

© 2022 г. А.Ю. ГОРНОВ, д-р техн. наук (gornov@icc.ru),  
А.С. АНИКИН, канд. физ.-мат. наук (anikin@icc.ru),  
Т.С. ЗАРОДНЮК, канд. техн. наук (tz@icc.ru),  
П.С. СОРОКОВИКОВ (sorokovikov.p.s@gmail.com)  
(Институт динамики систем и теории управления  
им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск)

## МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ДОВЕРИТЕЛЬНОГО БРУСА, ОСНОВАННОГО НА АППРОКСИМАЦИИ ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛИ МАТРИЦЫ ГЕССЕ, ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

В работе предложен подход к исследованию стандартной задачи оптимального управления, основанный на использовании редукции к конечномерной задаче оптимизации с последующим использованием аппроксимации главной диагонали гессеана. Приведены результаты вычислительных экспериментов по решению вспомогательных задач оптимизации сепарабельных, квазисепарабельных функций и функций Розенброка–Скокова.

*Ключевые слова:* алгоритм доверительного бруса, квазисепарабельная функция, матрица Гессе, задача оптимального управления.

DOI: 10.31857/S0005231022100117, EDN: ALGZQW

### 1. Введение

Задачи оптимального управления (ЗОУ) возникли из стремления учесть ограничения на управляющие воздействия и фазовые координаты объектов, динамика которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта область исследований, подобно другим направлениям теории экстремальных задач, возникла в связи с запросом со стороны приложений: появление постановок задач автоматического регулирования с ограничениями на управления (А.А. Фельдбаум [15], Д.В. Бушау [3]), которые уже не укладывались в теорию вариационного исчисления. Хотя первые подобные постановки точно возникали и ранее (например, задача Р. Годдарда (1919 г.) о подъеме ракеты на заданную высоту с минимальными затратами топлива), активное развитие этого направления традиционно связывают с появлением фундаментальных принципов теории оптимального управления: принципа максимума [14] и метода динамического программирования [7]. Сейчас теория оптимального управления активно развивается как в связи с наличием трудных и интересных математических постановок, так и с обилием приложений, в том числе и в таких областях, как космонавигация,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ 121041300060-4).

робототехника, динамика полета, экономика, биология, медицина, ядерная энергетика, нанофизика и других.

Несмотря на активные исследования этой области стандартная ЗОУ с параллелепипедными ограничениями на управление по-прежнему довольно часто возникает на практике и может характеризоваться наличием особенностей, требующих использования специализированных подходов к их рассмотрению.

## 2. Задачи оптимального управления: стандартная постановка

Разбиение переменных на фазовые и ограниченное управление, при наличии связывающих их дифференциальных уравнений — стандартная модель для процесса, развивающегося по законам природы, но испытывающего управляющие воздействия, стремящиеся сделать его в некотором смысле оптимальным. Наличие параллелепипедных ограничений на управления возникает естественным образом в силу ограниченности имеющихся ресурсов и присутствует в стандартной постановке задачи оптимального управления. Управляемая динамическая система с начальными условиями описывается дифференциальными уравнениями в нормальной форме Коши:

$$(1) \quad \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где  $t$  — независимая переменная (время),  $x(t)$  — вектор фазовых координат размерности  $n$ ,  $\dot{x} = dx/dt$  — производная фазовой траектории,  $u(t)$  —  $r$ -вектор управляющих воздействий,  $x^0$  — вектор начального состояния системы. Допустимые управления — это вектор-функции, определенные на временном отрезке  $T$  и удовлетворяющие ограничениям:

$$(2) \quad u(t) \in U = \{u(t) \in R^r : \underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u}\}.$$

Задача состоит в поиске допустимого управления  $u^*(t)$ , доставляющего минимум терминальному функционалу, зависящему от траектории системы (1) в конечный момент времени  $t_1$

$$(3) \quad I(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min.$$

Допустимый процесс  $(u, x)$ ,  $u = u(t) \in U$ , на котором функционал минимален, называется оптимальным —  $(u^*, x^*)$ . Вектор-функция  $f(x(t), u(t), t)$  и скалярная функция  $\varphi(x)$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми по всем аргументам, кроме  $t$ . Постановки с интегральными и смешанными функционалами (задачи Больца и Лагранжа) путем введения дополнительных фазовых координат могут редуцироваться к представленной задаче Майера. Для подобных детерминированных задач, в которых уравнения движения, критерий качества и ограничения известны точно, оптимальное значение критерия качества (3), реализуемое в классе программных управлений и управлений по принципу обратной связи, является одним и тем же. ЗОУ в данной формулировке считается классической [12, 16] и часто встречается в различных приложениях.

