

Стохастические системы

© 2022 г. Б.Я. ЛИХТЦИНДЕР, д-р техн. наук (lixt@psuti.ru),
И.А. БЛАТОВ, д-р физ.-мат. наук (blatow@mail.ru)
(Поволжский государственный университет телекоммуникаций
и информатики, Самара),
Е.В. КИТАЕВА, канд. физ.-мат. наук (el_kitaeva@mail.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет
им. акад. С.П. Королева)

ОБ ОЦЕНКАХ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ЧЕРЕЗ СТАТИСТИЧЕСКИЕ БЕЗУСЛОВНЫЕ МОМЕНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА МОДИФИЦИРОВАННОГО ВХОДНОГО ПОТОКА

Рассматривается математическая модель простейшей одноканальной системы массового обслуживания (СМО) с детерминированным временем обслуживания в случае входящего потока с произвольной корреляцией. Для данной СМО получены различные обобщения формулы Хинчина–Полячека средней длины очереди. Предложена интервальная модель входящего потока, в рамках которой получено выражение средней длины очереди через статистические безусловные моменты второго порядка. Все результаты были получены при весьма общих предположениях эргодичности и стационарности. Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, коррелированный входной поток, средняя длина очереди, формула Хинчина–Полячека.

DOI: 10.31857/S000523102201007X

1. Введение

В мультисервисных сетях с пакетной коммутацией поток пакетов существенно отличается от пуассоновского, поскольку такие потоки формируются множеством источников запросов на предоставление услуг, существенно отличающихся между собой. Это приводит к тому, что для потоков в мультисервисных сетях характерна неравномерность поступления заявок и пакетов. Пакеты группируются в “пачки” в одних промежутках времени и практически отсутствуют в других промежутках. Случайный процесс поступления заявок (пакетов) в систему характеризуется законом распределения, устанавливающим связь между значениями случайной величины и вероятностями появления указанных значений. В большинстве случаев такой поток характеризуется функцией распределения временных интервалов между соседними заявками, а процесс их обработки характеризуется функцией распределения

вероятностей интервалов времени обслуживания. В подавляющем числе публикаций по теории массового обслуживания указанные случайные величины считаются некоррелированными и взаимно независимыми. Однако указанные допущения для анализа пакетного трафика мультисервисных сетей совершенно недопустимы. В ряде публикаций [1–9], а также в публикациях авторов этой статьи [10–13] предпринимались попытки учета корреляционных свойств потоков, образующих очереди. Имеется много публикаций, посвященных различным частным случаям СМО при наличии корреляции входных данных (см. обзор [14]).

В задачах управления СМО важной характеристикой является средняя длина очереди. Обобщения формулы Хинчина–Полячека средней длины очереди для некоторых конкретных СМО рассматривались в [15, 16]. Однако авторам неизвестны работы, в которых разрабатываются общие подходы анализа СМО при наличии произвольных коррелированных входных потоков.

Одним из перспективных, на взгляд авторов, направлений изучения пакетного трафика является разрабатываемый нами Интервальный метод [17, 18], позволяющий заменить анализ интервалов времени между соседними заявками и интервалов времени обработки заявок, анализом одной случайной величины — числом заявок, поступающих в течение последовательных интервалов времени обработки каждой из заявок. Авторами показано, что дисперсия и корреляционные свойства указанной случайной величины, при заданной загрузке, полностью характеризуют размер очереди в системах массового обслуживания [18].

В настоящей статье для одноканальной системы с коррелированным входящим потоком и постоянным временем обработки заявок при весьма общих предположениях стационарности и эргодичности получены формулы средней длины очереди, обобщающие формулу Хинчина–Полячека. При этом применение модели, основанной на интервальном методе, позволило получить формулу, выражающую оценку средней длины очереди через безусловные выборочные ковариации входящего потока. Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические выводы.

2. Постановка задачи

Введем терминологию и обозначения. Анализируются стационарные потоки заявок (пакетов). Весь промежуток времени анализа разбивается на равные интервалы τ_i одинаковой длины τ . Считается, что интервал времени обработки каждой из заявок — постоянный и равен τ . Число заявок на i -м интервале обозначаем через $m_i(\tau)$. Пусть $\rho = \lambda\tau$ — коэффициент загрузки, где λ — средняя интенсивность заявок. Предполагается, что $\rho \in (0, 1)$. Величины $\overline{m(\tau)} = \lambda\tau = \rho$ и $D_m(\tau) = \overline{[m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}]^2}$ — математическое ожидание и дисперсия чисел заявок, поступающих в течение интервала времени τ соответственно. Через $q_i(\tau)$ обозначим количество заявок, стоящих в очереди в конце i -го интервала обработки (длину очереди). Через $\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = K[q_{i-1}(\tau), m_i(\tau)]$ обозначим ковариацию случайных величин

$q_{i-1}(\tau)$ и $m_i(\tau)$. Для предположений, которые будем делать по ходу статьи, будем использовать обозначения **A1**, **A2**, ...

