

© 2022 г. А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (alexanderpesterev.ap@gmail.com),
Ю.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (tot1983@inbox.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ТЕЛЕЖКИ С ОБРАТНЫМ МАЯТНИКОМ

Рассматривается задача стабилизации движущейся вдоль прямой тележки с установленным на ней перевернутым маятником. Цель управления — стабилизировать тележку в заданной целевой точке так, чтобы при этом маятник находился в верхнем вертикальном положении. Основная трудность, связанная с решением данной задачи, заключается в том, что две подсистемы (тележка и маятник) должны быть стабилизированы одновременно с помощью одного управления. Предлагается новый закон управления, основанный на введении эталонной системы второго порядка, траектория движения которой принимается в качестве целевой для тележки с маятником. С помощью расширения эталонной системы до 4-го порядка и введения алгебраического условия, связывающего две системы, находится целевая траектория в четырехмерном фазовом пространстве исходной системы и строится закон управления, обеспечивающий асимптотическое стремление траектории замкнутой системы к целевой. Полученный в работе закон управления применим к системам с произвольным соотношением масс маятника и тележки, так как замкнутая система не зависит от массовых характеристик системы. Найдена область значений параметров системы, при которых линеаризованная система устойчива. Изложение иллюстрируется численными примерами, демонстрирующими эффективность предлагаемого управления.

Ключевые слова: стабилизация, тележка с обратным маятником, локальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231022010068

1. Введение

Тележка с обратным маятником — классический пример нелинейной неустойчивой системы. Модель рассматривалась во множестве работ по теории управления и использовалась как тестовый пример при апробации новых идей и подходов, разработанных для стабилизации неминимально фазовых аффинных систем, в частности систем, описывающих движение велосипеда, моноцикла, сигвея и т.п. В линейном приближении задача подробно обсуждалась в книге Ю. Неймарка [1]. Большинство обсуждаемых в литературе нелинейных законов управления основаны на представлении системы в виде совокупности двух связанных подсистем с разнотемповой динамикой: подсистемы с быстрой динамикой (маятник) и подсистемы с медленной динамикой (тележка). При этом можно выделить три различных подхода, используемых почти во всех работах по этой тематике.

Первый подход [2] основан на оптимальной стабилизации маятника по быстродействию, при этом стабилизация тележки в нужной точке достигается введением силы вязкого трения, которая не позволяет тележке разгоняться. Если эта сила равна нулю, как в рассматриваемом в настоящей статье случае, стабилизация тележки вообще не гарантируется, несмотря на стабилизацию маятника. Дальнейшее развитие этого подхода можно найти в [3].

Идея второго подхода [4] заключается в выделении “многообразия внутреннего равновесия” (internal equilibrium manifold). Ищется такой закон управления, который приводит систему в малую окрестность многообразия и обеспечивает ее движение в этой окрестности. Предположение о более быстрой динамике маятника по сравнению с динамикой тележки позволяет задавать многообразию с помощью алгебраического уравнения, связывающего отклонение маятника с позицией и скоростью тележки. Похожий прием в упрощенном виде применялся позднее в [5, 6]. В [5] ставится задача глобальной оптимизации при ограниченном ресурсе управления и предлагается комбинированный закон управления, когда при больших начальных отклонениях для попадания в область, где стабилизация может быть гарантирована, применяется раскачивание маятника. В [6] указанный подход обобщается на случай, когда параметры системы известны неточно, и предлагается робастный вариант закона управления.

Разработанный Тилом третий подход [7] применим к достаточно широкому классу нелинейных систем, представимых в блочном виде, где одна из подсистем асимптотически устойчива при нулевой динамике второй подсистемы (feedforward form), и основан на применении теоремы о малом параметре усиления [7]. Основная идея данного подхода применительно к рассматриваемой системе заключается в том, что если есть глобальный закон управления маятником, то всегда можно построить локальный закон управления тележкой. На этих же идеях основаны работы [8, 9]. Основной недостаток данного подхода заключается в том, что стабилизация достигается только для достаточно узкой локальной области по переменным, отвечающим за позицию тележки. С другой стороны, если, наоборот, потребовать глобальную стабилизацию тележки, будет сужена гарантированная область устойчивости по переменным, отвечающим за положение маятника.

Множество законов управления, предложенных для рассматриваемой системы, не исчерпывается непрерывными законами. Так, в [10] для стабилизация системы применяется разрывный закон управления на скользящих режимах. Автор приводит исходную систему с помощью обратимой нелинейной замены переменных к регулярной форме, содержащей управление только в последнем уравнении. В результате синтезируется закон управления для новой системы, содержащий как непрерывную (отвечающую за компенсацию внутренней динамики маятника), так и разрывную компоненты (гарантирует выход и скольжение системы по нелинейной поверхности в 4-х мерном фазовом пространстве для некоторого множества начальных условий).

Основной недостаток всех вышеперечисленных работ — отсутствие конструктивного метода выбора параметров в законе управления, гарантирую-

щих хотя бы локальную стабилизацию. Как правило, авторы ограничиваются достаточно общими утверждениями о существовании таких параметров.

В настоящей работе предлагается новый гладкий нелинейный закон управления, основанный на введении более простой, эталонной, системы второго порядка. Эталонная система стабилизируется в целевой точке с помощью аналитически заданного ограниченного управления, обеспечивающего желаемые характеристики переходного процесса. Траектория эталонной системы принимается в качестве целевой для тележки с маятником, и ищется такое управление, которое обеспечит движение тележки по траектории, асимптотически приближающейся к целевой траектории. Синтезированный в работе закон управления применим к системам с произвольным соотношением масс маятника и тележки, так как замкнутая система не зависит от массовых характеристик системы. Проведен исчерпывающий анализ линеаризованной замкнутой системы и определена область значений параметров закона управления, гарантирующих локальную стабилизируемость системы.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации движущейся без проскальзывания колес вдоль прямой тележки массы M с установленным на ней перевернутым маятником массы m . Для простоты будем считать маятник математическим и пренебрежем трением. Координату центра тележки обозначим через x , а угловое отклонение маятника от вертикальной оси — через ϕ (рис. 1). Будем считать положительным угол, отсчитываемый от верхнего положения маятника в направлении по часовой стрелке. Уравнения движения системы хорошо известны (например, [5, 10]):

$$(1) \quad \mu \ddot{x} + ml \ddot{\phi} \cos \phi - ml \dot{\phi}^2 \sin \phi = U,$$

$$(2) \quad ml \ddot{x} \cos \phi + ml^2 \ddot{\phi} - mgl \sin \phi = 0.$$

Здесь $\mu = M + m$, l — длина подвеса маятника и U — действующая на тележку управляющая сила. Будем считать, что в начальный момент отклонение