### 3. Традиционные подходы к исследованию стандартной ЗОУ

В теории оптимального управления принято различать два типа численных подходов: прямые (direct) и непрямые (indirect). Прямые методы заключаются в дискретизации состояния и управления и тем самым сводят исходную задачу к задаче нелинейной оптимизации с ограничениями. Непрямые методы состоят из численного решения краевой задачи, вытекающей из применения принципа максимума Понтрягина, и приводят к методам стрельбы (или методам пристрелки — shooting methods). В связи со значительными трудностями построения аналитического решения прикладных задач оптимального управления ключевое значение приобрели различные приближенные и численные методы их исследования. В зависимости от алгоритмической основы метода он может быть отнесен к той или иной группе.

#### *3.1. Методы, основанные на использовании принципа максимума Понтрягина*

В непрямых методах вместо предварительной дискретизации, как в прямых методах, сначала применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП) как условие первого порядка к задаче оптимального управления. Согласно этому принципу оптимальную траекторию следует искать среди соответствующих экстремалей, для которых он выполняется. Подобные подходы могут опираться на сведение исходной задачи к краевой задаче нахождения экстремального решения сопряженной системы. Решить такую нелинейную систему из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными на практике можно, например, с помощью методов ньютоновского типа. Таким образом, ПМП является универсальным необходимым условием оптимальности первого порядка в стандартной ЗОУ. Традиционно он наиболее эффективен в системах управления с максимальным быстродействием и минимальным расходом энергии, где применяются управления релейного типа, принимающие крайние, а не промежуточные значения на допустимом интервале управления.

Построение вычислительных схем, основанных на применении ПМП, может опираться на следующие этапы: а) формируется и решается система уравнений из условия равенства нулю градиента функции Понтрягина; б) в критических точках исследуется на знакоопределенность матрица вторых производных, в случае ее положительной определенности получается точка строгого локального минимума, отрицательно определенная матрица характеризует локальный максимум; в) анализируются критические точки, в которых матрица вторых производных не является знакоопределенной; г) найденные точки локальных экстремумов исследуются на глобальный экстремум, если это возможно.

Для линейно-выпуклых задач оптимального управления выполнение условия максимума функции Понтрягина является и достаточным условием оптимальности, и может быть использовано для нахождения глобального минимума функционала. В общем случае, когда правые части системы и подынтегральная функция критерия качества дифференцируемы по управлениям, может использоваться линеаризованный или дифференциальный принцип

максимума [8, 9], часто применяемый в вычислительных схемах для проверки оптимальности полученного в результате итерационного процесса решения. Методы последовательных приближений для поиска управлений, удовлетворяющих линеаризованному ПМ, опираются на использование информации о градиенте функции Понtryгина и применяются, фактически, для решения конечномерных задач максимизации гамильтониана в заданных точках временного отрезка. Важно помнить, что принцип максимума как необходимое условие оптимальности, вообще говоря, порождает не оптимальные траектории, а экстремали, для которых требуется отдельно обосновывать оптимальность. Для этой цели могут быть использованы достаточные условия оптимальности.

### *3.2. Методы, опирающиеся на дискретизацию ЗОУ*

Для использования многочисленных существующих прямых методов необходимо выбирать конечномерные представления управления и состояния, а затем дискретно выражать дифференциальные уравнения, описывающие динамическую систему, критерий минимизации и присутствующие в задаче ограничения. После того, как все статические и динамические ограничения редуцированы к задаче с конечным числом переменных, необходимо решить полученную задачу оптимизации, используя какой-либо адаптированный метод.

