Автоматика и телемеханика, № 11, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук (va.alexandrov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва), Е.Ю. ЗЫБИН, д-р техн. наук (zybin@mail.ru),
В.В. КОСЬЯНЧУК, д-р техн. наук (kos.vl.v@gmail.com),
Н.И. СЕЛЬВЕСЮК, д-р техн. наук (his@gosniias.ru)
(ФАУ Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, Москва),
А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru),
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; Национальный исследовательский университет
"Московский физико-технический институт", Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСХОДА ТОПЛИВА ВОЗДУШНОГО СУДНА НА ЭТАПЕ НАБОРА ВЫСОТЫ¹

Рассматривается задача минимизации расхода топлива дозвукового турбореактивного пассажирского самолета на этапе набора высоты. Целевая функция оптимизации кроме расхода топлива включает время, затраченное на этап набора высоты, так как оптимизация набора высоты это часть задачи оптимизации всего полета с требованием прибытия в заданную точку в заданное время. Так как в конце этапа нужно выйти на заданные значения скорости и высоты, с которых должен начинаться крейсерский полет, то в целевую функцию добавлены штрафы за недостижение этих значений. Значение целевой функции — это результат численного решения системы дифференциальных уравнений, поэтому для оптимизации предлагается безградиентный метод поиска с использованием точек-кандидатов и учетом ограничений. Рассмотрен пример оптимизации расхода топлива в сравнении со стандартным профилем набора высоты для двух вариантов возможной реализации системы управления: управление тягой и тангажом или управление только тангажом при постоянном значении управления тягой.

Ключевые слова: оптимизация, дозвуковой турбореактивный самолет, набор высоты, расход топлива, моделирование полета.

DOI: 10.31857/S0005231022110034, EDN: KEFPHO

1. Введение

В работе исследуется задача оптимизации этапа набора высоты в рамках общей задачи минимизации расхода топлива дозвукового турбореактивного

 $^{^1}$ Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проек
т $N^{\!_{2}}$ 21-71-30005.

среднемагистрального узкофюзеляжного пассажирского самолета при условии прибытия в заданное время в точку захода на посадку. В [1] рассматривался этап крейсерского полета. Этап набора высоты начинается от высоты, на которой заканчивается этап взлета, когда шасси и закрылки убраны, и конфигурация самолета — это конфигурация полета по маршруту. Обычно это значение принимается равным 1500 футов, но может отличаться в зависимости от воздушного судна и условий аэродрома. Для исследуемого этапа должна быть задана эта начальная высота и другие начальные условия для этой точки: скорость, угол наклона траектории, масса. В конце этапа набора высоты необходимо выйти на значения высоты и скорости, с которых будет начинаться этап крейсерского полета. В рассматриваемой задаче оптимизации этапа набора высоты предполагается, что эти значения заданы. Необходимо учитывать ограничения допустимой скорости, в том числе обусловленные ограничением шума на малой высоте, а также ускорения и скороподъемности, обусловленные не только техническими ограничениями воздушного судна, но и требованиями комфорта пассажиров. Существенной особенностью этапа набора высоты является учет доступной тяги двигателей, так как допустимые значения ускорения и угла наклона траектории могут требовать значения тяги, превышающие максимально доступное. Кроме того, доступная тяга уменьшается с ростом высоты полета. Это приводит к тому, что если пытаться поддерживать высокое значение угла наклона траектории, то скорость будет падать, а при поддержании допустимого ускорения или даже постоянной скорости угол наклона траектории должен уменьшаться по мере **увеличения** высоты.

Так как этап набора высоты непродолжителен, то очевидно, что выигрыш расхода топлива, полученный в результате оптимизации, в абсолютных значениях будет незначителен. В [2] такой вывод сделан при сравнении результатов оптимизации набора высоты дальнемагистрального самолета для трех различных критериев: минимизации пройденного расстояния, затраченного времени и расхода топлива. Экономия при минимизации расхода топлива по сравнению с расходом, полученным при оптимизации по другим критериям, составила менее 1%. Необходимо заметить, что в этой работе горизонтальное ускорение и угол наклона траектории принимаются постоянными в каждый момент времени, что позволяет не моделировать систему управления, пренебрегая переходными процессами.

В [3] движение воздушного судна моделируется через энергетическое состояние с использованием аппроксимирующей табличной функции, зависящей от высоты, скорости, угла атаки, угла руля высоты и управления тягой. Для определения секундного расхода топлива также используется таблица зависимости от высоты, скорости и управления тягой. Таким образом, переходные процессы тоже не учитываются, и система управления не моделируется. При поиске оптимального решения методом нелинейного программирования для угла набора высоты и управления тягой получено подтверждение применяемого на практике правила, что значение управления тягой выбирается максимально разрешенным (положение "Climb") на всем этапе набора высоты. Для среднемагистрального самолета получена экономия топлива до 0,9% по сравнению со стандартным профилем с постоянной приборной скоростью. При оптимизации и сравнении результатов учитывается типовое ограничение приборной скорости на высоте до 10 000 футов. Заметим, что в этой работе не учитывается ограничение на горизонтальное ускорение, что приводит к резкому росту скорости и скачкам угла набора высоты при достижении высоты полета 10 000 футов.

Многокритериальная оптимизация, учитывающая кроме расхода топлива выбросы CO_2 и NO_x , рассматривается в [4], где отмечается, что в зависимости от условий полета выбросы NO_x могут быть непропорциональны расходу топлива. Так как этап набора высоты часто происходит в густонаселенных районах, сокращение вредных выбросов является одним из основных факторов оптимизации.

