Автоматика и телемеханика, № 11, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. В.Н. АФАНАСЬЕВ, д-р техн. наук (afanval@mail.ru)
(Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва)

ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА[1]

Рассматривается задача дифференциальной игры слежения с нулевой суммой и квадратичным функционалом качества, в которой объект управления, подвергающийся воздействию неконтролируемых возмущений, описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Известно, что синтез оптимальных управлений приводит к необходимости решать в темпе функционирования системы скалярное дифференциальное уравнение в частных производных Беллмана–Айзекса, содержащее сведения о траектории процесса, который должен отслеживаться. Отсутствие информации об этом процессе на всем интервале управления делает синтезированные управления нереализуемыми. Для решения уравнения Беллмана–Айзекса, содержащее текущее значение отслеживаемого процесса, в работе предложен алгебраический метод. В качестве иллюстрации полученных результатов приведено моделирование поведения нелинейной системы с двумя игроками с открытым горизонтом управления.

Ключевые слова: дифференциальные игры, оптимальное управление с обратной связью, уравнение Беллмана–Айзекса, пвсевдообратные матрицы.

DOI: 10.31857/S0005231022110046, **EDN:** KEGMFD

1. Введение

Теория дифференциальных игр как направление математической теории управления тесно связана с математической теорией оптимальных процессов, теорией игр, вариационным исчислением и теорией дифференциальных уравнений. Становление теории дифференциальных игр связано с именами Р.П. Айзекса [1, 2], Л.С. Понтрягина [3, 4], Е.Ф. Мищенко [5], Б.Н. Пшеничного [6], Н.Н. Красовского [7] и многих других зарубежных и российских ученых. Начиная с работ А.Е. Брайсона [8] дифференциальные

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-8-00535).

игры с ненулевой суммой стали рассматриваться как задачи теории оптимального управления. В задачах дифференциальной игры с заданным интервалом управления с нулевой суммой и квадратичным функционалом качества синтез оптимальных управлений приводит при их реализации к необходимости решать в темпе функционирования объекта скалярное дифференциальное уравнение в частных производных Беллмана–Айзекса [9] с коэффициентами, зависящими от состояния объекта. Кроме этого, решение требует предварительного знания отслеживаемой траектории на всем интервале управления. Аналитическое решение такого уравнения в общем случае является проблемным. В задачах с линейными объектами можно получить реализуемые решения только для случая, когда желаемая траектория описывается соответствующим дифференциальным уравнением [10, 11]. В этом случае параметры регулятора определяются решениями двух дифференциальных уравнений (одно из которых является матричным дифференциальным уравнением типа Риккати, второе — матричным неоднородным линейным дифференциальным уравнением), краевые условия для которых задаются на правом конце.

В настоящей статье задача дифференциальной игры слежения с незаданным временем окончания переходного процесса, нелинейным объектом и ограниченными возмущениями рассматривается как проблема оптимального управления, т.е. дифференциальной игры с нулевой суммой. Решение соответствующего уравнения Беллмана–Айзекса ищется с применением алгебраического метода. Построение оптимальных управлений с использованием разработанного метода иллюстрируется результатами математического моделирования для системы уравнений Лотки–Вольтерра, описывающей взаимодействие биологических объектов [12, 13]. В данном случае рассматривается система в общем виде без указания конкретного прикладного применения используемой модели и ее параметров. Будем считать, что эта система описывает классическое межпопуляционное взаимодействие хищников и жертв. В случае использования методов дифференциальных игр в задачах воздействия лекарства на зараженные вирусом клетки используется подобная система уравнений, но более высокого порядка [14].

Материал статьи представлен следующим образом. Во втором разделе осуществлена постановка задачи дифференциальной игры с квадратическим функционалом качества, производится синтез управлений, доказывается их оптимальность. Определяются условия существования решения дифференциальной игры с нулевой суммой. В первой части третьего раздела статьи доказывается Лемма 3.1 о необходимых и достаточных условиях существования алгебраического решения скалярного функционального нелинейного уравнения. Во второй части этого раздела приводятся результаты применения Леммы 3.1 для нахождения решения уравнения Беллмана–Айзекса, содержащего текущее значение отслеживаемого процесса. Доказывается оптимальность полученного решения.

В четвертой части статьи приводится пример использования полученных теоретических результатов при решении задачи дифференциальной игры, описывающей взаимодействие популяций.

2. Задача слежения при действии возмущающих сил

2.1. Постановка задачи

Пусть детерминированная управляемая нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))u(t) + g_2(x(t))w(t), \quad x(t_0) = x_0\,, \tag{2.1}$$
$$y(t) = C(t)x(t).$$

Здесь $x(t) = \{x(\cdot) \in R^n, t \in [t_0, t_f)\}$, $x \in \Omega_x$, где Ω_x — открытое множество в R^n; $y(t)$ — измеряемый выход системы, $y(t) \in R^p$; $u(t) = \{u(\cdot) \in R^r,\ t \in [t_0, t_f)\}$, $r \leq n$ — управление, $w(t) = \big\{w(\cdot) \in R^k,\ t \in [t_0, t_f)\big\}$, $k \leq n$ — внешнее возмущение. В силу того, что возможны случаи, когда размерности векторов $u(t)$ и $w(t)$ могут быть $r > k$ или $r < k$, условимся, что число нулевых элементов в векторе $\{g_1(x(t))u(t) + g_2(x(t))w(t)\} \in R^n$ есть $m < n$. Векторы и матрицы $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ — непрерывные функции.

Предположение 2.1. Непрерывные функции $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ такие, что при любых $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Omega_x$ проходит одно и только одно решение уравнения (2.1) $x(t, t_0, x_0)$.

Предположения относительно ограничений на управляющее воздействие и возмущение будут сделаны ниже.

Пусть $z(t) \in \Omega_z \subset R^p$ — желаемый выход системы.