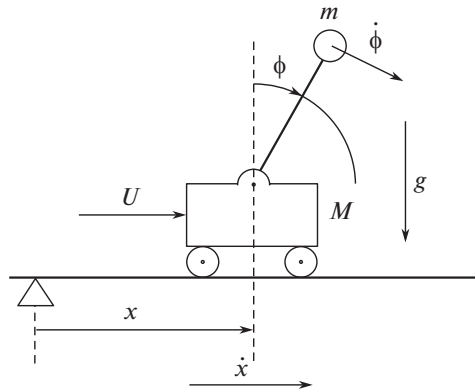


Рис. 1. Тележка с обратным маятником.

маятника ограничено прямым углом, т.е. $|\phi(0)| < \pi/2$. Случай большего отклонения сводится к рассматриваемому предварительным применением специального закона управления, позволяющего перевести маятник из произвольного начального положения в указанную область (например, с помощью раскачивания, как в [5] в случае ограниченного управления).

Цель управления — стабилизировать тележку в заданной целевой точке на линии так, чтобы при этом маятник находился в верхнем вертикальном положении. Без потери общности будем считать, что целевая точка совпадает с началом координат. Основная трудность, связанная с данной задачей, заключается в том, что две подсистемы (тележка и маятник) должны быть стабилизированы одновременно с помощью одного управления.

Рассмотрим также более простую задачу стабилизации в начале координат тележки массы $\mu = M + m$ без маятника, которую будем называть *эталонной системой*, с помощью заданной управляющей силы $U_1(w, \dot{w})$ (будем использовать обозначение w для координаты центра тележки, чтобы отличать эталонную систему от исходной):

$$(3) \quad \mu \ddot{w} = U_1(w, \dot{w}), \quad w(0) = x(0), \quad \dot{w}(0) = \dot{x}(0).$$

Относительно функции $U_1(w, \dot{w})$ предполагаем, что она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям $U_1(0, 0) = 0$ и $\partial U_1 / \partial w(0, 0) < 0$, $\partial U_1 / \partial \dot{w}(0, 0) < 0$. Будем также полагать, что управление U_1 и скорость эталонной системы ограничены:

$$|U_1(w, \dot{w})| \leq U_{\max}, \quad \forall w, \dot{w}, \quad |\dot{w}(t)| \leq V_{\max} \quad \forall t \geq 0.$$

Конкретный вид функции U_1 обсуждается в конце статьи в разделе 5. В настоящий момент достаточно знать, что она удовлетворяет сформулированным выше условиям, из которых, в частности, следует, что начало координат является положением устойчивого равновесия системы (3), в окрестности которого функция $U_1(w, \dot{w})$ аппроксимируется линейной функцией.

Цель введения эталонной системы — определить для тележки с маятником некоторую “желаемую” (целевую) траекторию, которая задается неявно управлением U_1 , и свести задачу к нахождению такого управления U , которое обеспечит движение тележки в начало координат по траектории, асимптотически приближающейся к желаемой. Максимальная скорость системы и управляющая сила на практике всегда ограничены. В настоящей работе ограничения на управление и скорость при синтезе закона управления не вводились, однако учитывались при планировании траектории: введение ограничений при стабилизации эталонной системы позволяет получить “разумную” целевую траекторию, которая может быть реализована (за исключением, быть может, некоторого начального участка) исходной системой с заданными ограниченными управлением и скоростью. Параметры U_{\max} и V_{\max} будут также использованы при приведении уравнений движения системы к безразмерной форме.

3. Безразмерная модель

Перейдем к безразмерным переменным. В отличие от большинства посвященных решению данной задачи работ, где в качестве масштаба времени принимается период колебаний маятника (см., например, [4, 5, 7, 8]), в настоящей работе в качестве масштаба берется величина l/V_{\max} , и безразмерные переменные вводятся как

$$(4) \quad \tilde{t} = tV_{\max}/l, \quad \tilde{x} = x/l, \quad \tilde{\phi} = \phi.$$

Производные по времени в размерных и безразмерных переменных связаны формулами

$$(5) \quad \dot{x} = V_{\max} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}, \quad \ddot{x} = \frac{V_{\max}^2}{l} \frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{V_{\max}}{l} \frac{d\phi}{d\tilde{t}}, \quad \ddot{\phi} = \frac{V_{\max}^2}{l^2} \frac{d^2\phi}{d\tilde{t}^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1), (2) и деля первое уравнение на $\mu V_{\max}^2/l$, а второе на mV_{\max}^2 , получаем уравнения системы в безразмерном виде:

$$(6) \quad \ddot{\tilde{x}} + \frac{m}{\mu} \ddot{\tilde{\phi}} \cos \tilde{\phi} - \frac{m}{\mu} \dot{\tilde{\phi}}^2 \sin \tilde{\phi} = \tilde{U},$$

$$(7) \quad \ddot{\tilde{x}} \cos \tilde{\phi} + \ddot{\tilde{\phi}} - \tilde{\omega}_0^2 \sin \tilde{\phi} = 0,$$

где $\tilde{\omega}_0$ – безразмерная круговая частота маятника и \tilde{U} – безразмерное управление,

$$\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{l}{V_{\max}} \equiv \frac{\sqrt{gl}}{V_{\max}}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{\mu g} \frac{gl}{V_{\max}^2} \equiv \frac{Ul}{\mu V_{\max}^2}.$$

Уравнение эталонной системы (3) и ограничения при переходе к безразмерной записи принимают вид:

$$\ddot{\tilde{w}} = \tilde{U}_1, \quad |\dot{\tilde{w}}(t)| \leq 1, \quad |\tilde{U}_1(\tilde{w}, \dot{\tilde{w}})| \leq \tilde{U}_{\max}, \quad \tilde{U}_{\max} = \frac{U_{\max} l}{\mu V_{\max}^2}.$$

Далее в статье все уравнения приводятся в безразмерном виде и, чтобы избежать громоздкости, тильду над символами опускаем.

