

Управление в технических системах

© 2022 г. К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, д-р физ.-мат. наук, член-корр. НАН Азербайджана
(kamil_aydazade@rambler.ru)

(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку;

Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку),

В.М. АБДУЛЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук (vaqif_ab@rambler.ru)

(Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку;

Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА СТЕРЖНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕКУЩЕЙ И ПРЕДЫДУЩЕЙ ПО ВРЕМЕНИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

На примере процесса нагрева стержня в печи исследуется задача синтеза управления объектами с распределенными параметрами с обратной связью. Для формирования значений управляющих воздействий предлагается использовать их линейную зависимость от значений состояния в точках замера как в текущий, так и в предыдущий моменты времени. Неизвестные коэффициенты, участвующие в этой зависимости управления от замеренных значений состояния, являются параметрами обратной связи. Они определяются минимизацией целевого функционала с использованием численных методов оптимизации первого порядка. Для этого получены формулы градиента целевого функционала по параметрам обратной связи. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, процесс нагрева, обратная связь, коэффициент усиления, точка контроля, градиент функционала, параметры обратной связи.

DOI: 10.31857/S0005231022010081

1. Введение

В работе на примере задачи управления нагревом стержня в печи с обратной связью предлагается подход к синтезу управляющих воздействий, использующий результаты замера состояния процесса в заданных точках контроля не только в текущий момент времени t , но и в момент $t - \tau$, где τ – некоторый заданный параметр. Предложена формула линейной зависимости текущего значения управляющего воздействия от замеренных значений в точках замера, включающая неизвестные постоянные параметры обратной связи. В результате задача синтеза управления редуцируется в задачу параметрического оптимального управления распределенной системой с запаздывающим аргументом по определению оптимальных значений параметров

обратной связи, участвующих в формулах зависимости значений управлений от замеренных значений состояний в точках контроля.

Отметим, что в отличие от задач синтеза управления объектами с сосредоточенными параметрами, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений [1–4], эти задачи для объектов с распределенными параметрами исследованы существенно меньше. Это было связано, во-первых, со сложностью как исследования самих краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными, так и численного их решения. Во-вторых, имелись сложности технического и технологического характера, связанные с оперативностью, точностью проводимых замеров и обработки их результатов, в-третьих, отсутствие достаточно эффективных математических методов и мощных вычислительных средств для своевременного принятия решения по определению текущих значений управляющих воздействий.

В 60–70-е годы прошлого века в связи с развитием вычислительных средств и математического аппарата эти работы существенно активизировались как в теоретическом направлении, так и для практических приложений. Здесь следует отметить работы [5–11], которыми были предложены различные подходы к построению систем управления с обратной связью. В работах [5, 12, 13] описаны системы управления реальными технологическими процессами, техническими объектами с распределенными параметрами.

Предлагаемый в данной работе подход, развивающий работы [10, 11] на случай использования текущих и предыдущих во времени результатов замеров, может быть использован для объектов, у которых нет возможности оперативного замера значений всего вектора состояния или точность замеров не достаточно высока. Например, при нагреве стержня замер температуры в его отдельных точках не позволяет судить о текущей динамике (скорости) процесса нагрева, а измерительная техника, позволяющая это сделать, пока отсутствует или недостаточно точна.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача регулирования температуры стержня длиной l в печи, состояние которого описывается начально-краевой задачей:

$$(2.1) \quad u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + \mu_1 [\vartheta(t) - u(x, t)], \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (t_0, T],$$

$$(2.2) \quad u(x, t) = u^0(x, t; \varphi), \quad \varphi = \text{const}, \quad \varphi \in \Phi \subset R^m, \quad x \in [0, l], \quad t \leq t_0,$$

$$(2.3) \quad u_x(0, t) = -\mu_2 [\vartheta(t) - u(0, t)], \quad t \geq t_0,$$

$$(2.4) \quad u_x(l, t) = \mu_2 [\vartheta(t) - u(l, t)], \quad t \geq t_0.$$

Здесь $u(x, t)$ – температура стержня в точке $x \in [0, l]$ в момент времени t ; T – длительность процесса управления; $u^0(x, t; \varphi)$ – параметрически заданная непрерывная функция, определяющая температуру стержня при $t \leq 0$. Точное значение m -мерного скалярного вектора параметров φ не задано, но известно, что его значения принадлежат заданному компактному множеству

$\Phi \subset R^m$ с заданной функцией плотности $\rho_\Phi(\varphi)$ такой, что

$$\rho_\Phi(\varphi) \geq 0, \quad \varphi \in \Phi, \quad \int_{\Phi} \rho_\Phi(\varphi) d\varphi = 1.$$

Заданные коэффициенты μ_1, μ_2 характеризуют процесс теплопередачи между печью и стержнем. Поддержание температуры самой печи осуществляется управляемым внешним источником тепла, создающего в печи температуру, определяемую кусочно-непрерывной функцией $\vartheta(t)$, удовлетворяющей технологическому ограничению:

$$(2.5) \quad \vartheta(t) \in V = \{\vartheta : \underline{\vartheta} \leq \vartheta \leq \bar{\vartheta}\}, \quad t \in [t_0, T],$$

значения $\underline{\vartheta}, \bar{\vartheta}$ заданы.

Рассматриваемая задача управления процессом (2.1)–(2.4) заключается в определении допустимой управляющей функции $\vartheta(t)$, приводящей состояние стержня к заданному состоянию, определяемой непрерывной функцией $U(x)$ при условии, что в момент времени t_0 на стержне имеются точки $x \in [0, l]$, состояние $u(x, t_0)$ в которых по каким-либо причинам вышло из требуемого по технологическим соображениям диапазона температуры на стержне:

$$(2.6) \quad \underline{u} \leq u(x, t_0) \leq \bar{u}.$$

Предельные значения температуры стержня $\underline{u}, \bar{u}$ считаются заданными и определяются из технологических требований.