В качестве примера можно привести самый простой способ дискретизации, основанный на равномерном разбиении временного отрезка на подынтервалы. Управления дискретизированы таким образом, чтобы являться кусочно-постоянными на каждом подынтервале и удовлетворять заданным ограничениям. Самым простым методом дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений для численной реализации (в том числе для организации параллельных вычислений) является стандартный явный метод Эйлера. Множество допустимых управлений можно также дискретизировать, например, кусочно-постоянными функциями или сплайнами, а обыкновенные дифференциальные уравнения аппроксимировать дискретными соотношениями с использованием методов типа Рунге–Кутты различных порядков. В результате из непрерывной задачи оптимального управления получаем задачу конечномерной минимизации, в которой переменные подчиняются ограничениям, вытекающим из дифференциальной системы и ограничений на управления.

В плане соответствия редуцированной задачи исходной можно утверждать следующее: стандартная задача оптимального управления характеризуется управляющими воздействиями кусочно-непрерывного типа, соответствующая фазовая траектория является кусочно-гладкой и при выполнении условия роста с учетом ограничений на управления можно с уверенностью считать, что соответствующая конечномерная задача, полученная путем дискретизации, будет поддаваться численному решению с использованием методов конечномерной оптимизации при небольших размерностях. Это связано с наличием дифференциальной связи фазовых координат и управляющих воздействий, которая позволяет получать редуцированные конечномерные задачи с адекватными свойствами. Непрерывная дифференцируемость правых частей системы дифференциальных уравнений по фазовым переменным и

выполнение соответствующего условия Липшица позволяют обеспечить существование и единственность решения в задаче Коши для любого допустимого управления.

#### 4. Модификация алгоритма доверительного бруса

Предлагаемый алгоритм основан на использовании информации о главной диагонали матрицы Гессе. Потому как использование полного гессиана при реализации алгоритмов может оказаться не слишком рентабельной операцией. Помимо большого объема памяти, требуемой для размещения матрицы Гессе, вычисление информации второго порядка может оказаться достаточно трудоемкой задачей — при недоступных аналитических формулах для вторых производных. В такой ситуации обычно используются варианты разностных схем — либо второго порядка, опирающихся на алгоритм вычисления функции, либо первого порядка, основанных на вычислении вектора градиентов.

В отличие от классических методов ньютоновского типа в реализованном алгоритме используются элементы только главной диагонали матрицы Гессе и для нахождения направления движения на каждой итерации формулируется и решается задача квадратичного программирования на бруске. Решение этой вспомогательной задачи, в данном случае сепарабельной, тривиальное и получается в замкнутом виде, что позволяет достичь как хорошей скорости, так и достаточно высокой точности. Заметим, что от классических методов доверительного интервала (см., например, [6]) реализованный подход отличается способом ограничения вариации на каждой итерации: вместо эллипсоидального ограничения в данном случае применяется брусковое. Это влечет за собой другую постановку вспомогательной задачи и, очевидно, другие свойства общего алгоритма.

Реализованные варианты алгоритма используют аппроксимацию диагонали с помощью двух градиентов ( $Var1$ , [11]) и классическую аппроксимацию по разностной схеме второго порядка ( $Var2$ , см., например, [13]). Помимо оптимизации памяти такой подход существенно ускоряет решение внутренней задачи линейной алгебры, которая в таком случае становится тривиальной. Для обеспечения способности алгоритма генерировать улучшающие итерации с любой начальной точки, в конструкции используется техника криволинейного шага поиска [11]. Алгоритм позволяет быстро находить решение в классе квазисепарабельных функций, особенно на функциях с диагональным преобладанием в матрице Гессе [1].

Для вспомогательной процедуры одномерного поиска в зависимости от трудоемкости обработки матрицы Гессе может использоваться как грубый алгоритм одномерного поиска, начинающий итерации с единичного шага, и дробящий шаг до достижения релаксирующего приближения, так и специализированный высокоточный алгоритм локального одномерного поиска (в разработанном подходе — комбинация методов золотого сечения и обратной параболической интерполяции (см., например, [2, 10]). В обоих реализованных вариантах алгоритма вспомогательные поисковые методы опираются на использование квадратичной вариационной конструкции, приводящей к аппроксимации «ньютоновской» точки при единичном шаге и приближающейся к направлению антиградиента при малых шагах (см. алгоритм 1).