Введем в рассмотрение ошибку слежения

$$\varepsilon(t) = y(t) - z(t) = C(t)x(t) - z(t), \quad \varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad \text{где} \quad \Omega_\varepsilon = \Omega_x \bigcup \Omega_z. \tag{2.2}$$

Предположение 2.2. Управления $u(t)$ и $w(t)$ реализуются с использованием обратной связи по состоянию объекта и желаемого выхода, т.е.

$$u(t) = u(t, \varepsilon(t)), \quad w(t) = w(t, \varepsilon(t)). \tag{2.3}$$

Рассматривая возмущение $w(t)$ как действие некоторого игрока, противодействующего успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков G_u и G_w. В статье задача дифференциальной игры рассматривается как проблема оптимального управления, т.е. игра с нулевой суммой [8].

Предположение 2.3. Управляющее воздействие и возмущение удовлетворяют следующим ограничениям:

$$u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) = \|u(t)\|_R^2 \leq E_u, \quad w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t) = \|w(t)\|_P^2 \leq E_w. \tag{2.4}$$

Предполагается, что существуют такие управляющие воздействия $u(t)$ и $w(t)$, отвечающие ограничениям (2.4), что каждое состояние $x_0 \in X_0 \subset \Omega_x$ в каждый момент t_0 на интервале существования решения системы (2.1) полностью управляемо [15], т.е. в рассматриваемой задаче для всех $x(t)$ система (2.1) управляема, $t \in R^+$.

Для оценки действий игроков введем функционал качества

$$J(\varepsilon(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) =$$

$$= \lim_{t_f \to \infty} \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_f} \Big\{ \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) Q \varepsilon(t) + u^{\mathrm{T}}(t) R u(t) - w^{\mathrm{T}}(t) P w(t) \Big\}\, dt, \tag{2.5}$$

$$Q \succ 0, \quad R \succ 0, \quad P \succ 0.$$

Предположение 2.4. Об условиях существования оптимального решения задачи (2.1)–(2.5). Для того чтобы записать условия, которым должны удовлетворять оптимальные управления $u^0(t) = u^0(t, \varepsilon(t))$ и $w^0(t) = w^0(t, \varepsilon(t))$ для игроков G_u и G_w, предположим, что такие управления существуют и $x^0(t)$ соответствующая этим управлениям траектория (здесь значком ^{0} отмечаются оптимальные величины). Другими словами, $x^0(t)$, $u^0(t)$ и $w^0(t)$ удовлетворяют следующему условию:

1) $\dfrac{d}{dt} x^0(t) = f(x^0(t)) + g_1(x^0(t)) u^0(t) + g_2(x^0(t)) w^0(t)$, $x^0(t_0) = x_0$;
2) если $u(t)$ и $w(t)$ — любые управления, удовлетворяющие ограничениям (2.4), такие что соответствующая им траектория $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) + g_1(x(t)) u(t) + g_2(x(t)) w(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

то $J(\varepsilon^0(\cdot), u^0(\cdot), w^0(\cdot)) \le J(\varepsilon(\cdot), u(\cdot), w(\cdot))$.

2.2. Оптимальное решение задачи дифференциальной игры

Для синтеза оптимальных управлений в смысле поставленной в разделе 1.1 задачи введем функцию Беллмана–Айзекса [10, 11]

$$V(\varepsilon(t)) = \inf_u \sup_w J(\varepsilon(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)), \tag{2.6}$$

где управления $u(t)$, $w(t)$, $t \in [t_0, t_f)$ удовлетворяют ограничениям (2.4), а соответствующая им траектория $\varepsilon(t)$ определена на всем интервале $[t_0, t_f)$ и удовлетворяет фазовому ограничению $\varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon$.

Предположение 2.5. Пусть $V(\varepsilon(t))$, $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ достаточно гладкие, непрерывно дифференцируемые функции. Тогда для функции $V(\varepsilon(t))$ запишем уравнение Беллмана–Айзекса:

$$\inf_u \sup_w \left[\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\{f(x(t)) + g_1(x)u(t) + g_2(x)w(t)\} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\,\varepsilon(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) - w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t)\Big\}\right] = 0, \tag{2.7}$$
$$\varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f)\,.$$

Перепишем уравнение (2.7) в виде

$$\inf_u \sup_w \left[\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} f(x(t)) + \frac{1}{2}\left\{u^{\mathrm{T}}(t)R + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} g_1(x)\right\} u(t) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{-w^{\mathrm{T}}(t)P + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} g_2(x)\right\} w(t) - \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) +$$
$$\left. + \frac{1}{2}w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)\right] = 0$$

и назначим управления $u(t)$ и $w(t)$ так, чтобы выражения в фигурных скобках были равны нулю. Будем иметь

$$u(t) = -R^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad w(t) = P^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}}. \tag{2.8}$$

Выражения (2.8) предопределяют структуры уравнений, в рамках которых будут отыскиваться оптимальные управления $u^0(t)$ и $w^0(t)$. В силу (2.8) уравнение Беллмана–Айзекса (2.7) принимает вид

$$\inf_u \sup_w \left[\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} f(x(t)) - \right.$$
$$- \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\} g_1(x(t))R^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\} g_2(x(t))P^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}} + \tag{2.9}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)\right] = 0,$$
$$\varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f)\,.$$

Теорема 1. *Пусть существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $V^0(x(t))$ задачи (2.1)–(2.5) и существуют управления*

$$u^0(t) = -R^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}},$$
$$w^0(t) = P^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x(t))\left\{\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{2.10}$$

такие, что

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial t} + \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} f(x(t)) - \frac{1}{2}\left(u^0(t)\right)^{\mathrm{T}} R u^0(t) + \\
+ \frac{1}{2}\left(w^0(t)\right)^{\mathrm{T}} P w^0(t) + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) Q \varepsilon(t) = 0, \\
\varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f)\,.
\end{gathered} \tag{2.11}
$$

Тогда управления $u^0(t)$ и $w^0(t)$ являются оптимальными, а соответствующая функция Беллмана–Айзекса есть $V^0(\varepsilon(t))$.