Для любой одноприборной СМО справедливо рекуррентное соотношение, устанавливающее связь между поступающими и обработанными заявками [19],

$$(1) \quad q_i(\tau) = q_{i-1}(\tau) + m_i(\tau) - \delta_i(\tau),$$

где

$$\delta_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{i-1}(\tau) = m_i(\tau) = 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае пуассоновского потока заявок с постоянным временем обслуживания для средней длины очереди (математического ожидания) известна формула Хинчина–Полячека [19], которая имеет вид

$$(2) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$$

В [20] получено обобщение формулы (2) на случай произвольных коррелированных потоков:

$$(3) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{D_m(\tau) + 2\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}.$$

В частном случае пуассоновского потока $\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = 0$, $D_m(\tau) = \rho$ и формула (3) принимает вид (2). Доказательство формулы (3) приводится в разделе 4. Из доказательства следует, что формула (3) справедлива для любых стационарных в широком смысле потоков с конечным математическим ожиданием и дисперсией, для которых процесс $q_i(\tau)$ обладает такими же свойствами, т.е. и для МАР-потока, управляемого эргодической марковской цепью.

Задача настоящей статьи — получение формул, в которых средняя длина очереди выражается через корреляционные свойства входящего потока $m_i(\tau)$ при весьма общих предположениях.

3. Предположения и определения

В [12] формула (3) была преобразована к более удобному для применения виду. Приведем некоторые понятия из [12], поскольку они необходимы для решения задач данной статьи.

Введем понятие цикла обслуживания. Циклом обслуживания $Z_k = \bigcup_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} I_j$ будем называть совокупность смежных интервалов обработки I_j , на которых $q_j > 0$ везде, кроме последнего интервала, на котором очередь обнуляется после обработки последней заявки, а слева от данного цикла

тоже находится хотя бы один такой интервал. Здесь N_k обозначает количество смежных интервалов — длину k -го цикла.

Замечание 1. Понятие цикла обслуживания отличается от введенного Л. Клейнроком [21] понятия периода занятости, поскольку период занятости предполагает наличие слева и справа как минимум одного интервала, на котором $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$. Поэтому период занятости Клейнрока может содержать несколько циклов Z_k . Целесообразность введения данного понятия обоснована в [12].

Сделаем следующее *предположение*.

A1. Гипотеза эргодичности и взаимной стационарности. *Предположим, что все рассматриваемые процессы обладают свойствами эргодичности, стационарности и взаимной стационарности в широком смысле. В частности, для любой реализации случайного процесса $m_i(\tau)$ существуют соответствующие пределы и*

$$\overline{m(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau), \quad D_m(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(m_i(\tau) - \overline{m(\tau)} \right)^2,$$

$$(4) \quad \mu_{m_{i-j} m_i}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N \left(m_{k-j}(\tau) - \overline{m(\tau)} \right) \left(m_k(\tau) - \overline{m(\tau)} \right),$$

$$\overline{q(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i(\tau),$$

$$(5) \quad \mu_{q_{i-1} m_i}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N q_{i-k-1}(\tau) \left[m_{i-k}(\tau) - \overline{m(\tau)} \right].$$

4. Основные результаты

Формулы для средней длины очереди, полученные в [12], были записаны для конкретной фиксированной реализации случайного процесса $m_i(\tau)$. Однако представляет интерес преобразование формулы (3) к выражению, зависящему от корреляционных свойств входящего потока m_i . Получим соответствующие результаты. Пусть $m_i(\tau)$ — произвольная реализация случайного процесса $\{m_i\}$.

Теорема 1. Справедлива формула

$$(6) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1).$$

Эта и последующие теоремы будут доказаны в разделе 5.

Второе слагаемое в (6) при естественных дополнительных предположениях есть весовая сумма условных выборочных ковариаций (см. далее) элементов входящего потока. Покажем это.

Пусть $A_k(\tau) = \{\delta_s = 1, s = i - k, i - k + 1, \dots, i\}$ – случайное событие, состоящее в том, что случайно выбранная пара $(m_{i-k}(\tau), m_i(\tau))$, $k + 1 \leq i \leq N$, принадлежит одному циклу обработки $Z_s \subset [1, N]$. Пусть $N_k(N)$ – число таких пар. Обозначим через

$$(7) \quad \begin{aligned} \mu(k, N) &= \frac{1}{N_k(N)} \sum_{i \in Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{k: i-k \in Z_s} (m_{i-k}(\tau) - 1), \\ P(A_k(\tau)) &= \frac{N_k(N)}{N - k} \end{aligned}$$

условную выборочную ковариацию случайных величин $(m_{i-k}(\tau), m_i(\tau))$ при условии $A_k(\tau)$ и выборочную вероятность события $A_k(\tau)$ соответственно.

Теорема 2. Справедлива формула

$$(8) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N - k}{N} \mu(k, N) P(A_k(\tau)).$$

Теорема 2 непосредственно вытекает из (6), (7). Теорема 2 доказана.

Формулы (8) содержат условные корреляции и вероятности $P(A_k(\tau))$, вычисление которых затруднительно. Получим формулу, содержащую только безусловные моменты второго порядка нового случайного процесса, тесно связанного с исходным.

Произведем замену переменной интервалов τ_i , на которых рассматривается поступление заявок, на другую переменную — θ_i , которая представляет собой интервал между двумя соседними заявками, покидающими очередь. Число заявок, поступивших на указанных интервалах, обозначим через $m_i(\theta)$. Это и есть новый случайный процесс, который рассмотрим.