---

**Алгоритм 1.** Алгоритм доверительного бруса

---

**Require:** Задаются алгоритмические параметры, выбираются  $\mathbf{x}^0$ ,  $\delta^K = \delta_{\text{start}}$ .

```
1: for  $K = 0, \dots, T_{\text{out}}$  do
2:   if  $\|\nabla f(\mathbf{x}^K)\| \leq \varepsilon_{ng}$  then
3:      $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^K$ 
4:     break
5:   end if
6:   if Var1 then
7:     Вычисляется аппроксимация  $Z^K$  диагонали гессиана
      с помощью алгоритма, основанного на градиентах
      с шагом сдвига  $\alpha_D$ 
8:   end if
9:   if Var2 then
10:    Вычисляется аппроксимация  $Z^K$  диагонали гессиана
    с использованием алгоритма, основанного на разностной схеме
    с шагом Stdif
11:  end if
12:   $B^K = [\mathbf{x}^K - \delta^K, \mathbf{x}^K + \delta^K [$ 
13:   $p^k = \arg \min p Z^K p - \nabla f(\mathbf{x}^K)p, p \in B^K$ 
14:   $\mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{x}^K + \alpha^2 p^K - \alpha(1 - \alpha)\nabla f(\mathbf{x}^K).$ 
15:   $\alpha^K = \arg \min_{\alpha \in [0,1]} f(\mathbf{x}(\alpha)).$ 
16:   $\mathbf{x}^{K+1} = \mathbf{x}^K + \alpha^{2K} p^K - \alpha^K(1 - \alpha^K)\nabla f(\mathbf{x}^K).$ 
17:  if  $\alpha^K < 0,5$  then
18:     $\delta^K = 0,9\delta^K$ 
19:    if  $\delta^K < \delta_{\min}$  then
20:       $\delta^K = \delta_{\text{start}}$ 
21:    end if
22:  end if
23:  if  $\alpha^K > 0,5$  then
24:     $\delta^K = 1,1\delta^K$ 
25:    if  $\delta^K > \delta_{\max}$  then
26:       $\delta^K = \delta_{\text{start}}$ 
27:    end if
28:  end if
29: end for
```

**Выход:**  $\mathbf{x}^*$  если было достигнуто условие досрочного завершения, иначе  $x_{T_{\text{out}}+1}$ .

---

Влиять на вычислительные свойства программной реализации предложенного алгоритма можно путем изменения значений алгоритмических параметров. К общим алгоритмическим параметрам для двух реализованных вариантов относятся:  $\varepsilon_{ng}$  — точность критерия останова по норме градиента —  $[10^{-12}, 100]$ , в качестве стандартного значения выбирается  $10^{-5}$ ;  $\alpha_0$  — начальный шаг одномерного поиска, принимающий на старте наибольшее значение из интервала  $[10^{-10}, 1]$ ;  $tol_n$  — точность одномер-

ного поиска выбирается из интервала  $[10^{-12}, 0,1]$  и задается равной  $10^{-4}$ ;  $\varepsilon_{fi}$  — точность критерия останковки по релаксации  $\in [10^{-15}, 100]$  и выбирается по умолчанию равной  $10^{-6}$ ;  $\delta_{\text{start}}$  — начальный размер доверительных брусов — 0,1, — из интервала  $[10^{-6}, 10]$ ;  $\delta_{\text{min}}$  — минимальный размер доверительных брусов —  $10^{-4}$ ,  $[10^{-12}, 1]$ ;  $\delta_{\text{max}}$  — максимальный размер доверительных брусов выбирается из интервала  $[10^{-6}, 10^3]$  равным 10.

К специализированным алгоритмическим параметрам для первого варианта относится шаг сдвига от точки первого градиента до второго  $\alpha_d = 0,1 \in [10^{-6}, 1]$ . Для второго варианта алгоритма — шаг численного дифференцирования *Stdif*, принимающий значение из интервала  $[10^{-12}, 1]$ , стандартное значение равно  $10^{-10}$ . Настройка значений алгоритмических параметров может повысить эффективность программной реализации алгоритма для выбранного класса задач.