Доказательство теоремы 1. Перепишем уравнение (2.11) (с учетом, что в рассматриваемой задаче $\partial V^0(\varepsilon(t))/\partial t = 0$) в виде модифицированного уравнения Беллмана–Айзекса

$$
\frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \mathit{\Pi}(x(t)) \left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) Q \varepsilon(t) = 0, \tag{2.12}
$$

где

$$
\mathit{\Pi}(x(t)) = g_1(x(t)) R^{-1} g_1^{\mathrm{T}}(x(t)) - g_2(x(t)) P^{-1} g_2^{\mathrm{T}}(x(t)). \tag{2.13}
$$

Запишем функционал (2.5) с учетом (2.10) и (2.12):

$$
\begin{gathered}
J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = \\
= \lim_{t_f \to \infty} \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_f} \left\{ \varepsilon^{\mathrm{T}}(t) Q \varepsilon(t) + \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \mathit{\Pi}(x(t)) \left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}} \right\} dt = \\
= - \lim_{t_f \to \infty} \int\limits_{t_0}^{t_f} \left\{\frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt}\right\}^{\mathrm{T}} dt = \lim_{t_f \to \infty} \left[V^0(\varepsilon(t_0)) - V^0(\varepsilon(t_f))\right].
\end{gathered}
$$

Отсюда вытекает, что

$$
J(u^0, w^0) = V^0(\varepsilon(t_0)), \tag{2.14}
$$

так как в силу (2.5) $V^0(\varepsilon(t_f)) = 0$.

Пусть теперь управления $u(t)$ и $w(t)$ любые отличные от (2.10), но удовлетворяющие предположению 2.4, а $x(t)$ соответствующее решение уравнения (2.1) с этими управлениям. Тогда, используя равенство (2.12), заключаем, что

$$
\frac{dV(\varepsilon(t))}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \mathit{\Pi}(x(t)) \left\{\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t) Q \varepsilon(t) \geq 0.
$$

Откуда

$$
J(u, w) \geq V^0(\varepsilon(t_0)). \tag{2.15}
$$

Сравнение (2.14) и (2.15) показывает, что

$$J(u^0, w^0) = V^0(\varepsilon(t_0)) \le J(u, w).$$

Тем самым оптимальность управлений $u^0(t, x(t))$ и $w^0(t, x(t))$ установлена. ■

Утверждение 1. Дифференциальная игра (2.1)–(2.5) *с нулевой суммой имеет решение, если ограничения* (2.4) *связаны соотношением*

$$E_u > E_w. \tag{2.16}$$

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим модифицированное уравнение Беллмана–Айзекса (2.12). Так как в этом уравнении $\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t) > 0$ при $\varepsilon(t) \ne 0$, то

$$\frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt} < -\frac{1}{2}\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\Big[g_1(x(t))R^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x(t)) - \\ - g_2(x(t))P^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x(t))\Big]\left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}}$$

или, учитывая (2.10) и (2.4), имеем

$$\frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt} < -\frac{1}{2}\left[E_u - E_w\right].$$

Из последнего выражения следует, что дифференциальная игра (2.1)–(2.5) с нулевой суммой имеет решение, если ограничения (2.4) связаны соотношением

$$E_u > E_w.$$ ■

Очевидно, что последнее будет выполняться, если матрица $\Pi(x(t))$ по крайней мере положительно полуопределенная, что обеспечивается соответствующими свойствами матричных функций $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ и положительной определенностью матриц штрафов R, P в функционале (2.5). Выполнение утверждения 1 предопределяет существование решения задачи дифференциальной игры с гарантирующим результатом $J(u^0(t), w(t)) \le \le J(u^0(t), w^0(t))$.

Отметим, что в соответствии с принятыми свойствами системы (2.1) число ненулевых строк в матрице $\Pi(x(t))$ есть $n - m$.

Система (2.1) с управлениями (2.10) принимает вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t))\left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.17}$$

где вектор $\left\{\partial V^0(x(t))/\partial x\right\}^{\mathrm{T}}$ отыскивается решением скалярного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}f(x(t)) - \frac{1}{2}\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\Pi(x(t))\left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t) = 0. \tag{2.18}$$

3. Алгебраический метод решения уравнения Беллмана–Айзекса

В задачах с линейными объектами, с не заданным временем окончания переходного процесса и квадратичным функционалом качества от уравнения Беллмана–Айзекса при выполнении ряда условий можно перейти к уравнению типа Риккати. Уравнение Риккати встречается в различных областях математики (например, в алгебраической геометрии и в теории конформных отображений) и физики. Оно также нередко возникает в прикладных математических задачах. Проблеме поиска решения такого уравнения посвящено достаточно много работ [8, 11]. В этом разделе статьи для задачи дифференциальной игры разрабатывается метод решения уравнения Беллмана–Айзекса вида (2.12), основанный на применении алгебраического подхода. Следует отметить, что некоторые результаты разработки алгебраического метода в задачах построения управления для аффинных нелинейных систем, сформулированные в виде леммы, можно обнаружить в работах [19–21]. В этих работах используются свойства псевдообратной матрицы [22] и ее образа, правила выбора которого не устанавливаются. В отличие от этих работ в представляемой статье рассматривается класс задач дифференциальной игры, структура входящих параметров в ее математическую модель объекта такова, что при синтезе оптимальных управлений не требуется использование понятия образа псевдообратной матрицы. Для этого класса задач доказывается лемма, использование которой для синтеза управлений дифференциальной игры с объектом (2.1) и функционалом (2.5) приводит к реализуемым решениям.

3.1. Лемма о методе решения скалярного нелинейного функционального уравнения специального вида

Предположение 3.1. Пусть $\eta(t) \in \Omega_\eta \subset R^n$ — действительный вектор, $\gamma(\eta)$, $\mu(\eta) \subset R^n$ — действительные вектор-функции, $\alpha(\eta) > 0$ — действительная функция, определенная на R^n и $\varPi(\eta) \subset R^{n\times n}$ — действительная симметрическая неотрицательно определенная вырожденная матрица.