Экологический критерий оптимизации как сумма расхода топлива и уровня шума рассмотрен в [5]. Здесь задача оптимизации сформулирована как задача терминального управления и предложено ее решение псевдоспектральным методом Чебышева. Рассмотрена оптимизация набора высоты дальнемагистрального самолета для четырех значений начальной массы и проведено сравнение с записями данных реальных полетов. Полученную значительную экономию топлива от 7 до 23% оптимального решения по сравнению с реальными полетами можно объяснить тем, что, во-первых, при оптимизации не учитывалось время, затраченное на набор высоты, и это время получилось примерно на 30% больше при практически том же расстоянии полета, а во-вторых, в модели не учитываются ограничения на допустимое ускорение и доступную тягу, что видно на приведенных графиках скорости. Поэтому важно находить значение критерия оптимизации по более точной модели системы.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана математическая модель движения центра масс воздушного судна без маневрирования по курсу. Это система с двумя степенями свободы: управление тягой и тангажом, которые формируются в соответствии с выбранными значениями скорости и угла наклона траектории. При том, что большую часть этапа набора высоты значение тяги получается равным максимально доступному, рассмотрен также вариант системы с одной степенью свободы — управление тангажом, тогда как тяга принимается равной максимально доступной. В разделе 3 приведена постановка задачи оптимизации, где вектор варьируемых переменных — это значения уставок для соответствующих регуляторов калиброванной приборной скорости и угла наклона траектории на каждом участке равной длины, на которые разбивается этап набора высоты, а целевая функция — это расход топлива на этапе со штрафами за время и недостижение заданных значений скорости и высоты в конце этапа. В разделе 4 предложен алгоритм оптимизации, основанный на покоординатном спуске с учетом ограничений и со вспомогательными точками-кандидатами. Пример оптимизации набора высоты среднемагистрального пассажирского самолета представлен в разделе 5. Заключительные выводы приведены в разделе 6.

2. Математическая модель движения воздушного судна

Модель движения центра масс воздушного судна может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений [1, 6, 7]:

(1)

$$\begin{split}
m\dot{V} &= T\cos(\alpha + \phi) - \frac{1}{2}c_{\rm x}\rho SV^2 - mg\sin\Theta + Vq_{\rm c},\\
mV\dot{\Theta} &= T\sin(\alpha + \phi) + \frac{1}{2}c_{\rm y}\rho SV^2 - mg\cos\Theta,\\
\dot{h} &= V\sin\Theta,\\
\dot{L} &= V\cos\Theta + V_{\rm w},\\
\dot{m} &= -q_{\rm c},\\
\dot{T} &= -k_1T + k_2\delta_T,\\
\dot{\theta} &= -k_3\theta + k_4\delta_\theta,
\end{split}$$

где m — масса воздушного судна (кг), V — воздушная скорость (м/с), T — суммарная тяга двигателей (H), α — угол атаки (рад), ϕ — угол установки двигателей (рад), c_x, c_y — аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, ρ — плотность воздуха (кг/м³), S — площадь крыла (м²), g — ускорение свободного падения (м/с²), Θ — угол наклона траектории (рад), h — высота полета (м), L — пройденное расстояние (м), V_w — скорость попутной/встречной составляющей ветра (м/с), q_c — секундный расход топлива (кг/с), θ — тангаж — угол между осью воздушного судна и горизонтом (рад), δ_T, δ_θ — значения сигналов управления, k_1, k_2, k_3, k_4 — коэффициенты упрощенных моделей первого порядка динамики тяги и тангажа. Точное моделирование тяги — это фактически моделирование работы двигателя, которая описывается намного более сложной системой уравнений с большим количеством параметров. Для целей оценки расхода топлива предлагается учитывать только доминирующую динамику.

К этим дифференциальным уравнениям нужно добавить, что угол атаки определяется как разность тангажа и угла наклона траектории, как показано на рис. 1:

(2)
$$\alpha = \theta - \Theta$$

а секундный расход топлива — это произведение тяги и удельного расхода топлива $\eta~(\kappa r/c/H):$

(3)
$$q_{\rm c} = \eta T.$$

Переменные системы (1)-(3) можно разбить на несколько групп:

1) переменные состояния системы дифференциальных уравнений: $m, V, \Theta, h, L, T, \theta$, для которых требуется задать начальные значения;



Рис. 1. Углы тангажа $\theta,$ атак
и α и наклона траектории $\Theta.$ Стрелкой показано направление движения центра масс.

2) известные константы: ϕ , S, k_1, k_2, k_3, k_4 — должны быть заданы для исследуемой модели воздушного судна, g принимаем равным стандартному значению $g_0 = 9,80665$;

3) параметры атмосферы: значение ρ в зависимости от текущей высоты в этой работе определяем из стандартной атмосферы [8] или оно может быть получено из данных температуры и давления реальной атмосферы; скорость ветра в этой работе не учитываем, и значение $V_{\rm w}$ принимаем равным 0;

4) значения табличных или аппроксимирующих функций, заданных для исследуемой модели воздушного судна, в зависимости от текущих значений переменных состояния: аэродинамические коэффициенты c_x и c_y зависят от угла атаки α и числа Маха M = V/a, где a — скорость звука на текущей высоте полета; удельный секундный расход топлива η зависит от текущих значений высоты, числа Маха и тяги [9];

5) вычисляемые значения угла атаки α и секундного расхода топлива q_c по формулам (2) и (3) соответственно;

6) значения сигналов управления $\delta_T, \delta_{\theta}$.