## 5. Вычислительные эксперименты

Расчеты проводились на персональном компьютере, тактовая частота процессора 2.8GHz, Intel Core i7. Использован компилятор ВСС 5.5 под управлением виртуальной машины Mac OS, Windows XP. Для исследования свойств реализованного алгоритма сформирована небольшая коллекция тестовых задач, включающая: тестовые примеры сепарабельных и квазисепарабельных функций, а также функции Розенброка–Скокова [5], ориентированные на сравнение и исследование свойств программных реализаций предложенного алгоритма.

### 5.1. Результаты решения вспомогательной задачи конечномерной оптимизации

**5.1.1. Сепарабельная функция.** Наиболее простая по структуре функция — это первая тестовая функция, на которой можно проверить работоспособность алгоритмов оптимизации и сравнить их свойства (рис. 1). Размерность данной задачи легко изменяется (вычислительные эксперименты проводились в том числе для Large-size problem (табл. 1).

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow \min, \quad x_i^0 = 0,5 + i \cdot 10^{-6}, \quad i = \overline{1, n}.$$

**5.1.2. Квазисепарабельная функция.** Сложность квазисепарабельных функций при изменении значения множителя, входящего в состав второго слагаемого, может возрастать. Функции данного типа также являются популярными для проведения вычислительных экспериментов по исследованию алгоритмов оптимизации (см., например, [4]).

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 0,001 \sum_{i=1}^{n-1} i(x_i - x_{i+1})^2 \rightarrow \min, \quad x_i^0 = 1,0 + i \cdot 10^{-7}, \quad i = \overline{1, n}.$$

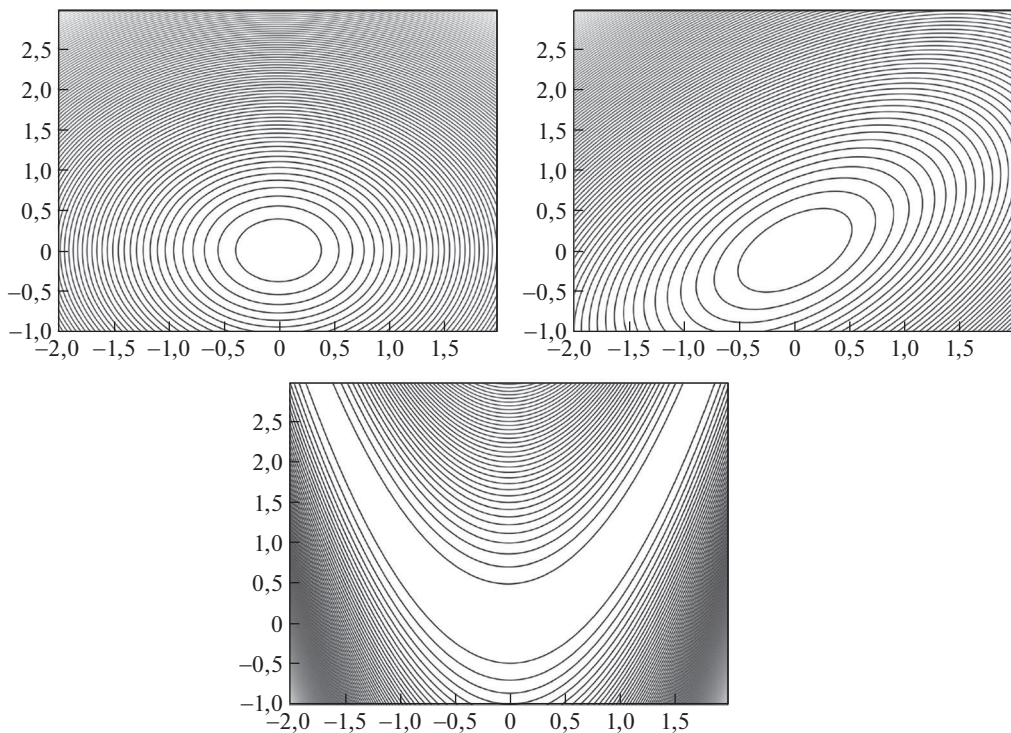


Рис. 1. Линии уровня тестовых сепарабельной, квазисепарабельной функций и функции Розенброка–Скокова.