Лемма 1. Псевдообратная матрица $\varPi^+(\eta)$, удовлетворяющая условию

$$\varPi(\eta)\varPi^+(\eta)\varPi(\eta) = \varPi(\eta), \quad \varPi^+(\eta) = U\varPi^{\mathrm{T}}(\eta) = \varPi^{\mathrm{T}}(\eta)V, \tag{3.1}$$

где $U \subset R^{n\times n}$ и $V \subset R^{n\times n}$ — некоторые матрицы, существует и единственна.

Учитывая, что рассматриваются симметрические матрицы, $\big(\varPi^{\mathrm{T}}(\eta)\big)^+ = \big(\varPi^+(\eta)\big)^{\mathrm{T}}$.

Пусть $K^+(\eta) \subset R^{n\times n}$ — симметрическая псевдообратная матрица от $K(\eta)$, которая входит в $\varPi(\eta)$ так, что $\varPi^+(\eta) = K^+(\eta)K^+(\eta)$. Учитывая (3.1), свойства псевдообратных матриц выводятся из определения [22]

$$\Pi(\eta)\Pi^{+}(\eta)\Pi(\eta)=\Pi(\eta),\quad \Pi^{+}(\eta)\Pi(\eta)\Pi^{+}(\eta)=\Pi^{+}(\eta),\quad \left(\Pi^{+}(\eta)\right)^{+}=\Pi(\eta),$$
$$(K(\eta)K(\eta))^{+}=K^{+}(\eta)K^{+}(\eta),\quad K^{+}(\eta)=(K(\eta)K(\eta))^{+}K(\eta)=$$
$$=K(\eta)\left(K(\eta)K(\eta)\right)^{+},\quad K^{+}(\eta)K(\eta)K(\eta)=K(\eta)K(\eta)K^{+}(\eta)=K(\eta).$$

Рассмотрим скалярное нелинейное функциональное уравнение:

$$\gamma^{\mathrm{T}}(\eta)\mu(\eta)-\frac{1}{2}\gamma^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi(\eta)\gamma(\eta)+\frac{1}{2}\alpha(\eta)=0. \tag{3.2}$$

Лемма 2. Уравнение (3.2) *имеет решение относительно* $\gamma(\eta)$*в виде*

$$\gamma(\eta)=\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta)+K^{+}(\eta)\left(\mathbf{1}_n\otimes\beta(\eta)\right), \tag{3.3}$$

где $\mathbf{1}_n$ *— вектор столбец размера* $n\times 1$ *с элементами, равными* 1, $\otimes$ *— произведение Кронекера,*

$$\beta(\eta)=\left\{\frac{1}{n}\left[\mu^{\mathrm{T}}(\eta)\left\{\Pi^{+}(\eta)\right\}^{\mathrm{T}}\mu(\eta)+\alpha(\eta)\right]\right\}^{1/2}. \tag{3.4}$$

Доказательство леммы 2. Подставив (3.3) в (3.2), будем иметь

$$\mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\Pi(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta)+\mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\Pi(\eta)K^{+}(\eta)\left(\mathrm{I}_n\otimes\beta(\eta)\right)+$$
$$+\left(\mathrm{I}_n\otimes\beta(\eta)\right)^{\mathrm{T}}K^{+}(\eta)\Pi(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta)+$$
$$+\left(\mathrm{I}_n\otimes\beta(\eta)\right)^{\mathrm{T}}K^{+}(\eta)\Pi(\eta)K^{+}(\eta)\left(\mathrm{I}_n\otimes\beta(\eta)\right)-$$
$$-2\mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta)-2\left(\mathrm{I}_n\otimes\beta(\eta)\right)^{\mathrm{T}}K^{+}(\eta)\mu(\eta)-\alpha(\eta)=0$$

или, учитывая свойства псевдообратных матриц, будем иметь

$$n\beta^{2}(\eta)-\mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta)-\alpha(\eta)=0. \tag{3.5}$$

Из последнего уравнения имеем

$$\beta(\eta)=\left[\frac{1}{n}\left\{\mu^{\mathrm{T}}(\eta)\left\{\Pi^{+}(\eta)\right\}^{\mathrm{T}}\mu(\eta)+\alpha(\eta)\right\}\right]^{1/2}.$$

Этим получены достаточные условия существования $\gamma(\eta)$ как решения уравнения (3.2). Используя уравнение (3.5), получим необходимые условия выполнения леммы. Добавим и вычтем в левой части уравнения (3.5) выражение $\mu^{\mathrm{T}}(\eta)K^{+}(\eta)\left(\mathbf{1}_n\otimes\beta(\eta)\right)$. Будем иметь

$$n\beta^{2}(\eta)-\left[\mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta)+K^{+}(\eta)\left(\mathbf{1}_n\otimes\beta(\eta)\right)\right]-$$
$$-\alpha(\eta)+\mu^{\mathrm{T}}(\eta)K^{+}(\eta)\left(\mathbf{1}_n\otimes\beta(\eta)\right)=0.$$

Учитывая, что из (3.3) следует

$$K^{+}(\eta)\left(\mathbf{1}_n \otimes \beta(\eta)\right) = \gamma(\eta) - \Pi^{+}(\eta)\mu(\eta),$$

получаем из предыдущего уравнения:

$$n\beta^2(\eta) - \mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta) - \alpha(\eta) + \mu^{\mathrm{T}}(\eta)\gamma(\eta) - \mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta) - \\ - \mu^{\mathrm{T}}(\eta)\gamma(\eta) + \mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta) = 0$$

или

$$n\beta^2(\eta) - \mu^{\mathrm{T}}(\eta)\Pi^{+}(\eta)\mu(\eta) - \alpha(\eta) = 0.$$

Полученное уравнение не что иное, как уравнение (3.5). Этим доказывается необходимое условие выполнения леммы 2. ■

Добавление к лемме 2.