Разрешая систему (6), (7) относительно старших производных, получим

$$(8) \quad \ddot{x} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{m}{\mu} \dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{m}{\mu} \omega_0^2 \sin \phi \cos \phi + U \right],$$

$$(9) \quad \ddot{\phi} = \frac{1}{\gamma} \left[-\frac{m}{\mu} \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + \omega_0^2 \sin \phi - \cos \phi \cdot U \right],$$

где

$$(10) \quad \gamma \equiv \gamma(\phi) = 1 - \frac{m}{\mu} \cos^2 \phi.$$

4. Синтез стабилизирующего управления

4.1. Замена переменных

Сделаем замену переменных в ϕ -подсистеме и запишем уравнения (8)–(9) в виде системы уравнений первого порядка. Для этого введем новые переменные состояния

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \omega_0^2 \tan \phi, \quad x_4 = \omega_0^2 \dot{\phi} / \cos^2 \phi$$

и обозначение $X = [x_1, \dots, x_4]$. В новых переменных (для компактности записи здесь и далее будем применять смешанные обозначения, т.е. наряду с новыми переменными в правых частях уравнений использовать старые) система (8)–(9) принимает вид

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\gamma} \left[\frac{m}{\mu} \dot{\phi}^2 \sin \phi - \frac{m}{\mu} \omega_0^2 \sin \phi \cos \phi + U \right], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= f_\phi(\phi, \dot{\phi}) + g_\phi(\phi)U, \end{aligned}$$

где, с учетом формулы $\dot{x}_4 = \omega_0^2(\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}^2 \tan \phi) / \cos^2 \phi$,

$$f_\phi(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\omega_0^2}{\gamma \cos \phi} \left[x_3 + \frac{\dot{\phi}^2 \tan(\phi)}{\cos \phi} \left(2\gamma - \frac{m}{\mu} \cos^2 \phi \right) \right], \quad g_\phi(\phi) = -\frac{\omega_0^2}{\gamma \cos \phi}.$$

4.2. Идея подхода

Так как исходная система имеет четвертый порядок, запишем уравнения эталонной системы также в виде системы четвертого порядка:

$$(12) \quad \dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = w_3, \quad \dot{w}_3 = w_4, \quad \dot{w}_4 = \ddot{U}_1,$$

где w_1 и w_2 – координата и скорость, w_3 и w_4 – зависимые переменные,

$$(13) \quad w_3 = U_1(w_1, w_2), \quad w_4 = \dot{U}_1(w_1, w_2),$$

а \dot{U}_1 и \ddot{U}_1 – производные по времени функции U_1 в силу системы (3). Решение системы (12) будет решением (3) только при фиксированных начальных условиях для третьей и четвертой переменных, а именно при $w_3(0) = U_1(w_1(0), w_2(0))$ и $w_4(0) = \dot{U}_1(w_1(0), w_2(0))$.

Наряду с (12) рассмотрим еще одну систему (будем называть ее *возмущенной эталонной системой*):

$$(14) \quad \dot{w}_1 = w_2, \quad \dot{w}_2 = w_3, \quad \dot{w}_3 = w_4, \quad \dot{w}_4 = \ddot{U}_1 + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2,$$

где $\beta_1, \beta_2 > 0$ и

$$\delta_1 = U_1(w_1, w_2) - w_3, \quad \delta_2 = \dot{U}_1(w_1, w_2) - w_4.$$

Здесь w_3 и w_4 – независимые переменные, которые могут принимать произвольные начальные значения. Решение системы (14) с начальными условиями $w_i(0) = x_i(0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, будем называть *целевой траекторией* для исходной системы.

Будем искать такое управление U в исходной системе, при котором правые части четвертых уравнений исходной и эталонной систем совпадают при подстановке x_i вместо w_i :

$$f_\phi(\phi, \dot{\phi}) + g_\phi(\phi)U = \ddot{U}_1(x_1, x_2) + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2.$$

Подставляя правые части выражений для функций f_ϕ и g_ϕ в левую часть уравнения, находим:

$$(15) \quad U = x_3 + \frac{\dot{\phi}^2 \tan(\phi)}{\cos \phi} \left(2\gamma - \frac{m}{\mu} \cos^2 \phi \right) - \frac{1}{\omega_0^2} \gamma \cos \phi \left[\ddot{U}_1(x_1, x_2) + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 \right],$$

где

$$(16) \quad \delta_1 = U_1(x_1, x_2) - x_3, \quad \delta_2 = \dot{U}_1(x_1, x_2) - x_4.$$

Подставляя найденное управление U в (11), получаем уравнения замкнутой системы в виде

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \frac{2\dot{\phi}^2 \tan(\phi)}{\cos \phi} - \frac{1}{\omega_0^2} \cos \phi (\ddot{U}_1 + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \ddot{U}_1 + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2, \end{aligned}$$

отличающиеся от уравнений возмущенной эталонной системы только правой частью второго уравнения. Из вида правой части (17) следует, что поведение системы, замкнутой управлением (15), не зависит от массовых характеристик системы и определяется одним параметром ω_0 и выбранной функцией U_1 .

Обратная связь (15) получена с помощью эвристических соображений, так что предыдущие рассуждения не являются доказательством устойчивости замкнутой системы (17). В следующем разделе докажем, что функция U_1 и параметры β_1 и β_2 могут быть выбраны так, чтобы система (17) была локально устойчива, и найдем область значений параметров, гарантирующих устойчивость линеаризованной системы.

4.3. Локальная устойчивость замкнутой системы

Для доказательства локальной устойчивости линеаризуем систему (17) в малой окрестности начала координат четырехмерного пространства состояний. Согласно предположению функция $U_1(x_1, x_2)$ линейна в окрестности нуля: $U_1(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + o(x_1, x_2)$, откуда следует, что матрица линеаризованной системы зависит от пяти параметров: ω_0 , α_1 , α_2 , β_1 и β_2 . Ограничим

выбор коэффициентов α_1 и α_2 условием $\alpha_1^2 \geq 4\alpha_2$, при выполнении которого начало координат в пространстве переменных x_1, x_2 будет положением равновесия типа узел, что, в свою очередь, обеспечит монотонное приближение эталонной системы к целевой точке. Далее, чтобы уменьшить количество параметров, ограничимся случаем вырожденного узла, взяв функцию $U_1(x_1, x_2)$ вида

$$(18) \quad U_1 = -\lambda^2 x_1 - 2\lambda x_2 + o(x_1, x_2).$$

Аналогично будем выбирать β_1 и β_2 из однопараметрического семейства коэффициентов: $\beta_1 = \rho^2$ и $\beta_2 = 2\rho$, $\rho > 0$, сведя, таким образом, количество параметров до трех: ω_0 , λ и ρ .