### 5.1.3. Функция Розенброка–Скокова.

$$f(x) = (1 - x_1)^2 + 100 \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}^2)^2 \rightarrow \min, \quad x_i^0 = -2,0 + i \cdot 10^{-7}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Сравнение работоспособности предложенного алгоритма с авторской библиотекой алгоритмов оптимизации, включающей программные реализации методов Ньютона, Барзилаи–Борвейна, Поляка, Бройдена–Флетчера–

**Таблица 1.** Результаты вычислительных экспериментов для семейства сепарабельных функций. Здесь  $Var1$  — результаты расчетов для первого варианта алгоритма,  $Var2$  — для второго варианта алгоритма,  $f_{rec}$  — наилучшее достигнутое значение функции,  $ng$  — достигнутое значение нормы градиента,  $iter$  — число итераций алгоритма

$n$	5	50	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^5$
$Var1 f_{rec}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$Var1 iter$	8	8	8	8	8	8
$Var1 ng$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$Var2 f_{rec}$	$1,34 \cdot 10^{-15}$	$1,33 \cdot 10^{-11}$	$9,94 \cdot 10^{-31}$	$2,64 \cdot 10^{-15}$	—	—
$Var2 iter$	8	8	9	9	—	—
$Var2 ng$	$7,3 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^{-6}$	$3,0 \cdot 10^{-15}$	$2,0 \cdot 10^{-7}$	—	—



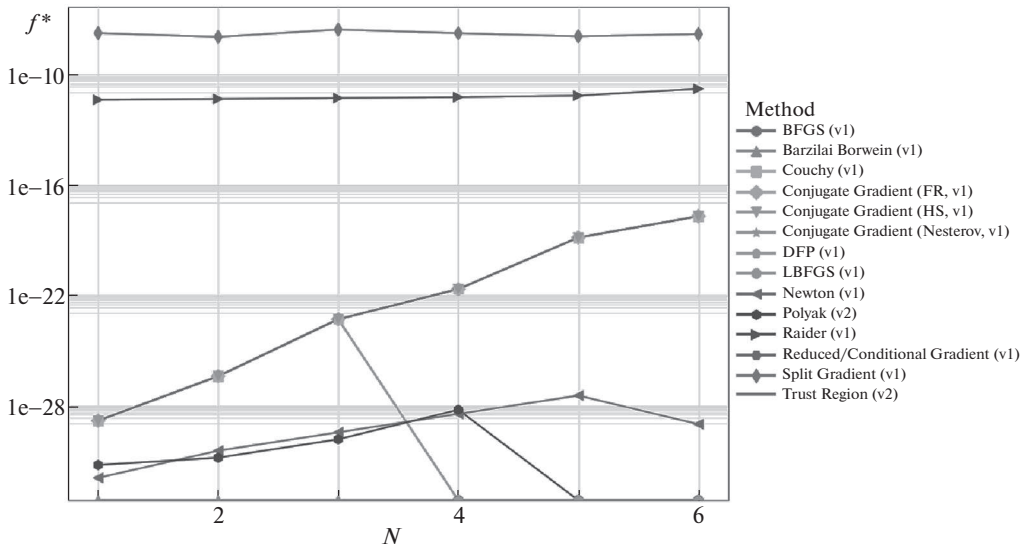


Рис. 2. Результаты вычислительных экспериментов для библиотеки методов оптимизации на сепарабельной функции возрастающих размерностей.

Гольдфарба–Шанно и других, отображено на рис. 2. В данном случае тестирование проводилось с использованием сепарабельной функции размерности от 5 до  $5 \cdot 10^5$  переменных (табл. 1). Видно, что с использованием предложенной модификации метода доверительных брусков удается решить задачу для всех рассматриваемых размерностей сепарабельной функции.

