

© 2022 г. В.П. ИВАНОВ, д-р техн. наук (vladguc@ipu.ru),
Д.Д. ТАБАЛИН (corovan@mail.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРЕДИКТИВНЫМ ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ НЕВЯЗОК КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ¹

Рассматривается формулировка задачи синтеза терминального управления с разделением координат состояния объекта на два типа: медленно меняющиеся координаты, участвующие в краевых условиях, и координаты контура стабилизации. Получено обобщение теоремы о производной невязок краевых условий. На ее основе производится дискретизация системы. Выводится критерий наличия возможности приведения полученной системы к линейной путем замены управления. Полученный результат используется для построения управления с прогнозирующими моделями. Произведено численное моделирование полученного алгоритма для задачи вывода центра масс ступени ракеты-носителя на заданную орбиту на безатмосферном участке.

Ключевые слова: терминальное управление, управление с прогнозирующими моделями, управление тангажом ракеты-носителя.

DOI: 10.31857/S0005231022010056

1. Введение

Задачи терминального управления возникают во многих областях техники. В ракетодинамике примерами таких задач являются выведение на околоземную орбиту, расходование топлива до его полной выработки из баков, сближение космических аппаратов и др. В указанных примерах задача управления заключается в приведении объекта в заданные конечные состояния при известных начальных условиях. Конечные условия могут определяться в виде значений координат состояния объекта, а также и более сложным образом, например в виде функций от координат состояния.

Современная концепция терминального управления объектами ракетно-космической техники в наиболее полном объеме сформулирована в [1]. Принципиальным элементом способа терминального управления является прогнозирование конечного состояния объекта в виде заданных краевых условий.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00073 А).

Принципы методов прогнозирования в области ракетодинамики рассматривались уже в [2, 3]. Для обзора подхода в области управления линейными системами, см., например, [4]. Применение современных методов управления с прогнозирующей моделью к нелинейным системам подробно рассматривается в [5]. Общая идея метода состоит в том, что задается прогнозирующая модель объекта, для которой находится оптимальное управление в текущий и последующие моменты времени. При этом на реализацию идет только текущее управление, а в следующий момент времени процедура оптимизации повторяется. В публикации [6] для заданного управления в модели прогнозирования определяется производная прогнозируемых значений координат по времени. Методы синтеза алгоритмов управления развивались также в направлении применения оптимизации в реальном времени [7] и придания робастности замкнутой системе [8].

В приведенных выше примерах терминальное управление формулируется как часть общей задачи управления объектом путем выделения в объекте сравнительно медленно протекающих физических процессов, определяющих движение к заданной цели. При этом общее управление декомпозируется на терминальное управление и задачу стабилизации объекта относительно движения к заданной цели. В качестве примера можно привести стабилизацию углового положения ракеты-носителя относительно программы угла тангажа при управлении выведением. Отметим, что управление непосредственно воздействует на ту динамическую часть объекта, которая относится к контуру стабилизации. Синтез терминального управления, как правило, рассматривается независимо от контура стабилизации. При этом координаты объекта, формируемые на выходе контура стабилизации, принимаются в качестве терминального управления.

В данной статье задача синтеза терминального управления рассматривается при условии декомпозиции общей задачи с учетом формального описания динамики объекта в целом, включая контур стабилизации. Суть такого подхода состоит не в том, чтобы учитывать погрешности работы этого контура. Целью такого рассмотрения является учет динамики переходных процессов реакции контура стабилизации на управляющее воздействие. В этом случае идея прогнозирования конечного состояния объекта реализуется для всего динамического тракта системы: от места непосредственного воздействия управления до значений невязок краевых условий. В результате может быть получено дифференциальное уравнение, определяющее в явном виде зависимость невязок от управления.

Полученное дифференциальное уравнение дискретизируется. Для рассмотренного уравнения выводится критерий, при котором это уравнение с точностью до невырожденной замены управления сводится к линейному. Это используется для обобщения результатов для линейных систем, в частности для алгоритма терминального управления в случае отсутствия ограничений на управление. Затем данный алгоритм используется в качестве эвристики для решения задачи управления с учетом ограничений. Производится численное моделирование полученных алгоритмов для задачи управления центром

масс ступени ракеты-носителя на безатмосферном участке путем изменения программы угла тангажа.

Элементы описанного подхода докладывались на [9] и были отмечены в [10].

2. Постановка задачи

Рассматривается динамическая система

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), t), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, T]$, u — управление, значения которого принадлежат множеству U .

Здесь предполагается, что решение (1) для любых начальных условий существует и единственно (например, при выполнении условий одной из соответствующих теорем в [11, гл. 1]). Это же предположение используется для всех рассматриваемых в статье систем и не будет в дальнейшем оговариваться отдельно.

Ставится задача терминального управления — перевода системы в состояние x , удовлетворяющее краевым (граничным) условиям ψ в момент времени T :

$$\psi(x_1) : \psi_j(x_j(T)) = 0, \quad j \in L \subset \overline{1, l},$$

l — число краевых условий. Предполагается, что краевые условия накладываются только на координаты x_1 , а граничные условия представляют собой вектор условий для отдельных x_{1j} . Функция ψ предполагается дифференцируемой.