Предположение 3.2. Пусть неотрицательно определенная матрица $\Pi(\eta)$ является диагональной.

В случае выполнения предположения 3.2, когда неотрицательно определенные матрицы $\Pi(\eta)$ и $K(\eta)$ являются диагональными. В этом случае псевдообратная матрица $\Pi^{+}(\eta)$ заменяется на обратную матрицу $\Pi^{-1}(z)$. В этом случае решение уравнения (3.2) относительно $\gamma(\eta)$ имеет вид

$$\gamma(\eta) = \Pi^{-1}(\eta)\mu(\eta) + K^{-1}(\eta)\left(\mathbf{1}_n \otimes \beta(\eta)\right),$$

где

$$\beta(\eta) = \left[\frac{1}{n}\left\{\mu^{\mathrm{T}}(\eta)\left\{\Pi^{-1}(\eta)\right\}^{\mathrm{T}}\mu(\eta) + \alpha(\eta)\right\}\right]^{1/2}.$$

Отметим, что сформулированное выше справедливо и для случая, когда матрица $\Pi(\eta)$ для всех $\eta(t) \in \Omega_\eta$ — симметричная положительно определенная действительная матрица.

3.2. Применение леммы 2 при решении уравнения Беллмана–Айзекса

Используем результаты леммы 2 для рассматриваемой в статье задачи слежения. Сравнивая (2.18) и (3.2), будем иметь

$$\gamma(\eta) = \gamma(t) = \left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad \mu(\eta) = f(x(t)), \\ \alpha(\eta) = \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t), \quad \Pi(\eta) = \Pi(x(t)). \tag{3.6}$$

С учетом введенных обозначений уравнение Беллмана–Айзекса (2.18) принимает вид

$$\gamma^{\mathrm{T}}(t)f(x(t))-\frac{1}{2}\gamma^{\mathrm{T}}(t)\mathit{\Pi}(x(t))\gamma(t)+\frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)=0. \tag{3.7}$$

Решением этого уравнения относительно функции $\gamma(t)\in R^n$ является:

$$\gamma(t)=\mathit{\Pi}^{+}(x(t))f(x(t))+K^{+}(x(t))\left(\mathrm{I}_n\otimes\beta(x(t),\varepsilon(t))\right), \tag{3.8}$$

где скалярная функция $\beta(x(t),\varepsilon(t))$ определяется решением уравнения

$$\beta(x(t),\varepsilon(t))=\left\{\frac{1}{n}\left[f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathit{\Pi}^{+}(x(t))f(x(t))+\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)\right]\right\}^{1/2}. \tag{3.9}$$

Система (2.17) с учетом (3.6) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x(t))-\mathit{\Pi}(x(t))\gamma(t),\quad x(t_0)=x_0, \tag{3.10}$$

где

$$\begin{gathered}\gamma(t)=\mathit{\Pi}^{+}(x(t))f(x(t))+\\+K^{+}(x(t))\left(\mathrm{I}_n\otimes\left\{\frac{1}{n}\left[f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathit{\Pi}^{+}(x(t))f(x(t))+\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)\right]\right\}^{1/2}\right).\end{gathered} \tag{3.11}$$

Прежде чем ответить на вопрос об оптимальности управления $\gamma(x(t))$ для системы (3.10), отметим, что функционал

$$J(x(\cdot),\gamma(\cdot))=\lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f}\left\{\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)+\gamma^{\mathrm{T}}(t)\mathit{\Pi}(x(t))\gamma(t)\right\}dt, \tag{3.12}$$

учитывая введенные обозначения (3.6), эквивалентен функционалу (2.5).

Теорема 2. *Пусть имеется система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением*

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x(t))-\mathit{\Pi}(x(t))\gamma(t),\quad x(t_0)=x_0,$$

где $\mathit{\Pi}(x(t))$ — вырожденная неотрицательная матрица. Вектор-функция $\gamma(t)\subset R^n$ доставляет минимум функционалу (3.12) на решениях системы

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x(t))-\mathit{\Pi}(x(t))\gamma(t),\quad x(t_0)=x_0.$$

Доказательство теоремы 2. Учитывая, что $\gamma(t)=\{\partial V^0(\varepsilon(t))/\partial\varepsilon\}^{\mathrm{T}}$, перепишем функционал (3.12):

$$J(x(\cdot),\gamma(\cdot)) =$$
$$= \lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f}\left\{\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)+\left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial\varepsilon}\right\}\varPi(x(t))\left\{\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial\varepsilon}\right\}^{\mathrm{T}}\right\}dt =$$
$$= -\lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt}\right\}dt = \lim_{t_f\to\infty}\left[V^0(\varepsilon(t_0))-V^0(\varepsilon(t_f))\right].$$

Отсюда вытекает, что

$$J\left(\gamma^0(t)\right)=V^0(\varepsilon(t_0)). \tag{3.13}$$

Сравнение (3.13) и (2.14) показывает, что $J(\gamma^0(t))=J(u^0(t),w^0(t))= = V^0(\varepsilon(t_0))$. Тем самым оптимальность управления $\gamma^0(x(t))$ в задаче (3.10), (3.12) установлена. ■

Запишем управления (2.10) с учетом (3.6):

$$\begin{gathered}u^0(t)=-R^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x(t))\varPi^{-1}(x(t))f(x(t))-R^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x(t))K^{-1}(x(t))\times\\ \times\left(\mathbf{1}_n\otimes\left\{\frac{1}{n}\left[f^{\mathrm{T}}(x(t))\varPi^{-1}(x(t))f(x(t))+\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)\right]\right\}^{1/2}\right),\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}w^0(t)=P^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x(t))\varPi^{-1}(x(t))f(x(t))+P^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x(t))K^{-1}(x(t))\times\\ \times\left(\mathbf{1}_n\otimes\left\{\frac{1}{n}\left[f^{\mathrm{T}}(x(t))\varPi^{-1}(x(t))f(x(t))+\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)\right]\right\}^{1/2}\right).\end{gathered} \tag{3.15}$$