Замечание 2. Каждая реализация случайного процесса $m_i(\theta)$ совпадает с соответствующей реализацией исходного случайного процесса $m_i(\tau)$, из которой удалены все участки покоя, на которых $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$, т.е. остаются только примыкающие друг к другу циклы обслуживания. Таким образом, между реализациями потоков $m_i(\theta)$ и $m_i(\tau)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Определение 1. Процесс $m_i(\theta)$ будем называть интервальным представлением процесса $m_i(\tau)$.

A2. Гипотеза **A1** для процесса $m_i(\theta)$. Предположим, что для нового случайного процесса также справедлива гипотеза **A1**.

Пусть N — рассматриваемое число членов $m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)$ реализации процесса $m_i(\tau)$, а $M = M(N)$ — число членов соответствующей реализации процесса $m_i(\theta)$, полученных из $m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)$ удалением нулевых членов, принадлежащих участкам покоя.

Пусть

$$(9) \quad \nu_m(k, \theta, M) = \frac{1}{M - k} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta) - 1)$$

— безусловная выборочная ковариация числа заявок нового случайного процесса.

Теорема 3. Пусть справедливы предположения **A1–A2**. Тогда имеет место формула

$$(10) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \rho \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} \nu_m(k, \theta, M).$$

В формуле (10) присутствует дисперсия исходного случайного процесса $m_i(\tau)$. Обозначим через $D_m(\theta)$ дисперсию процесса $m_i(\theta)$.

Теорема 4. Пусть справедливы предположения **A1–A2**. Тогда имеет место формула

$$(11) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{\rho}{2} \left(D_m(\theta) + 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} \nu_m(k, \theta, M) \right).$$

Формула (11) выражает среднюю длину очереди через безусловные моменты второго порядка случайного процесса $m_i(\theta)$.

Замечание 3. Если предположить, что теоретические ковариации

$$(12) \quad \nu_m(k, \theta) = \lim_{M \rightarrow \infty} \nu_m(k, \theta, M)$$

достаточно быстро убывают так, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \nu_m(k, \theta)$ сходится, а сходимость в (12) достаточно быстрая, т.е. выполнены условия перестановки предельных переходов в (11), то формула (11) принимает вид

$$(13) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{\rho}{2} \left(D_m(\theta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \nu_m(k, \theta) \right).$$

Однако формула (13) для рассматриваемых нами потоков оказывается непригодной, в отличие от формулы (11), которая всегда верна при выполнении условий стационарности и эргодичности. Это связано с медленным убыванием выборочных ковариаций в (11) и медленной сходимостью в (12).

5. Доказательства теорем

Доказательство формулы (3). Возведем в квадрат уравнение баланса (1). Учитывая, что $\delta_i^2(\tau) = \delta_i(\tau)$, $q_{i-1}(\tau)\delta_i(\tau) = q_{i-1}(\tau)$, $(\tau)m_i(\tau)\delta_i(\tau) = m_i$, получим

$$\begin{aligned} (q_i(\tau))^2 &= (q_{i-1}(\tau))^2 + (m_i(\tau))^2 + \delta_i(\tau) + \\ &+ 2q_{i-1}(\tau)m_i(\tau) - 2q_{i-1}(\tau) - 2m_i(\tau). \end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание от обеих частей последнего равенства. Учитывая, что $\overline{m_i(\tau)} = \overline{\delta_i(\tau)} = \rho$, а в силу стационарности $\overline{(q_i(\tau))^2} = \overline{(q_{i-1}(\tau))^2}$, получим

$$0 = \overline{(m_i(\tau))^2} + \rho + \overline{2q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} - 2\overline{q_{i-1}(\tau)} - 2\rho,$$

или же

$$\overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(\overline{(m_i(\tau))^2} - \rho) + \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)},$$

или же

$$(14) \quad \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)}.$$

Подставляя в (14) $\overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) + \overline{m(\tau)} \cdot \overline{q(\tau)} = \mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) + \rho\overline{q(\tau)}$ и выражая $\overline{q(\tau)}$, получаем (3).

Доказательство теоремы 1. Из (14) следует, что для доказательства (6) достаточно установить равенство

$$(15) \quad \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1).$$

Докажем (15). Отметим важное свойство цикла обслуживания.

Лемма 1. Для любого цикла обслуживания

$$\sum_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} (m_j(\tau) - \delta_j) = \sum_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} (m_j(\tau) - 1) = 0.$$

Доказательство леммы 1 вытекает из того, что окончание цикла обслуживания означает обработку всех заявок, которые поступили на всех интервалах, входящих в данный цикл обслуживания.

Последовательно применяя равенство (1) к значениям очереди в правой части (1), находим, что

$$q_{i-1}(\tau) = q_{i-(N+1)}(\tau) + \sum_{j=1}^N (m_{i-j}(\tau) - \delta_{i-j}(\tau)).$$

Отсюда имеем (здесь и далее с точностью до бесконечно малой при $N \rightarrow \infty$)

$$(16) \quad \begin{aligned} \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_{i-1}(\tau)m_i(\tau) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left(\sum_{j=1}^N (m_{i-j}(\tau) - \delta_{i-j}(\tau)) + q_{i-(N+1)}(\tau) \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 1 отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left(\sum_{j \in Z_I \cap [i-N, i-1]: Z_I \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) + q_{i-(N+1)}(\tau) \right) + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left(\sum_{j \in Z_I \cap [i-N, i-1]: Z_I \cap \{i-1\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) \right). \end{aligned}$$