Момент времени $T > t_0$ либо является фиксированным, либо определяется первым моментом выполнения p -го краевого условия $\psi_p(x_{1p}) = 0$.

Координаты x_2 объекта формируются на выходе стабилизирующего контура системы управления. В данном случае работа контура рассматривается только в части переходных процессов реакции на изменение управляющего воздействия. Предполагается, что переходный процесс завершается на интервале, существенно меньшем, чем интервал терминального управления. Ограничением общности является независимость динамики координат состояния x_2 от координат объекта x_1 .

Задачу синтеза терминального управления объектом (1) будем рассматривать в классе систем с прогнозирующей моделью. Данный класс систем рассматривался в [1]. Общий обзор метода представлен, например, в [4, 5].

3. Теорема о производной прогнозируемой невязки

Рассмотрим динамическую систему общего вида:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Краевые условия могут накладываться на все координаты x_i .

Определение 1. Назовем прогнозирующей моделью для системы (2) в момент времени t при управлении $\hat{u}(t)$ систему вида

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{x}}{d\tau} = \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau), \\ \hat{x}(t) = x(t). \end{cases}$$

Обозначим интеграл системы (3), записанной в момент времени t с начальными условиями $x(t)$ через $\hat{x}(\tau|t, x(t))$. Это обозначение подчеркивает, что $\hat{x}(\tau|t, x(t))$ зависит от момента прогнозирования и начальных условий прогноза. В дальнейшем изложении будем писать просто $\hat{x}(\tau|t)$, опуская x и подразумевая, что $\hat{x}(t)$ совпадает с состоянием системы (2) в момент времени t , или просто $\hat{x}(\tau)$, опуская t и $\hat{x}(t)$, когда момент прогнозирования t ясен из контекста.

Определение 2. Прогнозируемой невязкой краевых условий (в силу прогнозирующей модели) будем называть

$$z(t) \equiv \psi(\hat{x}(T|t)),$$

где момент времени T вычисляется для системы (3) так же, как и для исходной системы (2), т.е. либо фиксирован, либо определяется первым моментом выполнения краевого условия ψ_p .

Замечание 1. В определениях 1 и 2 $\dim \hat{x} = \dim x$. Аналогичные определения можно сформулировать для $\dim \hat{x} \neq \dim x$ путем выбора координат \hat{x} , участвующих в начальных/краевых условиях.

Замечание 2. Прогнозируемая невязка краевых условий определена не всегда, в частности при выбранном $\hat{u}(t)$ условие $\psi_p(\hat{x}_p) = 0$ может никогда не выполняться. В дальнейшем рассматриваются только те прогнозирующие модели, для которых прогнозируемая невязка краевых условий существует.

Это одно из ограничений области применения рассматриваемых методов — требуется знать \hat{u} , для которого прогнозируемая невязка существует.

Справедлива теорема 1.

Теорема 1. Пусть ψ , $\hat{x}(T|t)$, T — дифференцируемы (по x , $\{x, t\}$ и t соответственно), тогда

$$(4) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}(T)} \left[\frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} \left(f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right) + \frac{dT}{dt} \hat{f}(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T) \right].$$

Доказательство теоремы 1 (и следствий из нее) приведено в Приложении.

Замечание 3. Теорема 1 не является новой. Аналог теоремы 1 использовался в [6] для решения задачи нетерминального типа.

Замечание 4. Для доказательства дифференцируемости $\hat{x}(T|t)$ может использоваться, например, теорема Люстерника, см., например, [12]. В частности, достаточно существования непрерывной сюръективной \hat{f}' .

Следствие 1. Пусть верны условия теоремы 1 и $T = \text{const}$, тогда

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}(T)} \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} \left(f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right).$$

Прогнозируемая невязка зависит от разности $\frac{d}{dt}(x(t) - \hat{x}(t))$, т.е. от ошибки прогнозирующей модели, вызванной отличием f от \hat{f} .

Для T , соответствующего $\psi_p(x_p(T)) = 0$, при выполнении некоторых дополнительных условий возможно явно вычислить $\frac{dT}{dt}$.

Следствие 2. Пусть верны условия теоремы 1, T определяется первым моментом выполнения $\psi_p(x_p(T)) = 0$ и дополнительно

$$f_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T)) \neq 0, \quad \frac{d\psi_p}{dx_p}(\hat{x}_p(T)) \neq 0.$$

Тогда

$$(5) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}(T)} \left[\frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} - C(\hat{x}(T)) \right] \left(f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right),$$

где

$$(6) \quad C(\hat{x}(T)) = \frac{\hat{f}(\hat{x}(T), \hat{x}(T), T) \frac{\partial \hat{x}_p(T)}{\partial x(t)}}{\hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{x}(T), T)}.$$

Замечание 5. Условие зависимости ψ_p только от x_p существенно. Для других координат x данное требование можно опустить.