Система (2.1) с управлениями (3.14) и (3.15) принимает вид

$$\frac{d}{dt}x(t)=-K(x(t))\left(\mathbf{1}_n\otimes\left\{\frac{1}{n}\left[f^{\mathrm{T}}(x(t))\varPi^{-1}(x(t))f(x(t))+\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)\right]\right\}^{1/2}\right),$$
$$x(t_0)=x_0,\quad y(t)=Cx(t),$$

или

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}x(t)=f(x(t))-I^*f(x(t))-K(x(t))\left(\mathbf{1}_n\otimes\beta(x(t),\varepsilon(t))\right),\\ x(t_0)=x_0,\quad y(t)=Cx(t),\end{gathered} \tag{3.16}$$

где I^* — диагональная матрица, содержащая в диагонали m нулевых элементов и $n-m$ единичных элементов. Расположение этих элементов в этой матрице определяется матрицей $K(x(t))$, в которой m строк содержат нулевые элементы.

Следует отметить, что в силу того что $\Pi(x(t)) = K(x(t))K(x(t))$, то матрица $K(x(t))$ может быть, по крайней мере, как положительно, так и отрицательно полуопределенной. В силу того, что скалярная функция $\beta(x(t), \varepsilon(t))$ определяется выражением (3.9), может быть принято как $\beta(x(t), \varepsilon(t)) > 0$, так и $\beta(x(t), \varepsilon(t)) < 0$. Для анализа устойчивости системы (3.16) введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V_L(\varepsilon(t)) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\varepsilon(t). \tag{3.17}$$

Тогда полная производная (3.17) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}V_L(x) = \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\left\{\frac{d}{dt}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\right\} = -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\left\{\frac{d}{dt}z^{\mathrm{T}}(t)\right\} + \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\left\{C\frac{d}{dt}x^{\mathrm{T}}(t)\right\} =$$

$$= -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\left\{\frac{d}{dt}z^{\mathrm{T}}(t)\right\} + \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)C\left[f^*(x(t)) - K(x(t))\left(\mathrm{I}_n \otimes \beta(x(t), \varepsilon(t))\right)\right] =$$

$$= -\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\left\{\frac{d}{dt}z^{\mathrm{T}}(t)\right\} + \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)C\left\{\begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ \cdot \\ f_{m-1}(x(t)) \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ k_{m\,m}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t)) \\ \cdot \\ k_{n\,n}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t)) \end{bmatrix}\right\} < 0,$$

где $f^*(x(t)) = f(x(t)) - I^* f(x(t))$, или

$$\frac{d}{dt}V_L(\varepsilon(t)) = \sum_{j=1}^{m-1}\varepsilon_j^{\mathrm{T}}(t) f_j(x(t)) - \tag{3.18}$$

$$- \sum_{j=m}^{n-m}\varepsilon_j^{\mathrm{T}}(t)k_{jj}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t)) - \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\left\{\frac{d}{dt}z^{\mathrm{T}}(t)\right\} < 0$$

при $\varepsilon(t) \neq 0$.

Из полученного условия можно видеть, что устойчивость системе (3.17) должно обеспечивать слагаемое уравнения (3.18), в которое входит синтезированное управление, т.е.

$$-\sum_{j=m}^{n-m}\varepsilon_j^{\mathrm{T}}(t)k_{jj}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t)) < 0 \quad \text{при} \quad x(t) \neq 0. \tag{3.19}$$

Для определения арифметического знака перед функцией $\varepsilon_j^{\mathrm{T}}(t)k_{jj}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t))$, $j = m, \ldots, n-m$ примем $k_{jj}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t)) > 0$. Тогда условие (3.19) будет выполняться, если назначать знак перед функцией так, чтобы

$$sign\left\{\varepsilon_j^{\mathrm{T}}(t)k_{jj}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t))\right\} = sign\,\varepsilon_j^{\mathrm{T}}(t), \quad j = m, \ldots, n-m.$$

4. Моделирование системы уравнений Лотки-Вольтерра

Рассмотрим динамическую систему [12, 13]

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x_1(t) = b_1x_1(t) - a_{11}x_1^2(t) - a_{21}x_1(t)x_2(t),\\
&\frac{d}{dt}x_2(t) = b_2x_2(t) - a_{12}x_1(t)x_2(t) - a_{22}x_2^2(t),
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

которая описывает взаимодействие конкурирующих популяций. Параметры b_1 и b_2 отвечают за скорость роста каждой популяции (рождаемость), параметры a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ – за эффективность уничтожения популяции-противника. В большинстве задач данные параметры предполагаются постоянными. Будем рассматривать случай, когда параметры могут быть изменяемыми около некоторых номинальных значений a^*_{ij} — выступать в качестве игроков, т.е. эффективности уничтожения будут задаваться формулой $a_{ij}(t) = a^*_{ij} + u_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, векторы $u(t) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $w(t) = \begin{pmatrix} u_{21}(t) & u_{22}(t)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ — управления для двух игроков. В этом случае динамическая система записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t) = \begin{pmatrix} b_1x_1(t) - a^*_{11}x_1^2(t) - a^*_{21}x_1(t)x_2(t) \\ b_2x_2(t) - a^*_{12}x_1(t)x_2(t) - a^*_{22}x_2^2(t) \end{pmatrix} +\\
&+ \begin{pmatrix} -x_1^2(t) & 0 \\ 0 & -x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -x_1(t)x_2(t) & 0 \\ 0 & -x_2^2(t) \end{pmatrix} w(t).
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Таким образом, система (4.2) в сравнении с системой (2.1) имеет следующие параметры:

$$
f(x(t)) = \begin{pmatrix} b_1x_1(t) - a^*_{11}x_1^2(t) - a^*_{21}x_1(t)x_2(t) \\ b_2x_2(t) - a^*_{12}x_1(t)x_2(t) - a^*_{22}x_2^2(t) \end{pmatrix},
$$

$$
g_1(x(t)) = \begin{pmatrix} -x_1^2(t) & 0 \\ 0 & -x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix}, \quad g_2(x(t)) = \begin{pmatrix} -x_1(t)x_2(t) & 0 \\ 0 & -x_2^2(t) \end{pmatrix}.
$$