Управление $\vartheta(t)$ должно доставлять минимум некоторому заданному функционалу, например следующему:

$$(2.7) \quad J_T(\vartheta) = \int_{\Phi} \int_{T-\Delta T}^T \int_0^l \mu(x) [u(x, t; \vartheta, \varphi) - U(x)]^2 dx dt d\varphi + \\ + \alpha \int_{t_0}^T [\vartheta(t) - V_\alpha(t)]^2 dt.$$

Здесь функция $u(x, t; \vartheta, \varphi)$ является решением начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) при заданных допустимых управлении $\vartheta(t) \in V, t \in [t_0, T]$ и начальном условии $u^0(x, 0; \varphi), \varphi \in \Phi; \mu(x) \geq 0$ – заданная весовая функция; $[T - \Delta T, T]$ заданный отрезок времени, в течение которого оценивается степень устойчивости достижения заданного желаемого распределения температуры на стержне; параметры $\alpha, V_\alpha(t)$ введены для регуляризации целевого функционала задачи.

Функционал (1.7) определяет качество управления множеством (пучком) функций $u(x, t; \vartheta, \varphi)$, являющихся решением дифференциального уравнения (1.1) и удовлетворяющих краевым условиям (2.3), (2.4), с начальными условиями $u^0(x, t_0; \varphi)$ при значениях параметра φ из заданного множества Φ .

Как видно из целевого функционала (2.7), в задаче требуется не только достичь желаемого распределения температуры $U(x)$ на стержне в заданный момент времени $T - \Delta T$, но и поддерживать его в течение заданного отрезка времени $[T - \Delta T, T]$. Такое свойство качества управления требуется, как правило, в системах оптимального (финитного) регулирования [5].

Пусть в N_c точках ξ_j стержня непрерывно во времени производятся замеры температуры, $u_i(t) = u(\xi_i, t)$, $i = 1, \dots, L$, используемые для формирования текущего значения управления $\vartheta(t)$.

В качестве зависимости управления $\vartheta(t)$ от замеренных значений используем следующую формулу:

$$(2.8) \quad \vartheta(t) = \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U(\xi_i)) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U(\xi_i))], \quad t \in [t_0, T].$$

Здесь постоянные k_{1i} , k_{2i} , $i = 1, \dots, L$, являются оптимизируемыми параметрами обратной связи, определяющими текущие значения управления в процессе нагрева.

Как видно из (2.8), в формировании управляющего воздействия участвуют не только текущие значения температуры в точках замера, но и значения температуры в этих точках в предыдущий момент времени, а именно при $t - \tau$. Значение τ задано, и оно назначается в зависимости от точности проведения замеров и динамики (скорости) протекания процесса: для быстро протекающих процессов τ необходимо назначать малым, а для медленно протекающих процессов τ выбирается таким, чтобы за промежуток времени $(t - \tau, t)$ изменение состояния процесса существенно превышало как точность проводимых замеров, так и решения краевой задачи (1.1)–(2.4). Из практических соображений предполагается выполнение условия $\tau < \Delta T$.

Оптимизируемые параметры k_{1i} , k_{2i} , $i = 1, \dots, L$, как и в задачах синтеза управления в системах с сосредоточенными параметрами, будем называть коэффициентами усиления.

Введя обозначение для заданной функции $U(x)$ $U_i = U(\xi_i)$, зависимость (2.8) запишем так:

$$(2.9) \quad \vartheta(t; \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^L (k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)), \quad t \in [t_0, T],$$

и будем ее использовать в дальнейшем.

Здесь использовано обозначение для оптимизируемых параметров обратной связи $\mathbf{K} = (k_1, k_2) \in R^{2L}$, $k_1 = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1L})$, $k_2 = (k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2L})$.

Управление с обратной связью $\vartheta(t)$, определенное формулой (2.9), в силу свойства решения дифференциальных уравнений с запаздывающим по времени аргументом, является не только непрерывным при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, но, более того, его гладкость улучшается во времени [13].

Рассмотрим также случай, когда имеется возможность осуществлять замеры температуры только в заданные дискретные моменты времени $\bar{t}_{j+1} =$

$= t_0 + j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, N_t - 1$, $\bar{t}_0 = t_0$, $\Delta t = (T - t_0) / N_t$. Значение Δt определяется технологическими особенностями как самого процесса нагрева, так и возможностями проведения замеров.

Для управления $\vartheta(t)$ в этом случае используем следующую, аналогичную (1.8), зависимость от замеренных в дискретные моменты времени значений состояния:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \vartheta(t; \mathbf{K}) &= \sum_{i=1}^L (k_{1i} (u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, \bar{t}_j - \tau) - U_i)), \\ t &\in [\bar{t}_j, \bar{t}_j + \Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1. \end{aligned}$$

Значение запаздывания τ должно выбираться, естественно, кратным значению Δt , т.е. $\tau = \sigma \Delta t$, $\sigma = 1, 2, \dots$, и удовлетворять тем же требованиям, что и при непрерывной обратной связи.

Управление $\vartheta(t)$, определяемое зависимостью (2.10) при дискретной обратной связи, непрерывно на интервалах $(\bar{t}_j, \bar{t}_{j+1})$, а в моменты времени $\bar{t}_j$ проведения замеров состояния процесса может претерпевать конечные скачки. Состояние самого процесса нагрева в эти моменты времени изменяется непрерывно.

Для случая непрерывной обратной связи подставим зависимость (1.9) в дифференциальное уравнение (2.1) и в краевые условия (2.3), (2.4), получим уравнение

$$(2.11) \quad \begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) + \\ &+ \mu_1 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)] - \\ &- \mu_1 u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \end{aligned}$$

и краевые условия

$$(2.12) \quad \begin{aligned} u_x(0, t) &= \mu_2 u(0, t) - \\ &- \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)], \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u_x(l, t) &= -\mu_2 u(l, t) + \\ &+ \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, t - \tau) - U_i)], \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (2.11) характеризуется следующими особенностями: во-первых, оно является уравнением с запаздывающим аргументом по времени в фазовой переменной [14]; во-вторых, оно является точно нагруженным по временной переменной [15–18]. В-третьих, краевые условия (2.12), (2.13) имеют запаздывание во времени и являются нелокальными, так

как в них участвуют значения искомой функции в промежуточных точках. Такие условия называют также неразделенными [11, 19]. Работы, в которых рассматривались начально-краевые задачи одновременно с такими особенностями, авторам не встречались. Использование имеющихся результатов, отдельных для каждой из особенностей (метод шагов во времени для систем с запаздыванием [15] и метод сдвига для нелокальных нагруженных уравнений [17, 18]), не представляет каких-либо проблем для исследования и численного решения полученной начально-краевой задачи (2.11)–(2.13). Схема решения этих задач будет изложена в разделе 4 при описании результатов компьютерных экспериментов на примере иллюстративной задачи.