Рассмотрим систему (1) с прогнозирующей моделью

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d\hat{x}_1}{d\tau} = f_1(\hat{x}_1(\tau), \hat{x}_2(\tau), \tau), \\ \frac{d\hat{x}_2}{d\tau} = 0, \\ \hat{x}(t) = x(t). \end{cases}$$

Прогнозирующую модель (7) можно рассматривать как движение объекта с фиксированным значением x_2 .

После применения теоремы 1 получим

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}_1(T)} \left[\frac{\partial \hat{x}_1(T)}{\partial x_2(t)} f_2(x(t), u(t), t) + \frac{dT}{dt} f_1(\hat{x}_1(T), \hat{x}_2(T), T) \right].$$

Для $T = \text{const}$:

$$(8) \quad \frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}_1(T)} \frac{\partial \hat{x}_1(T)}{\partial x_2(t)} f_2(x_2(t), u(t), t).$$

Использование декомпозиции (1) и прогнозирующей модели (7) позволяет получить более простой вид уравнения (4).

4. Дискретизация уравнения для прогнозируемой невязки. Неограниченное управление при сведении задачи к линейной

Введем обозначение $\frac{\partial z}{\partial x_2}$. Под $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ будем понимать матрицу, на которую в выражении для $\frac{dz}{dt}$ домножается f_2 . В данных обозначениях (8) примет вид

$$(9) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t), t) f_2(x_2(t), u(t)).$$

Проинтегрируем (9) на малом интервале $[t; t + \delta t]$:

$$\begin{aligned} z(t + \delta t) &= z(t) + \int_t^{t+\delta t} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(\tau), \tau) f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = \\ &= z(t) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t), t) \Delta x_2 + o(\delta t). \end{aligned}$$

При малых δt переходим к дискретной системе

$$(10) \quad z(t_{i+1}) = z(t_i) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_i), t_i) \Delta x_2(t_i).$$

Рассмотрим случай, когда отсутствуют ограничения на возможные значения Δx_2 . Будем искать решение терминальной задачи:

$$(11) \quad \{\Delta x_2(t_i)\} : z(t_k) = 0.$$

Запишем (10) для $z(t_k)$:

$$(12) \quad z(t_k) = z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1}) \Delta x_2(t_{k-1}).$$

Пусть Q_{k-1} — матрица размерности $m \times n$, где $n = \dim z, m \in \mathbb{N}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Решение задачи

$$\begin{aligned}
 & \{\Delta x_2(t_1), \Delta x_2(t_2), \dots, \Delta x_2(t_{k-2}), Q\} : \\
 & Q_{k-1} z(t_{k-1}) = 0, \\
 & Q_{k-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = 0, \\
 (13) \quad & \text{rank} \left(\begin{bmatrix} Q_{k-1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top(x(t_{k-1}), t_{k-1}) \end{bmatrix} \right) = \dim z, \\
 & \{\Delta x_2(t_{k-1})\} : \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top(x(t_{k-1}), t_{k-1}) z(t_k) = 0
 \end{aligned}$$

является решением задачи (11). При этом матрицу Q_{k-1} (если она существует) можно выбрать в виде

$$(14) \quad Q_{k-1} \equiv K(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = E - \frac{\partial z}{\partial x_2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top,$$

где

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1}).$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении. Управление Δx_2 при этом можно выбирать в виде линейной обратной связи:

$$(15) \quad \Delta x_2(t_{k-1}) = - \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top z(t_{k-1}),$$

$z(t_k)$ при данном управлении примет значение

$$(16) \quad z(t_k) = \left(E - \frac{\partial z}{\partial x_2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \right) z(t_{k-1}).$$

В выражении (16) K — линейный оператор относительно $z(t_{k-1})$.

Замечание 6. Данные выражения предполагают, что матрица $\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2}$ обратима. Если $\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \neq 0$, то воспользуемся результатами из [13]. Управление Δx_2 можно выбрать в виде

$$(17) \quad \Delta x_2(t_{k-1}) = - \sum_{i=1}^l \frac{\langle z(t_{k-1}), e_i \rangle}{\lambda_i} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top e_i,$$

$$(18) \quad K = E - \sum_{i=1}^l e_i e_i^\top,$$

где e_i — ортонормированные собственные векторы оператора $\frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top$, соответствующие собственным значениям $\lambda_i > 0$. Заметим, что (17) также линейно относительно $z(t_{k-1})$.

Замечание 7. Полученное управление (17) также является решением задачи минимизации квадрата невязки $z(t_k)$ при фиксированном $z(t_{k-1})$.

В дальнейшем будем пользоваться записью (16).

В случае $\frac{\partial z}{\partial x_2} \top \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$ управление не оказывает влияния в момент времени t_{k-1} и $z(t_k) = z(t_{k-1})$. Их можно исключить из рассмотрения.