Значения δ_T , δ_θ формируются системой управления, работу которой также надо моделировать. Если точная реализация системы управления доступна и ее вычислительная сложность не велика, то можно моделировать ее полностью. При использовании упрощенной модели системы управления необходимо добиться схожих переходных процессов, в том числе для управляющих сигналов для корректной оценки расхода топлива. В настоящей статье будем моделировать систему управления вычислительно простыми алгоритмами ПИД- и ПИ-регуляторов, коэффициенты которых подобраны так, чтобы переходные процессы были близки к реальной системе.

Предполагается, что на этапе набора высоты управление тягой формируется ПИД-регулятором скорости:

(4)
$$\delta_T = \text{PID}(V_{\text{SP}} - V_{\text{CAS}}),$$

где $V_{\rm SP}$ — требуемое значение калиброванной приборной скорости (узлы), а $V_{\rm CAS}$ — текущее значение калиброванной приборной скорости, которое можно

вычислить по стандартной формуле [10]:

(5)
$$V_{\text{CAS}} = a_0 \sqrt{5 \left(\left(\frac{P}{P_0} ((1+0,2M^2)^{3,5} - 1) + 1 \right)^{2/7} - 1 \right)},$$

где a_0, P_0 — скорость звука и давление на уровне моря в стандартной атмосфере, P — давление на текущей высоте, M — число Маха. Таким образом, калиброванная приборная скорость определяется значениями переменных состояния V и h. Требуемое значение $V_{\rm SP}$ должно определяться исходя из целей оптимизации с учетом ограничений на допустимые значения. Заметим, что истинная воздушная скорость V в системе (1), соответствующая значению $V_{\rm CAS}$, зависит от высоты, т.е. при постоянном значении калиброванной приборной скорости $V_{\rm CAS}$ значение истинной воздушной скорости V должно возрастать с ростом высоты.

Следует учитывать, что в конце этапа набора высоты нужно выйти на заданную скорость начала крейсерского полета, которая выражена числом Маха $M_{\rm SP}$, и в крейсерском полете регулятор поддерживает заданное число Маха. Поэтому при достижении заданной скорости начала крейсерского полета регулятор тяги должен переключиться на заданное число Маха $M_{\rm SP}$ вместо калиброванной приборной скорости:

(6)
$$\delta_T = \text{PID}(M_{\text{SP}} - M).$$

Будем также предполагать, что управление тангажом формируется ПИ-регулятором угла наклона траектории:

(7)
$$\delta_{\theta} = \mathrm{PI}(\Theta_{\mathrm{SP}} - \Theta),$$

где $\Theta_{\rm SP}$ — требуемое значение угла наклона траектории, которое при достижении заданной высоты начала крейсерского полета $h_{\rm SP}$ формируется регулятором высоты:

(8)
$$\Theta_{\rm SP} = K_h (h_{\rm SP} - h).$$

Таким образом, заданные значения $V_{\rm SP}$ и $\Theta_{\rm SP}$ для заданных начальных условий определяют полет воздушного судна в соответствии с уравнениями (1)–(5), (7) до достижения заданных целевых значений набора высоты: числа Маха $M_{\rm SP}$, когда регулятор (4) заменяется на (6), и высоты $h_{\rm SP}$, когда уставка для регулятора (7) формируется регулятором (8). Численно моделируя полет на некотором участке, можно получить значение расхода топлива на этом участке, а также значения скорости и высоты, достигнутые в конце этого участка. При этом необходимо учитывать существующие ограничения:

— технические — это допустимые минимальная и максимальная калиброванные приборные скорости $V_{\text{CAS}_{\min}}$, $V_{\text{CAS}_{\max}}$, максимально допустимые угол атаки α , ускорение и скороподъемность, доступная тяга двигателей T;

— диспетчерские — например, во многих аэропортах действует ограничение $V_{\text{CAS}} < 250$ узлов для высоты $h < 10\,000$ футов;

 целевые — скорость и высота в конце этапа должны отличаться от требуемых на величину не более заданной погрешности.

На рассматриваемом этапе доступная тяга двигателей — это не предельное значение, а значение, рекомендуемое для этапа набора высоты (положение "Climb" на рычаге управления двигателями). Кроме того, при неизменном значении управления тягой само значение тяги зависит от скорости и атмосферного давления — при росте скорости и высоты значение тяги снижается. При моделировании для получения значения доступной тяги T_{max} можно использовать аппроксимирующие формулы [9]. Если принять приоритет скорости, то требуемое значение угла наклона траектории должно выбираться как $\check{\Theta}_{\text{SP}} = \min(\Theta_{\text{SP}}, \check{\Theta})$, где $\check{\Theta}$ — максимально возможный угол наклона траектории для текущих условий, определяемый из (1) для значения доступной тяги T_{max} :

(9)
$$\check{\Theta} = \arcsin\left(\left(T_{\max}\cos(\alpha + \phi) - \frac{1}{2}c_{x}\rho SV^{2} - m\dot{V}\right)/mg\right).$$

Особенность этапа набора высоты состоит в том, что большую часть времени необходимо использовать всю доступную тягу, чтобы обеспечить ускорение и набор высоты. На таких участках вместо предпоследнего уравнения системы (1), моделирующего тягу, и регулятора тяги (4) можно принять $T = T_{\rm max}$, а управление тангажом будет осуществляться для поддержания заданной скорости:

(10)
$$\delta_{\theta} = \text{PID}(V_{\text{SP}} - V_{\text{CAS}}).$$

Такой режим может сохраняться до того момента, когда будет достигнута заданная высота в конце этапа. После этого управление тангажом переключается на регулятор угла наклона траектории (7), где $\Theta_{\rm SP}$ определяется разницей заданного и текущего значений высоты. При достижении заданных скорости $M_{\rm SP}$ и высоты $h_{\rm SP}$ включается управление тягой (6).