Но в силу леммы 1 первая сумма в последнем равенстве равна нулю, так как

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in Z_I \cap [i-N, i-1]: Z_I \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) = \\ & = - \sum_{j \in Z_I \setminus [i-N, i-1]: Z_I \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) = -q_{i-(N+1)}(\tau). \end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left(\sum_{j \in Z_I \cap [i-N, i-1]: Z_I \cap \{i-1\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) \right) = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1). \end{aligned}$$

Тем самым формула (15), а значит, и формула (6) доказаны. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Сначала установим вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Для процесса $m_i(\theta)$ справедлива формула

$$(17) \quad \overline{m_i(\theta)} = 1,$$

$$(18) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \rho.$$

Доказательство леммы 2. Вычисляя математическое ожидание от обеих частей формулы (1), в силу стационарности находим, что

$$(19) \quad \overline{\delta(\tau)} = \overline{m(\tau)} = \rho.$$

Поскольку $m_i(\theta)$ получается из $m_i(\tau)$ удалением участков покоя, на которых $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$, то для соответствующего процесса $\delta_i(\theta)$ будем иметь

$$(20) \quad \overline{\delta(\theta)} = \overline{m(\theta)}.$$

Но на участках обработки $\delta_i(\theta) = 1$, откуда

$$(21) \quad \overline{\delta(\theta)} = 1.$$

Из (20), (21) следует (17). Формула (18) следует из (19), (21) и того, что $\sum_{i=1}^N \delta_i(\tau) = \sum_{i=1}^M \delta_i(\theta)$.

Лемма 2 доказана.

Преобразуем сумму безусловных ковариаций (9) из (10).

Имеем

$$(22) \quad \begin{aligned} \nu_m(k, \theta, M) &= \frac{1}{M-k} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta) - 1), \\ \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} \nu_m(k, \theta, M) &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta) - 1) = \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1). \end{aligned}$$

Из (22), определения процесса $m_i(\theta)$, циклов обработки и замечания 2 следует, что

$$(23) \quad \sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1) = \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1),$$

поскольку эти суммы состоят из одних и тех же слагаемых.

Далее заметим, что в силу леммы 2 и (23)

$$(24) \quad \begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1) &= \\ = \frac{1}{\rho} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1). \end{aligned}$$

Из (6), (22) и (24) получаем (10). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Очевидно, что $D_m(\theta) = D_{\delta=1}(\tau)$. Поэтому в силу (10), (11) достаточно доказать формулу

$$(25) \quad D_m(\tau) = D_{\delta=1}(\tau)\rho + \rho(1 - \rho).$$

Для краткости будем опускать аргумент τ . Имеем в силу леммы 2

$$\begin{aligned} M(D_\delta(m)) &= D_{\delta=0}(m)P(\delta = 0) + D_{\delta=1}(m)P(\delta = 1) = \\ &= D_{\delta=1}(m)P(\delta = 1) = D_{\delta=1}(m)\rho, D(M_\delta(m)) = (M_{\delta=0}(m) - \rho)^2 P(\delta = 0) + \\ &+ (M_{\delta=1}(m) - \rho)^2 P(\delta = 1) = (0 - \rho)^2(1 - \rho) + (1 - \rho)^2 \rho = \rho(1 - \rho). \end{aligned}$$

Отсюда, используя известную формулу $D_m = D(m) = M(D_\delta(m)) + D(M_\delta(m))$, получаем (25). Теорема 4 доказана.

6. Результаты численных экспериментов

6.1. Анализируемые потоки

Справедливость полученных результатов иллюстрируется результатами численных экспериментов на основе формулы (11) для реализации видеотрафика на фоне пуассоновского потока [19] той же интенсивности. Кроме того, приводим результаты аналогичных расчетов для одной из моделей заявок, управляемых цепью Маркова (МАР-поток). МАР-поток образовывался последовательным во времени переключением двух пуассоновских потоков заявок с параметрами интенсивности $\lambda_1 = 1000$ и $\lambda_2 = 10$. При этом в соответствии с определением МАР-потока в обозначениях [22] переходные вероятности, определяющие МАР-поток, задавались следующим образом: $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_i, 1) = 0,9$ при $i = 1, 2$; $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 1) = 0,1$; $P(\lambda_i \rightarrow \lambda_j, 0) = 0$ при $i \neq j$. Всего для МАР-потока и пуассоновского потока было сгенерировано по 100 тысяч временных отсчетов, а поток телетрафика содержал 16 910 отсчетов. Отсчетом называем момент времени, в который в систему поступает заявка.

Все результаты были также проверены и подтверждены с помощью формулы (3) на основе оценок входящего в нее корреляционного члена согласно гипотезе А1, а также с помощью сравнения с оценками среднего значения очереди, вычисленных их непосредственным усреднением (см. подраздел 6.2).

Результаты приведены в табличной и графической формах. Приведем графические иллюстрации. Численные результаты в виде таблиц приводятся в подразделе 6.2. В табл. 1, 3, 4 приведены данные для потоков, полученных имитационным моделированием, а в табл. 2 – результаты реального видеотрафика. Файл моментов прихода пакетов видеотрафика, анализируемого на рисунках и в табл. 2, получен экспериментально с помощью открытой программной системы WireSark на реальной сети. Все результаты анализа, приведенные на рисунках, получены с экранов разработанной авторами программной системы АМС, подробное описание которой дано в [18]. Файл моментов прихода пакетов МАР-потока заявок, показанный на рис. 5, был сгенерирован специально разработанной программой, а затем проанализирован с помощью системы АМС и с помощью отдельной программы имитационного моделирования. Результаты моделирования представлены в табл. 2.