Дифференцируя (18) в силу системы (3), получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= -\lambda^2 \dot{x}_1 - 2\lambda \dot{x}_2 + \frac{\partial o}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial o}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \\ &= 2\lambda^3 x_1 + 3\lambda^2 x_2 - \lambda^2 \frac{\partial o}{\partial x_2} x_1 + \left(\frac{\partial o}{\partial x_1} - 2\lambda \frac{\partial o}{\partial x_2} \right) x_2 + o(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Так как (по определению функции $o(x_1, x_2)$) $\partial o / \partial x_i \rightarrow 0$ при $x_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2$, получаем

$$\dot{U}_1 = 2\lambda^3 x_1 + 3\lambda^2 x_2 + o(x_1, x_2).$$

Аналогично дифференцируя второй раз в силу системы, находим

$$\ddot{U}_1 = -3\lambda^4 x_1 - 4\lambda^3 x_2 + o(x_1, x_2).$$

Отсюда правая часть четвертого уравнения принимает в окрестности начала координат вид

$$\ddot{U}_1 + \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \delta_2 \approx W_1 x_1 + W_2 x_2 - \beta_1 x_3 - \beta_2 x_4,$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\partial \ddot{U}_1}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_1} = -\lambda^2 (\beta_1 - 2\beta_2 \lambda + 3\lambda^2), \\ W_2 &= \frac{\partial \ddot{U}_1}{\partial x_2} + \beta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \beta_2 \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial x_2} = -\lambda (2\beta_1 - 3\beta_2 \lambda + 4\lambda^2). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$(19) \quad \xi = \rho/\lambda, \quad s = (\lambda/\omega_0)^2.$$

Оставляя линейные члены в (17) и пренебрегая членами более высокого порядка, после несложных преобразований получим зависящую от двух параметров линеаризованную систему

$$(20) \quad \dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\lambda^2 c_1(\xi) & s\lambda c_2(\xi) & 1 + s\xi^2 & 2s\xi/\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^4 c_1(\xi) & -\lambda^3 c_2(\xi) & -\lambda^2 \xi^2 & -2\lambda\xi \end{pmatrix},$$

где

$$(21) \quad c_1(\xi) = (\xi - 3)(\xi - 1), \quad c_2(\xi) = 2(\xi - 2)(\xi - 1).$$

Пусть $\tilde{\nu}$ – собственное значение матрицы A . Нормируя его на λ , $\tilde{\nu} = \lambda\nu$, получаем характеристический полином линеаризованной системы в виде

$$(22) \quad \begin{aligned} P(\nu) = \det(A - \tilde{\nu}I) &= \begin{vmatrix} -\lambda\nu & 1 & 0 & 0 \\ s\lambda^2c_1 & s\lambda c_2 - \lambda\nu & 1 + s\xi^2 & 2s\xi/\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda\nu & 1 \\ -\lambda^4c_1 & -\lambda^3c_2 & -\lambda^2\xi^2 & -2\lambda\xi - \lambda\nu \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda\nu \begin{vmatrix} s\lambda c_2 - \lambda\nu & 1 + s\xi^2 & 2s\xi/\lambda \\ 0 & -\lambda\nu & 1 \\ -\lambda^3c_2 & -\lambda^2\xi^2 & -2\lambda\xi - \lambda\nu \end{vmatrix} - \\ &= - \begin{vmatrix} s\lambda^2c_1 & 1 + s\xi^2 & 2s\xi/\lambda \\ 0 & -\lambda\nu & 1 \\ -\lambda^4c_1 & -\lambda^2\xi^2 & -2\lambda\xi - \lambda\nu \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^4 [\nu^4 + \nu^3(2\xi - sc_2(\xi)) + \nu^2(\xi^2 - sc_1(\xi)) + \nu c_2(\xi) + c_1(\xi)]. \end{aligned}$$

Отметим, что устойчивость характеристического полинома, а следовательно, и линеаризованной системы, зависит только от двух параметров s и ξ , определенных формулой (19), а так как s и ξ не зависят ни от масс маятника и тележки, ни от их отношения, то и область устойчивости не зависит от массовых характеристик исходной системы. Анализ устойчивости полинома, результат которого сформулирован в следующей теореме, приведен в Приложении.

Теорема. Линеаризованная система (20) устойчива при любых s и ξ , принадлежащих области

$$\Omega = \{3 < \xi < \infty, 0 < s < s_{\max}(\xi)\},$$

где

$$(23) \quad s_{\max}(\xi) = \frac{\xi^2(\xi - 2)^2 + 4(\xi - 1)^2}{\xi(\xi - 1)(\xi - 2)(\xi^2 - 3\xi + 3)}.$$

Из теоремы следует, что найдется окрестность нуля в 4-мерном пространстве такая, что система (17) (система (11), замкнутая обратной связью (15)) устойчива при любом принадлежащем ей начальном векторе $X(0)$.

Легко видеть, что $s_{\max}(\xi)$ – монотонно убывающая функция при $\xi > 3$. Кривая $s_{\max}(\xi)$ изображена на рис. 2. Здесь Ω – внутренность области, ограниченной кривой $s_{\max}(\xi)$, горизонтальной осью и вертикальной прямой $\xi = 3$. Подставляя $\xi = 3$ в правую часть формулы для $s_{\max}(\xi)$, находим верхнюю границу значений s , при которых возможна стабилизация: $\max_{\xi} s_{\max}(\xi) = 25/18$. Отсюда получаем ограничение на выбор желаемой экспоненциальной скорости убывания отклонения λ :

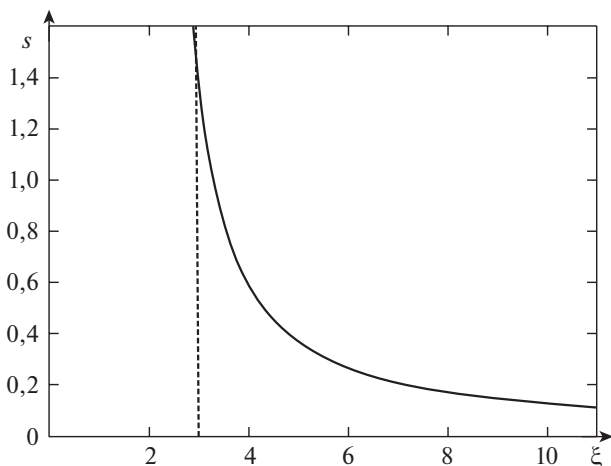


Рис. 2. Область устойчивости линеаризованной системы в пространстве параметров s и ξ , определенных формулой (19).