3. Постановка задачи

В работе рассматривается задача оптимизации расхода топлива воздушного судна на этапе набора высоты при предположении прямолинейного движения, т.е. без учета маневрирования по курсу. Предполагается, что заданы

— параметры воздушного судна: константы ϕ , S, таблицы и аппроксимирующие формулы для аэродинамических коэффициентов $c_{\rm x}(\alpha, M)$ и $c_{\rm y}(\alpha, M)$, коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 для системы (1), формулы и коэффициенты регуляторов (4), (6), (7), (8), аппроксимирующие формулы для расчета удельного расхода топлива $\eta(h, M, T)$ и доступной тяги $T_{\rm max}(h, V_{\rm CAS})$;

— начальные значения переменных состояния системы (1): m, V, $\Theta, h, L, T, \theta;$

— ограничения допустимых значений: скорости $V_{\text{CAS}} \in [V_{\text{CAS}_{\min}}, V_{\text{CAS}_{\max}}]$, углов наклона траектории $\Theta \leq \Theta_{\max}$ и атаки $\alpha \leq \alpha_{\max}$, ускорения $\dot{V} \leq \dot{V}_{\max}$ и скороподъемности $V \sin \Theta \leq V_{\text{vert}_{\max}}$; — значения скорости $M_{\rm SP}$ и высоты $h_{\rm SP}$, которые должны быть достигнуты в конце этапа набора высоты, и допустимые погрешности ε_M и ε_h ;

— горизонтальное расстояние полета R, отведенное на этап набора высоты, достаточное и с некоторым запасом, чтобы заданные значения скорости и высоты в конце этапа могли быть достигнуты.

Тогда, как следует из приведенного выше описания динамики движения воздушного судна, необходимо определить для каждого момента времени требуемые значения калиброванной приборной скорости V_{SP} и угла наклона траектории Θ_{SP} , обеспечивающие при соблюдении всех ограничений выход на заданные значения скорости и высоты в конце этапа с минимальным расходом топлива. Предлагается формировать значения $V_{\rm SP}$ и $\Theta_{\rm SP}$ как кусочно-постоянные функции, разделив расстояние этапа на *n* участков равной длины, на каждом из которых будут использоваться постоянные значения $V_{\text{SP}_i}, \Theta_{\text{SP}_i}, i = 1, \ldots, n$. В конце расстояния, отведенного на этап набора высоты, нужно предусмотреть участок длиной $r_{\rm fin}$, на котором управление осуществляется исходя из требуемых значений скорости и высоты в конце этапа. Тогда целевые значения скорости или высоты не будут достигнуты только в случае выбора слишком низких значений V_{SP_i} или Θ_{SP_i} , а в остальных случаях этот финальный участок может давать дополнительный расход топлива при неоптимальном выборе значений V_{SP_i} и Θ_{SP_i} . Таким образом, при заданных значениях R, $r_{\rm fin}$ и n длина участков равна $r = \frac{R - r_{\rm fin}}{r}$.

Задача 1. Для этапа набора высоты для заданных параметров воздушного судна, начальных условий, расстояния, отведенного на этап набора высоты, и числа участков п определить значения вектора

(11)
$$x = [V_{\mathrm{SP}_1}, \dots, V_{\mathrm{SP}_n}, \Theta_{\mathrm{SP}_1}, \dots, \Theta_{\mathrm{SP}_n}]$$

такие, что при соблюдении заданных ограничений на скорость, угол наклона траектории, ускорение, скороподъемность и доступную тягу двигателей минимизируется функционал

(12)
$$f(x) = \int_{0}^{t_{\rm cl}} q_{\rm c}(t)dt + C_1 t_{\rm cl} + C_2(M) \left| M_{\rm SP} - M(t_{\rm cl}) \right| + C_3(h) \left| h_{\rm SP} - h(t_{\rm cl}) \right|,$$

где $t_{\rm cl}$ — время, затраченное на прохождение расстояния R, а C_1, C_2, C_3 — весовые коэффициенты.

Для того, чтобы незначительные отклонения полученных в конце этапа значений скорости $M(t_{\rm cl})$ и высоты $h(t_{\rm cl})$ от заданных не влияли на результат оптимизации, нужно определить допустимые погрешности ε_M и ε_h и при выполнении условий $|M_{\rm SP} - M(t_{\rm cl})| < \varepsilon_M$ и $|h_{\rm SP} - h(t_{\rm cl})| < \varepsilon_h$ принимать значения $C_2(M)$ и $C_3(h)$ равными 0. При превышении допустимых погрешностей значения весовых коэффициентов $C_2(M)$ и $C_3(h)$ должны быть достаточно большими, чтобы полученное значение функционала (12) не могло быть оптимальным. Итак, в функционале (12) первое слагаемое соответствует расходу топлива на этапе, второе учитывает время, затраченное на этап, а третье и четвертое — это штрафы за недостижение заданных скорости и высоты в конце этапа. Про второе слагаемое поясним, что хотя здесь нет задачи минимизации времени полета, но есть задача прилета в заданное время. Эта задача решается при оптимизации этапов крейсерского полета и снижения, и если уменьшение времени, отведенного на эти этапы приводит к увеличению расхода топлива, то это должно быть учтено при оптимизации набора высоты выбором весового коэффициента C_1 . Его значение должно быть равно дополнительному расходу топлива на последующих этапах при сокращении времени, оставленного на эти этапы, на 1 секунду.