Поскольку численные результаты получены для конечных значений N , то в данном подразделе речь идет об оценках соответствующих характеристик. Сохраним за ними прежние обозначения предельных значений, обозначая через $D_m(\rho)$, $q(\rho)$ оценки дисперсии и средней длины очереди соответственно.

В мультисервисных сетях связи (МСС) с пакетной коммутацией поток пакетов существенно отличается от пуассоновского и носит явно выраженный пачечный характер.

На рис. 1 представлена реализация видеотрафика (узкие пачки) на фоне пуассоновского потока одинаковой интенсивности (серый фон). На рис. 2 показан фрагмент указанной реализации в увеличенном масштабе времени. Каждая тонкая вертикальная полоска соответствует числу пакетов, посту-

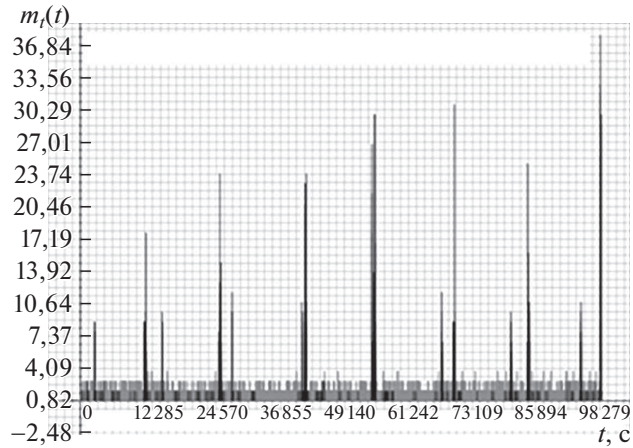


Рис. 1. Поток видеотрафика и пуассоновский поток.

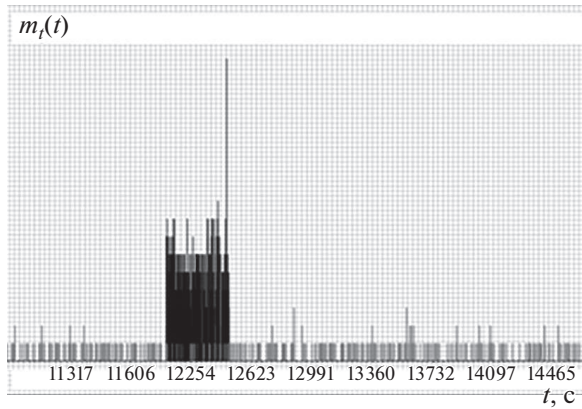


Рис. 2. Поток видеотрафика и пуассоновский поток в увеличенном масштабе времени.

пающих в течение интервала времени обработки одного пакета. Из графиков следует, что для видеопотока имеются интервалы, в течение которых поступают десятки пакетов, в то время как пуассоновский поток содержит на указанных интервалах один или два пакета. Это и объясняет наличие больших очередей при передаче потоков видеотрафика.

На рис. 3 представлены зависимости оценок среднего размера очереди при различных значениях коэффициента загрузки ρ (верхний график — видеотрафик, нижний график — пуассоновский поток). Из рис. 3 видно, что при одинаковых значениях коэффициента загрузки ρ оценка среднего размера очереди у пуассоновского потока во много раз меньше, чем у потока видеотрафика.

На рис. 4 для рассматриваемого видеотрафика показаны зависимости оценок дисперсии (нижняя кривая) и оценок среднего размера очереди (верх-

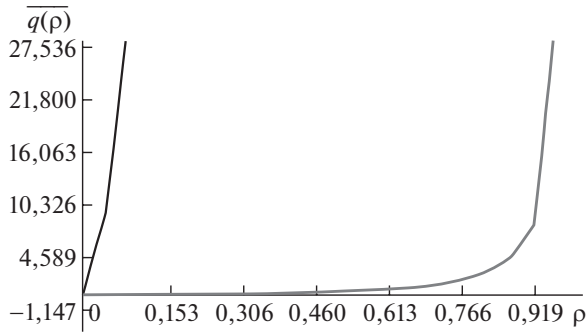


Рис. 3. Зависимости оценок среднего размера очереди при различных значениях коэффициента загрузки ρ .

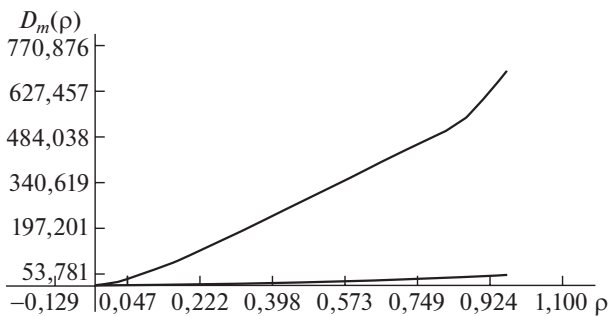


Рис. 4. Зависимости оценок дисперсии и среднего размера очереди видеотрафика, при различных значениях коэффициента загрузки ρ .

