu (h - h^*) + o(\varepsilon). \tag{12}$$

Формула (12) справедлива при малых приращениях $\Delta h = h - h^*$. Из нее следует, что при $\chi < 0$ на каждом временно́м отрезке длиной T^* знак приращения энергии противоположен знаку приращения Δh. Значит, траектория системы (8) асимптотически приближается к поверхности уровня энергии

$h = h^*$, отвечающей циклу. При этом происходит бифуркация одной жордановой клетки с нулевым характеристическим показателем (ХП). В результате цикл имеет один нулевой ХП, связанный с произвольностью сдвига γ в решении автономной системы, другой ХП вычисляется по формуле (см. [1])

$$\hat{\lambda}^h = \frac{\varepsilon}{T(h^*)} \frac{dI(h^*)}{dh} + o(\varepsilon).$$

Законы изменения энергии (9) аналогичны закону (10) изменения энергии всей системы. Поэтому сравнением равенств (9) и (10) находятся соотношения

$$\dot{x}_s^2 dE = \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j^2 dE_s, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

справедливые в точках, где $\Psi \neq 0$. На цикле функция $\Psi(t)$ будет T^*-периодической и $\Psi(t) = 0$ в конечном числе точек (двух — для СПД, четырех — для двоякосимметричного периодического движения). Такая же ситуация будет для траекторий в окрестности цикла.

Обратимся к точкам окрестности цикла. Из равенств (13) следует, что изменение энергии E_s каждой подсистемы в (8) происходит подобно изменению энергии всей системы. В частности, для приращения ΔE_s на отрезке $[0, T(h^*)]$ справедлив закон, аналогичный закону (12). Поэтому в случае $\chi < 0$ траектория системы (8) по каждой паре переменных $(x_s, \dot{x}_s)$, будучи в момент $t = 0$ в окрестности цикла, при $t = T^*$ по-прежнему будет находиться в этой окрестности, приближаясь за время T^* к поверхности $h = h^*$. Одновременное во всех парах $(x_s, \dot{x}_s)$ приближение означает приближение к циклу. Следовательно, применением отображения $G : 0 \to T^*$ фазового пространства $(x, \dot{x})$ на себя в случае $\chi < 0$ устанавливается орбитальная асимптотическая устойчивость цикла.

Таким образом, справедлива следующая теорема 2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 *и цикл связанной системы существует. Тогда при выполнении неравенства* $\chi < 0$ *цикл орбитально асимптотически устойчив.*

Замечание 4. При действии связующих управлений (5) осуществляется естественная стабилизация цикла связанной механической системы.

5. Пример

Рассматриваются два идентичных друг другу слабо связанных математических маятника. Для одного маятника $\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$ зависимость $K(h)$ приводится в [18]: функция $K(h)$ монотонно стремится к нулю. В случае двух маятников, когда частоты колебаний несвязанных маятников равны друг другу, характеристикой семейства будет согласно определению функция $K(h)$, деленная на два. Тогда в связанной системе с управлениями (5) согласно теореме 2 реализуется асимптотически орбитально устойчивый цикл, близкий к колебаниям маятников как одного целого.

6. Заключение

Связанные системы интенсивно исследуются в различных областях знаний. Цикл в слабо связанной механической системе возможен, если составляющие его подсистемы обладают невырожденными семействами СПД за исключением, быть может, одной системы с вырожденным семейством СПД. Для решения задачи естественной стабилизации цикла системы подходят связующие управления типа диссипации Ван дер Поля, действующей в каждой текущей точке траектории. В режиме цикла происходит синхронизация колебаний механических систем по частоте и фазе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.
   Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.
2. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
   Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
3. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // АиТ. 2020. № 9. С. 93–104.
   Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an N Degree of Freedom Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
4. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е.* Поперечные колебания стрежня, вызванные кратковременным продольным ударом // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 37–41.
   Morozov N.F., Tovstik, P.E. Transverse Rod Vibrations Under a Short-Term Longitudinal Impact // Doklady Physics. 2013. V. 58. No. 9. P. 387–391.
5. *Kovaleva A., Manevitch L.I.* Autoresonance Versus Localization in Weakly Coupled Oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2016. V. 320 (15 Apr. 2016). P. 1–8.
6. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 411–425.
7. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. No. 5. P. 794–803.
8. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical Analog of the DNA Base Pair Oscillations // 10th Conf. on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz: Left Grupa. 2009. P. 879–886.
9. *Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д.* К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга–Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 2. С. 241–254.
10. *Lazarus L., Rand R.H.* Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which Are Driven by a Third Oscillator // J. Appl. Nonlin. Dynam. 2014. V. 3. No. 3. P. 271–282.
11. *Kawamura Y.* Collective Phase Dynamics of Globally Coupled Oscillators: Noise-induced Anti-phase Synchronization // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2014. V. 270 (1 Jun. 2014). P. 20–29.

12. *Bolotnik N.N., Figurina T.Yu.* Control of a System of Two Interacting Bodies on a Rough Inclined Plane // Proc. 2020 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). IEEE Xplore: https://ieeexplore.ieee.org/document/9140564.

    https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140564.

13. *Galyaev A., Lysenko P.* About Synchronization Problem of Group of Weakly Coupled Identical Oscillators // Proc. 2020 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). IEEE Xplore: https://ieeexplore.ieee.org/document/9140581.

    https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140581.

14. *Tkacheva O., Vinogradova M., Utkin A.* The Comparison of Approaches to Estimating Speed From Position Measurements in van der Pol–Duffing System // Proc. 2020 15th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB).

    IEEE Xplore: https://ieeexplore.ieee.org/document/9140593.

    https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140593.

15. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2012.

16. *Тхай В.Н.* О грубых по периодическому движению моделях // АиТ. 2009. № 9. С. 162–167.
    Tkhai V.N. On models structurally stable in periodic motion // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 9. P. 1584–1589.

17. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.

18. *Tkhai V.N.* Dissipation in the Vicinity of a Oscillation of the Mechanical System // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. No. 030022. P. 030022-1–030022-5.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 02.11.2020

После доработки 03.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021