4. Алгоритм оптимизации

В задаче оптимизации, соответствующей задаче 1, вектор варьируемых переменных (11) состоит из двух групп: $x = [x^1, x^2]$, где $x^1 = [V_{\text{SP}_1}, \ldots, V_{\text{SP}_n}]$ — значения скорости, $x^2 = [\Theta_{\text{SP}_1}, \ldots, \Theta_{\text{SP}_n}]$ — значения угла наклона траектории для каждого из участков. Таким образом, *i*-му участку полета соответствуют *i*-е элементы обеих групп. Для варьируемых переменных заданы ограничения:

(13)
$$V_{\mathrm{SP}_i} \in [V_{\mathrm{CAS}_{\min}}, V_{\mathrm{CAS}_{\max}}], \quad \Theta_{\mathrm{SP}_i} \in [0, \Theta_{\max}], \quad i = 1, \dots, n,$$

которые можно записать как $x_i \in [lb_i, ub_i]$, $i = 1, \ldots, 2n$, где lb_i, ub_i — соответствующие нижняя и верхняя границы для *i*-го элемента вектора x. При этом нужно учитывать, что дополнительные ограничения, такие как ограничение скорости на высоте до 10 000 футов и ограничение угла наклона траектории, обусловленное доступной максимальной тягой, здесь не описываются, так как зависят от текущих значений переменных состояния и не могут быть привязаны к участкам, связанным только с расстоянием. Эти ограничения должны быть реализованы в процедуре численного моделирования при вычислении значения целевой функции.

Значение целевой функции (12) — это результат численного решения системы нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений (1)–(10), поэтому ее градиент практически недоступен. Следует отметить, что решение для любого вектора варьируемых переменных находится для одинакового расстояния R независимо от момента достижения заданных скорости и высоты в конце этапа, т.е. сравниваются расход топлива и время для расстояния, отведенного на этап набора высоты, с дополнительными штрафами при недостижении заданных целевых значений скорости и высоты.

Задачу поиска минимума целевой функции (12) для вектора варьируемых переменных (11) в границах (13) предлагается решать детерминированным методом, основанным на покоординатном спуске [11, 12], с вспомогательными точками-кандидатами. Особенности вычисления целевой функции ставят дополнительные задачи алгоритму оптимизации. Одна из них — это необходимость учитывать, что выбранное значение угла наклона траектории на *i*-м участке, удовлетворяющее ограничениям (13), может быть не реализовано из-за ограничения доступной тяги (9), и тогда для различных вариантов вектора варьируемых переменных (11) могут получаться одинаковые значения целевой функции. Для эффективного поиска реализован выбор x с меньшим значением угла наклона траектории при отличии значений целевой функции на величину, меньшую заданного порога ε_f .

Другая особенность — это неявные ограничения на итоговые скорость $M_{\rm SP}$ и высоту $h_{\rm SP}$, реализованные как элементы целевой функции. Хотя для их достижения выделен отдельный участок, предыдущая «программа» набора высоты может быть такой, что эти требуемые значения скорости и/или высоты будут не достижимы. Для получения решения, удовлетворяющего основной задаче этапа набора высоты — выход на заданные значения скорости и высоты, необходим выбор соответствующих весовых коэффициентов C_2, C_3 в целевой функции (12).

Итак, для решения задачи 1 предлагается следующий алгоритм оптимизации.

Алгоритм 1.

1. Выбрать начальную точку $x^0 = [x^{1,(0)}, x^{2,(0)}] : x_i^0 \in [lb_i, ub_i].$

2. Рассчитать рекордное значение целевой функции $f^* = f(x^0)$.

3. Инициировать счетчики:

l=0 — общий счетчик итераций,

 $k^1 = k^2 = 1$ — внутренние счетчики для каждой группы переменных,

 $l^{\text{bad}} = 0 - \text{счетчик}$ неэффективных шагов.

4. Выбрать блок переменных j = mod(l, 2) + 1.

5. Выбрать основную изменяемую компоненту k^{j} в блоке переменных x^{j} и увеличить ее счетчик: $k^{j} \leftarrow (\text{mod}(k^{j}+1,n)+1).$

6. Сформировать набор точек-кандидатов $X = \{x^a, x^b, \ldots\}$ на основе выбранной группы и изменяемой компоненты.

7. Вычислить целевую функцию во всех точках-кандидатах и выбрать среди них минимальное значение и соответствующую точку

$$x^{\text{cand}} = \arg\min_{x \in X} f(x).$$

8. Если значение функции удалось улучшить $(f(x^{\text{cand}}) < f^*)$, то изменить текущую точку $x^{(l+1)} \leftarrow x^{\text{cand}}$, рекордное значение $f^* \leftarrow f(x^{\text{cand}})$, сбросить счетчик неэффективных шагов $l^{\text{bad}} \leftarrow 0$ и перейти к шагу 4.

9. Если значение целевой функции не улучшается, но близко к рекорду $(f(x^{\text{cand}}) < f^* + \varepsilon_f)$, а угол подъема уменьшился, то изменить текущую точку $x^{(l+1)} \leftarrow x^{\text{cand}}$, увеличить счетчик неэффективных шагов $l^{\text{bad}} \leftarrow l^{\text{bad}} + 1$ и перейти к шагу 4.

10. В противном случае сохранить текущую точку $x^{(l+1)} \leftarrow x^{(l)}$ и рекордное значение, увеличить счетчик неэффективных шагов $l^{\text{bad}} \leftarrow l^{\text{bad}} + 1$.

11. Если счетчик неэффективных шагов равен числу переменных $l^{\text{bad}} = 2n$, то завершить алгоритм и вернуть в качестве решения текущую точ-

ку $x^{(l)}$ и соответствующий расход топлива $f(x^{(l)})$. В противном случае перейти к шагу 4.