Предположим, что

$$(19) \quad K(x(t_j), t_j) \equiv K(t_j),$$

т.е. линейный оператор K зависит только от времени t_{k-1} , а не от всего вектора состояния. Обозначим через z_{k-1}

$$z_{k-1}(t) = K(t_{k-1})z(t).$$

Новая невязка z_{k-1} представляет собой значение $z(t_k)$ при управлении (17). Для z_{k-1} справедливы равенства:

$$(20) \quad \begin{aligned} z_{k-1}(t_{k-1}) &= K(t_{k-1})z(t_{k-1}) = \\ &= K(t_{k-1}) \left(z(t_{k-2}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-2}), t_{k-2})\Delta x_2(t_{k-2}) \right), \\ z_{k-1}(t_{k-1}) &= z_{k-1}(t_{k-2}) + \frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_2}(x(t_{k-2}), t_{k-2})\Delta x_2(t_{k-2}). \end{aligned}$$

Так как (20) имеет вид (12), то для невязки $z_{k-1}(t_{k-1})$ можно искать решение задачи, аналогичной (11). В результате найдем $z_{k-2}(t)$. Процедура может быть продолжена для моментов времени, предшествующих t_{k-1} , если условие на K продолжает выполняться. Управление при этом находится исходя из выражений типа (15). Заметим, что в будущие моменты времени управление будет зависеть от, вообще говоря, неизвестных координат объекта, а в текущий момент времени зависит только от текущих координат.

Выясним, для каких систем выполняется (19). Ответ на этот вопрос дает теорема 3.

Теорема 3. Для системы (10) $K(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = K(t_{k-1})$ тогда и только тогда, когда система невырожденной заменой входов сводится к линейной:

$$\exists P_{t_{k-1}}(x, y) \forall x, x_s : \frac{\partial z}{\partial x_2}(x, t_{k-1}) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1})P_{t_{k-1}}(x_s, x),$$

где матрицы $P_{t_{k-1}}(x, y) \in \mathbb{R}^{\dim \Delta x_2 \times \dim \Delta x_2}$ образуют группу:

$$\begin{aligned} \forall x : P_{t_{k-1}}(x, x) &= I, \\ \forall x, y : P_{t_{k-1}}(x, y)P_{t_{k-1}}(y, x) &= I, \\ \forall x, y, z : P_{t_{k-1}}(y, x)P_{t_{k-1}}(z, y) &= P_{t_{k-1}}(z, x). \end{aligned}$$

Заменой $\Delta x_2'(t_{k-1}) = P_{t_{k-1}}(x_s, x(t_{k-1}))\Delta x_2(t_{k-1})$ уравнение (10) будет приведено к линейному виду

$$z(t_k) = z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1})\Delta x_2'(t_{k-1}).$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении. Замены данного типа производятся для всех будущих и текущего моментов времени.

Для определения управления можно применять рекуррентные выражения для K и z :

$$(21) \quad z(t_k) = z_{j-1}(t_{j-1}) = K(t_{j-1})z(t_{j-1}) \quad \forall j \in \overline{2, k},$$

$$(22) \quad \begin{cases} K(t_k) = E, \\ K(t_{j-1}) = \left(E - K(t_j) \frac{\partial z}{\partial x_2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top K(t_j) \frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^{-1} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top K(t_j) \right) K(t_j), \end{cases}$$

где

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_j).$$

Эти выражения проверяются непосредственно. В них учтено, что оператор K есть симметричный ортогональный проектор. Следовательно, в явном виде замену входов P можно не находить.

Из того что управления находятся из условий

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top(x_s, t_i)K(t_i)z_i(t_i) = \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top(x_s, t_i)z(t_k) = 0 \quad \forall i \in \overline{p, k-1},$$

имеет следствие 3.

Следствие 3. Управляемость системы (10) на интервале t_{k-p}, \dots, t_{k-1} в случае удовлетворения системой условия (19) в моменты времени t_{k-p+1}, \dots, t_k эквивалентна полноте ранга матрицы

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_k) & \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1}) & \dots & \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-p}) \end{bmatrix}$$

для произвольных x_s . Управление, решающее терминальную задачу (11), при этом можно выбирать исходя из (15).

Обобщением результата публикации [14] служит теорема 4.

Теорема 4. Пусть управление u в задаче (1) импульсное в моменты t_j без ограничений на размер и направление импульса Δx_2 . Пусть выполнено условие (19), где K определяется рекурсивно по формуле (22).

Тогда существует управление из $r \leq \dim(z)$ импульсов, минимизирующее $z^\top(T)z(T)$.

Следствие 4. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда ядро оператора $K(t_j)$ есть управляемое подпространство невязок, если управление ведется начиная с момента времени t_j . Если $K(t_j) = 0$, то система полностью управляема.

Замечание 8. Существенна линейность оператора K . Для ограниченных импульсов аналогично определенный оператор K перестанет быть линейным.

5. Эвристический алгоритм управления

Воспользуемся теоремой 4 как эвристикой для построения управления с учетом ограничений. В основу возьмем метод управления с прогнозирующими моделями.