Следствие 1. Система (11) может быть локально стабилизирована с помощью обратной связи (15), если λ принадлежит интервалу $0 < \lambda < \lambda_{\max}$, где

$$(24) \quad \lambda_{\max} = \frac{5\omega_0}{3\sqrt{2}}.$$

Из рис. 2 видно, чем больше значение λ , тем меньше диапазон значений ξ (а значит, и β_1, β_2), при которых линеаризованная система устойчива.

Следствие 2. Для любых параметров исходной системы (6), (7) и заданной скорости λ убывания отклонения из интервала $0 < \lambda < \lambda_{\max}$ существует $\xi_{\max}(\lambda)$ такое, что обратная связь (15) с коэффициентами $\beta_1 = \lambda^2 \xi^2$ и $\beta_2 = 2\lambda\xi$, где $\xi \in (3, \xi_{\max}(\lambda))$, локально стабилизирует рассматриваемую систему.

5. Управление эталонной системой

Для стабилизации эталонной системы предлагается применять обратную связь в виде вложенных сигмоидов, позволяющую одновременно удовлетворить фазовые ограничения и ограничения на управление (например, [11, 12]):

$$(25) \quad U_1(w, \dot{w}) = -k_4 \sigma_2(k_3(\dot{w} + k_2 \sigma_1(k_1 w))),$$

где σ_1 и σ_2 – сигмоиды. Напомним, что сигмоидой называется гладкая монотонно возрастающая функция, меняющаяся от -1 до $+1$. В семейство функций класса сигмоид входят такие функции, как арктангенс, гиперболический тангенс, функция ошибок и многие другие подобного вида. Нетрудно проверить, что функция (25) удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в разделе 2 при $k_2 = V_{\max}$ и $k_4 = U_{\max}$, или в безразмерной записи (см. раздел 3) при $k_2 = 1$ и $k_4 = \bar{U}_{\max}$. С помощью двух оставшиеся коэффициентов

k_1 и k_3 можно регулировать форму кривой и ее наклон в окрестности нуля, который, в свою очередь, определяет скорость экспоненциального убывания отклонения вблизи нуля, а также оптимизировать некоторый критерий качества управления, как, например, в [12]. Легко проверить, что если положить

$$k_1 = \lambda/2, \quad k_3 = 2\lambda/\tilde{U}_{\max},$$

то нулевая точка будет положением равновесия эталонной системы типа выродившийся узел (см. раздел 4.3) с экспоненциальной скоростью убывания отклонения вблизи нуля λ .

6. Численные примеры

Прежде чем представить результаты численных экспериментов, опишем, как выбрать параметры закона управления для физической (размерной) системы. Здесь и далее, чтобы различать размерные и безразмерные параметры, будем помечать последние тильдой. Для реализации описанного выше подхода, кроме физических параметров системы и ограничений на скорость и управление в эталонной системе, требуется выбрать конкретные сигмоидальные функции σ_1 и σ_2 . В приведенных здесь численных экспериментах, результаты которых обсуждаются ниже, в качестве обоих сигмоид использовалась функция арктангенса:

$$\sigma_i = (2/\pi) \arctan(x), \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что вид сигмоиды влияет на поведение системы вдали от положения равновесия, в то время как локальная устойчивость зависит только от коэффициентов k_i в формуле (25). Коэффициенты k_1 и k_3 выбираются так, чтобы обеспечить желаемую экспоненциальную скорость λ приближения к целевой точке, которая должна принадлежать интервалу $(0, \lambda_{\max})$. Связь размерного $\lambda(\lambda_{\max})$ и безразмерного $\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}_{\max})$ легко определить, рассматривая линеаризацию в окрестности нуля функции $U_1(x, \dot{x})$, заданной выражением (25), в размерной и безразмерной записи. С помощью формул (4), (5), связывающих размерные и безразмерные переменные и их производные по времени, легко находим: $\lambda = \tilde{\lambda}V_{\max}/l$. Отсюда размерные λ_{\max} и ω_0 связаны тем же соотношением (24), что и безразмерные величины, а значит, чем больше круговая частота маятника $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, тем больше максимально возможная экспоненциальная скорость приближения к целевой точке λ_{\max} , при которой локальная стабилизация уже невозможна.

По заданным физическим параметрам исходной (1), (2) и эталонной (3) систем и заданному λ определяется безразмерный параметр $s = (\lambda/\omega_0)^2$, выбирается значение ξ из диапазона $(3, \xi_{\max}(\lambda))$ и строится обратная связь по формуле (15) с коэффициентами $\beta_1 = \lambda^2\xi^2$ и $\beta_2 = 2\lambda\xi$. Умножая полученное управление на масштабирующий множитель $\mu V_{\max}^2/l$, получаем управление в исходной размерной системе (1), (2). Как установлено в разделе 4.2, замкнутая система (17) не зависит от массовых характеристик исходной системы.

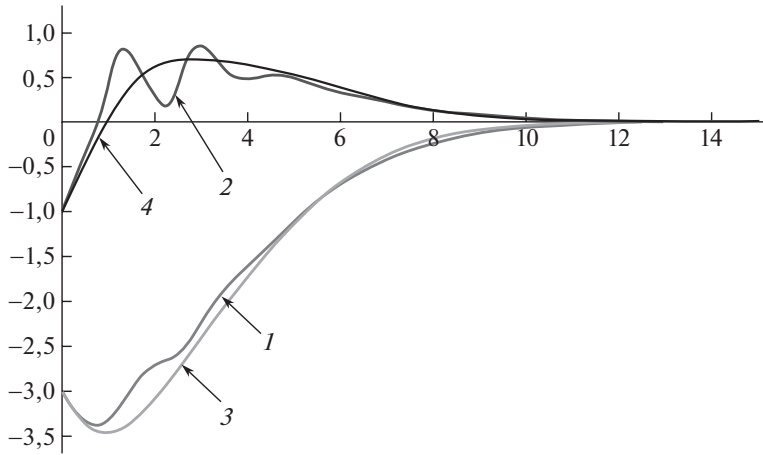


Рис. 3. Стабилизация системы с начальным состоянием $x(0) = -3,0$, $\dot{x}(0) = -1,0$, $\phi(0) = 0,5$, $\dot{\phi}(0) = 0$ при $\xi = 4,0$. Зависимость от времени расстояния до целевой точки (кривые 1 и 3) и скорости тележки (кривые 2 и 4) для тележки с маятником и возмущенной эталонной системы соответственно.