В случае дискретной во времени обратной связи (2.10) в промежутках между замерами дифференциальное уравнение (1.1) имеет вид

$$(2.14) \quad \begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t) + \\ &+ \mu_1 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, \bar{t}_j - \tau) - U_i)] - \mu_1 u(x, t), \\ t &\in [\bar{t}_j, \bar{t}_j + \Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

а в моменты времени замеров $\bar{t}_j, j = 1, \dots, N_t - 1$ выполняется условие непрерывности процесса

$$(2.15) \quad u(x, \bar{t}_i^+) = u(x, \bar{t}_i^-), \quad x \in [0, l], \quad i = 1, \dots, N_t - 1.$$

Здесь использованы обозначения:

$$u(x, \bar{t}_i^+) = u(x, t_j + 0), \quad u(x, \bar{t}_i^-) = u(x, t_j - 0).$$

Краевые условия в этом случае будут иметь вид:

$$(2.16) \quad \begin{aligned} u_x(0, t) &= \mu_2 u(0, t) - \\ &- \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, \bar{t}_j - \tau) - U_i)], \\ t &\in [\bar{t}_j, \bar{t}_j + \Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

$$(2.17) \quad \begin{aligned} u_x(l, t) &= -\mu_2 u(l, t) + \\ &= \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} (u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i} (u(\xi_i, \bar{t}_j - \tau) - U_i)], \\ t &\in [\bar{t}_j, \bar{t}_j + \Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1. \end{aligned}$$

Ограничение (2.5) на управляющее воздействие, учитывая зависимость (2.9) и условия на состояние температуры при протекании процесса регулирования (2.6), несложно привести к следующим ограничениям на параметры обратной связи:

$$(2.18) \quad \sum_{i=1}^L (k_{1i} + k_{2i}) (\bar{u} - U_i) \leq \bar{\vartheta},$$

$$(2.19) \quad \sum_{i=1}^L (k_{1i} + k_{2i}) (\underline{u} - U_i) \geq \underline{\vartheta}.$$

Ясно, что ограничения (2.18), (2.19) являются линейными по $\mathbf{K}$.

Целевой функционал (2.7) на случай управления с обратной связью запишем в виде

$$(2.20) \quad J_T(\mathbf{K}) = \int_{\Phi} I(\mathbf{K}; \varphi) \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi,$$

$$(2.21) \quad I(\mathbf{K}; \varphi) = \int_{T-\Delta T}^T \int_0^l \mu(x) [u(x, t; \mathbf{K}, \varphi) - U(x)]^2 dx dt + \alpha \left\| \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha} \right\|_{R^{2L}}^2,$$

где $\alpha, \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha} \in R^{2L}$ – параметры регуляризации функционала.

Таким образом, задача оптимального управления процессом нагрева как с непрерывной, так и дискретной обратной связью заключается в определении таких параметров обратной связи $\mathbf{K} \in R^{2L}$, удовлетворяющих ограничениям (2.18) при непрерывной и (2.19) при дискретной обратной связи, при которых совместно с решением соответствующих начально-краевых задач (2.11)–(2.13), (2.2) и (2.14), (2.2)–(2.4) функционал (2.20), (2.21) принимает минимальное значение.

Исследуемая далее полученная задача относится к параметрическим задачам оптимального управления, поскольку непосредственно оптимизируемым является конечномерной вектор $\mathbf{K} \in R^{2L}$. Специфическими особенностями дифференциальных уравнений, как указывалось выше, являются наличие запаздывания во времени у фазовой переменной и точечная нагруженность по пространственной переменной. Специфика задачи заключается и в целевом функционале (2.20), (2.21), оценивающем на некотором конечном промежутке времени $[T - \Delta T, T]$ поведение множества решений начально-краевой задачи (пучка-траекторий), параметры φ начальных условий $u^0(x, t_0; \varphi)$ которых принадлежат множеству Φ . Отметим еще одну важную специфическую особенность полученной задачи. Несмотря на то что исходная задача оптимального управления без обратной связи (2.1)–(2.7) является, как несложно проверить, выпуклой, задачи как с непрерывной, так и с дискретной обратной связью являются невыпуклыми. Это видно из зависимостей (2.9), (2.10), в которых участвуют произведения оптимизируемых параметров $\mathbf{K}$ и зависящих от них, в общем случае нелинейно, значений фазовой переменной в точках замера $u(\xi_i, t)$, $i = 1, \dots, L$. Эта особенность важна и требует привлечения к ее численному решению каких-либо подходов к отысканию глобального оптимума. Одним из таких подходов является применение известных эффективных методов локальной оптимизации с использованием различных начальных точек поиска для оптимизируемого вектора $\mathbf{K} \in R^{2L}$ (метод мултистарта). В следующем разделе будет изложен предлагаемый подход и получены необходимые формулы для применения эффективных локальных методов оптимизации первого порядка.