Запишем выражение типа (10) для $z(T)$ через текущее и будущее управление:

$$(23) \quad z(T) = z(t_c) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_c), t_c)\Delta x_2(t_c) + \sum_{i=c+1}^k \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_i), t_i)\Delta x_2(t_i),$$

где t_c есть текущий момент времени в дискретизированной системе. В выражении (23) отдельно выделены члены для текущего и будущих управлений.

Будем приближать сумму в (23) суммой импульсов в моменты времени $\{t_p\}$, $p \in \overline{1, I}$:

$$(24) \quad \sum_{i=c+1}^k \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_i), t_i)\Delta x_2(t_i) \approx \sum_{p=1}^I \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_p), t_p)\Delta x_2(t_p).$$

Обозначив прогнозируемое будущее изменение невязки через $\Delta_f z$, получим

$$(25) \quad z(T) - \Delta_f z = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_c), t_c)\Delta x_2(t_c).$$

Текущий же импульс можно найти, обрезав полученный импульс.

В следующий момент дискретизации процедуру следует повторить для нахождения нового управления.

Замечание 9. Важно, чтобы будущие импульсы не могли целиком свести невязку в 0 — иначе текущее управление не будет выбрано.

В данной статье для модельной задачи (26) с управлением по тангажу было численно промоделировано с одним будущим управлением в момент времени $t_1 = (1 - \alpha)t + \alpha T$. Коэффициент α был подобран в процессе моделирования.

6. Модельная задача управления

Упрощенная модель ступени ракеты-носителя на безатмосферном участке взята из [1, с. 74–75]:

$$(26) \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{W\beta}{m_0 + m_1 + m_2} \cos(\nu), \\ \ddot{y} = \frac{W\beta}{m_0 + m_1 + m_2} \sin(\nu) - g, \\ \dot{m} = -\beta, \\ \dot{\nu} = u, \end{cases}$$

где x, y — горизонтальная и вертикальная координаты,
 m — масса топлива,
 m_0 — масса ступени,
 β — секундный расход топлива,
 W — скорость истечения топлива,
 g — ускорение силы притяжения,
 ν — угол тангажа.

Координаты x, y и их производные \dot{x}, \dot{y} являются координатами x_1 в декомпозиции (1), m, ν принадлежат x_2 .

Управление ограничено:

$$(27) \quad \nu_{\min} \leq \nu(t) \leq \nu_{\max}.$$

Данная система рассматривается при фиксированном моменте времени T и фиксированном $\beta(t)$ — случай управления только тангажом через производную.

Требуется достижение заданной высоты при нулевой вертикальной скорости:

$$(28) \quad \begin{cases} y(T) = y_k, \\ \dot{y}(T) = 0. \end{cases}$$

Фиксируем ν, β . Известно [1, с. 304–305], что

$$(29) \quad \begin{cases} \hat{x}(T) = S \cos(\nu), \\ \frac{d\hat{x}}{d\tau}(T) = L \cos(\nu), \\ \hat{y}(T) = S \sin(\nu), \\ \frac{d\hat{y}}{d\tau}(T) = L \sin(\nu), \end{cases}$$

где

$$(30) \quad \begin{cases} t_M \equiv T - t, \\ \tau_f \equiv \frac{m + m_0}{\beta}, \\ L \equiv W \ln \frac{\tau_f}{\tau_f - t_M}, \\ J \equiv \tau_f L - W t_M, \\ S \equiv L t_M - J, \end{cases}$$

τ_f есть время “полного сгорания” ступени.

Заметим, что согласно (8) достаточно дифференцировать только по начальным условиям, на которые прямо влияет управление.

Матрица частных производных для краевых условий (28) будет иметь вид

$$(31) \quad \begin{bmatrix} S(t) \cos \nu \\ L(t) \cos \nu \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что замена управления

$$\Delta \nu' = \frac{\Delta \nu}{\cos \nu}$$

сводит уравнение к линейному.

7. Результаты моделирования

В рамках статьи было произведено численное моделирование системы (26).

Параметры, использованные при моделировании:

$$\begin{cases} t_0 = 0, & T = 388, \\ m_0 = 24\,142, & m(t_0) = 64\,930, \\ v_x(t_0) = 2905, & v_y(t_0) = 1677, \\ \theta(t_0) = \frac{\pi}{6}, & \theta_{\max \text{ speed}} = 0,01, \\ \beta(t) = 167,15, \\ W = 3537, & g = 9,8, \end{cases}$$

где $-\theta_{\max \text{ speed}} \leq \nu \leq \theta_{\max \text{ speed}}$.

Частота дискретизации — одна секунда. Считается, что в момент дискретизации все необходимые вычисления производятся мгновенно.

При этом вместо импульсного управления использовалось кусочно-непрерывное, постоянное между точками дискретизации. В последние 10 с симуляции управление фиксируется. Это производится, чтобы избежать вырождения управления вследствие приближения обрабатываемых в алгоритме матриц к вырожденным.