Изменение основной выбранной компоненты k характеризуется параметром алгоритма γ , играющим роль длины шага, причем его значение различно для каждой группы (скорости и угла наклона траектории). Подзадача выбора точек-кандидатов состоит в подборе нескольких «соседних» по отношению к текущей точке, также удовлетворяющих ограничениям. Первые две точки соответствуют изменению одной компоненты:

$$\begin{aligned} x_k^a &= \max\{x_k - \gamma, \ lb_k\},\\ x_k^b &= \min\{x_k + \gamma, \ ub_k\},\\ x_i^a &= x_i^b = x_i, \ i \neq k. \end{aligned}$$

Здесь операции минимума и максимума гарантируют, что значение k-й компоненты не выйдет за имеющиеся границы. Очевидно, что если текущее значение уже находится на своей границе, то соответствующее изменение координаты не требуется, так как точка-кандидат будет совпадать с исходной точкой. Например, если $x_k = lb_k$, то $x_k^a = x_k$, и набор кандидатов состоит только из одной точки x^b .

Еще четыре точки-кандидата формируются изменением соседних компонент:

$$k > 1:$$

$$\gamma^{c} = \min\{\gamma, x_{k} - lb_{k}, ub_{k-1} - x_{k-1}\},$$

$$x_{k}^{c} = x_{k} - \gamma^{c},$$

$$x_{k-1}^{c} = x_{k-1} + \gamma^{c},$$

$$x_{j}^{c} = x_{j}, j \neq k, k - 1,$$

$$\gamma^{d} = \min\{\gamma, ub_{k} - x_{k}, x_{k-1} - lb_{k-1}\},$$

$$x_{k}^{d} = x_{k} + \gamma^{d},$$

$$x_{k}^{d} = x_{k} + \gamma^{d},$$

$$x_{k}^{d} = x_{i}, i \neq k, k - 1,$$

$$k < n:$$

$$\gamma^{e} = \min\{\gamma, x_{k} - lb_{k}, ub_{k+1} - x_{k+1}\},$$

$$x_{k}^{e} = x_{k} - \gamma^{e},$$

$$x_{k+1}^{e} = x_{k+1} + \gamma^{e},$$

$$x_{i}^{e} = x_{i}, i \neq k, k + 1,$$

$$\gamma^{f} = \min\{\gamma, ub_{k} - x_{k}, x_{k+1} - lb_{k+1}\},$$

$$x_{k}^{f} = x_{k} + \gamma^{f},$$

$$x_{k+1}^{f} = x_{k+1} - \gamma^{f},$$

$$x_{i}^{f} = x_{i}, i \neq k, k + 1.$$

Таким образом, формируется до шести точек-кандидатов.

Для вектора $x = [x^1, x^2]$ размерности 2n, включающего компоненты обеих групп, реализовано формирование точек-кандидатов, которые одновременно изменяют переменные из двух групп, относящиеся к одному и тому же участку. Это дает четыре дополнительных точки-кандидата для выбранной основной компоненты k:

$$\begin{aligned} x_k^a &= \max \left\{ x_k - \gamma_{\text{speed}}, \ lb_k \right\}, \\ x_{n+k}^a &= \min \left\{ x_{n+k} + \gamma_{\text{angle}}, \ ub_{n+k} \right\}, \\ x_i^a &= x_i, \ i \neq k, n+k, \\ x_k^b &= \max \left\{ x_k - \gamma_{\text{speed}}, \ lb_k \right\}, \\ x_{n+k}^b &= \max \left\{ x_{n+k} - \gamma_{\text{angle}}, \ lb_{n+k} \right\}, \\ x_i^b &= x_i, \ i \neq k, n+k, \\ x_k^c &= \min \left\{ x_k + \gamma_{\text{speed}}, \ ub_k \right\}, \\ x_{n+k}^c &= \max \left\{ x_{n+k} - \gamma_{\text{angle}}, \ lb_{n+k} \right\}, \\ x_i^c &= x_i, \ i \neq k, n+k, \\ x_k^d &= \min \left\{ x_k + \gamma_{\text{speed}}, \ ub_k \right\}, \\ x_{n+k}^d &= \min \left\{ x_k + \gamma_{\text{speed}}, \ ub_k \right\}, \\ x_{n+k}^d &= \min \left\{ x_{n+k} + \gamma_{\text{angle}}, \ ub_{n+k} \right\}, \\ x_{n+k}^d &= \min \left\{ x_{n+k} + \gamma_{\text{angle}}, \ ub_{n+k} \right\}, \\ x_{n+k}^d &= x_i, \ i \neq k, n+k. \end{aligned}$$

Итого, может быть сформировано до 10 точек-кандидатов для выполнения шага 4 алгоритма 1. Отметим, что каждое вычисление целевой функции требует моделирования всего этапа набора высоты, поэтому большое число кандидатов может негативно сказаться на общем времени работы алгоритма.

5. Пример

Предложенный в настоящей работе алгоритм оптимизации реализован в среде программирования Matlab. Для его проверки разработана процедура вычисления целевой функции (12), реализующая численное моделирование системы (1)–(10) методом Эйлера первого порядка с шагом 1 с, что обеспечивает достаточную точность моделирования при невысокой вычислительной сложности. Выбор шага соответствует постоянным времени моделируемой системы управления. В [1], где исследовалось моделирование крейсерского полета с учетом переходных процессов, в том числе и при изменении высоты полета, отмечено, что в рассматриваемой системе моделирование методом Эйлера не дает заметной ошибки по сравнению с методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

В табл. 1 для моделируемого среднемагистрального пассажирского самолета приведены начальные значения, ограничения и требуемые значения, которые должны быть достигнуты в конце этапа. Ограничение $V_{\rm CAS} < 250$ узлов для высоты $h < 10\,000$ футов также будет учитываться.