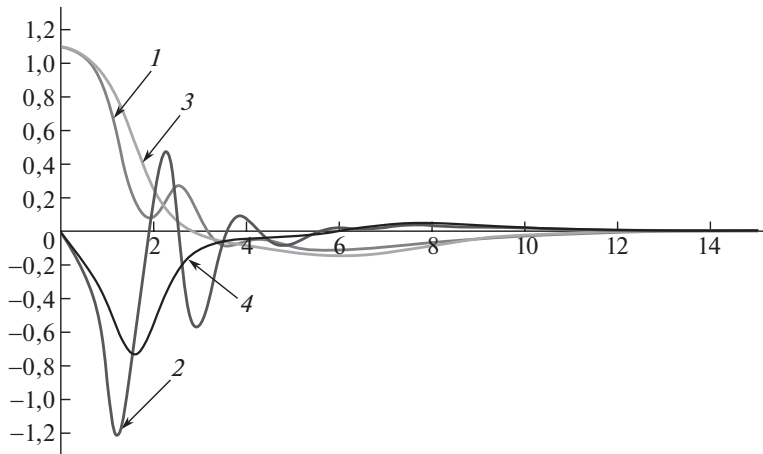


Рис. 4. Стабилизация системы с начальным состоянием $x(0) = -3,0$, $\dot{x}(0) = -1,0$, $\phi(0) = 0,5$, $\dot{\phi}(0) = 0$ при $\xi = 4,0$. Зависимость от времени переменных x_3 (кривая 1), x_4 (кривая 2) (тележка с маятником) и w_3 (кривая 3), w_4 (кривая 4) (возмущенная эталонная система).

По этой причине не имеет смысла рассматривать системы с разными отношениями масс маятника и тележки, так как для таких систем отличаться будут только графики управлений.

Экспериментально установлено, что область притяжения замкнутой системы (область начальных значений в четырехмерном пространстве состояний) зависит от значения $\xi \in (3, \xi_{\max}(\lambda))$ и сложно устроена. Область притяжения уменьшается при увеличении ξ , стягиваясь в точку, когда $\xi \rightarrow \xi_{\max}(\lambda)$.

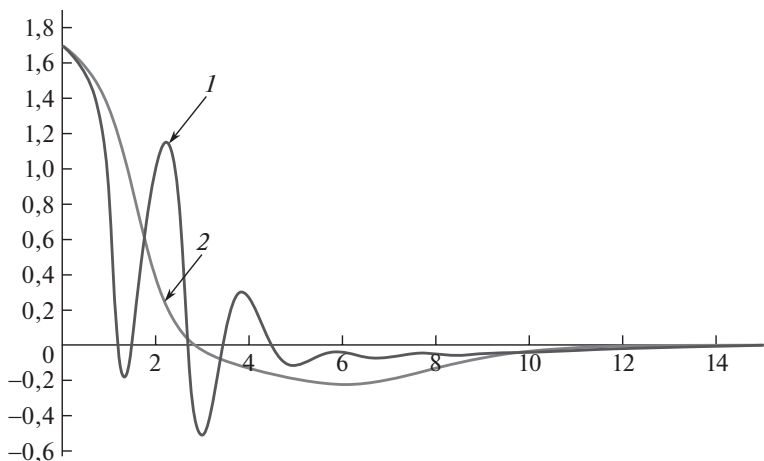


Рис. 5. Стабилизация системы с начальным состоянием $x(0) = -3,0$, $\dot{x}(0) = -1,0$, $\phi(0) = 0,5$, $\dot{\phi}(0) = 0$ при $\xi = 4,0$. Зависимость от времени управления U (кривая 1) тележкой с маятником и управления U_1 (кривая 2) возмущенной эталонной системой.

При уменьшении же ξ область притяжения растет, расширяясь предположительно до всего пространства R^4 вблизи нижней границы интервала $\xi = 3$. Установление зависимости области притяжения от параметра ξ является первоочередной задачей будущих исследований.

Полученный закон управления апробировался в численных экспериментах для различных параметров и начальных условий. Представленные ниже результаты получены для безразмерной системы со следующими параметрами: $m/\mu = 1/3$, $\omega_0^2 = 2$ и $\tilde{U}_{\max} = 2$. Управление U_1 в эталонной системе определено формулой (25) с коэффициентами $k_1 = 0,5\pi/2$, $k_2 = 1$, $k_3 = 4k_1/\tilde{U}_{\max} = \pi/2$ и $k_4 = 2$. Такие значения коэффициентов соответствуют единичной скорости экспоненциального убывания отклонения: $\tilde{\lambda} = 1$, при этом $s = 0,5$. Подставляя $s = 0,5$ вместо s_{\max} в левую часть формулы (23) и решая численно получившееся уравнение относительно ξ , находим верхнюю границу $\xi_{\max}(0,5) \approx 4,315$ диапазона устойчивости линеаризованной системы.

Серия численных экспериментов с различными значениями параметра ξ и различными начальными условиями подтвердила приведенные выкладки: для любых значений ξ , принадлежащих интервалу $(3, 4,315)$, нашлось множество начальных значений переменных, при которых стабилизировалась исходная нелинейная система, в то время как для всех тестируемых значений ξ за пределами указанного диапазона система не стабилизировалась.