няя кривая), при различных значениях коэффициента загрузки (ρ), полученные в результате имитационного моделирования. Значение оценки дисперсии $D_{m(\tau)}(0,5) = 10,6$ в то время, когда оценка размера очереди превышает 250 пакетов. Корреляционная составляющая в десятки раз превышает значение дисперсии, и не учитывать ее нельзя.

Разница впечатляет, поскольку при постоянном времени обработки и коэффициенте загрузки, равном 0,5, оценка среднего значения очереди для пуассоновского потока составляет лишь 0,25 пакета. Для пачечного потока видеотрафика составляющая, обусловленная оценкой дисперсии $D_{m(\tau)}(\rho)$, оказывается существенно меньше, чем составляющая, обусловленная наличием корреляционных связей.

Наконец, приведем результаты расчетов для МАР-потока.

На рис. 5 показан поток, представляющий число заявок, поступающих в течение каждого из интервалов времени $\tau = 2,72 \cdot 10^{-2}$, которые соответствуют коэффициенту загрузки $\rho = \lambda\tau = 0,5$.

Поток носит пачечный характер, и интервалы, в течение которых поступает более 20 заявок, чередуются с интервалами, содержащими не более двух заявок.

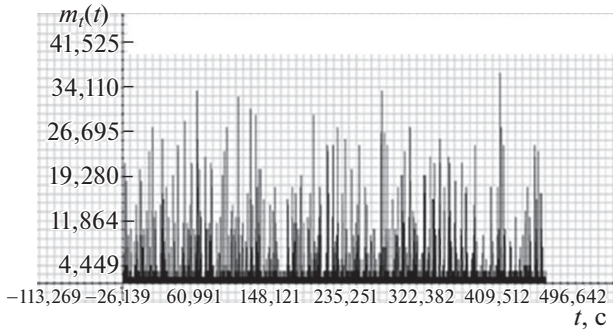


Рис. 5. Поток заявок, поступающих в течение интервалов времени, соответствующих коэффициенту загрузки $\rho = 0,5$.

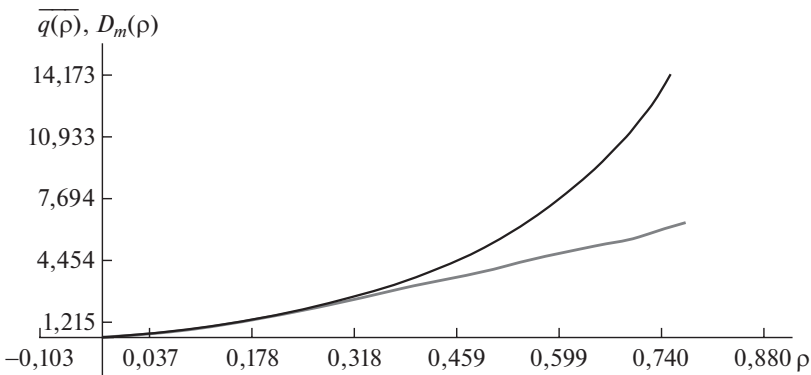


Рис. 6. Зависимости оценок дисперсии и среднего размера очереди для рассматриваемого потока при различных значениях коэффициента загрузки ρ .

Несмотря на высокую пачечность, в отличие от видеотрафика, представленного на рис. 3, здесь оценки среднего значения длины очереди имеют небольшие размеры $\overline{q(0,5)} = 5,21$ заявок при коэффициенте загрузки (ρ), равном 0,5. На рис. 6 для рассматриваемого потока показаны зависимости оценок среднего размера очереди (верхний график) и дисперсии (нижний график), при различных значениях коэффициента загрузки (ρ). Из рис. 6 видно, что в отличие от видеотрафика (рис. 4), при малых загрузках оценка размера очереди близка к значению оценок дисперсии, а влияние корреляционной составляющей соизмеримо с влиянием дисперсии.

6.2. Численные результаты

В разделах статьи 1–5 ρ предполагалось фиксированным. Здесь исследуется зависимость величин от ρ . Поэтому далее используем обозначения, которые связаны с предыдущими следующим образом: $D_m(\tau) = D_{m(\tau)}(\rho)$, $D_m(\theta) = D_{m(\theta)}(\rho)$, $\overline{q(\tau)} = \overline{q}_{cov}(\rho)$ – значение средней длины очереди, вычисляемое по формуле (11). Через $cov_{m(\theta)}(\rho) = 2 \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} \nu_m(k, \theta, M)$ обозначим

Таблица 1. Пуассоновский поток

ρ	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9
$D_{m(\theta)}(\rho)$	$9,71 \cdot 10^{-2}$	$1,98 \cdot 10^{-1}$	$2,98 \cdot 10^{-1}$	$4,96 \cdot 10^{-1}$	$7,00 \cdot 10^{-1}$	$9,00 \cdot 10^{-1}$
$cov_{m(\theta)}(\rho)$	$5,42 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-2}$	$6,27 \cdot 10^{-2}$	$2,47 \cdot 10^{-1}$	$8,28 \cdot 10^{-1}$	3,94
$\bar{q}_{cov}(\rho)$	$5,40 \cdot 10^{-3}$	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$6,37 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$8,25 \cdot 10^{-1}$	3,96
$\bar{q}_{exact}(\rho)$	$5,40 \cdot 10^{-3}$	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$6,37 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$8,25 \cdot 10^{-1}$	3,96
$D_{m(\tau)}(\rho)$	$9,97 \cdot 10^{-2}$	$1,99 \cdot 10^{-1}$	$2,99 \cdot 10^{-1}$	$4,98 \cdot 10^{-1}$	$7,00 \cdot 10^{-1}$	$8,99 \cdot 10^{-1}$