Таблица 1. Параметры моделирования

Наименование	Обозначение	Значение	Комментарий
Начальная масса	m_0	$75000~{\rm kg}$	75 т
Начальная высота	h_0	457 м	1500 футов
Требуемая конечная высота	h_{SP}	10363,2 м	FL340
Начальная скорость	$V_{\rm CAS_0}$	223 узла	$V_0 = 117,2$ м/с
Требуемая конечная скорость	$M_{\rm SP}$	$0,\!8$	V=238,3 м/с
Моделируемое расстояние	R	250000м	250 км
Размер финального участка	r_{fin}	50000м	50 км
Минимальная скорость	$V_{ m CAS_{min}}$	200 узлов	
Максимальная скорость	$V_{\rm CAS_{max}}$	300 узлов	
Максимальное ускорение		$0,2$ м/с 2	
Максимальная скороподъемность		$20 \mathrm{~m/c}$	
Максимальный наклон траектории	Θ_{\max}	15 град	
Число участков	n	10	

Таблица 2. Результаты оптимизации для начальной массы $m_0 = 75$ т

Номер	Вариант оптимизации	Вариант управления	Расход топлива, кг	Время, с
1	Стандартный профиль	1	1443	1225
2	Минимальный расход	1	1419	1273
3	Минимальное время	1	1455	1218
4	Комбинированный ($C_1 = 0,4$)	1	1429	1234
5	Стандартный профиль	2	1446	1217
6	Минимальный расход	2	1431	1249
7	Минимальное время	2	1445	1218
8	Комбинированный ($C_1 = 0, 4$)	2	1433	1233

Стандартный профиль набора высоты состоит из трех участков:

1) для $h < 10\,000$ футов требуемое значение скорости принимается равным максимально разрешенному значению для этих высот $V_{\rm SP_1} = 250$ узлов;

2) для $h \geqslant 10\,000$ футов требуемое значение скорости принимается равным максимально разрешенному значению $V_{{\rm SP}_2}=300$ узлов;

3) при достижении заданного значения скорости $M_{\rm SP}$ переключаемся с регулятора калиброванной приборной скорости на регулятор скорости в Махах с требуемым значением $M_{\rm SP}$.

Угол наклона траектории при этом выбирается максимально возможный для текущего значения доступной тяги и допустимых значений ускорения и скороподъемности.

Результаты оптимизации будем сравнивать с результатом набора высоты по этому профилю. В табл. 2 приведены значения расхода топлива и времени, затраченного на прохождение расстояния R для стандартного профиля, оптимального по расходу топлива без учета времени, когда в минимизируемой функции (12) весовой коэффициент $C_1 = 0$, оптимального по времени без учета расхода ($C_1 = 1000$) и по комбинированному критерию ($C_1 = 0,4$). При оптимизации по комбинированному критерию значение весового коэффициента C_1 должно выбираться исходя из дополнительного расхода топлива на этапе крейсерского полета при сокращении времени, отведенного на этот этап. Значение $C_1 = 0,4$ получено моделированием последующего крейсерского полета на расстояние 1000 км с разницей по выделенному времени в 1 мин. Полученная разница в расходе, деленная на 60 для оценки разницы за 1 с, составила примерно 0,4 кг, и была принята как значение весового коэффициента C_1 . Остальные весовые коэффициенты функционала (12) выбраны $C_2 = 20\,000$ и $C_3 = 2$ при $\varepsilon_M = 0,001$ и $\varepsilon_h = 10$.

Проведены моделирование стандартного профиля и оптимизация для двух вариантов системы управления:

1) с управлением тягой (4) с переходом на регулятор (6) при достижении заданного числа Маха и управлением тангажом (7) и

2) с тягой, равной доступной тяге T_{max} для текущих условий полета (автомат тяги выключен) и управлением тангажом (10), пока не будут достигнуты заданные число Маха и высота, после чего включается автоматическое управление тягой (6) и управление тангажом (7), поддерживающее заданную высоту.

Число участков выбрано n = 10. Оптимизация для n = 20 также проводилась, но получены практически такие же результаты. Очевидно, что для расстояния, необходимого для набора высоты, выбор числа участков больше 10 не должен давать преимущества. Выбор n = 5 также дает близкие результаты, поэтому при практической реализации, когда быстродействие работы алгоритма важно, следует более тщательно исследовать выбор минимального числа участков, что сократит число варьируемых переменных. Следует также заметить, что при оптимизации системы с управлением вида 2 варьируется только скорость на каждом участке, а угол наклона траектории формируется максимально возможный. Поэтому в этом случае число варьируемых переменных равно n, а не 2n, как при реализации управления вида 1.

По результатам оптимизации видно, что вариант управления 2, когда не задействовано автоматическое управление тягой до тех пор, пока не достигнуты заданные значения скорости и высоты в конце этапа, и при этом используется максимальная доступная тяга, не позволяет достичь такого минимального значения расхода топлива при выборе значения весового коэффициента $C_1 = 0$, какое получается при варианте управления 1. Но, с другой стороны, вариант управления 2 позволяет получить меньший расход топлива при поиске профиля с минимальным временем без учета расхода, и стандартный профиль является оптимальным в этом случае.

Вариант управления 1 при минимизации расхода с $C_1 = 0$ дает экономию топлива более 1,5% по сравнению со стандартным профилем, но при этом время полета на этапе увеличивается на 48 с. Оптимизация с выбором весового



Рис. 2. Приборная V_{CAS} и истинная воздушная V скорости для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 1.



Рис. 3. Угол наклона траектории Θ для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 1.