Приведенные в данном разделе графики показывают результаты двух численных примеров. В первом примере (рис. 3–5) $\xi = 4,0$, $x(0) = -3,0$, $\dot{x}(0) = -1,0$, $\phi(0) = 0,5 \text{ rad}$, $\dot{\phi}(0) = 0$. На рис. 3 показаны графики отклонения от целевой точки (кривая 1) и скорости (кривая 2) тележки; кривые 3 и 4 показывают для сравнения графики отклонения и скорости эталонной системы (целевая траектория). На рис. 4 показана зависимость от времени третьей

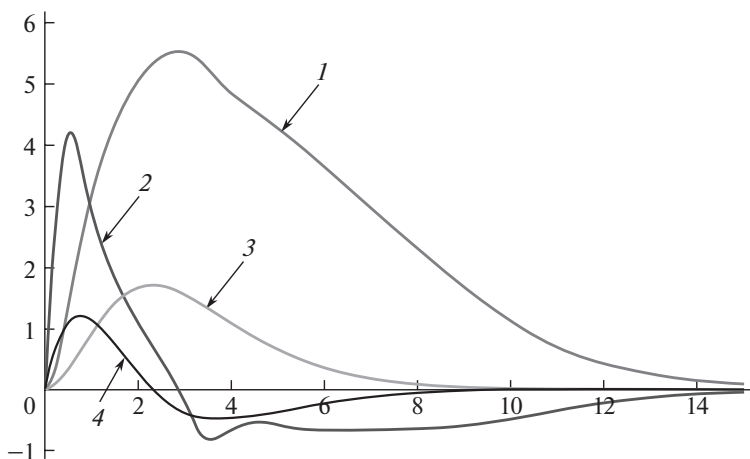


Рис. 6. Стабилизация системы с начальным состоянием $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\phi(0) = 1,0$, $\dot{\phi}(0) = 0$ при $\xi = 3,5$. Зависимость от времени расстояния до целевой точки (кривые 1 и 3) и скорости тележки (кривые 2 и 4) для тележки с маятником и возмущенной эталонной системы соответственно.

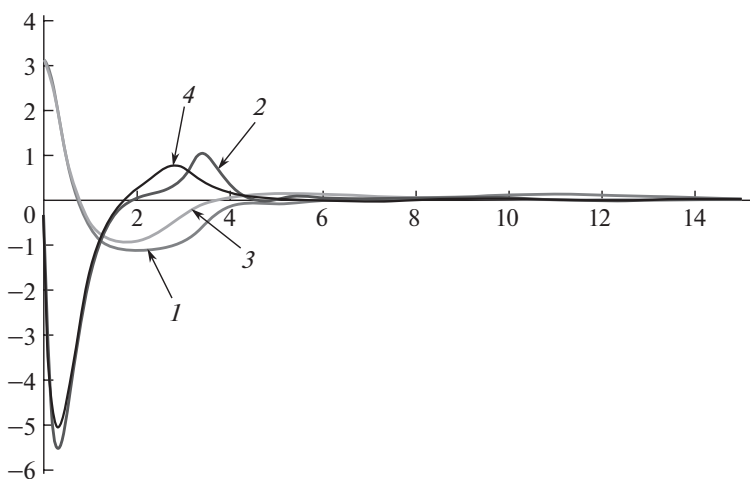


Рис. 7. Стабилизация системы с начальным состоянием $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\phi(0) = 1,0$, $\dot{\phi}(0) = 0$ при $\xi = 3,5$. Зависимость от времени переменных x_3 (кривая 1), x_4 (кривая 2) (тележка с маятником) и w_3 (кривая 3), w_4 (кривая 4) (возмущенная эталонная система).

(кривая 1) и четвертой (кривая 2) переменных, x_3 и $x_4 = \dot{x}_3$; графики соответствующих переменных w_3 и w_4 эталонной системы показаны кривыми 3 и 4 соответственно. На рис. 5 показано, как меняются во времени управления U (кривая 1) в исходной системе и U_1 (кривая 2) в эталонной системе при следовании по целевой траектории.

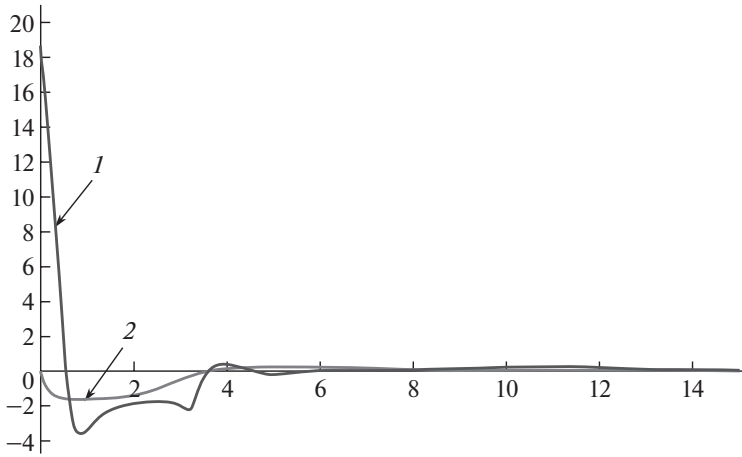


Рис. 8. Стабилизация системы с начальным состоянием $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $\phi(0) = 1,0$, $\dot{\phi}(0) = 0$ при $\xi = 3,5$. Зависимость от времени управления U (кривая 1) тележкой с маятником и управления U_1 (кривая 2) возмущенной эталонной системой.

Во втором примере тележка изначально находилась в целевой точке с нулевой скоростью ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$) и отклоненным на большой угол маятником ($\phi(0) = 1 \text{ rad}$, $\dot{\phi}(0) = 0$), $\xi = 3,5$. На рис. 6–8 показаны те же характеристики, что и в первом примере. Для компенсации большого начального отклонения маятника в начальный момент времени потребовалась большая управляющая сила (кривая 1 на рис. 8, которая привела к значительному отклонению тележки от целевой точки (кривая 1 на рис. 6).

7. Заключение

Рассмотрена задача стабилизации движущейся вдоль прямой тележки с установленным на ней обратным маятником. Предложен новый закон управления, основанный на введении эталонной системы второго порядка, траектория движения которой принимается в качестве целевой для тележки с маятником. Проведен исчерпывающий анализ линеаризованной замкнутой системы, определена область значений параметров закона управления, гарантирующих локальную стабилизируемость системы, и предложен конструктивный метод их выбора.

Численные эксперименты показали, что для заданной системы и заданной скорости убывания отклонения λ (т.е. при фиксированном параметре s) область притяжения мала для больших значений параметра ξ (вблизи верхней границы) и увеличивается с его уменьшением. Вблизи верхней границы допустимых значений параметра ξ при достаточно небольших отклонениях от положения равновесия в системе возникают незатухающие колебания. Вблизи нижней границы $\xi = 3$ область притяжения настолько велика (возможно расширяется до всего пространства R^4), что при любых тестируемых начальных значениях замкнутая система была устойчива.