3. Подход к численному решению задачи синтеза управления

Для численного решения полученной задачи параметрического оптимального управления (2.11), (2.2), (2.12), (2.13), (2.18)–(2.21) с учетом линейности ограничений (2.18), (2.19) на оптимизируемые параметры, а следовательно, выпуклости допустимой области параметров $\mathbf{K}$ предлагается использовать метод проекции градиента [20, 21].

$$(3.1) \quad \mathbf{K}^{s+1} = P_{(2.17),(2.18)}(\mathbf{K}^s - \gamma_s \text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}^s)),$$

$$(3.2) \quad \gamma_s = \arg \min_{\gamma \geq 0} J_T(P_{(2.18),(2.19)}(\mathbf{K}^s - \gamma \text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}^s))), \quad s = 0, 1, \dots$$

Здесь $\text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}) - 2L$ -мерной вектор компонент градиента целевого функционала (2.20), (2.21); γ_s – величина шага одномерной оптимизации по направлению градиента на s -й итерации, определяемой, например, методом золотого сечения; $\mathbf{K}^0$ – некоторое начальное значение вектора параметров обратной связи (в случае, если оно не удовлетворяет ограничениям (2.18), (2.19), необходимо его предварительно спроектировать на допустимую область). Для построения оператора проектирования $P_{(2.18),(2.19)}(\mathbf{K})$ произвольного вектора $\mathbf{K} \in R^{2L}$ на допустимую область, определяемую линейными неравенствами (2.18), (2.19), имеются известные конструктивные формулы [13, 20, 21].

Как было отмечено выше, полученная задача параметрического оптимального управления может быть многоэкстремальной по оптимизируемым параметрам $\mathbf{K}$, а метод (3.1), (3.2) позволяет отыскивать лишь ближайшую к точке $\mathbf{K}^0 \in R^{2L}$ точку локального минимума целевого функционала. Поэтому в приведенных расчетах использовался метод “мультистарта”, заключающийся в многократном применении итерационной процедуры (3.1), (3.2) для различных допустимых начальных точек $\mathbf{K}^0$. При этом за решение принимается тот вектор локального минимума $\mathbf{K}^*$, которому соответствует меньшее значение целевого функционала.

Ясно, что для реализации процедуры (3.1), (3.2) важную роль имеет вектор градиента целевого функционала $\text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K})$. Далее в теореме показана дифференцируемость целевого функционала $J_T(\mathbf{K})$ и приведены формулы для компонент его градиента.

Теорема 1. При принятых допущениях на функции и параметры задачи (2.1)–(2.4), (2.7) функционал (2.20), (2.21) задачи управления (2.11), (2.2), (2.12), (2.13), (2.18)–(2.21) с обратной связью (2.9) дифференцируем по допустимым значениям параметров обратной связи $\mathbf{K}$, а компоненты градиента определяются формулами

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{k_{1i}} J_T(\mathbf{K}) = & \int_{\Phi} \left[\int_{t_0}^T \left(-a^2 \mu_2 (\psi(0, t) + \psi(l, t)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t) dx \right) \times \right. \\ & \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 (k_{1i} - \tilde{k}_{1i}) \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad t_0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{grad}_{k_{2i}} J_T(\mathbf{K}) = & \int_{\Phi} \left[\int_{t_0}^{T-\tau} \left(-a^2 \mu_2 (\psi(0, t+\tau) + \psi(l, t+\tau)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t+\tau) dx \right) \times \right. \\
(3.4) \quad & \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left(k_{2i} - \tilde{k}_{2i} \right) \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad -\tau \leq t \leq T - \tau,
\end{aligned}$$

где $u(x, t; \varphi)$ – решение начально-краевой задачи (2.11)–(2.13), (2.2); $\psi(x, t)$ – решение следующей сопряженной начально-краевой задачи при каждом заданном допустимом значении параметра φ :

$$(3.5) \quad \psi_t(x, t) = -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t), \quad t_0 \leq t \leq T - \Delta T,$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \psi_t(x, t) = & -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t) + 2\mu(x) (u(x, t; y, \varphi) - U(x)), \\ & T - \Delta T < t \leq T, \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad \psi(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$(3.8) \quad \psi_x(0, t) = \mu_2 \psi(0, t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$(3.9) \quad \psi_x(l, t) = -\mu_2 \psi(l, t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$\begin{aligned}
(3.10) \quad \psi_x(\xi_i^+, t) = & \psi_x(\xi_i^-, t) + \mu_2 k_{1i} (\psi(0, t) + \psi(l, t)) + \frac{\mu_1 k_{1i}}{a^2} \int_0^l \psi(x, t) dx, \\ & t_0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.11) \quad \psi_x(\xi_i^+, t + \tau) = & \psi_x(\xi_i^-, t + \tau) + \mu_2 k_{2i} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) + \\ & + \frac{\mu_1 k_{2i}}{a^2} \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx, \quad t_0 \leq t \leq T - \tau,
\end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \psi(\xi_i^+, t) = \psi(\xi_i^-, t), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

В случае дискретной по времени обратной связи в виде зависимости (2.10) имеет место следующая

Теорема 2. При принятых допущениях на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1)–(2.4), (2.7), функционал (2.20), (2.21) задачи управления (2.14)–(2.17), (2.2) при дискретной обратной связи (2.8) дифференцируем по параметрам обратной связи $\mathbf{K}$ при их допустимых значениях, компоненты градиента целевого функционала определяются формулами

$$\begin{aligned}
\text{grad}_{k_{1i}} J_T(\mathbf{K}) = & \int_{\Phi} \left[\sum_{j=0}^{N_t-1} \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t} \left(-a^2 \mu_2 (\psi(0, t) + \psi(l, t)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t) dx \right) \times \right. \\
& \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left(k_{1i} - \tilde{k}_{1i} \right) \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{grad}_{k_{2i}} J_T(\mathbf{K}) = \\ & = \int_{\Phi} \left[\sum_{j=0}^{N_t-1} \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t - \tau} \left(-a^2 \mu_2 (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left(k_{2i} - \tilde{k}_{2i} \right) \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad \bar{t}_j - \tau \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau, \end{aligned}$$

а функция $\psi(x, t)$ при каждом заданном допустимом значении параметра φ и соответствующей функции $u(x, t; \varphi)$ решения начально-краевой задачи (2.14)–(2.17), (2.2) определяется решением сопряженной начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} \psi_t(x, t) &= -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau, \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \\ \psi_t(x, t) &= -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t) + 2\mu(x) (u(x, t; y, \varphi) - U(x)), \\ & \quad \bar{t}_j + \Delta t - \tau < t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \\ \psi(x, T) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ \psi_x(0, t) &= \mu_2 \psi(0, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \\ \psi_x(l, t) &= -\mu_2 \psi(l, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