### 5.2. Результаты решения задачи оптимального управления

Приведем пример модельной тестовой задачи оптимального управления с невыпуклым множеством достижимости, характеризующимся малой областью притяжения глобального экстремума.

$$(4) \quad \dot{x}_1(t) = u(t) - \sin \sqrt{|x_1(t)|}, \quad \dot{x}_2(t) = u(t) + \cos \sqrt{|x_1(t)|},$$

$$(5) \quad x_1(t_0) = 1, \quad x_2(t_0) = 1, \quad u(t) \in [-0,45, 0,45], \quad t \in T = [0, 27],$$

$$(6) \quad I(u) = (x_1(t_1) + 3)^2 + (x_2(t_1) + 0,5)^2 \downarrow.$$

Данная тестовая задача позволяет смоделировать вычислительные трудности, характерные для рассматриваемых задач оптимального управления с нелинейными системами дифференциальных уравнений и невыпуклыми функционалами. На рис. 3 представлено множество достижимости в приведенной тестовой задаче с выделенной экстремальной точкой, в которой достигается наименьшее значение целевого функционала на соответствующих оптимальных траекториях и управлении (рис. 3).

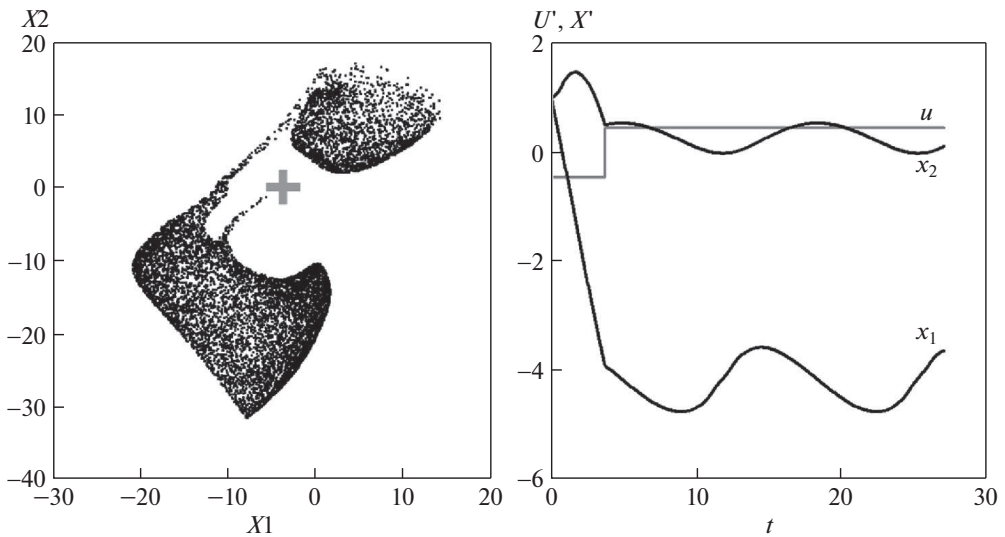


Рис. 3. Множество достижимости и экстремальная точка (слева), оптимальные траектории и управление (справа) в представленной модельной задаче.

## 6. Заключение

Проведенные эксперименты подтвердили теоретический вывод о неприемлемости использования разностных схем для решения задач размерности более  $10^3$ . Время, необходимое для получения информации о матрице Гессе (точнее, только о ее диагонали), становится совершенно неприемлемым. Это продемонстрировано в табл. 2 и 3 соотношением производительности вариантов алгоритма, второй из которых основан на разностной схеме для аппроксимации диагонали гессиана.

К достоинствам предложенного алгоритма следует отнести его способность решать задачи существенно больших размерностей, чем любые методы, требующие полной квадратичной памяти, в том числе, методы ньютоновского типа, квазиньютоновские методы, метод Пауэлла и другие. Наблюдение графиков сходимости (значений функций с ростом числа итераций) показывает, что, к сожалению, эффект ускорения за счет информации второго порядка в данной конструкции алгоритмов оказывается существенным только на начальных стадиях расчетов, позволяя очень быстро получить неплохие результаты. Далее проявляется «эффект малых вариаций», что объясняется, очевидно, переходом алгоритма в режим «почти градиентного» метода.