В соответствии с (3.11) управление $\gamma(t)$ определяется выражением:

$$
\begin{aligned}
&\gamma(t) = \Pi^{-1}(x(t))f(x(t)) +\\
&+ K^{-1}(x(t))\left(\mathrm{I}_n \otimes \left\{\frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{T}}(x(t))\Pi^{-1}(x(t))f(x(t)) + \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q\varepsilon(t)\right]\right\}^{1/2}\right),
\end{aligned}
$$

где матрицы $\Pi(x(t))$ и $K(x(t))$ имеют вид

$$
\Pi(x(t)) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2^2(t)}{(6x_1(t) + 3x_2(t) + 1)} & 0 \\ 0 & \dfrac{x_1^2(t)x_2^2(t) - x_2^4(t)}{(3x_1(t) + 6x_2(t) + 1)} \end{pmatrix},
$$

$$K(x(t)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2^2(t)}{(6x_1(t) + 3x_2(t) + 1)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{x_1^2(t)x_2^2(t) - x_2^4(t)}{(3x_1(t) + 6x_2(t) + 1)}} \end{pmatrix}.$$

Система (4.1) имеет четыре положения равновесия

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b_2}{a_{22}^*} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}^*} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \\ \begin{pmatrix} \dfrac{b_1 a_{22}^* - b_2 a_{21}^*}{-a_{12}^* a_{21}^* + a_{22}^* a_{11}^*} & \dfrac{b_2 a_{11}^* - b_1 a_{12}^*}{-a_{12}^* a_{21}^* + a_{22}^* a_{11}^*} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Пусть желаемым значением для состояния $x(t)$ будет первое условие равновесия из (4.3), т.е. $\begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. В силу этого $\begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) & \varepsilon_2(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Будем предполагать, что популяции борются между собой, минимизируя собственные затраты и максимизируя затраты противника. Матрицы функционала (2.5) $Q\,(x(t))$, $R\,(x(t))$, $P\,(x(t))$ назначим в виде

$$\begin{gathered} Q\,(x(t)) = \begin{pmatrix} (x_2(t) - 1/3)^2 & 0 \\ 0 & (x_1(t) - 1/3)^2 \end{pmatrix}, \\ R\,(x(t)) = \begin{pmatrix} 6x_1(t) + 3x_2(t) + 1 & 0 \\ 0 & 3x_1(t) + 6x_2(t) + 1 \end{pmatrix}, \\ P\,(x(t)) = \begin{pmatrix} 6x_1(t) + 3x_2(t) + 1 & 0 \\ 0 & 3x_1(t) + 6x_2(t) + 1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Управляемая система (4.2) с учетом изложенного выше принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) = &- \varepsilon_1(t)\sqrt{\frac{x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2^2(t)}{(6x_1(t) + 3x_2(t) + 1)}} \times \\ &\times \left\{\frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathit{\Pi}^{-1}(x(t))f(x(t)) + \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q(x)\varepsilon(t)\right]\right\}^{1/2}, \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = &- \varepsilon_2(t)\sqrt{\frac{x_1^2(t)x_2^2(t) - x_2^4(t)}{(3x_1(t) + 6x_2(t) + 1)}} \times \\ &\times \left\{\frac{1}{2}\left[f^{\mathrm{T}}(x(t))\mathit{\Pi}^{-1}(x(t))f(x(t)) + \varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q(x)\varepsilon(t)\right]\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

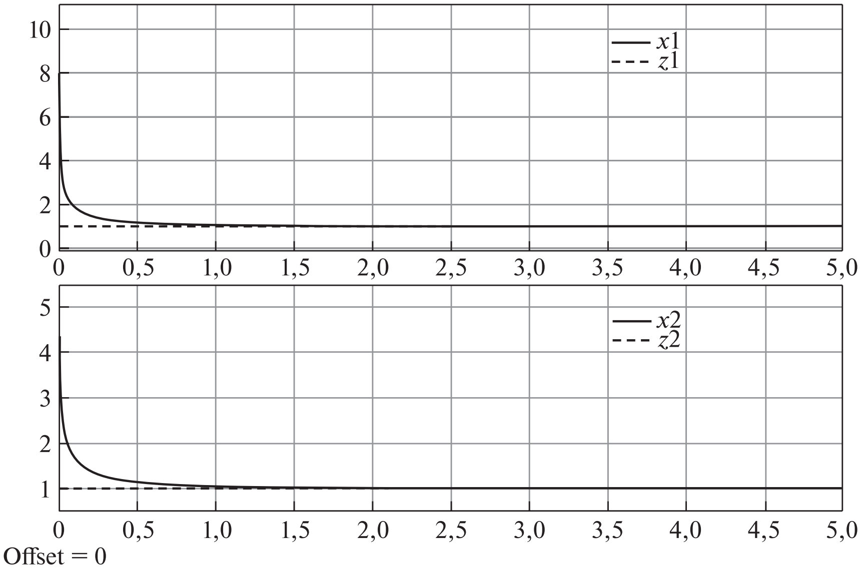

Рис. 1. Управляемые переходные процессы $(x_1(t), x_2(t))$ и $(z_1(t), z_2(t))$.