коэффициента $C_1 = 0,4$ обеспечивает экономию топлива в размере 1% при увеличении времени всего на 9 с по сравнению со стандартным профилем.

Графики калиброванной приборной и истинной воздушной скоростей для стандартного профиля и трех вариантов оптимизации приведены на рис. 2



Рис. 4. Приборная V_{CAS} и истинная воздушная V скорости для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 2.



Рис. 5. Угол наклона траектории Θ для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 2.

для варианта управления 1 и на рис. 4 для варианта управления 2. Аналогично на рис. 3 и 5 приведены графики изменения угла наклона траектории. Графики полученной и максимальной доступной тяги приведены на рис. 6.



Рис. 6. Значение тяги T и доступная тяга T_{max} при минимизации расхода топлива с вариантом управления 1 (1) и для стандартного профиля с вариантом управления 2 (2).

В табл. 3 приведены значения расхода топлива и времени, полученные для таких же вариантов оптимизации, но для примера воздушного судна с неполной загрузкой, т.е. при тех же остальных исходных данных табл. 1 начальная масса принята равной $m_0 = 55$ тонн.

В этом случае при варианте управления 2 оптимизация не дает заметного выигрыша по сравнению со стандартным профилем. При использовании управления тягой в варианте управления 1 можно получить небольшую экономию топлива. Графики калиброванной приборной и истинной воздушной скоростей для стандартного профиля и трех вариантов оптимизации для ва-

Номер	Вариант оптимизации	Вариант управления	Расход топлива, кг	Время, с
1	Стандартный профиль	1	1136	1211
2	Минимальный расход	1	1123	1258
3	Минимальное время	1	1139	1203
4	Комбинированный ($C_1 = 0, 4$)	1	1132	1216
5	Стандартный профиль	2	1143	1202
6	Минимальный расход	2	1139	1211
7	Минимальное время	2	1142	1203
8	Комбинированный ($C_1 = 0, 4$)	2	1139	1207

Таблица 3. Результаты оптимизации для начальной массы $m_0 = 55$ т



Рис. 7. Приборная V_{CAS} и истинная воздушная V скорости для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 1 при неполной загрузке.



Рис. 8. Угол наклона траектории Θ для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 1 при неполной загрузке.

рианта управления 1 приведены на рис. 7, а на рис. 8 приведены графики изменения угла наклона траектории.

6. Заключение

Предложенный алгоритм оптимизации быстро сходится несмотря на сложную структуру целевой функции, что позволяет использовать его в бортовых системах управления самолетовождением. Тем не менее практическая реализация предлагаемого подхода осложнена тем, что значение целевой функции оптимизации вычисляется путем моделирования полета на этапе набора высоты. При этом используются аппроксимирующие формулы удельного секундного расхода топлива и доступной тяги, которые должны быть определены для используемых двигателей, а также формулы и параметры системы управления тягой и тангажом.

При наличии необходимых данных для моделирования применение оптимизации может обеспечить экономию расхода топлива до 1,5% на этапе набора высоты. Это снижение расхода по сравнению со стандартным профилем, также разработанным для минимизации расхода топлива, поэтому результат можно считать значимым.

Проведенное исследование для среднемагистральных самолетов подтверждает эффективность использования максимальной доступной тяги с приоритетом скорости, но при достижении высоты 6000 м может быть эффективным выбор скорости исходя из критериев минимизации расхода топлива с учетом планируемого времени полета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

 Александров В.А., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И., Тремба А.А., Хлебников М.В. Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна при фиксированном времени прибытия // АиТ. 2021. № 7. С. 69–85.

Alexandrov V.A., Zybin E.Y., Kosyanchuk V.V., Selvesyuk N.I., Tremba A.A., Khlebnikov M.V. Optimization of the Altitude and Speed Profile of the Aircraft Cruise with Fixed Arrival Time // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 7. P. 1169–1182.

- 2. Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю. Оптимизация программы полета дозвукового пассажирского самолета на участке разгона набора высоты // Инженерный журн.: наука и инновации. 2013. № 7(19).
- Ghaemi R., Lax D.M., Westervelt E.R., Darnell M., Visser N. Optimal Variable-Speed Climb for a Fixed-Wing Aircraft // AIAA 2019-3617. AIAA Aviation 2019 Forum. 2019.
- Wan J., Zhang H., Liu F., Lv W., Zhao Y. Optimization of aircraft climb trajectory considering environmental impact under RTA constraints // J. Advanced Transport. V. 2020. Article ID 2738517.
- Villegas Diaz M., Gomez Comendador V.F., Garcia-Heras Carretero J., Arnaldo Valdes R.M. Environmental benefits in terms of fuel efficiency and noise when introducing continuous climb operations as part of terminal airspace operation // Int. J. Sustainable Transport. 2020. V. 14. I. 12. P. 903–913.

- *Григоров П.Ю., Куланов Н.В.* Применение концепции обратных задач динамики в задачах вертикальной навигации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 3. С. 130–140.
- 7. *Hull D.G.* Fundamentals of Airplane Flight Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- 8. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Изд-во стандартов, 2004.
- 9. Bartel M., Young T.M. Simplified Thrust and Fuel Consumption Models for Modern Two-Shaft Turbofan Engines // J. Aircraft. 2008. No. 45(4). P. 1450–1456.
- 10. Nuic A. User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA), Revision 3.8. EURO-CONTROL, EEC Technical Report No. 2010-003, 2010.
- 11. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. 2-е издание, исправленное и дополненное. М.: ЛЕНАНД, 2014.
- 12. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 30.04.2022 После доработки 14.07.2022 Принята к публикации 28.07.2022