Таблица 2. Поток видеотрафика

ρ	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9
$D_{m(\theta)}(\rho)$	6,57	$1,04 \cdot 10^1$	$1,40 \cdot 10^1$	$2,08 \cdot 10^1$	$2,76 \cdot 10^1$	$3,49 \cdot 10^1$
$cov_{m(\theta)}(\rho)$	$7,16 \cdot 10^2$	$8,72 \cdot 10^2$	$9,46 \cdot 10^2$	$1,01 \cdot 10^3$	$1,06 \cdot 10^3$	$3,04 \cdot 10^3$
$\bar{q}_{cov}(\rho)$	$3,62 \cdot 10^1$	$8,81 \cdot 10^1$	$1,44 \cdot 10^2$	$2,58 \cdot 10^2$	$3,82 \cdot 10^2$	$1,38 \cdot 10^3$
$\bar{q}_{exact}(\rho)$	$3,62 \cdot 10^1$	$8,81 \cdot 10^1$	$1,44 \cdot 10^2$	$2,58 \cdot 10^2$	$3,82 \cdot 10^2$	$1,38 \cdot 10^3$
$D_{m(\tau)}(\rho)$	0,75	2,24	$4,42 \cdot 10^1$	$1,07 \cdot 10^1$	$1,95 \cdot 10^1$	$3,15 \cdot 10^1$

Таблица 3. MAP поток

ρ	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9
$D_{m(\theta)}(\rho)$	2,19	3,81	5,07	6,77	7,87	8,67
$cov_{m(\theta)}(\rho)$	3,1	3,98	4,61	7,03	$1,33 \cdot 10^1$	$4,99 \cdot 10^1$
$\bar{q}_{cov}(\rho)$	$4,68 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^{-1}$	2,17	5,30	$1,22 \cdot 10^1$	$4,84 \cdot 10^1$
$\bar{q}_{exact}(\rho)$	$4,68 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^{-1}$	2,17	5,30	$1,22 \cdot 10^1$	$4,84 \cdot 10^1$
$D_{m(\tau)}(\rho)$	$3,08 \cdot 10^{-1}$	$9,23 \cdot 10^{-1}$	1,73	3,53	5,71	7,88

Таблица 4. Зависимость оценки среднего значения очереди от размера выборки для MAP-потока

$N \setminus \rho$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
10 000	0,55	1,40	2,49	3,89	5,83	8,51	12,2	19,6	34,0
20 000	0,51	1,33	2,41	3,79	5,74	8,62	13,0	20,9	40,7
30 000	0,5	1,28	2,35	3,70	5,65	8,44	12,6	20,7	41,6
40 000	0,50	1,29	2,34	3,70	5,66	8,50	12,9	21,1	45,8
50 000	0,49	1,26	2,29	3,62	5,52	8,26	12,6	20,5	45,8
60 000	0,48	1,25	2,26	3,57	5,43	8,08	12,2	20,2	49,2
70 000	0,48	1,22	2,22	3,51	5,38	8,08	12,3	20,5	48,3
80 000	0,47	1,21	2,20	3,50	5,35	8,06	12,3	29,4	48,0
90 000	0,47	1,20	2,19	3,48	5,32	8,01	12,3	20,4	48,5
100 000	0,47	1,19	2,17	3,45	5,30	7,99	12,2	20,3	48,4

на оценка корреляционной составляющей длины очереди в (11). Кроме того, $\bar{q}_{exact}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i(\tau)$, где $q_i(\tau)$ последовательно вычисляются по формулам (1). Графические результаты полностью согласуются с численными и были получены на их основе.

Отметим, что в табл. 1 для интервального представления $m_i(\theta)$ пуассоновского потока $m_i(\tau)$ присутствует корреляционная составляющая, которая может быть не меньше дисперсионной. Это связано с тем, что пуассоновский поток при переходе от $m_i(\tau)$ к $m_i(\theta)$ подвергается изменениям (за счет удаления многих нулевых элементов) и, возможно, становится коррелированным, а также с тем, что выборочные ковариации медленно сходятся к теоретическим (см. замечание 3). Из табл. 2 видно, что корреляционная составляющая сильно преобладает над дисперсионной и определяет длину очереди. В случае МАР-потока (табл. 3) видно, что корреляционная составляющая преобладает, но не так сильно, как для потока видеотрафика.

Наконец, в табл. 4 представлена зависимость оценки среднего размера очереди МАР-потока от объема выборки. Видно, что при больших значениях N оценка среднего значения очереди стабилизируется с точностью до десятых и сотых, что согласуется с теоремами 1–4.

7. Заключение

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. В статье для однолинейной системы массового обслуживания с ожиданием, неограниченным бункером, детерминированным обслуживанием и коррелированным входящим потоком получена формула (11), выражающая среднюю длину очереди через безусловные статистические моменты первого и второго порядков потока, тесно связанного с исходным потоком.

2. Теоретическое значение формулы (11) состоит в том, что для одноканальных систем с детерминированным временем обслуживания впервые получена точная зависимость средней длины очереди от корреляционных свойств входящего потока в предположениях только стационарности в широком смысле и эргодичности этого потока.