в точках ξ_i , $i = 1, \dots, L$, при $\bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t$ должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \psi_x(\xi_i^-, t_j) &= \psi_x(\xi_i^+, t_j) - \mu_2 k_{1i} \sum_{k=1}^{N_t-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\psi(0, \tau) + \psi(l, \tau)) d\tau, \\ i &= 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, N_t - 1, \\ \psi(\xi_i^+, t) &= \psi(\xi_i^-, t), \quad i = 1, \dots, L, \\ \psi_x(\xi_i^+, t_j + \tau) &= \psi_x(\xi_i^-, t_j + \tau) + \mu_2 k_{2i} \sum_{k=1}^{N_t-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) dt, \\ \bar{t}_j \leq t &\leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau, \quad i = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

а в точках t_j , $j = 0, 1, \dots, N_t - 1$, при $x \in [0, l]$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \psi(\xi_i, t_j^-) &= \psi(\xi_i, t_j^+) - \frac{\alpha}{a^2} \sum_{\nu=1}^L k_i \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\xi_{\nu}}^{\xi_{\nu+1}} \psi(x, t) dx dt, \\ i &= 1, \dots, L, \quad j = 0, 1, \dots, N_t - 1. \end{aligned}$$

Сформируем необходимые условия оптимальности параметров обратной связи $\mathbf{K}$ в вариационной форме.

Теорема 3. Для оптимальности параметров обратной связи $\mathbf{K}^ \in R^{2L}$ в задаче синтеза (2.11)–(2.13), (2.20), (2.21) с непрерывной обратной связью (2.9) необходимо выполнение условия*

$$(\text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}^*), \mathbf{K} - \mathbf{K}^*) \geq 0$$

для произвольного допустимого вектора $\mathbf{K} \in R^{2L}$, удовлетворяющего условиям (2.18), (2.19), где градиент целевого функционала (2.20), (2.21) определяется формулами (3.3)–(3.12).

Аналогичную теорему можно сформировать для случая дискретной обратной связи (2.10).

4. Результаты компьютерных экспериментов

Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении задачи (2.1)–(2.7), для следующих функций и значений параметров, участвующих в постановке задачи:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad T = 2, \quad a = 1, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1, \quad \mu(x) = 1, \\ l = 1, \quad u^0(x, t; \varphi) = \varphi, \quad x \in [0, 1], \quad \Phi = \{55, 60, 65\}, \\ \underline{\vartheta} = 10, \quad \bar{\vartheta} = 1000, \quad \Delta T = 1, \quad U(x) = 85, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

При проведении экспериментов время запаздывания τ , число L точек непрерывного во времени контроля и места их размещения принимали различные значения. В приводимых далее результатах были использованы следующие значения параметров: $\tau = 0,05$, $L = 2$, $\xi_1 = 0,3$, $\xi_2 = 0,6$.

Для реализации итерационной процедуры (3.1), (3.2) использовались полученные выше формулы для компонентов градиента (3.3), (3.4).

Для решения прямой (2.11)–(2.13) и сопряженной (3.5)–(3.12) начально-краевых задач при заданных текущих значениях параметров обратной связи $\mathbf{K}$ и начальном условии $\varphi \in \Phi$ использовалась неявная схема метода сеток с шагами дискретизации по x и t , соответственно равными $h_x = 0,01$, $h_t = 0,01$ [22]. Для учета запаздывания τ использовался метод шагов [14]. К нелокальным краевым условиям (2.12), (2.13) прямой задачи и (3.8)–(3.12) сопряженной задачи после дискретизации применялась схема сдвига условий, описанная в [18] основанная на идее метода прогонки [23].

С учетом возможности многоэкстремальности функционала (2.20), (2.21) в качестве начальной точки для итерационной процедуры (3.1), (3.2) использовались разные точки, в частности приведенные в табл. 1. В этой же таблице приведены соответствующие этим точкам значения целевого функционала.

В табл. 2 приведены полученные с применением процедуры (3.1), (3.2) оптимальные значения параметров обратной связи. Отметим, что при дальнейших итерациях процедуры (3.1) оптимизируемые параметры и значение

Таблица 1. Начальные значения оптимизируемых параметров $k_{11}^0, k_{12}^0, k_{21}^0, k_{22}^0$ и соответствующие значения функционала

N	k_{11}^0	k_{12}^0	k_{21}^0	k_{22}^0	$J_T^0(\mathbf{K})$
1	6,0000	9,0000	7,0000	8,0000	4514,7446001
2	0,5000	0,9000	0,3000	0,6000	4440,8716378

Таблица 2. Полученные значения параметров обратной связи (2.9) и целевого функционала

N	T	χ	$k_{11}^{(*)}$	$k_{12}^{(*)}$	$k_{21}^{(*)}$	$k_{22}^{(*)}$	$J_T^{(*)}(\mathbf{K})$
1	1	0%	-0,54691	1,51775	1,36562	1,42903	0,00000042134
		1%	-0,54655	1,50549	1,37056	1,42836	0,00000063847
		3%	-0,53125	1,51231	1,37452	1,44927	0,00000095917
	2	0%	-0,54693	1,51773	1,36560	1,42901	0,00000041473
		1%	-0,54827	1,51537	1,36314	1,42821	0,00000052774
		3%	-0,54949	1,50465	1,35546	1,41236	0,00000091645
2	1	0%	0,86006	1,31130	0,65608	1,00734	0,00000042441
		1%	0,84875	1,30618	0,65785	1,00908	0,00000053893
		3%	0,85589	1,30355	0,65777	1,00626	0,00000061959
	2	0%	0,86004	1,31128	0,65606	1,00732	0,00000041806
		1%	0,85746	1,31135	0,64758	1,00563	0,00000062639
		3%	0,86481	1,31407	0,66105	1,00586	0,00000724320

функционала практически не изменялись. В этой же таблице приведены значения параметров обратной связи, полученные процедурой оптимизации (3.1), (3.2) при условии, что замеры фазового состояния в точках контроля ξ_i , $i = 1, 2$ проводятся не точно, а с погрешностью $\chi\%$. Замеренные значения с погрешностью определялись по формуле

$$u(t) = u(\xi_i, t) = u(\xi_i, t)(1 + \chi s(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

где случайные значения $s(t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$ имеют равномерное распределение на отрезке $[-1; 1]$ и стандартной программой Randomize.