Область притяжения нелинейной системы с устойчивой матрицей линеаризованной системы может быть оценена с помощью квадратичной функции Ляпунова линеаризованной системы, матрица которой находится решением известного линейного матричного неравенства. Результаты численных экспериментов, однако, показывают, что область притяжения исследуемой системы устроена довольно сложно, поэтому любая ее аппроксимация с помощью эллипсоида в 4-мерном пространстве, на взгляд авторов, будет крайне консервативной. Менее консервативные оценки можно надеяться получить только с помощью неэллипсоидальных областей. Получение такого рода оценок является достаточно сложной задачей, над решением которой авторы в настоящее время работают. Предполагается, в частности, попробовать применить для этой цели некоторые из известных из литературы численных методов (см., например, [13–15]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Для нахождения области устойчивости характеристического полинома (22) можно воспользоваться критериями Рауса–Гурвица или Лъенара–Шипара [16]. Согласно второму критерию, для того чтобы полином был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все коэффициенты полинома и нечетные главные миноры матрицы Гурвица. Найдем область в пространстве параметров ξ и s , в которой эти условия выполнены.

Коэффициент при старшем члене ν^4 всегда положителен: $a_4 = 1$. Остальные коэффициенты с учетом (21) имеют вид

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda^4(\xi - 3)(\xi - 1), & a_1 &= 2\lambda^4(\xi - 2)(\xi - 1), \\ a_2 &= \lambda^4[\xi^2 - (\xi - 3)(\xi - 1)s], & a_3 &= 2\lambda^4[\xi - (\xi - 2)(\xi - 1)s]. \end{aligned}$$

Свободный член a_0 и коэффициент a_1 оба положительны, когда $0 < \xi < 1$ или $\xi > 3$. Коэффициенты a_2 и a_3 положительны в этих интервалах при условии

$$(II.1) \quad s < s_3(\xi) = \frac{\xi}{(\xi - 2)(\xi - 1)}.$$

Минор первого порядка $\Delta_1 = a_1 > 0$. Подставляя коэффициенты характеристического полинома в формулу для $\Delta_3 = a_1(a_2a_3 - a_1) - a_0a_3^2$, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 4\lambda^6(\xi - 1) [(\xi^4 - 4\xi^3 + 8\xi^2 - 8\xi + 4) - \xi(\xi^4 - 6\xi^3 + 14\xi^2 - 15\xi + 6)s] = \\ &= 4\lambda^6(\xi - 1) \{ [\xi^2(\xi - 2)^2 + 4(\xi - 1)^2] - \xi(\xi - 1)(\xi - 2)(\xi^2 - 3\xi + 3)s \}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$(II.2) \quad s_{\max}(\xi) = \frac{\xi^2(\xi - 2)^2 + 4(\xi - 1)^2}{\xi(\xi - 1)(\xi - 2)(\xi^2 - 3\xi + 3)}$$

и найдем разность правых частей (П.2) и (П.1):

$$\begin{aligned}\Delta_s &= s_{\max}(\xi) - s_3(\xi) = \\ &= \frac{\xi^2(\xi - 2)^2 + 4(\xi - 1)^2 - \xi^2(\xi^2 - 3\xi + 3)}{\xi(\xi - 1)(\xi - 2)(\xi^2 - 3\xi + 3)} = \\ &= \frac{2 - \xi}{\xi(\xi^2 - 3\xi + 3)}.\end{aligned}$$

В интервале $0 < \xi < 1$ имеем $\Delta_3 > 0$ только тогда, когда $s > s_{\max}$. Так как $s_{\max} > s_3$ в этом интервале, неравенства $s > s_{\max}$ и (П.1) несовместны. Таким образом, в интервале $0 < \xi < 1$ характеристический полином неустойчив.

В интервале $\xi > 3$ при $s < s_{\max}$ имеем $\Delta_3 > 0$. Так как в этом интервале $s_{\max} < s_3$, справедливо неравенство (П.1). Таким образом, все условия критерия Ляпуна–Шипара выполнены. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2010.
2. *Martynenko Y.G., Formal'skii A.M.* Controlled pendulum on a movable base // *Mechanics of Solids*. 2013. Т. 48. № 1. С. 6–18.
3. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2014.
4. *Getz N.H., Hedrick J.K.* An Internal Equilibrium Manifold Method of Tracking for Nonlinear Nonminimum Phase Systems // *ACC Proc.* 1995. P. 1–5.
5. *Srinivasan B., Huguenin P., Bonvin D.* Global stabilization of an inverted pendulum – Control strategy and experimental verification // *Automatica*. 2009. V. 45. P. 265–269.
6. *Lee J., Mukherjee R., Khalil H.K.* Output feedback stabilization of inverted pendulum on a cart in the presence of uncertainties // *Automatica*. 2015. V. 54. No. 4. P. 146–157.
7. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // *Trans. Autom. Contr. IEEE*, 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
8. *Gordillo F., Aracil J.* A new controller for the inverted pendulum on a cart // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2008. No. 18. P. 1607–1621.
9. *Magni L., Scattolini R., Aström K.J.* Global stabilization of the inverted pendulum using model predictive control // *IFAC Proc.* V. 35. Iss. 1. 2002. P. 141–146.
10. *Utkin V., Guldner J., Shi J.* Sliding mode control in electromechanical systems. 2nd ed. CRC Press, 2009.
11. *Matrosov I.V., Morozov Yu.V., Pesterev A.V.* Control of the robot-wheel with a pendulum // *Proc. of the 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB)*, IEEE. 2020. P. 1–4.
12. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel// *Commun. Comput. Inform. Sci. (CCIS)*. 2020. V. 1340. P. 236–249.

13. *Сергеев В.С.* Об одном способе получения оценок областей притяжения с помощью функций Ляпунова, построенных численным методом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1978. Т. 18. № 5. С. 1154–1161.
14. *Каменецкий В.А.*, Построение областей притяжения методом функций Ляпунова // АиТ. 1994. № 6. С. 10–26.
15. *Chiang H.D., Thorp J.S.* Stability regions of nonlinear dynamical systems: a constructive methodology // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 30. No. 12. P. 1229–1241.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит, 2010.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 31.05.2021

После доработки 05.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021