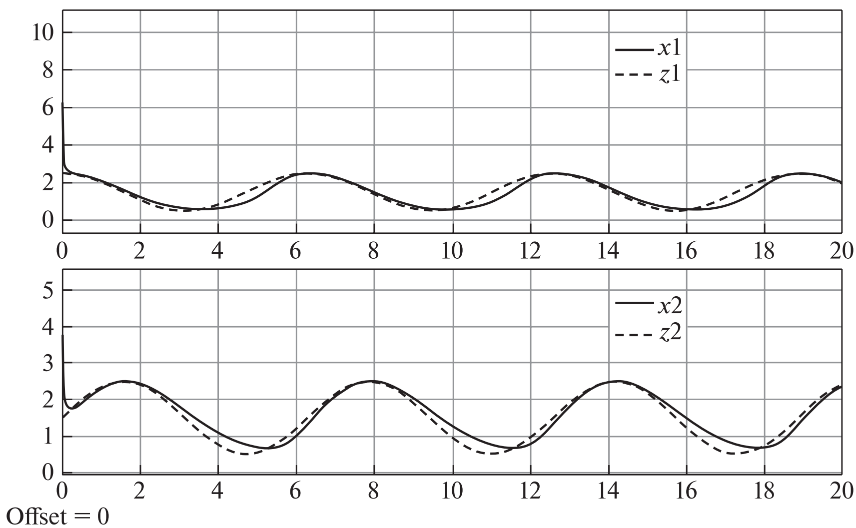

Рис. 2. Управляемые переходные процессы $(x_1(t), x_2(t))$ и $(z_1(t), z_2(t))$.

Вслед за [13] рассмотрим случай, когда постоянные параметры принимаются равными $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $a^*_{11} = 2$, $a^*_{22} = 2$, $a^*_{12} = 1$ и $a^*_{21} = 1$. Назначим для системы (4.5) начальные условия $x_0 = \big(x_1(0) \quad x_2(0)\big)^{\mathrm{T}} = \big(10 \quad 5\big)^{\mathrm{T}}$. На рис. 1 представлены графики для переходных процессов $x_1(t)$, $x_2(t)$ при $z(t) = \big(z_1 \quad z_2\big)^{\mathrm{T}} = \big(1 \quad 1\big)^{\mathrm{T}}$.

На рис. 2 представлены графики переходных процессов $x_1(t)$, $x_2(t)$ при $x_0 = \big(x_1(0) \quad x_2(0)\big)^{\mathrm{T}} = \big(10 \quad 5\big)^{\mathrm{T}}$ и $z(t) = \big(z_1 \quad z_2\big)^{\mathrm{T}} = \big(1{,}5 + \cos(t) \quad 1{,}5 + \sin(t)\big)^{\mathrm{T}}$.

Приведенные в статье результаты математического моделирования подтверждают эффективность синтезированных управлений в задаче слежения, организованных с использованием ошибки слежения без предварительного знания на всем интервале управления отслеживаемой траектории.

5. Заключение

Дифференциальная игра с нулевой суммой рассмотрена как задача синтеза оптимальных управлений в задаче слежения для класса нелинейных объектов с квадратическим функционалом качества. Реализация полученных управлений связана с проблемой нахождения решения скалярного уравнения в частных производных Беллмана–Айзекса. Для решения этого уравнения предложен алгебраический метод нахождения оптимальных управлений дифференциальной игры. Реализация этих управлений осуществляется решением алгебраических матричных нелинейных уравнений, которое может производиться в темпе функционирования динамического объекта. Разработанный метод алгебраического решения уравнения в частных производных Беллмана–Айзекса может быть использован для реализации управляющих воздействий нелинейными объектами достаточно широкого класса. Полученные в работе теоретические положения проиллюстрированы результатами математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. *Isaacs R.P.* Games of Pursuit, Paper P-257. – RAND Corporation, Santa Monica, California. 1951.
3. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. 1 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
4. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. 2 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
5. *Мищенко Е.Ф.* О некоторых игровых задачах преследования и уклонения от встречи // АиТ. 1972. № 9. С. 24–30.

   Mishchenko E.F. On certain game problems in pursuit and evasion // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 9. P. 1424–1429.
6. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1969.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
8. *Bryson A.E., Yu-Chi Ho.* Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control. Waltham, Massachusetts Toronto, London, 1969.
9. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
10. *Kalman R.E.* The Theory of Optimal Control and Calculus of Variations / in *Bellman* (ed). Mathematical Optimization Techniques, University of California Press, Berkely, Calif. 1963.

11. *Афанасьев В.Н.* Математическая теория управления нелинейными непрерывными динамическими системами. М.: КРАСНАНД. 2021.

12. *Buratto A., Cesaretto R., Zamarchi R.* HIV vs. the Immune System: A Differential Game // Math. 2015. V. 3. No. 4. P. 1139–1170.

13. *Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П.* Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

14. *Трубецков Д.И.* Феномен математической модели Лоттки—Вольтерры и сходных с ней // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19. № 2. С. 69–88.

15. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Том 2. М.: МЦНМО, 2011.

16. *Галеев Э.М., Зеликин М.Ю., Конягин С.В. и др.* Оптимальное управление / Под ред. Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова. М.: МЦНМО, 2008.

17. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. Изд-во Наука, Физматлит 2001.

18. *Winternitz P.* Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations. Lecture Notes in Physics, 1983. V. 189. P. 263–331.

19. *Liu R.W., Leake J.* Inverse Lyapunov Problems // Technical Report No. EE6510, Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, August 1965.

20. *Sain M.K., Won C.-H., Spencer Jr., B.F., Liberty S.R.* Cumulants and Risk-Sensitive Control: A Cost Mean and Variance Theory with Application to Seismic Protection of Structures // Advances in Dynamic Games and Applications, Annals of the International Society of Dynamic Games, Boston: Birkhauser. 2000. V. 5. P. 427–459.

21. *Won Chang-Hee, Biswas Saroj.* Optimal Control Using Algebraic Method for Control – Affine Nonlinear Systems. Temple University, USA. cwon@temple.edu, sbiswas@temple.edu. April 20. 2007. 33 p.

22. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 26.07.2021

После доработки 27.06.2022

Принята к публикации 28.07.2022