Данный алгоритм может использоваться для решения стандартной задачи оптимального управления, которая на практике характеризуется наличием нелинейных систем дифференциальных уравнений и невыпуклых функционалов, что, как правило, приводит к неединственности решения и необходимости разрабатывать специализированные вычислительные технологии их исследования. С другой стороны, рост вычислительных мощностей современных компьютеров позволяет повышать эффективность алгоритмов поиска решения в задачах оптимизации, в том числе за счет использования технологий

**Таблица 2.** Результаты вычислительных экспериментов для семейства квазисепарабельных функций

$n$	5	50	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^5$
$Var1 f_{rec}$	$4,29 \cdot 10^{-21}$	$2,99 \cdot 10^{-19}$	$1,55 \cdot 10^{-7}$	$1,05 \cdot 10^{-11}$	$1,29 \cdot 10^{-11}$	$1,36 \cdot 10^{-11}$
$Var1 iter$	10	10	10	121	1413	17 231
$Var1 ng$	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$8,6 \cdot 10^{-9}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$	$9,9 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$
$Var2 f_{rec}$	$1,07 \cdot 10^{-12}$	$9,09 \cdot 10^{-12}$	$1,11 \cdot 10^{-11}$	$7,69 \cdot 10^{-12}$	—	—
$Var2 iter$	11	13	24	149	—	—
$Var2 ng$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$6,0 \cdot 10^{-6}$	$6,7 \cdot 10^{-6}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$	—	—

**Таблица 3.** Результаты вычислительных экспериментов для семейства функций Розенброка–Скокова

$n$	5	50	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^5$
$Var1 f_{rec}$	$1,03 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-13}$	$2,51 \cdot 10^{-13}$	$2,5 \cdot 10^{-13}$	$1,17 \cdot 10^{-12}$	—
$Var1 iter$	$> 6,3 \cdot 10^6$	13 587	43 997	139 219	$> 0,2 \cdot 10^6$	—
$Var1 ng$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	—
$Var2 f_{rec}$	$1,06 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-13}$	$2,51 \cdot 10^{-13}$	—	—	—
$Var2 iter$	$> 6,6 \cdot 10^6$	13 596	43 999	—	—	—
$Var2 ng$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	—	—	—

параллельного запуска однородных процессов. Проведенные вычислительные эксперименты продемонстрировали возможность использования предложенного алгоритма для решения вспомогательных задач больших размерностей, возникающих при редукции исходной задачи на мелкой сетке к последовательности конечномерных в рамках стандартной идеологии использования прямых методов для решения задач оптимального управления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andrianov A.N., Anikin A.S., Bychkov I.V., Gornov A.Y.* Numerical solution of huge-scale quasiseparable optimization problems // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2017. Vol. 38. No. 5. P. 870–873.
2. *Brent R.* Algorithms for Minimization without Derivatives. Prentice Hall (reprinted by Dover, 2013).
3. *Bushaw D.W.* Differential equations with a discontinuous forcing term. Stevens Inst. Technol. Experimental Towing Tank Rept. 469, Hoboken, N.J., 1953.
4. *Gornov A.Yu., Andrianov A.N., Anikin A.S.* Algorithms for the solution of huge quasiseparable optimization problems // *Proc. of VI International Workshop: “Critical Infrastructures in the Digital World”*. Irkutsk. 2016. P. 76–77.
5. *Skokov V.A.* Methods and algorithms for unconditional minimization of functions of many variables (review) // *Scientific report*. 1974.
6. *Ya-Xiang Yuan.* Recent advances in trust region algorithms // *Math. Program., Ser. B*. 2015. Vol. 151. P. 249–281.
7. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

8. *Васильев О.В.* Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994.
9. *Васильев О.В., Аргучинцев А.В.* Методы оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Физматлит, 1999.
10. *Горнов А.Ю.* Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.
11. *Деннис Дж. мл., Шнабель Р.Б.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
12. *Дылта В.А.* Оптимизация динамических систем с разрывными траекториями и импульсными управлениями // Соросовский образоват. журн. 1999. № 8. С. 110–115.
13. *Иванов В.В.* Методы вычислений на ЭВМ. Киев: Наукова Думка, 1986.
14. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
15. *Фельдбаум А.А.* Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // АиТ. 1953. Т. 14. № 6. С. 712–728.
16. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. Т. 20. 1977. С. 101–166.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.*

Поступила в редакцию 01.02.2022

После доработки 19.04.2022

Принята к публикации 29.06.2022