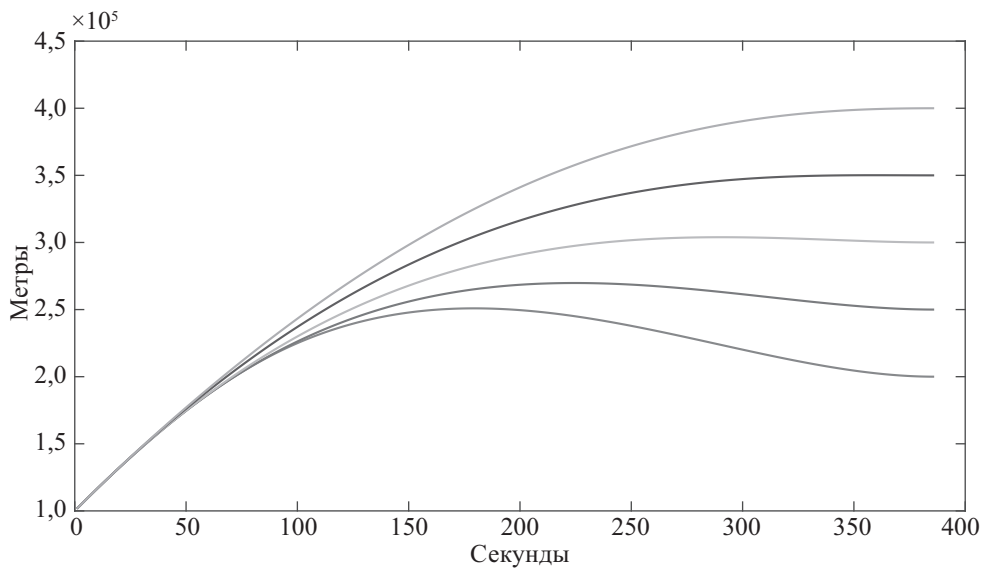


Рис. 1. Зависимость высоты от времени полета.

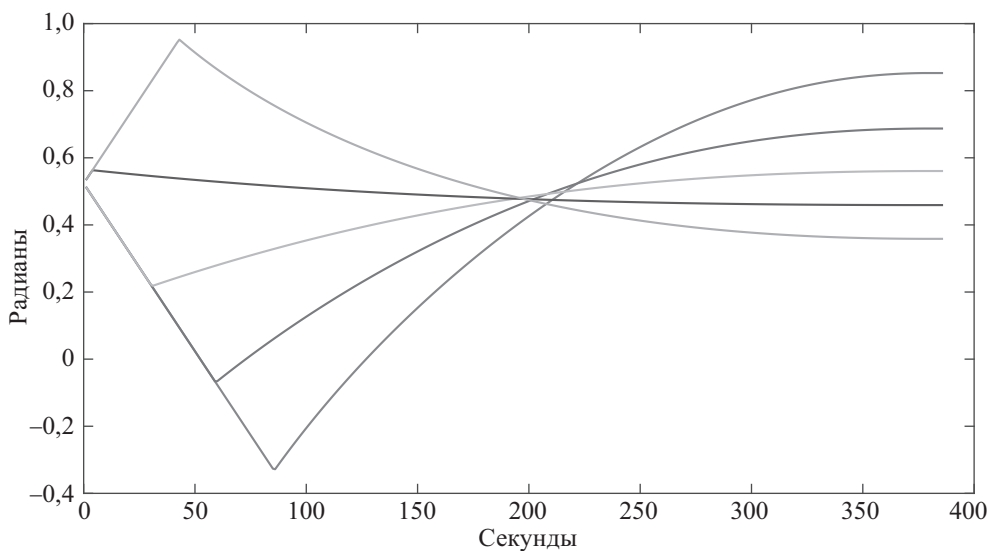


Рис. 2. Зависимость угла тангажа от времени полета.

Способность предложенного алгоритма обеспечивать подъем на различные высоты демонстрируется на рис. 1, где изображены траектории подъема на высоты 200—400 км с шагом 50 км. Соответствующие управления изображены на рис. 2.

Будущий момент времени один, в каждый момент дискретизации вычисляемый по формуле

$$t_I = t + \frac{T - t}{4}.$$

Результаты моделирования

Высота, км	200	250	300	350	400
$v_x(T)$, м/с	6634,2	6829,6	6927,9	6948,6	6885,4
$z^T(T)z(T)$	0,0030	8,5e-04	1,1e-04	6,5e-06	2,9e-04

Перенабор высоты в процессе управления объясняется высокой начальной вертикальной скоростью.

Конечные значения квадрата невязки и энергетические характеристики (горизонтальной скорости) представлены в таблице.

8. Заключение

При терминальном управлении объектами ракетно-космической техники, например при управлении вектором тяги в задаче выведения на околоземную орбиту, в общем движении объекта выделяются два класса взаимосвязанных процессов с существенно различающимися динамическими характеристиками. Первый класс процессов характеризуется уравнениями с медленно изменяющимися координатами состояния, на которые накладываются краевые условия. Ко второму классу относятся сравнительно быстро изменяющиеся координаты, которые негативно влияют на динамику объекта. При этом управление непосредственно воздействует на производные этих координат.