Как видно из таблицы, параметры обратной связи достаточно устойчивы к погрешностям проводимых замеров.

Для сравнения предлагаемого подхода к синтезу управления проводились эксперименты с решением задачи синтеза управления с обратной связью без использования предыдущих по времени результатов замеров в виде [10]:

$$(4.1) \quad \vartheta(t; \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^L k_{ij}(u(\xi_i, t) - U_i), \quad t \in [t_0, T].$$

Таблица 3. Начальные значения параметров обратной связи (4.1) и соответствующие значения целевого функционала

N	k_{11}^0	k_{12}^0	$J_T^0(\mathbf{K})$
1	6,0000	9,0000	4068,59998
2	0,5000	0,9000	4188,42555

Таблица 4. Полученные значения параметров обратной связи (4.1) и целевого функционала

N	T	χ	$k_{11}^{(*)}$	$k_{12}^{(*)}$	$J_T^{(*)}(\mathbf{K})$
1	1	0%	0,75542	2,98977	0,24977233550
		1%	0,75533	2,98965	0,24982552763
		3%	0,75512	2,98936	0,25005961886
	2	0%	0,53942	2,74553	0,23500497418
		1%	0,53891	2,74491	0,23519332257
		3%	0,53877	2,74476	0,23525947935
2	1	0%	1,64570	2,21322	0,24976508234
		1%	1,64565	2,21315	0,24985018452
		3%	1,64522	2,21257	0,24996574232
	2	0%	1,43147	1,96693	0,23500821019
		1%	1,43110	1,96645	0,23522688761
		3%	1,43026	1,96523	0,23564519287

Как видно, в (4.1) для формирования текущего значения управления $\vartheta(t)$ не используется информация о фазовом состоянии в предыдущие моменты времени.

В табл. 3 проведены значения начальных значений параметров обратной связи из (4.1), использованные для итерационной процедуры (3.1), (3.2), и соответствующие значения целевого функционала.

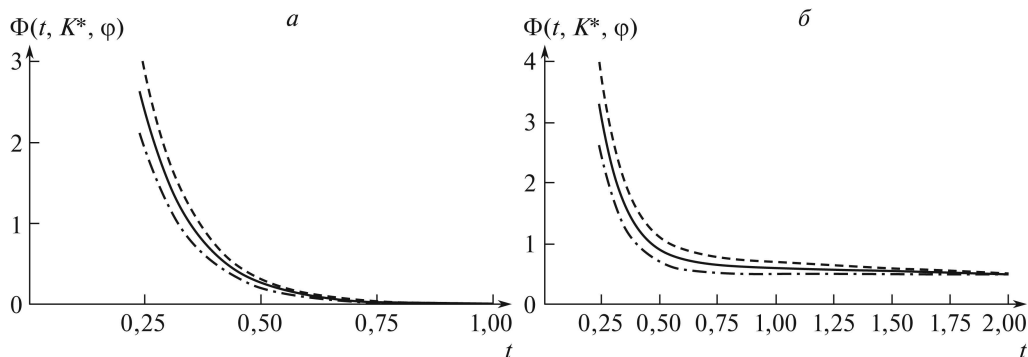
В табл. 4 аналогично табл. 2 приведены полученные оптимальные значения параметров обратной связи в виде (4.1) при различных уровнях погрешностей χ проводимых замеров.

Введем функционал

$$\Phi(t; \mathbf{K}, \varphi) = \left(\int_0^l [u(x, t; \mathbf{K}, \varphi) - U(x)]^2 dx \right)^{1/2},$$

характеризующий состояние процесса нагрева всего стержня в интегральном смысле, при параметрах обратной связи $\mathbf{K}$ и начальном условии $u(x, t_0) = \varphi$.

На рисунке приведены графики функции $\Phi(t; \mathbf{K}^*, \varphi)$ при оптимальных значениях параметров $\mathbf{K}^*$, полученные из первой начальной точки $\mathbf{K}^0$ (пер-



Графики функционала $\Phi(t; K^*, \varphi)$. *a* — для обратной связи вида (1.9); *б* — для обратной связи вида (3.1) для начальных условий: $\varphi = 55^\circ$ (---), $\varphi = 60^\circ$ (—), $\varphi = 65^\circ$ (- · - ·).

вая строка табл. 1), с состояниями в начальный момент времени $u(x, t_0) = 55^\circ$, $u(x, t_0) = 60^\circ$, $u(x, t_0) = 65^\circ$. На рисунке *a* использованы приведенные в первой строке табл. 2 полученные оптимальные значения параметров обратной связи в виде (2.9). На рисунке *б* использованы приведенные в первой строке табл. 4 полученные оптимальные значения параметров обратной связи в виде (4.1).

В случае обратной связи вида (2.9), как видно из рисунка *a*, графики функций $\Phi(t; K^*, \varphi)$ при $t \geq 0,75$ для разных начальных условий устанавливаются достаточно близко к $U(x) = 85$, а из рисунка *б* следует, что установление при обратной связи вида (4.1) начинает наблюдаться только при $t \geq 1,5$.

5. Заключение

На примере процесса нагрева стержня предложен подход к синтезу управления в системах с распределенными параметрами. Для формирования текущего управления предлагается использовать информацию о состоянии в точках замера не только в текущий, но и в некоторый предыдущий момент времени.

Применение такого подхода может быть обусловлено невозможностью проведения замера всех компонентов состояния объекта или объекта в целом. В работе задача синтеза параметров обратной связи приведена к задаче параметрического оптимального управления, в котором процесс описывается дифференциальным уравнением с запаздывающими по времени аргументами.