3. Непосредственное практическое применение формулы (11) для вычисления средней длины очереди нецелесообразно, так как оно более затратно, чем непосредственное наблюдение очереди по выборке. Однако формулы (11) и (12) стимулируют изучение интервальных представлений $m_i(\theta)$ входящих потоков, их моделирование и аппроксимацию потоками, для которых автокорреляционная функция может быть точно или приближенно определена параметрами, задающими поток. Это, например, гауссовы потоки. Решение этих задач требует дополнительных исследований.

4. Результаты имитационного моделирования подтверждают справедливость полученного авторами обобщения (11) формулы Хинчина–Поллачека для СМО со стационарными коррелированными потоками.

5. Реальные потоки пакетов видеотрафика в телекоммуникационных сетях имеют высокую степень корреляции, которая и обуславливает наличие

большого размера очереди. Влияние корреляционной составляющей на размер очереди в десятки раз превосходит влияние дисперсии числа заявок на интервалах обслуживания. Анализ примера потока пакетов реального видеотрафика показал, что определяющее влияние на размер очереди в нем оказывает корреляционная составляющая потока.

6. Анализ примера одного из потоков, образуемых с помощью случайного независимого переключения двух пуассоновских потоков с различными параметрами интенсивности, показал, что, несмотря на высокую пачечность результирующего потока, его дисперсия и корреляционные свойства оказывают сопоставимое влияние на средний размер очереди. Следовательно, в первом случае причиной возникновения большой очереди является большая корреляционная составляющая, в то время как во втором случае причинами возникновения очереди являются дисперсия и корреляционная составляющая в сопоставимых пропорциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leland W.E., Taqqu Murad S., Willinger W., Wilson D.V.* On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic // J. IEEE/ACM Transact. Networking, 1994. V. 2. No. 1. P. 1–15.
2. *Neuts M.F.* Versatile Markovian Point Process // J. Appl. Probab., 1979. V. 16. No. 4. P. 764–779.
3. *Ramaswami V.* The N/G/1 Queue and Its Detailed Analysis // Advances Appl. Probab. 1980. V. 12. No. 1. P. 222–261.
4. *Jagerman D.L., Balcioglu B., Altioek T., Melamed B.* Mean Waiting Time Approximations in the G/G/1 Queue // Queueing Systems. 2004. V. 46. P. 481–506.
5. *Balcioglu B., Jagerman D.L., Altioek T.* Approximate Mean Waiting Time in a GI/D/1 Queue with Autocorrelated Time to Failures // IEEE Transactions. 2007. V. 39. No. 10. P. 985–996.
6. *Карташевский И.В., Сапрыкин А.В.* Обработка коррелированного трафика в узле сети типа G/G/1 // Радиотехника. 2017. № 10. С. 119–125.
7. *Карташевский И.В.* Модель трафика для программно-конфигурируемых сетей // Радиотехника. 2016. № 6. С. 124–129.
8. *Цыбаков Б.С.* Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса // Радиотехника. 1999. № 5. С. 24–31.
9. *Шелухин О.И., Теняжнев А.М., Осин А.В.* Фрактальные процессы в телекоммуникациях / Под ред. О.И. Шелухина. Радиотехника, 2003.
10. *Лихтциндер Б.Я.* Корреляционные связи в пачечных потоках систем массового обслуживания // Телекоммуникации. Наука и технологии. 2015. № 9. С. 8–12.
11. *Лихтциндер Б.Я.* Корреляционные свойства длин очередей в системах массового обслуживания с потоками общего вида // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13. № 3. С. 276–280.
12. *Блатов И.А., Лихтциндер Б.Я.* Об оценке длин очередей в СМО с произвольной корреляцией // Сб. тр. Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ–2018). Самара: Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева, 2018. С. 1607–1616.

13. *Лихтциндер Б.Я.* О некоторых обобщениях формулы Хинчина–Полячека // Инфокоммуникационные технологии. 2007. Т. 5. № 4. С. 253–258.
14. *Вишневецкий В.М., Дудин А.Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // АиТ. 2017. № 8. С. 3–59.
Vishnevskii V.M., Dudin A.N. Queueing Systems with Correlated Arrival Flows and Their Applications to Modeling Telecommunication Networks // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1361–1403.
15. *Шульга Ю.Н.* Обобщение формулы Полячека–Хинчина для объемных стохастических сетей // АиТ. 1989. № 3. С. 84–98.
Shul'ga Yu.N. Extension of the Polaczek – Khinchin Formula to 3d Stochastic Networks // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 3. P. 355–365.
16. *Jain G., Sigman K.* A Pollaczek-Khinchine Formula for M/G/1 Queues with Disasters // J. Appl. Prob. 1996. V. 33. P. 1191–1200.
17. *Лихтциндер Б.Я.* Интервальный метод анализа мультисервисного трафика сетей доступа // Электросвязь. 2015. № 12. С. 52–54.
18. *Лихтциндер Б.Я.* Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Горячая линия – Телеком, 2018.
19. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.
20. *Лихтциндер Б.Я.* Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей доступа. Самара ПГУТИ, 2015.
21. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.
22. *Горцев А.М., Нежелская Л.А.* О связи МС-потоков и МАР-потоков событий // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. Т. 13. № 4. С. 50–60.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневецким.

Поступила в редакцию 15.09.2019

После доработки 25.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021