При рассмотрении общих уравнений движения объекта получено обобщение теоремы о производной прогнозируемой невязки краевых условий (теорема 1 и ее следствия). Проведена дискретизация уравнения путем интегрирования дифференциальных уравнений для производных невязок на малом интервале затухания реакции объекта на изменение управления. Разностные уравнения непосредственно связывают невязку с импульсами управляющих воздействий.

Сформулирована задача синтеза импульсного терминального управления из условий нулевой невязки и минимизации квадратичного критерия. Развита процедура синтеза и получены алгоритмы импульсного терминального управления для систем, сводящихся к линейным. Работоспособность предложенных алгоритмов была продемонстрирована на модельной задаче терминального управления тангажем ступени ракеты-носителя на безатмосферном участке.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

По формуле полной производной

$$(II.1) \quad \frac{d\hat{x}(T)}{dt} := \frac{d\hat{x}(T|t, x(t))}{dt} = \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial T} \frac{dT}{dt}.$$

Частные производные будут иметь вид

$$\frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial T} = \hat{f}(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T),$$

$$(II.2) \quad \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} = E + \frac{\partial}{\partial x(t)} \int_t^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau,$$

$$\frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau.$$

Воспользуемся формулой Ньютона—Лейбница:

$$\int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau = \hat{x}(T) - \hat{x}(s).$$

Дифференцируя по s внутри одного прогноза (помня, что внутри одного прогноза $T = \text{const}$), получим

$$(II.3) \quad \frac{d}{ds} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau = -\hat{f}(\hat{x}(s), \hat{u}(s), s).$$

Распишем $\frac{d}{ds} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau$ через формулу полной производной

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}(s)} \left(\int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau \right) \frac{d\hat{x}(s)}{ds} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Выразив $\frac{\partial}{\partial s} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau$ и воспользовавшись (II.3), получим

$$(II.4) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau = \\ &= - \left(E + \frac{\partial}{\partial \hat{x}(s)} \int_s^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau \right) \hat{f}(\hat{x}(s), \hat{u}(s), s). \end{aligned}$$

Заметим, что (II.4) верна для любого s из интервала $[t; T]$, в частности для $s = t$, и соответственно $\hat{x}(s)|_{s=t} = \hat{x}(t) = x(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau = - \left(E + \frac{\partial}{\partial x(t)} \int_t^T \hat{f}(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau), \tau) d\tau \right) \hat{f}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t).$$

Подставим результат в (П.1), воспользовавшись (П.2):

$$(П.5) \quad \frac{d\hat{x}(T|t)}{dt} = \frac{\partial \hat{x}(T)}{\partial x(t)} \left(f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right) + \frac{dT}{dt} \hat{f}(\hat{x}(T), \hat{u}(T)).$$

Формула (4) получается из (П.5) дифференцированием сложной функции $\psi(\hat{x}(T|t))$. Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 2.

$$(П.6) \quad \frac{dz_p(T|t)}{dt} = \frac{d\psi_p}{d\hat{x}_p(T)} \left[\frac{\partial \hat{x}_p(T)}{\partial x(t)} \left(f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right) + \frac{dT}{dt} \hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T) \right],$$

где производная $\frac{d\psi_p}{d\hat{x}_p(T)}$ полная из условия зависимости p -го краевого условия только от p -й координаты. Также заметим, что эта производная является числом.

По условию определения $T : \psi_p(\hat{x}_p(T)) = 0$, следовательно,

$$(П.7) \quad \frac{dz_p(T|t)}{dt} = 0.$$

Объединив (П.6), (П.7) и сократив на $\frac{d\psi_p}{d\hat{x}_p}(\hat{x}_p(T)) \neq 0$, получим

$$\frac{\partial \hat{x}_p(T)}{\partial x(t)} \left(f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right) + \frac{dT}{dt} \hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T) = 0.$$

Выразим производную T при $\hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T) \neq 0$:

$$(П.8) \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\hat{f}_p(\hat{x}(T), \hat{u}(T), T)} \frac{\partial \hat{x}_p(T)}{\partial x(t)} \left(f(x(t), u(t), t) - \hat{f}(x(t), \hat{u}(t), t) \right).$$

Подстановка (П.8) в (4) приводит к (5). Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 2.