Получены формулы градиента целевого функционала по параметрам обратной связи, сформулированы необходимые условия оптимальности. Приведены численные эксперименты.

Предложенный подход к синтезу управления в системах с распределенными параметрами несложно распространить на другие процессы, описываемые другими видами начально-краевых задач.

Доказательство теоремы 1. Из взаимной независимости возможных начальных условий $u^0(x, t; \varphi)$ при различных параметрах φ имеет место

$$(П.1) \quad \text{grad}_{\mathbf{K}} J_T(\mathbf{K}) = \text{grad}_{\mathbf{K}} \int_{\Phi} I(\mathbf{K}; \varphi) \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi = \int_{\Phi} \text{grad}_{\mathbf{K}} I(\mathbf{K}; \varphi) \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi.$$

Поэтому сначала займемся исследованием дифференцируемости функционала $I(\mathbf{K}; \varphi)$ и получением формул для компонент его градиента по параметрам обратной связи $\mathbf{K}$ при каком-либо заданном допустимом параметре $\varphi \in \Phi$.

Для доказательства теоремы воспользуемся известным методом приращения оптимизируемых параметров и оценки соответствующего приращения функционала [20].

Пусть вектор параметров обратной связи $\mathbf{K} = (k_1, k_2)$, которому соответствует решение $u(x, t)$ нагруженной краевой задачи (2.11)–(2.13), получил приращение $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} = (k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)$ и этому вектору соответствует решение краевой задачи $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) + \Delta u(x, t)$.

Из (2.11)–(2.13), (2.2) следует, что $\Delta u(x, t)$ является решением краевой задачи

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \Delta u_t(x, t) = & a^2 \Delta u_{xx}(x, t) + \mu_1 \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] + \\ & + \mu_1 \sum_{i=1}^L (u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + \mu_1 \sum_{i=1}^L (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{2i} - \\ & - \mu_1 \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (t_0, T], \end{aligned}$$

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \Delta u_t(0, t) = & \mu_2 \Delta u(0, t) - \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] - \\ & - \mu_2 \sum_{i=1}^L [(u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{2i}], \quad t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

$$(П.4) \quad \begin{aligned} \Delta u_t(l, t) = & -\mu_2 \Delta u(l, t) + \mu_2 \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] + \\ & + \mu_2 \sum_{i=1}^L [(u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{2i}], \quad t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

$$(П.5) \quad \Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l].$$

Пользуясь известными результатами об устойчивости дифференциальных уравнений с запаздывающей во времени фазовой переменной и нагружен-

ных нелокальных краевых задач, можно показать справедливость оценки $\|\Delta u(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \alpha \|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}}$, где $\alpha > 0$ не зависит от $\mathbf{K}$ [20].

Для приращения функционала (2.19) несложно непосредственно получить представление:

$$\begin{aligned}
 \Delta I(\mathbf{K}; \varphi) &= I(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}; \varphi) - I(\mathbf{K}; \varphi) = \\
 &= 2 \int_{T-\Delta T}^T \int_0^l \mu(x) [u(x, t; \mathbf{K}, \varphi) - U(x)] \Delta u(x, t) dx dt + \\
 (П.6) \quad &+ 2 \sum_{i=1}^L \left[\sigma_1(k_{1i} - \tilde{k}_{1i}) \Delta k_{1i} + \sigma_2(k_{2i} - \tilde{k}_{2i}) \Delta k_{2i} \right] + \\
 &+ R \left(\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}} \right),
 \end{aligned}$$

где остаточный член $R \left(\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}} \right)$ включает слагаемые второго порядка малости относительно $\|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}}$ и $\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}$. Из этой оценки приращения функционала следует и его дифференцируемость [20].

Получим формулы для компонентов градиента целевого функционала по параметрам обратной связи. Пусть функция $\psi(x, t)$ некоторая пока произвольная непрерывная всюду в Ω , дважды дифференцируемая по x при $x \in (\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, L$, $\xi_0 = 0$, $\xi_{L+1} = l$, дифференцируемая по t при $t \in (t_0, T)$. Умножим (П.2) на $\psi(x, t)$, проинтегрируем результат по прямоугольнику Ω . С учетом принятых предположений и условий (П.3)–(П.5) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_0}^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta u_t(x, t) dx dt - a^2 \sum_{i=0}^L \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{t_0}^T \psi(x, t) \Delta u_{xx}(x, t) dt dx - \\
 (П.7) \quad &- \int_{t_0}^T \int_0^l \psi(x, t) \left[\mu_1 \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] + \right. \\
 &\left. + \mu_1 \sum_{i=1}^L [(u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{1i}] - \mu_1 \Delta u(x, t) \right] dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям отдельно для первого и второго членов (П.7) и, учитывая (П.3)–(П.5), имеем:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_0}^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta u_t(x, t) dx dt = \\
 (П.8) \quad &= \int_0^l \psi(x, T) \Delta u(x, T) dx - \int_{t_0}^T \int_0^l \psi_t(x, t) \Delta u(x, t) dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{II.9}) \quad & a^2 \sum_{i=0}^L \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_{t_0}^T \psi(x, t) \Delta u_{xx}(x, t) dt dx = \\
& = a^2 \int_{t_0}^T [(\psi_x(0, t) - \mu_2 \psi(0, t)) \Delta u(0, t) - (\psi_x(l, t) + \mu_2 \psi(l, t)) \Delta u(l, t)] dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^T [\psi_x(\xi_i^-, t) - \psi_x(\xi_i^+, t) + \mu_2 k_{1i} (\psi(0, t) + \psi(l, t))] \Delta u(\xi_i, t) dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^{T-\tau} [\psi_x(\xi_i^-, t + \tau) - \psi_x(\xi_i^+, t + \tau) + \mu_2 k_{2i} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau))] \times \\
& \times \Delta u(\xi_i, t) dt + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^T [(\psi(\xi_i^+, t) - \psi(\xi_i^-, t)) \Delta u_x(\xi_i, t)] dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \mu_2 \Delta k_{1i} \int_{t_0}^T (\psi(0, t) + \psi(l, t)) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \mu_2 \Delta k_{2i} \int_{t_0}^{T-\tau} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + \\
& + a^2 \int_{t_0}^T \int_0^l \psi_{xx}(x, t) \Delta u(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

Используя (П.6)–(П.9), для приращения функционала будем иметь:

$$\begin{aligned}
(\text{II.10}) \quad & \Delta I(\mathbf{K}; \varphi) = \int_0^l \psi(x, T) \Delta u(x, T) dx - \\
& - a^2 \int_{t_0}^T [(\psi_x(0, t) - \mu_2 \psi(0, t)) \Delta u(0, t) - (\psi_x(l, t) + \mu_2 \psi(l, t)) \Delta u(l, t)] dt + \\
& + \int_{t_0}^{T-\Delta T} \int_0^l [-\psi_t(x, t) - a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t)] \Delta u(x, t) dx dt + \\
& + \int_{T-\Delta T}^T \int_0^l [-\psi_t(x, t) - a^2 \psi_{xx}(x, t) + \alpha \psi(x, t) + \\
& + 2\mu(x)(u(x, t; \mathbf{K}, \varphi) - U(x))] \Delta u(x, t) dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^T \left[\psi_x(\xi_i^-, t) - \psi_x(\xi_i^+, t) + \mu_2 k_{1i} (\psi(0, t) + \psi(l, t)) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mu_1 k_{1i}}{a^2} \int_0^l \psi(x, t) dx \right] \Delta u(\xi_i, t) dt - \\
& -a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^{T-\tau} \left[\psi_x(\xi_i^-, t + \tau) - \psi_x(\xi_i^+, t + \tau) + \mu_2 k_{2i} (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\mu_1 k_{2i}}{a^2} \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right] \Delta u(\xi_i, t) dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_0}^T [(\psi(\xi_i^+, t) - \psi(\xi_i^-, t)) \Delta u_x(\xi_i, t)] dt + \\
& -a^2 \sum_{i=1}^L \Delta k_{1i} \left\{ \int_{t_0}^T \left(\mu_2 (\psi(0, t) + \psi(l, t)) + \frac{\mu_1}{a^2} \int_0^l \psi(x, t) dx \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt - \frac{2}{a^2} (k_{1i} - \tilde{k}_{1i}) \right\} - \\
& -a^2 \sum_{i=1}^L \Delta k_{2i} \left\{ \int_{t_0}^{T-\tau} \left(\mu_2 (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) + \frac{\mu_1}{a^2} \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt - \frac{2}{a^2} (k_{2i} - \tilde{k}_{2i}) \right\} + R \left(\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{R^{2L}} \right).
\end{aligned}$$

В силу произвольности функции $\psi(x, t)$ потребуем, чтобы она почти всюду являлась решением начально-краевой задачи (3.5)–(3.12).

Учитывая, что компоненты градиента функционала определяются линейной частью приращения функционала при приращениях соответствующих аргументов, получаем:

$$\begin{aligned}
\text{grad}_{k_{1i}} I(\mathbf{K}; \varphi) &= \int_{t_0}^T \left(-a^2 \mu_2 (\psi(0, t) + \psi(l, t)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t) dx \right) \times \\
&\times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left(k_{1i} - \tilde{k}_{1i} \right), \quad i = 1, \dots, L, \quad t_0 \leq t \leq T,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{grad}_{k_{2i}} I(\mathbf{K}; \varphi) = & \int_{t_0}^{T-\tau} \left(-a^2 \mu_2 (\psi(0, t + \tau) + \psi(l, t + \tau)) - \mu_1 \int_0^l \psi(x, t + \tau) dx \right) \times \\ & \times (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2 \left(k_{2i} - \tilde{k}_{2i} \right), \quad i = 1, \dots, L, \quad -\tau \leq t \leq T - \tau. \end{aligned}$$

Учитывая (П.1), получим приводимые в теореме выражения для искомым компонент градиента функционала.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично вышеприведенному с той разницей, что всюду в проводимых выкладках интегрирование по интервалу $t \in [0, T]$ заменяется интегрированием по отдельным интервалам $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N_t - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
2. *Mitkowski W., Bauer W., Zagórska M.* Discrete-Time Feedback Stabilization // Archives of Control Sciences. 2017. V. 27. No. 1. P. 309–321.
3. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2001.
5. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
6. *Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Control Synthesis for Temperature Maintaining Process in a Heat Supply Problem // Cybern. Syst. Analysis. 2020. V. 56. No. 3. P. 380–391.
7. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: Ленанд, 2019.
8. *Afi L., Lasri K., Joundi M., Amimi N.* Feedback Controls for Exact Remediability in Disturbed Dynamical Systems // IMA J. Math. Control Inform. 2018. V. 35. No. 1. P. 411–425.
9. *Coron J.M., Wang Zh.* Output Feedback Stabilization for a Scalar Conservation Law with a Nonlocal Velocity // SIAM J. Math. Anal. 2012. V. 45. No. 5. P. 2646–2665.
10. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // АИТ. 2017. Т. 78. № 9. С. 49–66.
Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Optimizing Placement of the Ccontrol Points at Synthesis of the Heating Process Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
11. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // АИТ. 2012. № 9. С. 3–19.
Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On an Approach to Designing Control of the Distributed-Parameter Processes // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 2. P. 1443–1455.
12. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
13. *Ray W.H.* Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company. 1981.

14. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
15. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.
16. *Алиханов А.А., Березков А.М., Шхануков-Лафишев М.Х.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1619–1628.
17. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equation // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. No. 1. P. 93–105.
18. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1585–1595.
19. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Optimization of Loading Places and Load Response Functions for Stationary Systems // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. No. 4. P. 634–644.
20. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2008.
21. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Ленанд, 2014.
22. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
23. *Абрамов А.А.* О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 30.07.2021

После доработки 25.08.2021

Принята к публикации 29.08.2021