Пусть найдены $\{\Delta x_2(t_1), \Delta x_2(t_2), \dots, \Delta x_2(t_{k-2}), \Delta x_2(t_{k-1}), Q\}$, удовлетворяющие условиям (13). Рассмотрим

$$Q_{k-1}z(t_k) = Q_{k-1} \left(z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2} \Delta x_2(t_{k-1}) \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} Q_{k-1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \end{bmatrix} z(t_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top z(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Так как матрица $\begin{bmatrix} Q_{k-1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \end{bmatrix}$ имеет полный ранг, то $z(t_k) = 0$. Управление Δx_2 находится из равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}^\top z(t_k) = 0 = \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \Delta x_2.$$

Проверим, что если существует Q_{k-1} , удовлетворяющее условиям (2), то этим условиям также удовлетворяет K , определенное по (18). Рассмотрим $\left(K \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) \left(K \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^\top$:

$$\begin{aligned} K \frac{\partial z}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^\top &= \left(E - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top\right) \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \left(E - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top\right) = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top = \left(E - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top\right) \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \left(E - \sum_{i=0}^l e_i e_i^\top\right) = \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top - \sum_{i=0}^l \lambda_i e_i e_i^\top. \end{aligned}$$

Для любой матрицы A верно $AA^\top = \sum_{i=0}^l \lambda_i e_i e_i^\top$. Следовательно, $K \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$.

Покажем, что K удовлетворяет ранговому условию. Так как K ортогональна $\frac{\partial z}{\partial x_2}$, то

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} K \\ \frac{\partial z}{\partial x_2}^\top \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(K) + \text{rank} \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right) = n - l + \text{rank} \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right) \geq n.$$

Условие $Kz(t_k) = 0$ следует из того, что управление Δx_2 минимизирует квадрат невязки. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3.

Пусть $K(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = K(t_{k-1})$. Заметим, что

$$\ker K(t_{k-1}) = \text{Im} \frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1}).$$

Следовательно, образ $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_{k-1}), t_{k-1})$ не зависит от $x(t_{k-1})$. Фиксируем x_s, x . Выберем $P_{t_{k-1}}(x_s, x)$, отображающее векторы ядра $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x, t_{k-1})$ в векторы ядра $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1})$ и производящее аналогичное отображение для векторов из образа, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}(x, t_{k-1}) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(x_s, t_{k-1}) P_{t_{k-1}}(x_s, x).$$

При $x = x_s$ можно выбрать $P_{t_{k-1}}(x, x) = I$. Если определено $P_{t_{k-1}}(x, y)$, то $P_{t_{k-1}}(y, x)$ можно определить как обратную к ней матрицу. Если определены $P_{t_{k-1}}(y, x), P_{t_{k-1}}(z, y)$, то можно определить $P_{t_{k-1}}(x, z) = P_{t_{k-1}}(y, x) P_{t_{k-1}}(z, y)$.

Достаточность проверяется непосредственно. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сухарулдзе Ю.Г.* Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011.
2. *Hausermann W.* Description and Performance of the Saturn Launch Vehicle's Navigation, Guidance, and Control System // 3rd Int. IFAC Conf. on Automatic Control in Space. Toulouse. France. 1970. V. 3. P. 275–312.
3. *Петров Б.Н., Портнов-Соколов Ю.П., Андриенко А.Я., Иванов В.П.* Бортовые терминальные системы управления. М.: Машиностроение, 1983.
4. *Веремей Е.И., Еремеев В.В.* Введение в задачи управления на основе предсказаний // Всероссийская науч. конф. “Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB”. М.: 2004. С. 98–115.
5. *Grüne L., Pannek J.* Nonlinear model predictive control. Theory and Algorithms. Springer, 2011.
6. *Гулько Ф.Б., Новосельцева Ж.А.* Применение методов прогнозирования в задачах синтеза систем автоматического управления // VIII Всесоюзное совещание по проблемам управления. М.: 1980. Т. 1. С. 32–34.
7. *Klaučo M., Kalúz M., Kvasnica M.* Real-time Implementation Of an Explicit MPC-based Reference Governor for Control of a Magnetic Levitation System // Control Engineering Practice. 2017. V. 60. No. 3. P. 99–105.
8. *Langson W., Chrysochoos I., Rakovic S.V., Mayne D.Q.* Robust Model Predictive Control Using Tubes // Automatica. 2004. V. 40. No. 1. P. 125–133.
9. *Табалин Д.Д.* Детерминированный синтез алгоритмов терминального управления с прогнозированием невязок краевых условий // Тезисы на международном научном форуме “Ломоносов”. П. математика. С. “Вычислительная математика и кибернетика”. Матер. Международного молодежного научного форума “ЛОМОНОСОВ-2020”.
10. *Табалин Д.Д.* О терминальной задаче с прогнозированием невязок краевых условий // Хроника доклада на семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Журн. Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1138–1139.
11. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory Of Ordinary Differential equations. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1955.
12. *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи математических наук. 1980. Т. 35. № 6 (216).
13. *Balakrishnan A.V.* An Operator Theoretic Formulation of a Class of Control Problems and a Steepest Descent Method of Solution // J.S.I.A.M. Control. Ser. A. Publ. 1963. V. 1. No. 2. P. 109–127.
14. *Красовский Н.Н.* Об одной задаче оптимального регулирования // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.

Поступила в редакцию 26.05.2021

После доработки 08.10.2021

Принята к публикации 15.10.2021